Mitschrift: Ebenen und Kugeln - Computergrafik-I, WS 2015/16

Fabian Wendland - 813158, Martin Zier - 824320
Beuth Hochschule für Technik Berlin

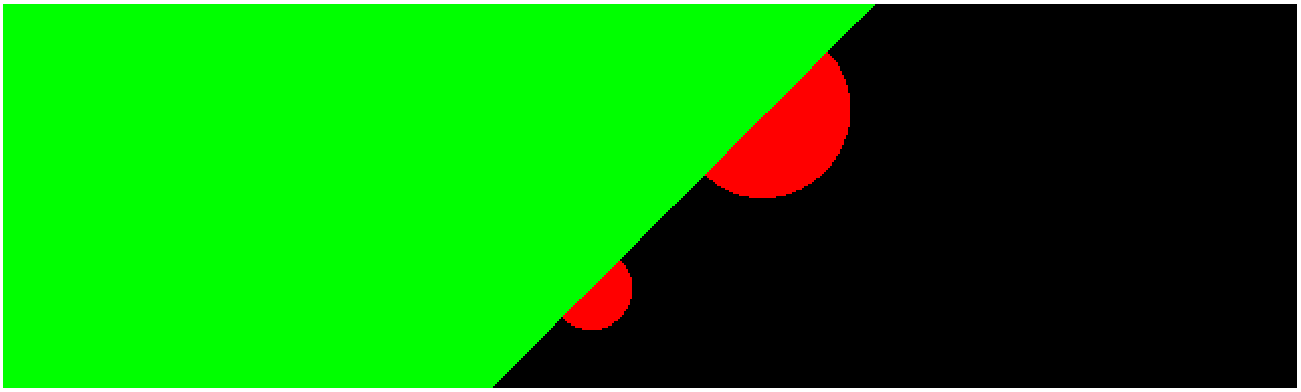

Abbildung 1: *Darstellung von Kugeln und Ebenen mit einer perspektivischen Kamera eines Raytracers*

1 Einführung

Dies ist die Mitschrift vom 03. November 2015 von Computergrafik-I. In der Vorlesung behandelten wir erste geometrische Formeln, welche relevant für den weiteren Verlauf der Entwicklung eines Raytracers sind. Neben den Grundlagen, die unter anderem Schnittberechnung und implizierte Oberflächen behandelten, ging es des weiteren um die Ebene und die Kugel als geometrische Form.

2 Geometrien - Grundlagen

Geometrische Formen kennen wir alle aus der Grundschule. Dreiecke, Kreise, Vierecke oder Rauten. Oft werden zweidimensionale Koordinatensysteme dafür genutzt, dreidimensionale Objekte in einem zweidimensionalen Raum darzustellen. Das ist auch für die virtuelle Darstellung von 3D Objekten relevant, denn zum Beispiel ist eine Kugel, die wir von zwei Seiten betrachten, auch nur ein Kreis. Die euklidische Geometrie, ist relevant für die weitere Arbeit an unseren Raytracern.

3 Die Welt der Vektoren - Das Skalarprodukt

Da wir im Verlaufe des Protokolls und auch im Verlaufe des Semesters sehr oft mit Vektoren und deren Skalarprodukten arbeiten werden, werden wir noch einmal kurz über das Skalarprodukt reden. Wenn wir 2 Vektoren haben, also $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ können wir das Skalarprodukt wie folgt berechnen:

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = \vec{a} \bullet \vec{b}$$

Und welchen Gesetzen folgt das Skalarprodukt?
Kommutativgesetz: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$
Distributivgesetz: $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$
Assoziativgesetz: $r(\vec{a} \bullet \vec{b}) = r\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (r\vec{b})$
Aber Vorsicht: $\vec{a}(\vec{b} \bullet \vec{c}) \neq (\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{c}$

