Równania różniczkowe cząstkowe

Julian Janus Józef Myjak

2022







Publikacja udostępniona jest na licencji Creative Commons Uznanie Autorstwa - Na tych samych warunkach 4.0. Pewne prawa zastrzeżone na rzecz autorów i Akademii Górniczo-Hutniczej. Zezwala się na dowolne wykorzystanie treści publikacji pod warunkiem wskazania autorów i Akademii Górniczo-Hutniczej jako autorów oraz podania informacji o licencji tak długo, jak tylko na utwory zależne będzie udzielona taka licencja. Pełny tekst licencji dostępny na stronie https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pl

Spis treści

Rozdział 1. Wprowadzenie do równań cząstkowych

Wprowadzenie do równań cząstkowych

Przykłady zagadnień prowadzących do równań różniczkowych cząstkowych

Rozdział 2. Metoda charakterystyk dla równań liniowych pierwszego rzędu

Metoda charakterystyk dla równań liniowych o stałych współczynnikach

Metoda charakterystyk dla równań liniowych pierwszego rzędu

Metoda charakterystyk dla równań liniowych o n-zmiennych niezależnych

Metoda charakterystyk dla prawie-liniowego równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu

Metoda charakterystyk - przykłady

Rozdział 3. Klasyfikacja równań liniowych rzędu drugiego. Metoda charakterystyk

Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych 2-go rzędu 2-zmiennych

Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych 2-go rzędu n-zmiennych

Rozwiązywanie równań liniowych cząstkowych 2-go rzędu metodą charakterystyk

Rozdział 4. Metoda rozdzielania zmiennych

Rozwiązanie równania struny ograniczonej metodą rozdzielania zmiennych

Rozwiązanie równania niejednorodnego struny metodą rozdzielania zmiennych

Przykłady metody rozdzielania zmiennych dla równań parabolicznych i hiperbolicznych

Metoda rozdzielania zmiennych dla równania Laplace'a we współrzędnych biegunowych

Rozdział 5. Równanie falowe

Rozwiązanie równania struny metodą d'Alemberta

Równanie niejednorodne struny

Równanie fal kulistych. Metoda uśredniania

Niejednorodne równanie fal kulistych

Równanie fal walcowych. Metoda redukcji

Rozdział 6. Rozwiązania podstawowe równania Laplace'a i przewodnictwa cieplnego. Zasada maksimum

Równanie Laplace'a

Własności funkcji harmonicznych

Równanie Poissona

Problem początkowy dla równania ciepła

Zasada maksimum dla równania Laplace'a i równania ciepła

Zasada Duhamela

Przykłady dotyczące równania Laplace'a i równania przewodnictwa cieplnego

Rozdział 7. Elementy teorii dystrybucji

Wprowadzenie do teorii dystrybucji

Zbieżność w sensie dystrybucyjnym

Podstawowe działania na dystrybucjach

Pochodna w sensie dystrybucyjnym

Dystrybucje skończonego rzędu

Dystrybucje wolno rosnące

Pierwotna z dystrybucji określonej na R

Rozwiązania uogólnione równań różniczkowych

Dalsze przykłady i własności dystrybucji

Rozdział 8. Metoda funkcji Greena

Funkcja Greena dla równania ciepła

Metoda funkcji Greena dla równań parabolicznych

Wyznaczanie funkcji Greena przy pomocy odwzorowań konforemnych

Dalsze przykłady wyznaczania funkcji Greena

Rozdział 9. Przekształcenie Laplace'a

Definicja przekształcenia Laplace'a

Podstawowe własności transformaty Laplace'a

Odwrotna transformata Laplace'a

Przekształcenie Laplace'a dystrybucji

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a w teorii równań różniczkowych zwyczajnych

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a w teorii równań różniczkowych cząstkowych

Rozdział 10. Przekształcenie Fouriera

Definicja i podstawowe własności transformaty Fouriera

Przykłady transformaty Fouriera

Dalsze własności transformaty Fouriera

Przekształcenie Fouriera dystrybucji wolno rosnących

Zastosowania przekształcenia Fouriera

Rozdział 11. Elementy rachunku wariacyjnego

Wprowadzenie do rachunku wariacyjnego

Funkcjonały

Pierwsza i druga wariacja funkcjonału

Równanie Eulera-Lagrange'a

Funkcjonały zależne od funkcji wektorowej

Funkcjonały zależne od pochodnych wyższych rzędów

Funkcjonał zależny od funkcji wielu zmiennych

Problemy izoperymetryczne

Dodatek

Całki pierwsze

Twierdzenie Gaussa-Greena i wzory Greena

Tabela transformat Laplace'a

Tabela transformat Fouriera

Rozdział 1. Wprowadzenie do równań cząstkowych Wprowadzenie do równań cząstkowych

Równania różniczkowe cząstkowe pojawiły się w związku z badaniami procesów drgań rozmaitych środowisk, między innymi drgań strun, prętów, membran, jak również w związku z badaniami zagadnień z zakresu akustyki i hydromechaniki. Pierwsze równanie różniczkowe cząstkowe zostało sformułowane w połowie XVIII wieku przez J. d'Alemberta (1717-1783). Było to równanie według dzisiejszej nomenklatury typu hiperbolicznego i powstało w wyniku rozważań nad zagadnieniem struny drgającej. L. Euler (1707 - 1783) sprecyzował warunki określające jednoznaczność rozwiązania tego równania, tworząc początki teorii równań różniczkowych cząstkowych. Później, kierując się sugestiami natury fizycznej, D. Bernulli (1702 - 1782) przedstawił rozwiązanie struny drgającej w postaci szeregu trygonometrycznego. Metodę tę rozwinął J. Fourier (1750 - 1830) tworząc początki teorii szeregów trygonometrycznych. A.L. Cauchy (1789 - 1857) sformułował zagadnienie początkowe dla równań różniczkowych, zwane dzisiaj zagadnieniem Cauchy'ego. P. Laplace (1749-1827) zauważył, że potencjał siły wzajemnego przyciągania dwóch mas spełnia równanie różniczkowe cząstkowe, które dzisiaj nosi nazwę równania Laplace'a. S.D. Poisson (1781 - 1840) rozwinął teorię zjawisk przyciągania grawitacyjnego, w związku z którą wprowadził równanie zwane obecnie równaniem Poissona. Tak więc badania z zakresu mechaniki nieba i grawimetrii doprowadziły do powstania klasy równań noszących dziś nazwę równań eliptycznych. W początkach XIX wieku G. Green (1793-1841) stworzył ogólne podstawy teorii potencjału rozwijając teorię elektryczności i magnetyzmu.

Badania zjawiska przewodnictwa cieplnego oraz dyfuzji gazów i cieczy doprowadziły natomiast do powstania klasy równań które nazywamy dzisiaj **równaniami parabolicznymi**.

Na przełomie XIX i XX wieku nastąpił bujny rozwój badań w zakresie teorii równań różniczkowych cząstkowych. Między innymi istotny wkład wnieśli tacy matematycy jak B. Riemann (1826-1866), H. Poincare (1854-1921), E. Picard (1856-1941), J. Hadamard (1865-1937), E. Goursat (1854-1938). Z polskich matematyków wymienić należy autora jednej z pierwszych monografii poświęconych równaniom różniczkowym cząstkowym -

M. Krzyżańskiego (1907 - 1965). Jak widać równania różniczkowe cząstkowe zrodziły się w związku badaniami zagadnień fizyki i chociaż obecnie zakres ich zastosowań znacznie się rozszerzył, znakomita część równań różniczkowych cząstkowych nosi nazwę od zjawisk które pierwotnie opisywały, np. równanie struny, równanie fali kulistej, równanie fali walcowej, równanie przewodnictwa cieplnego, równanie dyfuzji. Wiek XX przyniósł dalszy bujny rozwój teorii równań różniczkowych cząstkowych, związany z powstaniem i rozwojem nowych działów matematyki, zwłaszcza topologii i analizy funkcjonalnej.

