Введение

В работе [1] о -трансформации сказано, что выражение для неё предложил Сиди в работе [2] (однако, Сиди не рассматривал -трансформацию как трансформацию последовательности саму по себе [3]).

-трансформация впервые была использована для суммирования бесконечных степенных рядов в работе [2]. Она также является мощным инструментом для суммирования расходящихся степенных рядов Стилтьеса [3], которые возникают в теории специальных функций и в стационарной теории возмущения в квантовой механике [3].

Наряду с -трансформацией, другим эффективным методом ускорения сходимости и суммирования расходящихся рядов является -трансформация Левина [3, 6], которая нашла широкое применение в вычислительной физике и приборостроении [3].

Частные случаи -трансформации

-*трансформация*. Заменим  в факториальном -преобразовании для бесконечных рядов на и для упрощения положим . При эти уравнения принимают вид [4]:

где  — натуральное число, а  обозначает​. Эти уравнения можно решить относительно ​ (для произвольных ) очень просто и эффективно с помощью -алгоритма из [5] следующим образом:

-преобразование Левина и -преобразование Сиди - два важных метода экстраполяции - частные случаи *-*трансформации Эти методы являются нелинейными и предназначены для ускорения сходимости последовательностей, которые могут быть представлены в виде асимптотических рядов. Они особенно полезны для последовательностей, которые сходятся медленно или расходятся.

–трансформация Сиди

Если положить , а также заменить на , то уравнения в факториальном -преобразовании для бесконечных рядов принимают вид [8]:

Полученное факториальное -преобразование является -преобразованием Сиди. Обозначим ​ в (1) как ​. Тогда ​ имеет следующую известную явную формулу, приведённую в [8]:

*Вывод формулы для -трансформации*. Приведём вывод -трансформации из [2]. Пусть дана модельная последовательность:

где – положительный параметр, чья область определения определена символом Почхаммера (влияние параметра не изучено до конца, зачастую принимают равным 1). Если известны значения , то уравнение (3) задает систему с неизвестными: . Используя метод Крамера, находим решение для неизвестной :

Если последовательность удовлетворяют уравнению (3), то .

Данный способ вычисления громоздкий и не удобен для вычисления на ЭВМ, потому был найден альтернативный способ вычисления .

Из уравнения (3) следует, что

Умножим обе части на :

Применим к обоим частям оператор , действующий на :

Упрощая:

Применяя формулу для оператора , получаем:

В итоге получаем репрезентацию в виде отношения двух конечных сумм:

Множитель был введён для того, чтобы уменьшить порядок слагаемых в сумме, так как иначе при вычислении на ЭВМ может легко произойти ошибка переполнения. Псевдокод для –преобразования Сиди представлен на *Рисунке 1*, а пример его применения представлен на *Рисунке 2*.

**Вход**: бесконечный ряд (3), весовая функция (аналогичная (1)), начальный индекс , порядок трансформации

**Выход**:

# Проверка условия применимости (*Теорема 4*, см. «раздел Оценки сходимости»)

**if** не удовлетворяет условиям (S-0)-(S-2) (см. «раздел Оценки сходимости»):

**return** «Ряд не удовлетворяет условиям *Теоремы 4*»

**if** веса строго не чередуют знаки:

**return** «Веса не удовлетворяют условиям *Теоремы 4*»

**else**:

Вычислить частичные суммы (аналогичные (1))

Вычислить # (1)

Инициализировать:

Числитель = 0

Знаменатель = 0

**for** от до :

Вычислить биномиальный коэффициент # (2)

Вычислить символ Почхаммера # (3)

Обновить:

Числитель += # (2)

Знаменатель += # (2)

**return** = Числитель / Знаменатель

*Рисунок 1*. Псевдокод для –преобразования Сиди.

**Вход**: , , ,

**Выход**:

*Рисунок 2*. Пример применения –преобразования Сиди.

можно также вычислить, используя рекуррентное отношение [4], полученное из выведенной формулы. Числитель и частное имеют форму:

Такое соотношение работает для:

Если же используется более численно стабильная версия, то есть

то рекуррентное отношение принимает вид:

–преобразование впервые было использовано для суммирования бесконечных степенных рядов. Сравнительное исследование Гротендорста [9] показало, что этот метод является одним из наиболее эффективных для суммирования широкого класса всюду расходящихся степенных рядов.

*Алгоритмы вычисления*. Алгоритмы вычисления :

1. Прямое использование формулы (2);
2. Рекуррентный алгоритм Венигера [4], состоит из следующих шагов:
3. инициализация (для ):

1. рекуррентное вычисление (для ):

где обозначает , либо ;

1. финальное вычисление:
2. Модификация Венигера. Венигер предложил расширение -преобразования, заменив  в (4) на  для некоторого фиксированного  [4]. Это приводит к замене множителей  и  в числителе и знаменателе (5) на  и  соответственно. Влияние параметра  на точность аппроксимаций требует дополнительного исследования.

