Parcial 1 CalcInt

Por: David Santiago Gayón Rincón

① Encuentre $\int_{-1}^{2} x^2+x\,dx$ usando sumas de Riemann.

$$\int_{-1}^{2} x^2+x\,dx$$

$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = -1 + i\left(\frac{3}{n}\right) = -1 + \frac{3i}{n}$$

$$f(x_i) = \left(-1+\frac{3i}{n}\right)^2 + \left(-1+\frac{3i}{n}\right) = 1 - \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2} - 1 + \frac{3i}{n}$$

$$f(x_i) = \frac{9i^2}{n^2} - \frac{3i}{n}$$

$$A_i = \left(\frac{9i^2}{n^2} - \frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{27i^2}{n^3} - \frac{9i}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{27i^2}{n^3} - \frac{9i}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{27\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)}{n^3} - \frac{9\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{27\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)}{n^3} - \frac{9\left(\frac{n^2+n}{2}\right)}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{54n^3+81n^2+27n}{6}}{n^3} - \frac{\frac{9n^2+9}{2}}{n^2}$$

Escaneado con CamScanner

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{9(2n^2+3n+1)}{2n^2} - \frac{9n^2-9}{2n^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{18n^2+27n+9-9n^2+9}{2n^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{9n^2+27n+18}{2n^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{9n^2}{n^2}+\frac{27n}{n^2}+\frac{18}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{9+\frac{27}{n}+\frac{18}{n^2}}{2}$$

$$= \frac{9}{2}$$

La integral $\int_{-1}^{2} x^2 + x \, dx = \frac{9}{2}$

Escaneado con CamScanner

② Sea $f(x) := \int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt$

a) ¿En qué dominio es diferenciable la función f?

$$\int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt$$

$$= e^{(x^2)^2} \cdot (x^2)' - e^{(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})'$$

$$= e^{x^4} \cdot 2x - e^{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= 2e^{x^4}x - \frac{e^{x}}{2\sqrt{x}}$$

La función es diferenciable en el dominio de $(0, \infty)$ debido a que si se toma x con valores negativos, o el cero, será indeterminada

b) Encuentre $f'(x)$.

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} e^{t^2} dt$$

$$f'(x) = e^{(x^2)^2} \cdot (x^2)' - e^{(\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})'$$

$$f'(x) = e^{x^4} \cdot 2x - e^{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 2e^{x^4}x - \frac{e^{x}}{2\sqrt{x}}$$

Escaneado con CamScanner

③ Calcule la integral $\int \frac{\sin(x)}{1-2\cos(x)}dx$

$$\int \frac{\sin(x)}{1-2\cos(x)}dx$$

$u = 1-2\cos(x)$

$du = 2\sin(x)\,dx$

$$= \int \frac{du}{2u}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln|u|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln|1-2\cos(x)|$$

$$= \frac{\ln|1-2\cos(x)|}{2}$$

la integral $\int \frac{\sin(x)}{1-2\cos(x)}dx = \frac{\ln|1-2\cos(x)|}{2}$

Escaneado con CamScanner

④ Encuentre una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que NO sea integrable en el intervalo $[0,1]$ pero para la cual el siguiente límite existe:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{i}\right)$$

Sea $f(x) = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{R} \\ -x & , x \in \mathbb{I} \end{cases}$

Esta función no es integrable en algún intervalo y el límite existe porque va a ser límite de $\frac{1}{n}$ ó $-\frac{1}{n}$, pero ambos límites coinciden y su valor es 0.

Escaneado con CamScanner