Równanie różniczkowe cząstkowe, to równanie w którym występuje niewiadoma funkcja dwóch lub więcej zmiennych niezależnych oraz niektóre jej pochodne cząstkowe. Rzędem równania nazywamy najwyższy rząd pochodnej. I tak równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu nazywamy zależność

$$F(x_1, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}) = 0, (1)$$

gdzie $(x_1,...,x_n)\in U\subset\mathbb{R}^n$, $F\colon U\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ jest zadaną funkcją, a $u\colon U\to\mathbb{R}$ funkcją szukaną. Podobnie równaniem różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu nazywamy zależność

$$F(x_1, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, ..., u_{x_n x_n}) = 0,$$
(2)

gdzie F jest funkcją daną, a u funkcją szukaną.



PRZYKŁAD

Przykład 1:

Równanie

$$u_{xx} + xu_y + 3u^4 - xy = 0,$$

gdzie u jest szukaną funkcją zmiennych x i y, jest równaniem rzędu drugiego, a

$$u_{xxy} + 2u = 0,$$

równaniem rzędu trzeciego.

ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu k, spełniającą równanie w każdym punkcie obszaru U. Rozwiązanie takie nazywamy rozwiązaniem klasycznym. Zastosowania wymagają jednak często rozwiązań które nie mają ciągłych pochodnych, lub nie wszędzie są różniczkowalne lub wreszcie nie wszędzie są ciągłe. Wymaga to wprowadzenia tak zwanych rozwiązań słabych. W niniejszym tekście ograniczymy się do rozważania rozwiązań klasycznych, chociaż z punktu widzenia zatosowań są one daleko niewystarczające. Postaramy się natomiast sygnalizawać sytuacje w których widać potrzebę rozważania szerszej klasy rozwiązań oraz sformułujemy wstępne definicje, zachęcając w ten sposób Czytelnika do sięgnięcia po opracowania bardziej zaawansowane.



PRZYKŁAD

Przykład 2:

Rozważmy równanie

$$u_{xy} = 4xy$$
.

Po scałkowaniu względem y mamy $u_x = 2xy^2 + f(x)$, (gdzie f jest dowolną funkcją zmiennej x) a po scałkowaniu względem x otrzymujemy

$$u = x^2y^2 + F(x) + G(y),$$

gdzie F i G są dowolnymi funkcjami klasy C^1 . Oczywiście są to rozwiązania klasyczne.

W dalszym ciągu będziemy rozważać pewne szczególne przypadki równań różniczkowych cząstkowych.

Równaniem różniczkowym cząstkowym liniowym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci (1), jeśli funkcja F jest liniowa względem funkcji u oraz jej pochodnych $u_{x_1}, ..., u_{x_r}$, czyli równanie postaci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, ..., x_n) u_{x_i} + b(x_1, ..., x_n) u = f(x_1, ..., x_n).$$
(3)

Jeśli f = 0 to równanie (3) nazywamy **jednorodnym**.

Równaniem różniczkowym cząstkowym quasi-liniowym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci (1) jeśli funkcja F jest liniowa względem pochodnych $u_{x_1}, ..., u_{x_r}$, czyli równanie postaci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, ..., x_n, u) u_{x_i} = f(x_1, ..., x_n, u).$$
(4)

Jeśli f = 0 to równanie (4) nazywamy **równaniem quasi liniowym jednorodnym**.

Zazwyczaj przyjmujemy, że zadane funkcje $a_1,...,a_n$ oraz funkcja f są ciągłe w rozważanych obszarach.

Równaniem różniczkowym cząstkowym liniowym drugiego rzędu nazywamy równanie postaci (2) jeśli funkcja F jest liniowa względem funkji u oraz jej pochodnych, tzn. równanie postaci

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{a_{ij}u_{x,x_{i}}+i=1}^{n} b_{i}u_{x_{i}} + bu = f,$$
(5)

gdzie a_{ij} , b_i dla i,j=1,...,n oraz f są zadanymi funkcjami zmiennych $x_1,...,x_n$. Jeśli f=0 to równanie (5) nazywamy jednorodnym.

Równaniem różniczkowym cząstkowym quasi-liniowym drugiego rzędu nazywamy równanie postaci (2) jeśli funkcja F jest liniowa względem pochodnych drugiego rzędu funkcji u czyli równanie postaci

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, ..., x_n, u) u_{x_i x_j} + g(x_1, ..., x_n, u, u_{x_1}, ... u_{x_n}) = 0.$$
(6)

Załóżmy, że równanie różniczkowe rozważamy w obszarze $\,\Omega$. Jeśli szukamy rozwiązania które na brzegu $\,\partial\Omega\,$ obszaru $\,\Omega\,$ przyjmuje zadane wartości, to problem ten nazywamy **problemem brzegowym**. Możemy też szukać rozwiązania dla którego na brzegu obszaru mamy zadane wartości pochodnych lub wartości pochodnej w kierunku normalnym do powierzchni, lub też kombinację tych warunków. Ze względu na interpretację fizyczną, często wyróżniamy jedną ze zmiennych i nazywamy czasem. Nie jest to na ogół obojętne, jeśli bowiem równanie różniczkowe opisuje pewne zjawisko fizyczne, to każda ze zmiennych ma z góry ustaloną interpretację.

Jeśli poszukujemy rozwiązania które w chwili początkowej $t=t_0$ przyjmuje zadane wartości, to rozważany problem nazywamy **problemem początkowym** albo **problemem Cauchy'ego**. Możemy też szukać rozwiązania dla którego w chwili początkowej $t=t_0$ mamy zadane wartości pochodnych, lub rozwiązania które w chwili początkowej $t=t_0$ spełnia kombinację tych warunków. Należy wyrażnie zaznaczyć, że nie istnieje ogólna metoda rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Co więcej, stosowane techniki nie tylko zależą od typu równania, ale często również od rozpatrywanych warunków początkowych i brzegowych oraz obszaru w którym szukamy rozwiązania. Dlatego też badania skupiają się na konkretnych równaniach różniczkowych cząstkowych jak też konkretnych problemach początkowych i brzegowych, które sa ważne z punktu widzenia zastosowań w matematyce czy też w innych naukach.

Na koniec zauważmy, że ze względu na oszczędność zapisu sensownym jest wprowadzenie operatorów różniczkowych

$$\sum_{L=i,j=1}^{n} \frac{\partial^{2}}{\partial x_{i} \partial x_{j}}$$
(7)

огах

$$\sum_{L=i,j=1}^{n} \frac{\partial^{2}}{\partial x_{i} \partial x_{j}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i}}$$
(8)

Jeśli operator L jest określony wzorem (8) (odp. (7)), równanie (5) (odp. (6)) możemy zapisać krótko

$$Lu + u = f$$
 (odp. $Lu + g = 0$).

Szczególnie rozpowszechniony jest operator Laplace'a (tzw. laplasjan)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

oraz operator Nabla

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Zauważmy, że $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, przy czym iloczyn rozumiemy tu w sensie iloczynu skalarnego.

Przykłady zagadnień prowadzących do równań różniczkowych cząstkowych

Równania różniczkowe cząstkowe służą jako modele dla opisu szeregu zjawisk począwszy od fizyki i techniki, poprzez nauki przyrodnicze, ekonomię, medycynę aż do nauk humanistycznych. I tak na przykład są one podstawowym narzędziem do opisu zagadnień mechaniki, elektrotechniki, hydromechaniki, akustyki czy fizyki kwantowej.

W niniejszym module podamy przykłady opisu takich zjawisk, mianowicie drgań struny, drgań elektrycznych w przewodniku, przewodnictwa ciepła oraz przepływu cieczy lub gazu. Należy podkreślić, że w literaturze nietrudno znależć wyprowadzenia bardziej precyzyjne. Ponieważ naszym celem jest elementarne wprowadzenie do teorii równań różniczkowych, ograniczymy się do rozważań bardzo uproszczonych.

