# Аннотация

В данном проекте рассмотрен алгоритм Форда-Сиди, предложенный в 1987 году математиками Уильямом Фордом и Авраамом Сиди для решения задачи ускорения сходимости рядов. Данный метод был предложен в [1] как реализация рекурсивного алгоритма генерализации процесса экстраполяции Ричардсона, представленного в [2], позволяющая решить задачу экстраполяции более быстро и эффективно по сравнению с непосредственным решением системы линейных уравнений, определяющих экстраполяцию. Также, важно отметить, что данный алгоритм схож с E-алгоритмом независимо предложенным К. Брезински [3], Т. Хейви [4] и К. Шнайдером [5]. Более того, алгоритм Форда-Сиди математически эквивалентен Е-алгоритму, но при этом является более вычислительно эффективным.

# Введение

Основная идея процесса экстраполяции Ричардсона, заключается в следующем:

Пусть ряд ведет себя следующим образом:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Где – известные вспомогательные ряды, – неизвестные константы.

Тогда если система (1) является невырожденной, то согласно правилу Крамера

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ( |

При этом данная формулировка позволяет наиболее обобщенно определить процесс экстраполяции, что позволяет использовать различные известные преобразования (трансформации) рядов вида для ускорения сходимости изначального ряда [3].

Основная проблема заключается в необходимости вычисления (2), решаемая различными рекурсивными алгоритмами. При этом, большая часть алгоритмов рассчитана на использование конкретного преобразования ряда, что приводит к необходимости использования различных алгоритмов для различных трансформаций рядов.

Эта проблема решается двумя обобщенными алгоритмами: E-алгоритмом, независимо предложенным тремя математиками: К. Брезински [3], Т. Хейви [4] и К. Шнайдером [5] и алгоритмом Форда-Сиди предложенным У. Фордом и А. Сиди [1]. При этом, как было доказано Наоки Осада [6], данные алгоритмы являются математически эквивалентными и имеют одинаковую асимптотическую сложность, однако, на практике алгоритм Форда-Сиди является вычислительно более эффективным.

# Алгоритм Форда-Сиди

Алгоритм Форда-Сиди определяется следующим образом:

Пусть – одна из последовательностей: . Тогда определим:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3) |

Пусть

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4) |
|  |  | (5) |

При этом (2) можно представить в виде:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6) |

Определим:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7) |

Следовательно, можем выразить (6) в виде

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8) |

Заметим, что и с точки зрения определителя отличаются лишь последним столбцом, поэтому будет естественно вывести соотношение между ними. Для этого воспользуемся теоремой Сильвестра.

Теорема 1. (Теорема Сильвестра)

Пусть – матрица, - матрица, получаемая из путем удаления строки и столбца , - матрица, получаемая из путем удаления строк и и столбцов и, ,

Тогда

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (9) |

При этом, если – матрица , то

Если применить данную теорему к размером при то получим:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (10) |

Тогда можем получить следующее соотношение:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (11) |

Пусть:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (12) |

Тогда из (11) и (12) можно выразить

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (13) |

Из (9) и (14) можем видеть, что и могут быть вычислены рекурсивно. Следовательно, задача сводится к эффективному вычислению . При этом учитывая отсутствия конкретных данных о , учитывая, что согласно (4) и (5) можем сделать вывод, что:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (14) |

Из этого можем выразить:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (15) |

Из чего следует, что

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (16) |

То есть (8) и (16) позволяет рекурсивно решить поставленную задачу экстраполяции.

Рассмотрим непосредственно сам алгоритм:

1. Для вычислим:
2. Для вычислим  
   А также вычислим

И, соответственно, вычислим:

Процесс вычисления можно представить следующим образом:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Таблица 1. Представление массива

Замечание:

Несмотря на кажущуюся необходимость в вычислении для вычисления каждого , на практике, это нужно только для , чтобы затем вычислить , и, соответственно, . Однако, как было отмечено в [6], на практике этих вычислений можно избежать, вычислив по формуле:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (17) |

## E-алгоритм

Для доказательства математической эквивалентности алгоритмов и демонстрации выводимости рекуррентных последовательностей одного алгоритма из другого и наоборот определим E-алгоритм:

Пусть для и определены так:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (18) |
|  |  | (19) |

Рекуррентные формулы (16) и (17) называются основным и вспомогательным правилами E-алгоритма

Отметим, что Форд и Сиди реализовали E-алгоритм переписав правила в виде:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (20) |
|  |  | (21) |

Где и

## Математическая эквивалентность E-алгоритма и алгоритма Форда-Сиди

### Вывод рекуррентной формулы алгоритма Форда-Сиди из E-алгоритма

Пусть – любой ряд.

Предположим, что преобразования ряда определены так:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (22) |
|  |  | (23) |

Аналогично, предположим, что преобразования

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (24) |

Теорема 2.

Определенное в (24) удовлетворяет условиям (3) и (16)

Доказательство:

Из (22) и (24) следует, что

По математической индукции от можно доказать, что , из чего можем сделать вывод, что:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (25) |

Из (24) получаем, что:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (26) |

Из (23) и (26) выразим следующее:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (27) |

Разделив обе стороны (23) на , получим:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (28) |

Из чего следует, что из (24) и (27) можно получить (16), что и требовалось доказать.

### Вывод рекуррентной формулы E-алгоритма из алгоритма Форда-Сиди

Предположим, что удовлетворяет (3) и (16) для любого ряда . Пусть:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (29) |

Теорема 3

Определенное в (29) удовлетворяет условиям (22) и (23)

Доказательство:

Из (16) имеем:

Следовательно, из (29) можем получить следующее:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (30) |

И из (29) и (16) получаем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (31) |

Что и требовалось доказать.

Из теорем (2) и (3) можем сделать вывод, что Е-алгоритм и алгоритм Форда-Сиди математически эквивалентны.

# Заключение

В данной работе был рассмотрен алгоритм Форда-Сиди, выведена его рекуррентная формула, а также была доказана математическая эквивалентность алгоритма Форда-Сиди и Е-алгоритма.

# Список литературы

1. Ford, William F., and Avram Sidi. “An Algorithm for a Generalization of the Richardson Extrapolation Process.” SIAM Journal on Numerical Analysis 24, no. 5 (1987): 1212–32. <https://asidi.cswp.cs.technion.ac.il/wp-content/uploads/sites/142/2023/03/P034_SINUM.Wm-alg.pdf>
2. SIDI, A. Some Properties of a Generalization of the Richardson Extrapolation Process <https://asidi.cswp.cs.technion.ac.il/wp-content/uploads/sites/142/2023/03/P006_JIMA.GREP_.pdf>
3. Brezinski, C. A general extrapolation algorithm. Numer. Math. 35, 175–187 (1980). <https://doi.org/10.1007/BF01396314>
4. Håvie, T. Generalized neville type extrapolation schemes. BIT 19, 204–213 (1979). <https://doi.org/10.1007/BF01930850>
5. C. Schneider, Vereinfachte Rekursionen zur Richardson-Extrapolation in Spezialfallen, Numer. Math. 24 (1975) 177– 184.
6. Naoki Osada, The E-algorithm and the Ford–Sidi algorithm, Journal of computational and applied mathematics 122 (1), 223-230 (2000)