– трансформация Левина

Это преобразование основано на идее устранения главных членов асимптотического разложения последовательности, чтобы улучшить точность оценки её предела. Если выбрать в факториальном -преобразовании для бесконечных рядов, то получим [4]:

Полученное -преобразование совпадает с известными - и -преобразованиями Левина, где и соответственно. Обозначим в (4) как Тогда имеет следующий явный вид, приведённый в [6]:

*Вывод формулы для -трансформации*. Он аналогичен выводу формулы -трансформации [2]. В итоге получаем:

где – множитель, введённый в формулу чтобы уменьшить магнитуду слагаемых числителя и знаменателя чтобы понизить риск возникновения ошибки переполнения. Псевдокод для –преобразования Левина представлен на *Рисунке 3*, а пример его применения представлен на *Рисунке 4*.

**Вход**: бесконечный ряд (3), тип весовой функции - или, начальный индекс , порядок трансформации

**Выход**:

# Проверка условия применимости (*Теорема 3*, см. «раздел Оценки сходимости»)

**if** не удовлетворяет условиям (S-0)-(S-2) (см. «раздел Оценки сходимости»)

**return** «Ряд не удовлетворяет условиям *Теоремы 3*»

**if** выбран тип «» для и ряд не линейный/факториальный:

**return** «-преобразование неприменимо для данного ряда»

**if** :

**return** «-веса не определены (деление на 0)»

**else**:

Вычислить веса для

**if** тип «» и веса строго не чередуют знаки:

**return** «Веса не удовлетворяют условиям *Теоремы 3*»

Вычислить частичные суммы (аналогичные (4))

Вычислить Числитель # (5)

Вычислить Знаменатель # (5)

**return** = Числитель / Знаменатель

*Рисунок 3*. Псевдокод для –преобразования Левина.

**Вход**: , , ,

**Выход**:

*Рисунок 4*. Пример применения –преобразования Левина.

Данная формула (6) удобна, так как из неё легко выводится рекуррентное отношение [4].

Пусть

Для стабильности лучше вычислять уменьшенные значения

Используя уменьшенные значения, получается рекуррентное отношение формы:

Алгебраические свойства [4]:

1. Если положить (*u*-преобразование) в (5), то можно заметить, что:

где второе равенство выполняется при . Из (6) видно, что =, где  — последовательность, полученная с помощью преобразования Лубкина.

1. Следующая теорема касается ядра u-преобразования, а также, как частный случай, ядра преобразования Лубкина.

*Теорема 1* [4]: пусть ​ получено с помощью -преобразования на последовательности . Тогда ​ для всех и фиксированного , если и только если ​​ имеет вид:

где , , .

1. Смит и Форд [7] показали, что семейство последовательностей частичных сумм ряда Эйлера содержится в ядре -преобразования.

*Теорема 2* [4]: пусть , где ,  — неотрицательное целое число, а , пусть ​ — результат применения *u*-преобразования к последовательности . Если , то для всех  выполняется равенство , где .

*Алгоритмы вычисления*. Для вычисления преобразований ​ можно использовать следующие подходы:

1. Прямое применение формулы (5);
2. Поскольку -преобразование является , для его вычисления удобно использовать -алгоритм [4], для этого необходимо задать: , ,
3. Рекуррентный алгоритм [4], включающий следующие шаги:
4. инициализация (для ):

1. рекуррентное вычисление (для ):

где обозначает , либо .

1. финальное вычисление:

при этом , такая нормализация предотвращает чрезмерный рост значений и при увеличении ;

1. Модификация Венигера. Венигер предложил расширение -преобразования [4], заменив  в (4) на  для некоторого фиксированного . Это приводит к замене множителей  и   в числителе и знаменателе (5) на  и  соответственно. Влияние параметра  на точность аппроксимаций требует дополнительного исследования.

и его значимость при ускорении сходимости

Сравнительное исследование Смита и Форда [7], [2] показало, что преобразования Левина исключительно эффективны для суммирования широкого класса бесконечных рядов , где .

Левин рассмотрел три различных варианта выбора  и определил три различных преобразования последовательностей [4]:

1. = (-преобразование);
2. = (-преобразование);
3. = (-преобразование).

Левин в своей статье [6], а также Смит и Форд в [7] и [2] (где они представили исчерпывающее сравнительное исследование методов ускорения) пришли к выводу, что - и -преобразования эффективны для всех трёх типов последовательностей, тогда как -преобразование эффективно только для линейных и факториальных последовательностей. [На самом деле, все три преобразования являются наилучшими методами ускорения сходимости для знакопеременных рядов .]