1. Równanie struny

Przez strunę rozumiemy jednorodną elastyczną nić o stałym przekroju. Zakładamy, że struna jest zamocowana na osi 0x w punktach 0 i l i pod działaniem sił naprężenia jest skierowana wzdłuż osi 0x.

Przyjmujemy przy tym, że siła naprężenia w każdym punkcie struny jest stała.

Jeśli pod działaniem siły zewnętrznej struna zostanie wyprowadzona z położenia równowagi, to pod wpływem sił naprężenia zacznie drgać. W naszych rozważaniach przyjmujemy, że struna przesuwa się w jednej płaszczyżnie, a punkty struny poruszają się jedynie w kierunku prostopadłym do osi 0x.

Odchylenie u punktu drgającej struny jest szukaną funkcją dwóch zmiennych niezależnych, współrzędnej x oraz czasu t, czyli u = u(x, t).

Oczywiście, siła naprężenia T jest w każdym punkcie styczna do struny, a ruch struny jest wymuszony jej składową na oś 0u (zobacz Rys. 1).

Przyjmujemy, że wartość siły naprężenia struny jest stała, ponadto rozważamy tylko takie drgania, dla których amplituda jest mała w stosunku do długości struny.

Oznaczmy przez x i $x+\Delta x$ rzut punktów M_1 i M_2 na oś 0x, a przez φ oraz $\varphi+\Delta \varphi$ kąt między kierunkiem działania siły naprężenia T w punktach M_1 i M_2 a osią 0x.

Zauważmy, że przyrost siły działającej w kierunku osi 0u na element struny M_1M_2 wyraża się wzorem:

$$T\sin(\varphi + \Delta\varphi) - T\sin\varphi \cong T\left(\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) - \operatorname{tg}\varphi\right) = T\left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u(x + \theta \Delta x, t)}{\partial^2 x} \Delta x,$$

$$(9)$$

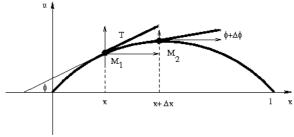
dla pewnego $\theta \in [0,1]$ oraz $\Delta x = x_2 - x_1$.

(Ponieważ założyliśmy, że φ jest małe, wartość $\sin \varphi$ zastąpiliśmy wartością $tg\varphi$, która - jak wiadomo - jest równa wartości pochodnej funkcji u, a następnie wykorzystaliśmy twierdzenie o wartości średniej).

Z drugiej strony, korzystając z zasady Newtona, siłę działającą w kierunku osi u na element M_1M_2 możemy wyrazić wzorem:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\tag{10}$$

gdzie ρ oznacza gęstość liniową struny.



Rysunek 1: rys1

Porównując (9) i (10) otrzymamy

$$T\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

czyli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\tag{11}$$

gdzie współczynnik $a=\sqrt{T/\rho}$ opisuje prędkość rozchodzenia się drgań prostopadłych. Jest to równanie typu hiperbolicznego. Zauważmy, że w opisanym modelu spełnione są następujące warunki brzegowe

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad \text{dla} \quad t \in \mathbb{R}_+,$$
 (12)

zaś wyprowadzenie struny z polożenia równowagi zadane jest warunkami początkowymi

$$u(x,0) = \varphi, \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad \text{dla} \quad x \in [0,l],$$
 (13)

gdzie φ i ψ są zadanymi funkcjami, przy czym $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$.

Jeśli założymy ponadto, że na strunę działa siła zewnętrzna F to nietrudno sprawdzić, że drgania struny opisane są równaniem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),\tag{14}$$

gdzie f(x,t) = F(x,t)/T.

2. Drgania elektryczne w przewodnikach

Przypomnijmy, że prąd przepływający w przewodniku scharakteryzowany jest przez natężenie i=i(x,t) oraz napięcie u=u(x,t) gdzie x oznacza odległość liniową od początku linii, a t czas.

Ponadto, jak zwykle niech R oznacza gęstość liniową oporności przewodnika, C gęstość liniową pojemności, L - gęstość liniową indukcji, a G - gęstość liniową upływności (współczynnik izolacji).

Spadek potencjału przewodnika od punktu x do punktu $x + \Delta x$, czyli

$$u(x, t) - u(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial u}{\partial x}(x + \theta \Delta x, t) \Delta x,$$

jest spowodowany przez:

 $iR\Delta x$ - spadek napięcia wywołany oporem,

 $\frac{\partial i}{\partial t} \Delta x$ - siłę elektromagnetyczną samoindukcji.

Zatem

$$iR\Delta x + L\frac{\partial i}{\partial t}\Delta x = -\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x.$$

Stąd

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial i}{\partial t} + iR = 0. \tag{15}$$

Podobnie, spadek natężenia na odcinku od punktu x do punktu $x + \Delta x$, w czasie Δt czyli

$$(i(x, t) - i(x + \Delta x, t))\Delta t = -\frac{\partial i}{\partial x} (x + \tilde{\theta} \Delta x, t) \Delta x \Delta t,$$

jest równy sumie:

 $\frac{\partial u}{\partial t}$ $\Delta x \Delta t$ - prądu przepływającego przez rozważany odcinek,

 $Gu\Delta x\Delta t$ - strat prądu.

Zatem

$$C \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta t + G u \Delta x \Delta t = -\frac{\partial i}{\partial t} \Delta x \Delta t.$$

Stąd

$$\frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + Gu = 0. \tag{16}$$

Zespół równań (15), (16) nazywamy równaniami linii elektrycznej.

Różniczkując równanie (15) względem x a równanie (16) względem t otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} + R \frac{\partial i}{\partial x} = 0.$$
(17)

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$
 (18)

Jeśli przyjmiemy $R\cong 0$, $G\cong 0$, tzn. założymy, że linia jest bez samoindukcji i bez upływnienia, to eliminując z uzyskanego układu równań pochodną mieszaną, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

lub

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$
 (19)

gdzie $a=1/\sqrt{LC}$. Otrzymaliśmy zatem ponownie równanie postaci (11).

3. Równanie przewodnictwa cieplnego w pręcie

Rozważmy zagadnienie rozchodzenia się ciepła w pręcie jednorodnym. Niech u=u(x,t) oznacza temperaturę w chwili t w punkcie x. Ilość ciepła przechodząca przez sekcję pręta w punkcie x w przedziale czasowym Δt wynosi

$$Q = k \frac{\partial u}{\partial x} S \Delta t,$$

gdzie k jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego a S powierzchnią przekroju pręta.

Jeśli Q_1 oznacza ilość ciepła przepływająca przez sekcję pręta w punkcie $x=x_1$ a Q_2 przez sekcję w punkcie $x=x_2$, czyli

$$Q_1 = k^{\frac{\partial u}{\partial x}}\Big|_{x = x_1} S \Delta t, \qquad Q_2 = k^{\frac{\partial u}{\partial x}}\Big|_{x = x_2} S \Delta t,$$

to

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = kS\Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t)\right) = \frac{\partial^2 u}{kS\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (x_1 + \theta(x_2 - x_1), t) \Delta x \cong kS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (x_1, t) \Delta x \Delta t,$$
(20)

gdzie $\theta \in [0,1]$, oraz $\Delta x = x_2 - x_1$.

Ciepło ΔQ powoduje zmianę temperatury odcinka $[x_1, x_2]$ o wielkość Δu . Oczywiście

$$\Delta Q = c\rho S \Delta x \Delta u,$$

gdzie $\,c\,$ oznacza ciepło właściwe a $\,\rho\,$ gęstość właściwą pręta. Uwzględniając, że

$$\Delta u = u(x,t+\Delta t) - u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} (x,t+\tilde{\theta}\Delta t)\Delta t \cong \frac{\partial u}{\partial t} (x,t)\Delta t,$$

równanie bilansu cieplnego możemy zapisać w postaci

$$\frac{\partial^2 u}{kS^{\partial x^2}}(x,t)\Delta x\Delta t = c\rho S^{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Delta x\Delta t.$$

Stad

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

gdzie $a^2 = k/(c\rho)$. Jest to równanie typu parabolicznego.

