**Постановка математической задачи для Θ – алгоритма**

Дано: медленно сходящаяся последовательность , где – частичные суммы ряда

Условие на сходимость:

1. Последовательность сходится к пределу (т.е. ), но делает это медленно.

Возможные формы :

1. Экспоненциальная:
2. Рациональная:
3. Смешанные из первых двух.

Цель: обеспечить более быструю сходимость ряда к по сравнению с исходной последовательностью.

**Θ – алгоритм**

Классический ε-алгоритм может быть представлен в виде:

Более подробное разложение можно найти в книге Клода Брецински [1]. Нам важно то, что данная формула подчеркивает двух шаговую природу алгоритма, где каждый новый элемент зависит от элементов на двух предыдущих уровнях.

Применяя оператор конечной разности , можно получить соотношение:

В данном контексте оператор действует исключительно на верхние индексы алгоритма, а не на значения последовательности. Для произвольной величины , зависящей от индекса , он определяется как:

Этот оператор анализирует динамику алгоритма, путем отслеживания изменений результатов при переходе от индекса к .

Далее рассмотрим условие ускорения сходимости:

Для его выполнения необходимо и достаточно, чтобы:

Доказательство следует из разложения отношения разностей и анализа предельного поведения компонент. Более подробно об этом пишет Брецински [1].

В случаях, когда условие (5) не выполняется, вводится дополнительный параметр :

Оптимальным образом определить значение можно так:

При таком выборе параметра последовательность будет сходиться быстрее, чем

На практике довольно часто вычисление предела затруднительно, поэтому можно использовать оценку:

Рассмотрим полную схему Θ-алгоритма. Для удобства будем использовать обозначения вместо .

Инициализация:

Рекуррентные правила:

Обратите внимание, описан в формуле (2) без учета замены на Θ. Весь алгоритм был предложен Клодом Брецински и дополнительное его описание можно найти в ранее указанной книге [1].

Численные эксперименты показали, что результаты работы чаще всего почти так же хороши, как и лучшие результаты аналогичных алгоритмов.

**Теорема 1**.

Необходимое и достаточное условие того, что , заключается в том, что имеет одну из следующих форм:

1. Экспоненциальная:

Данная последовательность сходится при условии

1. Рациональная:

Сходимость этой последовательности достигается тогда, когда вещественная часть d строго положительна.

1. Специальные вырожденные случаи при

Сходимость этой последовательности достигается тогда, когда вещественная часть d строго положительна.

Более подробное доказательство теоремы можно найти в книге Брецинского [1] в главе 2.9 (теорема 2.36).

Таким образом Θ – алгоритм демонстрирует устойчивость для широкого класса последовательностей, способен ускорять сходимости даже в логарифмических случаях и обдает хорошей устойчивостью к колебаниям членов последовательности.

**Реализация алгоритма**

|  |
| --- |
| Функция ThetaBrezinski(n, порядок):  Если порядок нечетный или порядок < 0:  Ошибка "Порядок должен быть четным числом"    Если n < 0:  Ошибка "n не может быть отрицательным"    Если n == 0 или порядок == 0:  Вернуть ЧастичнаяСумма(n)    Вернуть Theta(n, порядок, ЧастичнаяСумма(n), 0)  Функция Theta(n, порядок, s\_n, j):  Если порядок == 1:  res = 1 / a\_{n+j+1} # a\_{n} - n-й член ряда  Если res не конечно:  Ошибка "Деление на ноль"  Вернуть res    # Обновляем частичную сумму  Для tmp от n+1 до n+j:  s\_n += a\_{tmp}  n = n + j    Если порядок == 0:  Вернуть s\_n    порядок1 = порядок - 1  порядок2 = порядок - 2    # Рекурсивные вызовы  t1\_0 = Theta(n, порядок1, s\_n, 0)  t1\_1 = Theta(n, порядок1, s\_n, 1)  t1\_2 = Theta(n, порядок1, s\_n, 2)  t2\_1 = Theta(n, порядок2, s\_n, 1)    Если порядок нечетный:  delta = 1 / (t1\_0 - t1\_1)  Если delta не конечно:  Ошибка "Деление на ноль"  Вернуть t2\_1 + delta  Иначе: # порядок четный  delta2 = 1 / (-2\*t1\_1 + t1\_0 + t1\_2)  Если delta2 не конечно:  Ошибка "Деление на ноль"    delta\_n = t2\_1 - Theta(n, порядок2, s\_n, 2)  delta\_n1 = t1\_1 - t1\_2    Вернуть t2\_1 + (delta\_n \* delta\_n1 \* delta2) |

**Список литературы**

1. BrezinskiC. / *Extrapolation Methods: Theory and Practice* / C. Brezinski, M. Redivo Zaglia. — Amsterdam : North-Holland, 1991. — 353 p.