*Выбор весов  и сравнение - с  -преобразованием*. Параметры  в -преобразовании выбираются аналогично -преобразованию [4]. Получающиеся преобразования последовательностей обладают схожими с -, - и -преобразованиями численными свойствами, за исключением их меньшей эффективности для логарифмических последовательностей. Для последовательностей из классов линейных и факториальных -преобразование демонстрирует высокую эффективность по сравнению с -преобразованием. Однако для знакопеременных рядов вида  -преобразование остаётся оптимальным выбором.

Оценки сходимости

Для - и -трансформаций можно дать оценки сходимости, однако лишь для определённых последовательностей. Рассмотрим ряд удовлетворяющий следующим условиям [5]:

(S-0) Члены последовательности {*Sn*} частичных сумм бесконечного ряда, который либо сходиться к некоторому лимиту , либо расходиться с антипределом S.

(S-1) Элементы последовательности строго чередуют знак.

(S-2) Для всех отношение может быть выражено в виде либо факториального ряда, т.е. , либо степенного ряда, т.е. ,

тогда верны следующие теоремы.

*Теорема 3 (об оценке сходимости -трансформации)* [5]: пусть последовательности и удовлетворяют (S-0), (S-1) и (S-2), и последовательность трансформаций над . Тогда для больших значений и для фиксированного справедливо:

*Теорема 4 (об оценке сходимости -трансформации)* [5]: пусть последовательности и удовлетворяют условиям (S-0)–(S-2) и что последовательность преобразований над . Тогда получим для фиксированной величины и для всех следующую оценку для ошибки:

Для фиксированного и для больших значений справедливо:

Из вышеперечисленных теорем видно, что трансформации сравнимы при ускорении знакочередующихся рядов.

Также существует оценка для -трансформации при ускорении последовательностей с логарифмической сходимостью.

*Теорема 5* [5]: пусть элементы последовательности , которые сходятся логарифмически к некоторому лимиту , и удовлетворяют:

Пусть также элементы могут быть выбраны таким образом, что:

И что отношение может быть расширено для всех в степенной ряд следующего вида:

Если трансформация используется для ускорения сходимости , получаем, что для фиксированного и для справедливо:

К сожалению, такой оценки для -трансформации не удалось найти, но многочисленные численные эксперименты показывают [4], что -трансформация намного хуже справляется с ускорением логарифмической сходимости.

Приведём вывод о применимости - и -трансформации из [4]:

1. Для ускорения последовательностей из лучше всего подойдёт -трансформации с =;
2. и – трансформации отлично справляются с ускорением последовательностей из ;
3. –трансформация очень эффективна для последовательностей из ;
4. и – трансформации бесполезны на последовательностях из при ;
5. Если последовательность состоит из суммы последовательностей, состоящих в различных классах , то и – трансформации работают неэффективно;
6. и – трансформации применимы на последовательностях и не из класса , однако их результат будет сложно предугадать.

Заключение

-трансформация является одним из представителей Левино-подобных преобразований, хотя её эффективность уступает -трансформации, она остаётся одним из наилучших методов для суммирования расходящихся степенных рядов Стилтьеса.

Обычная трансформация Левина сходится быстрее, чем рекурсивная версия, и в отличие от многих других методов, Левин может эффективно обрабатывать знакопеременные ряды, что расширяет его применимость и делает его особо ценным в разнообразных вычислительных задачах.

Список литературы

[1] Mathematical properties of a new Levin-type sequence transformation introduced by Čı́žek, Zamastil, and Skála. I. // E. J. Weniger. – 2004. – P. 1209-1246.

[2] A new method for deriving Pade approximants for some hypergeometric functions // A. Sidi. – 1981. – P. 37-40.

[3] Nonlinear Sequence Transformations for the Acceleration of Convergence and the Summation of Divergent Series // E. J. Weniger. - 2003.

[4] Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications // A. Sidi – 2003. – P. 121-157, 238-250, 253-261, 363-371.

[5] An algorithm for a special case of a generalization of the Richardson extrapolation process // A. Sidi. – 1982. – P. 223-233.

[6] Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // D. Levin. – 1975. – P. 371-388, 1331-1345.

[7] Numerical comparisons of nonlinear convergence accelerators // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1982. – P. 481-499.

[8] A Maple package for transforming sequences and functions // J. Grotendorst. – 1991. – P. 325-342.

[9] A Levin-type algorithm for accelerating the convergence of Fourier series // H. H. H. Homeier. – 1992. – P. 245-254.