4. Równanie przewodnictwa cieplnego w bryle

Rozważmy teraz zagadnienie rozchodzenia się ciepła w jednorodnej i izotropowej bryle trójwymiarowej V o powierzchni S.

Niech u=u(x,y,z,t) oznacza temperaturę w punkcie (x,y,z) w chwili t,k współczynnik przewodnictwa cieplnego, \vec{n} oznacza (jednostkowy) wektor normalny do powierzchni S,c ciepło właściwe a ρ gęstość bryły. Ilość ciepła przepływającego w jednostce czasu przez powierzchnię S,c wyraża się wzorem

$$\iint_{S} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS.$$

a ilość ciepła w bryle $\ V$ w chwili $\ t$ wzorem

$$\iint\limits_{V} c \, \rho \, u(x,y,z,t) \, dx dy dz.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot \operatorname{grad} u,$$

gdzie symbol \cdot znacza iloczyn skalarny, ilość ciepła która przechodzi przez element powierzchni ΔS w czasie Δt wyraża się wzorem

$$\Delta Q = k\Delta S\Delta t^{\vec{n}} \cdot \text{grad} u$$

Zatem przez powierzchnie S w czasie Δt przechodzi natępująca ilość ciepła

$$\iint_{\Delta Q = \Delta t \, S \, k \, \vec{n} \cdot \operatorname{grad} u \, dS.}$$

Przepływające ciepło powoduje zmianę temperatury u, przy czym przyrost ciepła bryty V wyraża się wzorem

$$\iiint\limits_{V} \int\limits_{c\rho u(x,y,z,t+\Delta t)dxdydz -} \iiint\limits_{V} \int\limits_{c\rho u(x,y,z,t)dxdydz} \iint\limits_{Z} \int\limits_{V} \int\limits_{c\rho} \frac{\partial u}{\partial t} dxdydz.$$

Równanie bilansu cieplnego ma zatem postać

$$\iint_{\Delta t} \iint_{S} \frac{\partial u}{\partial t} dx dv dz = \Delta t \int_{V} \frac{\partial u}{\partial t} dx dv dz.$$

Po uproszczeniu przez Δt i wykorzystaniu twierdzenia Gaussa - Greena (zob. twierdzenie A.2) otrzymamy

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dx dy dz = \iiint\limits_{V} \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz,$$

czyli

$$\iiint\limits_{V} \left[\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx dy dz = 0.$$

Ponieważ ostatnia równość zachodzi dla dowolnego obszaru $\,V\,$ o dostatecznie regularnej powierzchni, zakładając ciagłość wyrażeń podcałkowych otrzymamy

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad} u) - c\rho^{\frac{\partial u}{\partial t}} = 0,$$

lub

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} u),$$

gdzie $a^2 = k/(c\rho)$.

Ostatecznie otrzymane równanie możemy zapisać w postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \tag{21}$$

lub, używając symbolu laplasjanu $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, w postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

Jest to również równanie typu parabolicznego.

Jeśli w rozważanym obszarze znajdują się żródła ciepła opisane funkcją g(x, y, z, t), wówczas można pokazać, że równanie przewodnictwa cieplnego przyjmie postać

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = g(x, y, z, t).$$

Jeśli temperatura nie zmienia się w czasie, równanie przewodnictwa cieplnego ma postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$
 (22)

Równanie (22) nosi nazwę **równania Laplace'a**. Jest to równanie typu eliptycznego. Aby znależć temperaturę ciała, wystarczy znać temperaturę na powierzchni, czyli

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$$
 dla $(x, y, z) \in S$.

oraz prędkość przepływu ciepła przez powierzchnię, czyli

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y, z) = \psi(x, y, z) \qquad \text{dla} \quad (x, y, z) \in S$$

gdzie \vec{n} oznacza wektor normalny do powierzchni. Ponieważ warunki te są zadane na brzegu obszaru, problem ten nazywamy problemem brzegowym a wymienione warunki warunkami brzegowymi.

5. Przepływ cieczy. Równanie ciągłości

Niech V będzie zadanym obszarem jednospójnym o regularnej powierzchni S. Załóżmy, że przez obszar V przepływa ciecz lub gaz z prędkością $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$.

Przez element powierzchni ΔS w czasie Δt przepływa następująca ilość substancji

$$\Delta Q = \rho^{\vec{n}} \cdot \vec{v} \Delta S \Delta t,$$

gdzie \vec{n} oznacza wektor normalny do powierzchni S, a $\rho=\rho(x,y,z,t)$ gęstość przepływającej substancji w punkcie (x,y,z) i chwili t. Stąd przez powierzchnię S w czasie Δt przepłynie następująca ilość substancji

$$\iint_{\Delta Q = \Delta t \ S \ \rho \ \vec{n} \cdot \vec{v} dS.}$$

Z drugiej strony ilość substancji w bryle V w chwili t wynosi

$$Q = \iint_{V} \rho dx dy dz.$$

Oczywiście zmiana ilości substancji powoduje zmianę jej gęstości, a przyrost substancji w czasie Δt spowodowany zmianą gęstości wyraża się wzorem

$$\Delta Q = \iint\limits_{V} \rho(x,y,z,t+\Delta t) dx dy dz - \iint\limits_{V} \rho(x,y,z,t) dx dy dz \cong \Delta t \bigvee\limits_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,y,z,t) dx dy dz.$$

Równanie bilansu ilości substancji ma zatem postać

$$\iint_{\Delta t} \int_{S} \rho \vec{n} \cdot \vec{v} dS = \Delta t \int_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

Wykorzystując twierdzenie Gaussa - Greena (zob. twierdzenie A.2) otrzymamy

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{div}(\rho v) dx dy dz = \iiint\limits_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

Ponieważ wzór ten zachodzi dla dowolnego obszaru regularnego $\ V_{\rm c}$ więc funkcje podcałkowe są równe, wynika stąd równość

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho v) = 0,$$

zwana równaniem ciągłości Jeśli przyjmimy, że

$$v = \frac{k}{\rho} \operatorname{grad} P, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \lambda \frac{\partial P}{\partial t},$$

gdzie P oznacza ciśnienie, a λ współczynnik przepuszczalności a k pewną stałą, to

$$\lambda \frac{\partial P}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} P),$$

lub

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right). \tag{23}$$

Jeśli rozważana substancja jest nieściśliwa, wówczas $\frac{\partial P}{\partial t}=0$, a równanie (23) przyjmie postać

 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} P) = 0,$

lub

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

Ponownie otrzymaliśmy równanie Laplace'a.

Rozdział 2. Metoda charakterystyk dla równań liniowych pierwszego rzędu

Metoda charakterystyk dla równań liniowych o stałych współczynnikach

W rozdziałe tym omówimy rozwiązywanie równań liniowych różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach metodą charakterystyk.

Metoda ta polega na sprowadzeniu rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego do rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych, tak zwanych równań charakterystyk.