4 Schnittpunkte - wenn Welten kollidieren

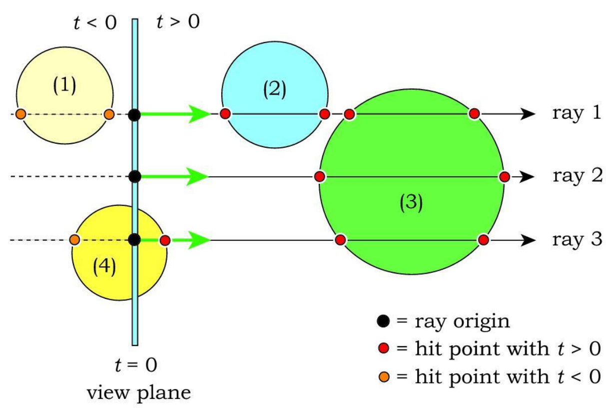

Abbildung 2: *Grundlegende Szene mit vier Kugeln*

Wir haben eine Kamera und vier Kugeln in verschiedenen Größen, Farben und Positionen. Die Kamera dient als unser POV (Point-of-View). Wenn nun Lichtstrahlen die Kamera verlassen, werden diese offensichtlich Objekte schneiden, die sich vor der Kamera befinden. Wir schießen für jeden Pixel in unserem Bild einen Strahl los. Zusätzlich haben wir noch die Variable t, die hier für unsere Sichtposition steht. $t = 0$ sind also wir, die Kamera. Sollte sich t nun im negativen Bereich befinden, werden wir die Objekte nicht sehen, da diese sich hinter der Kamera befinden. Dementsprechend sehen wir Kugel 1 aus der Zeichnung nicht. Kugel 4 befindet sich zur Hälfte in unserem Sichtfeld und wird somit dargestellt, die Kugeln 2 und 3 ebenfalls. Da wir natürlich nicht durch Objekte durchschauen können (außer sie wären transparent), wollen wir lediglich die Kugeln an den Stellen rendern, dir wir auch wirklich sehen können. Deswegen suchen wir immer nach dem kleinsten t für jedes Objekt, weil dieses offensichtlich die Vorderseite für uns darstellt. Anzumerken ist auch, dass Kugel 3 von 2 und 4 teilweise verdeckt werden, da diese sich vor der großen roten Kugel im Raum befinden.

5 Ebenen

5.1 Implizite Oberflächen

Um zu verstehen, was implizite Oberflächen bzw. Funktionen im Allgemeinen sind, sollten wir uns zuerst explizite Funktionen anschauen. Klassisch hätten wir da zum Beispiel

$$f(x) = ax + b$$

Für jeden x-Wert, den wir in die Funktion einsetzen, erhalten wir einen expliziten y-Wert.
Bei einer impliziten Funktion geben wir wiederum Werte an, um herauszufinden, ob der jeweilige Punkt auf der korrespondierenden Geraden liegt oder eben nicht.

$$f(x, y, z) = 0$$

Für unsere impliziten Oberflächen bedeutet dies nun im Folgeschluss, dass $f(\vec{p}) = 0$ uns sagt, ob der jeweilige Punkt auf der Oberfläche liegt oder nicht. $f(\vec{p}) = 0$ bedeutet, dass der Punkt auf der Oberfläche liegt. Da unser Strahl uns für jedes t einen Punkt ergibt, können wir daraus schließen:

$$f(\vec{o} + t\vec{d}) = 0$$

t ist nun die einzige unbekannte Variable, welche wir durch umstellen errechnen können.

5.2 Implizite Ebenen

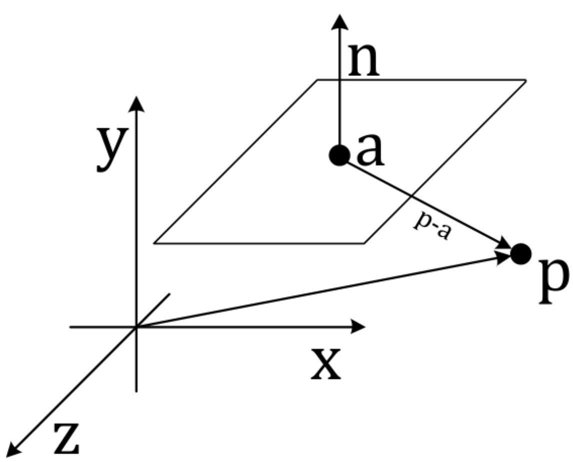

Abbildung 3: *Darstellung einer impliziten Ebene in Koordinatensystem*

Um eine implizite Ebene in einem Raum darstellen zu können, brauchen wir zwei Werte. Wir benötigen Vektor a, einen uns bekannten Punkt auf der Ebene und Vektor n, die Normale, welche uns sagt, wie die Ebene ausgerichtet ist. Um nun herauszufinden, ob ein Punkt auf der Ebene liegt, müssen wir lediglich feststellen, ob die Normale in einem 90° Winkel auf dem Punkt steht. Um das herauszufinden, wenden wir folgende Gleichung an:

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

Da wir mit Strahlen, also mit unseren Rays, arbeiten, wird aus der Formel eingesetzt für $\vec{p}$:

$$(\vec{o} + t \cdot \vec{d} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

Das müssen wir nun nach t auflösen, da t unsere Unbekannte ist:

$$\vec{o} \cdot \vec{n} + t\vec{d} \cdot \vec{n} - \vec{a} \cdot \vec{n} = 0$$

Jetzt stellen wir die Formel noch um:

$$t\vec{d} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n} - \vec{o} \cdot \vec{n}$$

Und stellen $\vec{d}$ und $\vec{n}$ noch um, um t auf eine Seite zu bringen:

$$t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n} - \vec{o} \cdot \vec{n}}{\vec{d} \cdot \vec{n}}$$

