Оглавление

[**Предисловие** 2](#_Toc167916407)

[**Рекурсивная трансформация** 3](#_Toc167916408)

[**S-трансформация** 5](#_Toc167916409)

[**Вывод** 6](#_Toc167916410)

[**Про ωn и его значимость при ускорении сходимости** 7](#_Toc167916411)

# **Предисловие**

Эта работа посвящена исследованию и реализации двух различных методов, направленных на ускорение сходимости числовых рядов. В частности, рассматриваются такие методы, как «Рекурсивная трансформация Левина» и «S-трансформация». Подробное изучение этих методов включает в себя анализ их теоретической основы, математических свойств и алгоритмических аспектов.

# **Рекурсивная трансформация**

Рекурсивная трансформация Левина является мощным методом для ускорения сходимости числовых рядов. Этот метод особенно полезен для суммирования медленно сходящихся рядов и может значительно улучшить точность численных расчетов.

***Основные идеи и принципы***

Основная идея рекурсивной трансформации Левина заключается в преобразовании исходного ряда в новый ряд, который сходится быстрее. Это достигается путем введения рекурсивной формулы, которая перераспределяет веса членов ряда, эффективно «выпрямляя» его поведение.

***Математическая формулировка***

Предположим, что у нас есть исходный ряд *an*. Мы хотим преобразовать его с помощью трансформации Левина и получить частичную сумму.

Рекурсивная трансформация Левина может быть представлена в виде:

где — это частичная сумма ряда на *n-м* шаге, а обозначает *n-ю* оценку остатка.

Первоначальные числитель и знаменатель находятся как:

*k-е* числитель и знаменатель находятся как:

***Преимущества и применение***

1. Ускорение сходимости: Одним из ключевых преимуществ рекурсивной трансформации Левина является её способность значительно ускорять сходимость ряда. Это особенно полезно в задачах численного анализа, где требуется высокая точность расчетов.

2. Стабильность вычислений: Метод Левина также способствует улучшению численной стабильности, что важно при работе с рядами, склонными к колебаниям или нестабильности.

3. Применение в различных областях: Рекурсивная трансформация Левина нашла применение в многих областях математики и физики, включая квантовую механику, теорию возмущений и вычислительную математику.

# **S-трансформация**

S-трансформация — это один из методов ускорения сходимости числовых рядов, особенно полезный для медленно сходящихся или условно сходящихся рядов.

***Основные идеи***

Основная цель S-трансформации — преобразовать ряд так, чтобы его сумма вычислялась быстрее и с меньшей ошибкой. Этот метод особенно полезен для рядов, которые сходятся очень медленно, делая вычисления долгими и трудоёмкими.

***Математическая формулировка***

Предположим, что у нас есть исходный ряд *an*. Мы хотим преобразовать его с помощью S-трансформации и получить частичную сумму.

S-трансформация может быть представлена в виде:

где – биномиальный коэффициент, множитель (𝛽+𝑛+𝑘)k+1 был введён для того, чтобы уменьшить порядок слагаемых в сумме, тем самым снизив риск возникновения при вычислении ошибки переполнения.

***Преимущества и применение***

1. Ускорение сходимости: S-трансформация позволяет значительно ускорить сходимость медленно сходящихся рядов, делая вычисления более эффективными.
2. Уменьшение вычислительных ошибок: Благодаря методам преобразования, S-трансформация снижает накопление ошибок при суммировании большого количества членов ряда.
3. Повышение точности: Метод улучшает точность вычислений, что особенно важно при работе с длинными и сложными рядами.
4. Численная стабильность: S-трансформация способствует улучшению численной стабильности, что важно при обработке данных, склонных к колебаниям или нестабильности.
5. Универсальность: Метод может применяться к различным типам рядов, как сходящимся, так и условно сходящимся, что делает его универсальным инструментом в численном анализе.

**Вывод**

S-трансформация является мощным и универсальным инструментом для ускорения сходимости числовых рядов. Она позволяет значительно ускорить сходимость медленно сходящихся рядов, делая вычисления более эффективными и снижая накопление вычислительных ошибок. Метод улучшает точность вычислений, что особенно важно при работе с длинными и сложными рядами, и способствует улучшению численной стабильности, что критично при обработке данных, склонных к колебаниям или нестабильности. Универсальность S-трансформации позволяет применять её к различным типам рядов, что делает её незаменимым инструментом в численном анализе и различных прикладных задачах.

Следует также отметить, что обычная трансформация Левина сходится быстрее, чем рекурсивная версия, и в отличие от многих других методов, Левин может эффективно обрабатывать знакопеременные ряды, что расширяет его применимость и делает его особо ценным для разнообразных вычислительных задач.

**Про ωn и его значимость при ускорении сходимости**

При рассмотрении трансформаций мы получили модельные последовательности, которые можно выразить с помощью асимптотического разложения следующего вида:

Откуда

Это указывает на необходимость выбора так, чтобы они были пропорциональны доминирующему члену асимптотического разложения , слабо зависели от и вели себя как константа при .

В данном случае мы не имеем информации о структуре остатка и располагаем лишь конечной последовательностью частичных сумм. Поэтому целесообразно выбирать такие , которые зависят от этих частичных сумм. Также можно использовать , зависящие только от ; такие трансформации будут линейными.