W tym celu należy znaleść rozwiązania równania wyjściowego wzdłuż pewnych krzywych, a następnie pokazać, że powierzchnia utworzona w stosowny sposób z tak skonstruowanych krzywych (charakterystyk) jest rozwiązaniem równania wyjściowego. Rozważmy liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach

$$au_x + bu_y = c, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$
 (24)

Niech u będzie rozwiązaniem równania (24) w obszarze D. Rozważmy krzywą Γ zawartą w D daną równaniami

$$x = x(t), y = y(t), t \in I.$$

Oczywiście wzdłuż krzywej Γ rozwiązanie u przyjmuje wartości

$$z(t) = u(x(t), y(t)), \quad t \in I,$$

a pochodna względem zmiennej t wyraża się wzorem

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$
 (25)

Załóżmy, że krzywa Γ jest tak dobrana, że

$$\frac{dx}{dt} = a \frac{dy}{dt} = b \tag{26}$$

Stąd i z faktu, że u jest rozwiązaniem równania (24) wynika, że prawa strona relacji (25) jest równa c, czyli

$$\frac{dz}{dt} = c. (27)$$

Rozwiązując równanie (26) z warunkami początkowymi: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, otrzymamy

$$x = at + x_0, \quad y = bt + y_0,$$

lub po wyrugowaniu parametru t

$$y_0 = y - \frac{b}{a}(x - x_0). ag{28}$$

Zauważmy, że przez każdy punkt obszaru $\,D\,$ przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie układu równań (26). Rozwiązanie równania (27) ma postać

$$z = ct + K. (29)$$

Przypomnijmy, że funkcja (29) jest rozwiązaniem równania (24) wzdłuż krzywej Γ , czyli krzywej danej równaniem (28). Jeśli zatem stałą K zastąpimy dowolną funkcją która na krzywej Γ przyjmuje stałą wartość, co symbolicznie możemy zapisać

$$K = F(y_0),$$

gdzie y_0 jest dane wzorem (28), funkcja

$$z = ct + F(y_0),$$

będzie w dalszym ciągu spełniać równanie (24) wzdłuż krzywej Γ . Rozważmy teraz funkcje

$$u(x,y) = \frac{c}{a}(x - x_0) + F(y - \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}x_0),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej.

Bezpośredni rachunek pokazuje, że funkcja ta jest rozwiązaniem równania (24). Istotnie

$$au_x + bu_y = a\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}F'(y - \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}x_0)\right) + bF'(y - \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}x_0) = c.$$

 $Tak\ więc,\ aby\ znaleźć\ rozwiązania\ równania\ (\ 24\),\ wystarczy\ rozwiązać\ układ\ równań\ liniowych\ (\ 26\),\ (\ 27\).$

Równania te noszą nazwę równań charakterystyk.

Warunki początkowe $x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0 \,$ należy dobrać tak, aby krzywe całkowe $\, \Gamma \,$

pokryły cały obszar D. Zazwyczaj jako punkty początkowe wygodnie jest wziąść punkty leżące na stosownie dobranej krzywej, na przykład na osi Ox lub Oy.

Często wystarczy ograniczyć się do rozwiązań spełniających warunki: x(0) = 0, $y(0) = y_0$.

Zauważmy jeszcze, że ponieważ F jest funkcją dowolną, wygodnie jest uzyskane rozwiązanie równania (24) zapisać w postaci równoważnej

$$u(x,y) = \frac{c}{a}x + F(y - \frac{b}{a}x).$$
(30)

PRZYKŁAD

Przykład 3:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + 2u_y = 0, \quad x > 0, \ y \in \mathbb{R},$$
 (31)

spełniające warunek początkowy

$$u(0, y) = f(y),$$
 (32)

gdzie $\,f\,$ jest zadaną funkcją różniczkowalną. Rozwiązując równania charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2,$$

z warunkami początkowymi x(0) = 0, $y(0) = y_0$, otrzymamy

$$x = t, \quad y = 2t + y_0,$$

lub po wyrugowaniu t,

$$y = 2x + y_0.$$

Równanie (27) przyjmuje postać

$$\frac{dz}{dt} = 0,$$

a jego rozwiązanie możemy zapisać w postaci

$$z = F(y_0),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej. Zgodnie z wzorem (30) całka ogólna równania (31) ma postać

$$u(x,y) = F(y - 2x).$$

Rozwiązanie to winno spełniać warunek początkowy (32), czyli

$$u(0, y) = F(y) = f(y).$$

Wynika stąd, że rozwiązaniem problemu (31), (32) jest funkcja

$$u(x,y) = f(y - 2x).$$

W szczególności, jeśli $f(y) = 1/(1+y^3)$ to rozwiązaniem tego problemu jest funkcja

$$u(x,y) = \frac{1}{1 + (y - 2x)^3}.$$



Przykład 4:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + au_y = 0, \quad x > 0, \ y > 0 \ (a>0),$$
 (33)

spełniające warunki

$$u(x,0) = f(x), \quad u(0,y) = g(y),$$
 (34)

gdzie f i g są funkcjami różniczkowalnymi i ponadto f(0) = g(0).

Zgodnie z poprzednimi rozważaniami całka ogólna równania (33) ma postać

$$u(x, y) = F(y - ax),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej.

Rozważmy zbiory $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, \ 0 \le y \le ax \}$ oraz $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, \ y > ax \}.$

Zauważmy, że w zbiorze D_1 rozwiązanie równania (33) winno spełniać warunek u(x,0)=f(x), zaś w zbiorze D_2 warunek u(0,y)=g(y). W pierwszym przypadku F(-ax)=f(x), czyli F(t)=f(-t/a), zaś w drugim F(y)=g(y). Wynika stąd, że rozwiązaniem problemu (33), (34) jest funkcja

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{a}, & \text{jeśli } x \ge 0, \ 0 \le y \le ax; \\ g(y-ax), & \text{jeśli } x \ge 0, \ y > ax. \end{cases}$$
(35)



PRZYKŁAD

Przykład 5:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + 3u_y = 0, \quad x > 0, \ y > 0,$$
 (36)

spełniające warunki

$$u(x, 0) = \cos x$$
, dla $x > 0$, (37)
 $u(0, y) = 2y + 1$, dla $y > 0$

Nietrudno sprawdzić, że całka ogólna równania wyjściowego ma postać

$$u(x, y) = F(y - 3x),$$

zaś rozwiązanie spełniające zadane warunki początkowo-brzegowe ma postać

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{3}, & \text{jeśli } x > 0, \ 0 < y < 3x, \\ 2(y - 3x) + 1, & \text{jeśli } x > 0, \ y \ge 3x. \end{cases}$$

Opisaną tu metodę możemy stosować również w przypadku, gdy współczynniki a, b, c są funkcjami zmiennych x i y.

PRZYKŁAD

Przykład 6:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + yu_y = \lambda u, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

spełniające warunek początkowy

$$u(0, y) = f(y),$$

gdzie $\,f\,$ jest funkcją różniczkowalną. Rozwiązując równania charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = y,$$

z warunkami początkowymi x(0) = 0, $y(0) = y_0$ otrzymamy

$$x = t, \quad y = y_0 e^t.$$

Zauważmy, że rodzina krzywych $x=t, y=y_0e^t, y_0\in\mathbb{R}$, pokrywa całą przestrzeń \mathbb{R}^2 , na której szukamy rozwiązania. Równanie (27) przyjmuje tym razem postać

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy

$$z = Ke^{\lambda t}.$$

Ponieważ stała K jest dobrana dla charakterystyki $y_0 = ye^{-x}$ w miejsce K możemy wstawić $F(y_0)$, czyli

$$z = F(y_0)e^{\lambda t},$$

gdzie $\,F\,$ jest dowolną funkcją różniczkowalną. Zgodnie z poprzednimi razważaniami funkcja

$$u(x,y) = F(ye^{-x})e^{\lambda x}$$

jest rozwiązaniem równania wyjściowego. Uwzględniając warunek początkowy mamy

$$u(0, y) = F(y) = f(y).$$

Zatem szukane rozwiązanie ma postać

$$u(x,y) = f(ye^{-x})e^{\lambda x}.$$

PRZYKŁAD

Przykład 7:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + u^2 u_y = 0$$
, $x, y \in \mathbb{R}_+$

spełniające warunki

$$u(0, y) = \sqrt{y}, \quad \text{dla } y > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \text{dla } x > 0.$$

Równania charakterystyk mają postać

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = z^2, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

-

Z równania $\overline{dt}=0$ wynika, że funkcja $z=u(x(t),\,y(t))$ jest stała wzdłuż charakterystyk.

Wykorzystując ten fakt, możemy w drugim równaniu potraktować $z\,$ jako stałą.