Wir können nun noch $\vec{n}$ ausklammern und erhalten somit unsere finale Formel für die implizite Ebene:

$$t = \frac{(\vec{a} - \vec{o}) \cdot \vec{n}}{\vec{d} \cdot \vec{n}}$$

6 Kugel

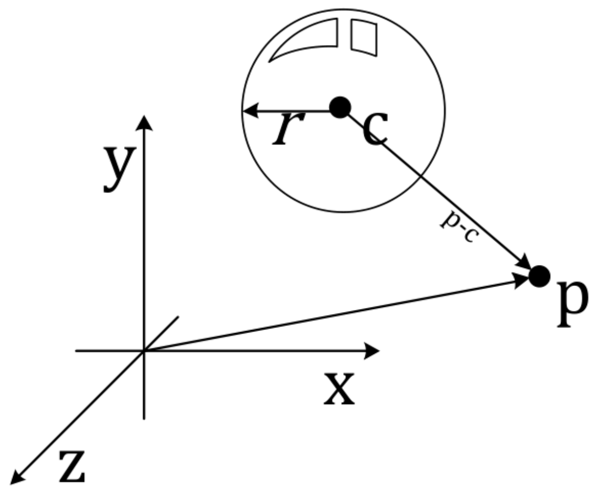

Abbildung 4: *Darstellung einer Kugel in Koordinatensystem*

Kugeln sind die Lieblingsobjekte von Raytracing Fans, da diese Objekte von Raytracern am Besten dargestellt werden können. In der Theorie ist es auch nicht schwer, einen Punkt auf einer Kugel zu bestimmen. Um herauszufinden, ob ein Punkt $\vec{p}$ auf einer Kugel liegt, brauchen wir lediglich den Mittelpunkt der Kugel, $\vec{c}$ und den Radius r. Da wir wissen, dass das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst die Länge zum Quadrat ist, können wir folgendes aussagen:

$$|\vec{p} - \vec{c}| - r = 0$$

Das ist wiederum das Gleiche wie:

$$(\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) - r^2 = 0$$

Nun setzen wir für den Punkt $\vec{p}$ den Strahl ein:

$$(\vec{o} + t\vec{d} - \vec{c}) \cdot (\vec{o} + t\vec{d} - \vec{c}) - r^2 = 0$$

Wenn wir das Ganze jetzt ausmultiplizieren, sieht das wie folgt aus:

$$\vec{o} \cdot \vec{o} + t\vec{d} \cdot \vec{o} - \vec{o} \cdot \vec{c} + t\vec{d} \cdot \vec{o} + t\vec{d} \cdot t\vec{d} - t\vec{d} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{o} - t\vec{d} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{c} - r^2 = 0$$

Jetzt können wir anfangen, auszuklammern. t zuerst:

$$t^2\vec{d}\cdot\vec{d}+t(\vec{d}\cdot\vec{o}+\vec{d}\cdot\vec{o}-\vec{d}\cdot\vec{c}-\vec{d}\cdot\vec{c})+(\vec{o}-\vec{c})\cdot(\vec{o}-\vec{c})-r^2=0$$

Als nächstes klammern wir d aus:

$$t^2\vec{d}\cdot\vec{d}+t\vec{d}[\vec{c}(\vec{o}-\vec{c})]+(\vec{o}-\vec{c})\cdot(\vec{o}-\vec{c})-r^2=0$$

Wir erinnern uns nun zurück an unsere Schulzeit und die Mitternachtsformel: $at^2+bt+c=0$
Diese können wir für unsere bisher umgestellte Formel anwenden. Hierbei gilt:

$$a=\vec{d}\cdot\vec{d}$$

$$b=\vec{d}[\vec{c}(\vec{o}-\vec{c})]$$

$$c=(\vec{o}-\vec{c})\cdot(\vec{o}-\vec{c})-r^2$$

Daraus ergibt sich wiederum die $p-q$ Formal:

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Sobald b^2-4ac kleiner 0 ist, gibt es keine Lösung für t, dementsprechend gibt es eine viertes Theorem:

$$d=b^2-4ac$$

Was bedeutet das für unsere Kugel? Wenn $d<0$ ist, hat unser Ray keine Schnittpunkte mit der Kugel. Sollte $d=0$ sein, haben wir genau einen Schnittpunkt. Bei $d>0$ sind es zwei.

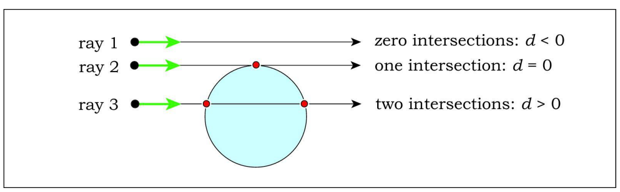

Abbildung 5: *Schnittpunkte einer Kugel in Abhängigkeit von d*