**Постановка математической задачи для Θ – алгоритма**

Дано: медленно сходящаяся последовательность , где – частичные суммы ряда

Условие на сходимости:

1. Последовательность сходится к пределу (т.е. ), но делает это медленно.

Возможные формы :

1. Экспоненциальная:
2. Рациональная:
3. Смешанные из первых двух.

Цель: обеспечить более быструю сходимость ряда к по сравнению с исходной последовательностью.

**Θ – алгоритм**

Классический ε-алгоритм может быть представлен в виде:

Более подробное разложение можно найти в книге Клода Брецински [1]. Нам важно то, что данная формула подчеркивает двух шаговую природу алгоритма, где каждый новый элемент зависит от элементов на двух предыдущих уровнях.

Применяя оператор конечной разности , можно получить соотношение:

Далее рассмотрим условие ускорения сходимости:

Для его выполнения необходимо и достаточно, чтобы:

Доказательство следует из разложения отношения разностей и анализа предельного поведения компонент. Более подробно об этом пишет Брецински [1].

В случаях, когда условие (3) не выполняется, вводится дополнительный параметр :

Оптимальным образом определить значение можно так:

При таком выборе параметра последовательность будет сходиться быстрее, чем

На практике довольно часто вычисление предела затруднительно, поэтому можно использовать оценку:

Рассмотрим полную схему Θ-алгоритма. Для удобства будем использовать обозначения вместо .

Инициализация:

Рекуррентные правила:

Обратите внимание, описан в формуле (1) без учета замены на Θ. Весь алгоритм был предложен Клодом Брецински и дополнительное его описание можно найти в ранее указанной книге [1].

Численные эксперименты показали, что результаты работы чаще всего почти так же хороши, как и лучшие результаты аналогичных алгоритмов.

**Теорема 1**.

Необходимое и достаточное условие того, что , заключается в том, что имеет одну из следующих форм:

1. Экспоненциальная:

Данная последовательность сходится при условии

1. Рациональная:

Сходимость этой последовательности достигается тогда, когда вещественная часть d строго положительна.

1. Специальные вырожденные случаи при

Сходимость этой последовательности достигается тогда, когда вещественная часть d строго положительна.

Более подробное доказательство теоремы можно найти в книге Брецинского [1] в главе 2.9 (теорема 2.36).

Таким образом Θ – алгоритм демонстрирует устойчивость для широкого класса последовательностей, способен ускорять сходимости даже в логарифмических случаях и обдает хорошей устойчивостью к колебаниям членов последовательности.

**Список литературы**

1. BrezinskiC. / *Extrapolation Methods: Theory and Practice* / C. Brezinski, M. Redivo Zaglia. — Amsterdam : North-Holland, 1991. — 353 p.