Po rozwiązaniu równań charakterystyk z warunkami początkowymi x(0) = 0, $y(0) = y_0$, otrzymamy

$$x = t$$
, $y = z^2t + y_0$, $z = F(y_0)$.

Eliminując z dwóch pierwszych równań t otrzymamy

$$y_0 = y - z^2 x,$$

a wstawiając - podobnie jak poprzednio w równości $z = F(y_0)$ w miejsce z funkcje u, a w miejsce y_0 wyznaczoną powyżej zależność, otrzymamy rozwiązanie równania wyjściowego w postaci uwikłanej

$$u = F(y - xu^2).$$

Wykorzystując warunek początkowy otrzymamy

$$u(0,y) = F(y) = \sqrt{y}.$$

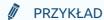
Zatem rozwiązanie naszego problemu możemy zapisać w postaci uwikłanej

$$u = \sqrt{y - xu^2} \quad \text{dla } y - xu^2 \ge 0.$$

Wyznaczając z ostatniego równania u mamy

$$u = \sqrt{\frac{y}{1+x}}, \quad \text{dla } x \ge 0, \ y \ge 0.$$

Zauważmy, że tak otrzymana funkcja u spełna również drugi z żądanych warunków, bowiem $u(x,0)=\sqrt{0}=0$.



Przykład 8:

Rozważmy teraz liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach

$$au_x + bu_y + cu_z = \alpha$$
, $(x, y, z) \in V \subset \mathbb{R}^3$.

Jak poprzednio szukamy rozwiązania wzdłuż krzywej $\Gamma \subset V$ danej równaniami

$$x = x(t)$$
, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $t \in I$.

Załóżmy, że krzywa Γ jest tak dobrana, że

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b, \quad \frac{dz}{dt} = c.$$

Rozwiązując ostatni układ równań z warunkami początkowymi: $x(0)=0, \quad y(0)=y_0, \quad z(0)=z_0 \quad \text{otrzymamy}$

$$x=at, \quad y=bt+y_0, \quad z=ct+z_0,$$

lub po wyrugowaniu parametru t równanie krawędziowe krzywej Γ :

$$y - \frac{b}{a}x = y_0, \quad z - \frac{c}{a}x = z_0.$$

(Jeśli uzyskana rodzina krzywych nie pokrywa obszaru V, należy wzbogacić warunki początkowe).

Zauważmy, że wzdłuż krzywej Γ rozwiązanie równania przyjmuje wartość v(t) = u(x(t), y(t), z(t)), przy czym zgodnie z równaniem wyjściowym

$$\frac{dv}{dt} = \alpha$$

Stąd

$$v = \alpha t + K$$
.

Ponieważ stała K jest dobrana do krzywej Γ , możemy fakt ten wyrazić formułą $K = F(y_0, z_0)$, gdzie F jest dowolną różniczkowalną funkcją dwóch zmiennych, czyli

$$v = \alpha t + F(y_0, z_0).$$

Wracając do zmiennych wyjściowych i pamiętając, że t = x/a mamy

$$u(x,y,z) = \frac{a}{a}x + F(y - \frac{b}{a}x, z - \frac{c}{a}x).$$

Nietrudno sprawdzić, że tak określona funkcja jest rozwiązaniem równania wyjściowego.

Metoda charakterystyk dla równań liniowych pierwszego rzędu

Moduł ten poświęcony jest rozwiązywaniu równań cząstkowych liniowych rzędu pierwszego kiedy współczynniki są funkcjami, a szukana funkcja zależy od dwóch zmiennych.

Rozważmy liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y),$$
 (38)

gdzie a, b, c, f są funkcjami ciągłymi w obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$. Załóżmy ponadto, że funkcje a i b nie zerują się równocześnie w żadnym punkcie zbioru D.

Celem znalezienia rozwiązań równania (38) dokonajmy zmiany zmiennych

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \qquad (x, y) \in D$$
(39)

tak dobranej, aby po zmianie zmiennych w równaniu (38) wyrugować jedną z pochodnych cząstkowych. Załóżmy chwilowo, że taka zmiana zmiennych istnieje i ponadto, że z równań (39) możemy lokalnie wyznaczyć x i y jako funkcje zmiennych ξ i η , czyli

$$x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta), \tag{40}$$

przy czym tak określone funkcje $\,x\,$ i $\,y\,$ posiadają pochodne cząstkowe względem $\,\xi\,$ i $\,\eta.$ Połóżmy

$$w(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).$$

Wracając do zmiennych wyjściowych x i y otrzymamy

$$u(x, y) = w(\xi(x, y), \eta(x, y)).$$

Stad

$$u_x = w_{\varepsilon}\xi_x + w_n\eta_x$$
, $u_v = w_{\varepsilon}\xi_v + w_n\eta_v$.

Podstawiając ostatnie związki do równania (38) otrzymamy

$$(a\xi_x + b\xi_y)w_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)w_n + cw = f.$$

Zauważmy, że postawiony cel osiągniemy, jeśli funkcje η dobierzemy tak, aby

$$a\eta_x + b\eta_y = 0, (41)$$

lub funkcje ξ tak aby

$$a\xi_x + b\xi_y = 0.$$

Niech η będzie rozwiązaniem równanie (41). Połóżmy

$$\eta(x,y)=K,$$

gdzie K jest dowolną stałą. Oczywiście $d\eta = 0$, czyli

$$\eta_x dx + \eta_y dy = 0. (42)$$

Jeśli $\eta_{\rm v} \neq 0$, z warunków (41), (42) wynika, że

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \tag{43}$$

Równanie (43) nazywamy **równaniem charakterystyk** równania (38). Rodzinę krzywych $\psi(x,y)=K$, będącą rozwiązaniem ogólnym równania (43) nazywamy **rodziną charakterystyk** równania (38).

Niech $\psi(x,y)=K$ będzie rozwiązaniem ogólnym równania (43). Kładąc

$$\xi = x$$
, $\eta = \psi(x, y)$,

równanie (38) sprowadzimy do równania

$$\tilde{a}(\xi,\eta)w_{\xi} + \tilde{c}(\xi,\eta)w = \tilde{f}(\xi,\eta) \tag{44}$$

gdzie

$$\tilde{a}(\xi,\eta) = a(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = a(\xi, y(\xi,\eta)),$$

$$\tilde{c}(\xi,\eta) = c(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = c(\xi, y(\xi,\eta)),$$

$$\tilde{f}(\xi,\eta) = f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = f(\xi, y(\xi,\eta)).$$

Zauważmy, że zależność (44) możemy traktować jako równanie różniczkowe zwyczajne względem zmiennej ξ , zależne od parametru η . Niech $w=w(\xi,\eta)$ będzie rozwiązaniem tego równania. Połóżmy

$$u(x,y) = w\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big), \quad (x,y) \in D.$$

Nietrudno sprawdzić, że tak określona funkcja u jest rozwiązaniem równania (38).

Zauważmy jeszcze, że równania charakterystyk (43) możemy zapisać w postaci układu równań

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b. \tag{45}$$



PRZYKŁAD

Przykład 9:

Rozwiązać równanie

$$u_x + 2xyu_y = u, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$
 (46)

z warunkiem początkowym

$$u(0, y) = y^3, y \in \mathbb{R}.$$
 (47)

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dy}{dx} = 2xy.$$

otrzymamy

$$y = Ce^{x^2} \quad \text{lub} \quad ye^{-x^2} = C.$$

Kładąc

$$\xi = x$$
, $\eta = ye^{-x^2}$,

mamy

$$u_x = w_\xi - 2xye^{-x^2}w_\eta, \quad u_y = e^{-x^2}w_\eta,$$

a po podstawieniu do równia wyjściowego

$$w_{\xi} = w$$
.

Rozwiązując ostatnie równanie dostajemy

$$w = Ke^{\xi}$$
.

Ponieważ stała K może zależeć od η , przyjmijmy $K=F(\eta)$, gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej.

Zatem

$$w = F(\eta)e^{\xi}.$$

Zgodnie z poprzednimi uwagami funkcja

$$u(x,y) = F(ye^{-x^2})e^x$$

jest rozwiązaniem równania (46).

Uwzględniając warunek początkowy (47) mamy

$$u(0, y) = F(y) = y^3$$
.

Zatem rozwiązaniem problemu (46), (47) jest funkcja

$$u(x, y) = y^3 e^{-3x^2} e^x = y^3 e^{x-3x^2}.$$

PRZYKŁAD

Przykład 10:

Rozwiązać równanie

$$xu_x + 2x^2u_y - u = x^2e^x. (48)$$

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

otrzymamy $y = x^2 + C$. Zmiana zmiennych

$$\xi = x$$
, $\eta = y - x^2$

prowadzi do równania

$$w_{\xi} - \frac{1}{\xi}w = \xi e^{\xi}.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy

$$w = \xi e^{\xi} + \xi F(\eta),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej. Wracając do zmiennych wyjściowych znajdziemy całkę ogólną równania (48):

$$u(x, y) = xe^x + xF(y - x^2).$$

Załóżmy teraz, że szukamy rozwiązania równania (48), które na krzywej $y = x^2$ przyjmuje wartość $\sin x$, czyli

$$u(x, x^2) = xe^x + xF(0) = \sin x.$$

Oznacza to, że musimy znależć taką stałą $\,C\,$ aby

$$xe^x + xC = \sin x$$
.

Ponieważ jest to niemożliwe, postawiony problem nie posiada rozwiązania.

Załóżmy z kolei, że szukamy rozwiązania równania (48), które na krzywej $y=x^2$ przyjmuje wartość xe^x-4x , czyli

$$u(x, x^2) = xe^x + xF(0) = xe^x - 4x.$$

Wynika stąd, że F(0) = -4. Założony warunek jest więc spełniony, jeśli F jest dowolną funkcją różniczkowalną taką, że F(0) = -4. Oznacza to, że problem ten posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Załóżmy wreście, że szukamy rozwiązania równania (48), które na krzywej $y = x^2 + x$ przyjmuje wartość $\cos x$, czyli

$$u(x, x^2 + x) = xe^x + xF(x) = \cos x.$$

Zauważmy, że warunek ten zachodzi, jeśli $F(x) = \overline{x} \cos x - e^x$.

Zatem szukane rozwiązanie ma postać

$$u(x, y) = xe^{x} + \frac{x}{y - x^{2}}\cos(y - x^{2}) - xe^{y - x^{2}}.$$

Warto odnotować, że krzywa $y=x^2$ jest charakterystyką, natomiast krzywa $y=x^2+x$ nie jest charakterystyką równania (

Z tym faktem - jak zobaczymy póżniej związana jest kwestia jednoznaczności lub niejednoznaczności rozwiązań problemu początkowego.

Metoda charakterystyk dla równań liniowych o nzmiennych niezależnych

Rozważmy najpierw liniowe jednorodne równanie różniczkowe cząstkowe 1-go rzędu o n-zmiennych niezależnych

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$
(49)

gdzie $a_1,...,a_n$ są funkcjami klasy C^1 określonymi w zbiorze $\Omega\subset \mathbb{R}^n$. Rozważmy ponadto układ równań

$$\begin{cases}
\frac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, \dots, x_n), \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} = a_n(x_1, \dots, x_n),
\end{cases}$$
(50)

zwany **układem równań charakterystyk** dla równania (49).

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 1:

Funkcje $u=u(x_1,...,x_n)$ klasy C^1 w zbiorze Ω nazywamy całką pierwszą układu równań (50) jeżeli dla dowolnego rozwiązania

$$x_1 = x_1(t), ..., x_n = x_n(t), t \in I,$$

układu równań (50) mamy

$$u(x_1(t),...,x_n(t)) = \text{const}$$
 dla $t \in I$,

tzn. funkcja u jest stała wzdłuż dowolnego rozwiązania układu równań (50).

Bezpośrednim rachunkiem nietrudno sprawdzić iż zachodzi następująca uwaga:



∵©: UWAGA

Uwaga 1:

Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 , a u całką pierwszą układu (50).

Wówczas funkcja $v = f(u(x_1,...,x_n))$ jest również całą pierwszą układu (2).

Podobnie, jeśli funkcje $u_1,...,u_k$ są całkami pierwszymi uładu (2) a $F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 , to funkcja $v = F(u_1(x_1,...,x_n),...,u_k(x_1,...,x_n))$ jest również całką pierwszą układu (50)



TWIERDZENIE

Twierdzenie 1:

ZAŁOŻENIA:

Funkcja $u: \Omega \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 .

TEZA:

Funkcja u jest rozwiązaniem równania (49) wtedy i tylko wtedy gdy jest całką pierwszą układu równań (50).

DOWÓD:

Warunek wystarczający. Niech u będzie całką pierwszą układu równań (50). Niech $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$.

Niech $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, gdzie $t \in I$, będzie rozwiązaniem układu równań (50) przechodzącym w chwili t_0 przez punkt t_0 tzn. $t_0 = t$

Ponieważ u jest całką pierwszą układu (50) więc

$$u(x_1(t),...,x_n(t)) = \text{const}$$
 dla $t \in I$.

Różniczkując ostatnią równość względem zmiennej t dostajemy

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big(x_1(t),\dots,x_n(t)\Big)x_1^{'}(t)+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big(x_1(t),\dots,x_n(t)\Big)x_n^{'}(t)=0,\quad t\in I.$$

W szczególności dla $t = t_0$ mamy

co oznacza, że funcja u spełnia równanie (49) w punkcie x.

Ponieważ x jest dowolnym punktem zbioru Ω , więc funkcja u jest rozwiązaniem równania (49) w Ω .

Warunek konieczny. Niech $u=u(x_1,...,x_n)$ będzie rozwiązaniem równania (49), a układ funkcji $x_1=x_1(t),...,x_n=x_n(t),$ $t\in I$, rozwiązaniem układu równań (50).

Oczywiście

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(x_1(t), \dots, x_n(t) \right)^{\frac{\partial u}{\partial x_i}} \left(x_1(t), \dots, x_n(t) \right) = 0 \quad \text{dla} \quad t \in I.$$

Ponieważ

$$x_i(t) = a_i(x_1(t), ..., x_n(t))$$
 $i = 1, ..., n,$

powyższe równanie możemy zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial u}{\partial x_i} (x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0,$$

czyli

$$\frac{d}{dt}u(\left(x_1(t),\dots,x_n(t)\right)=0.$$

W konsekwencji

$$u(x_1(t),...,x_n(t)) = \text{const}$$
 dla $t \in I$,

co oznacza, że u jest całką pierwszą układu równań (50).

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 2:

Funkcje $u_1,\,...,\,u_m\in C^1(\Omega)\,\,m\leq n,\,\,$ nazywamy **funkcyjnie niezależnymi** w zbiorze $\,\Omega\,$

jeśli dla dowolnego $x=(x_1,...,x_n)\in\Omega$ rząd macierzy

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \\ \end{bmatrix}$$

wynosi m

W szczególności, jeśli m=n oznacza to, że wyznacznik z powyższej macierzy jest różny od zera.

Zauważmy, że jeśli u_1, \ldots, u_m są funkcyjnie niezależne w zbiorze Ω to dla dowolnego $x \in \Omega$ równość

$$\lambda_1 u_1(x) + \dots + \lambda_m u_m(x) = 0$$

zachodzi tylko wówczas, gdy $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$

Przypomnijmy, że punkt $x \in \Omega$ nazywamy punktem **równowagi** (lub **stacjonarnym**) układu (50), jeśli prawe strony tego układu zerują się w tym punkcie, czyli

$$a_1(^{x}) = a_2(^{x}) = \dots = a_n(^{x}) = 0.$$



TWIFRD7FNIF

Twierdzenie 2:

ZAŁOŻENIA:

Niech $\overset{o}{x}=\overset{o}{(x_1,...,x_n)}\in\Omega$ będzie dowolnym punktem rówwagi układu (50).

TEZA:

Wtedy istnieje n-1 funkcyjnie niezależnych całek pierwszych $u_1,...,u_{n-1}$ tego układu. Ponadto, jeśli u jest całką pierwszą układu (50) w tym otoczeniu, to

$$u(x_1, ..., x_n) = F(u_1(x_1, ..., x_n), ..., u_{n-1}(x_1, ..., x_n)),$$
(51)

gdzie F jest funkcją klasy C^1 .

Dowód tego twierdzenia został przedstawiony w module "Całki pierwsze" (patrz twierdzenie 1).

→ PODSUMOWANIE

Podsumowanie 1:

Z twierdzenia 2 wynika, że dowolne rozwiązanie równania (49) ma postać (51). Aby zatem znaleźć całkę ogólną równania (49) wystarczy znaleźć n-1 funkcyjnie niezależnych całek pierwszych układu równań charakterystyk (50).

UWAGA

Uwaga 2:

Zauważmy, że układ równań (50) możemy zapisać w postaci:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \dots = \frac{dx_n}{a_n}.$$
(52)

a ponadto dla dowolnych $\lambda_1,...,\lambda_n\in \mathbb{R}, \quad \mu_1,...,\mu_n\in \mathbb{R},$

$$\frac{d(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)}{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n} = \frac{d(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n)}{\mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n}$$

PRZYKŁAD

Przykład 11:

Znaleźć całkę ogólną równania

$$xu_x + yu_y + z^2u_z = 0.$$

Układ równań charakterystyk możemy zapisać w postaci:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z^2}$$

Rozwiązując równania:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$
, $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2}$.

otrzymujemy:

$$\frac{y}{x} = C_1, \qquad xe^{\frac{1}{z}} = C_2.$$

łatwo sprawdzić, że funkcje:

$$\psi_1 = \frac{\frac{y}{x}}{x}, \qquad \psi_2 = xe^{\frac{1}{z}}.$$

są liniowo niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk, a zatem szukana całka ogólna ma postać

$$u = F(\frac{y}{x}, xe^{\frac{1}{z}}),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowlną dwóch zmiennych.

Rozważmy teraz równanie niejednorodne

$$a_1(x_1, ..., x_n, u) \xrightarrow{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, ..., x_n, u) \xrightarrow{\partial x_n} f(x_1, ..., x_n, u),$$

$$(53)$$

gdzie $a_1,...,a_n$ są funkcjami klasy C^1 określonymi w zbiorze $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Szukamy rozwiązania w postaci uwikłanej

$$V(x_1, ..., x_n, u) = 0,$$
 (54)

gdzie V jest funkcją posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu punktu $\overset{o}{w} = (\overset{o}{x}_1, ..., \overset{o}{x}_n, \overset{o}{u}).$

Załóżmy, że $\frac{\partial V}{\partial u}_{o}^{o} = 0$. Z twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej w otoczeniu punktu v otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \int \frac{\partial V}{\partial u}, \qquad i = 1, ..., n$$

Podstawiając ostatnie wielkości do równania (53) otrzymamy równanie liniowe jednorodne

$$a_1(x_1, ..., x_n, u)V_{x_1} + \dots + a_n(x_1, ..., x_n, u)V_{x_n} + f(x_1, ..., x_n, u)V_u = 0,$$
(55)

Równania charakterystyk równania (55) mają postać:

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n, u)} - \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n, u)} - \frac{du}{f(x_1, \dots, x_n, u)}$$
(56)

Niech $\psi_1,...,\psi_n$ będą funkcyjnie niezależnymi całkami pierwszymi układu równań (56). Zgodnie z wzorem (51) całka ogólna równania (55) ma postać

$$V = F(\psi_1, ..., \psi_n),$$

gdzie $\,F\,$ jest dowolną funkcją posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe. Stąd i (54) wynika, że całką ogólną równania (53) ma postać

$$F(\psi_1, \dots, \psi_n) = 0. \tag{57}$$



Przykład 12:

Znaleźć całkę ogólną równania

$$u_x + yu_y + z^2u_z = u^3$$
.

Równanie charakterystyk możemy zapisać w postaci:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z^2} = \frac{du}{u^3}$$

Rozwiązując równania:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1}, \qquad \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{1}, \qquad \frac{du}{u^3} = \frac{dx}{1},$$

otrzymamy:

$$\ln y - x = C_1, \qquad \frac{\frac{1}{z}}{z} + x = C_2, \qquad \frac{\frac{1}{u^2}}{u^2} + 2x = C_3$$

łatwo sprawdzić, że funkcje:

$$\psi_1 = \ln y - x$$
, $\psi_2 = \frac{1}{z} + x$, $\psi_3 = \frac{1}{u^2} + 2x$,

są liniowo niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk.

Zatem szukana całka ogólna ma postać:

$$F(\ln y - x, \frac{1}{z} + x, \frac{1}{u^2} + 2x) = 0,$$

gdzie $\,F\,$ jest dowolną funkcją różniczkowalną trzech zmiennych.

Metoda charakterystyk dla prawie-liniowego równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu

Rozważmy prawie-liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \quad (x, y) \in D,$$
 (58)

 $\text{gdzie } a, \text{ , } b, \quad c \text{ sq funkcjami klasy } C^1 \text{ w zbiorze } \Omega \subset \mathbb{R}^3. \text{ Niech } D = \{(x,y): (x,y,z) \in \Omega \text{ dla pewnego } z \in \mathbb{R}\}.$

Zakładamy ponadto, że funkcje a, b nie zerują się równocześnie w żadnym punkcie obszaru Ω .

Przypomnijmy, że rozwiązaniem równania (58) w zbiorze D nazywamy funkcje $u \in C^1(D)$, spełniającą dla każdego $(x,y) \in D$ równanie (58).

Rodzinę wszystkich rozwiązań równania (58) nazywamy całką ogólną tego równania.

Jeśli funkcja u jest rozwiązaniem równania (58) w zbiorze D, to powierzchnia S dana wzorem z = u(x,y), $(x,y) \in D$ nazywa się **powierzchnią całkową** lub **wykresem rozwiązania** równania (58).

Zauważmy, że dla dowolnego punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ wektor

$$\vec{n}(x_0, y_0) = (u_x(x_0, y_0), u_y(x_0, y_0), -1)$$

jest prostopadły do powierzchni S w punkcie P_0 .

Ponieważ u jest rozwiązaniem równania (58), zatem

$$a(P_0)u_x(x_0, y_0) + b(P_0)u_y(x_0, y_0) - c(P_0) = 0, (59)$$

co oznacza, że wektor $\left(a(P_0),b(P_0),c(P_0)\right)$ jest prostopadły do wektora $\vec{n}(x_0,y_0)$, a zatem jest styczny do wykresu rozwiązania u w punkcie P_0 .

Rozważmy układ równań

$$\begin{cases}
\frac{dx}{dt} = a(x, y, z), \\
\frac{dy}{dt} = b(x, y, z), \\
\frac{dz}{dt} = c(x, y, z).
\end{cases}$$
(60)

Krzywe, które są rozwiązaniami układu (60), nazywami charakterystykami równania (58), a same równania (60), równaniami charakterystyk.

Pokażemy, że jeśli dane jest rozwiązanie u równania (58) określone w zbiorze D, to przez dowolny punkt powierzchni całkowej S danej wzorem $z=u(x,y), (x,y)\in D$, przechodzi dokładnie jedna charakterystyka.

Na odwrót, mając daną rodzinę charakterystyk, możemy za ich pomocą skonstruować rozwiązanie równania.



Uwaga 3:

Załóżmy, że przez dowolny punkt powierzchni S klasy C^1 danej równaniem $z=u(x,y), \ (x,y)\in D$, przechodzi rozwiązanie układu równań (60) całkowicie leżące na S. Wówczas funkcja u jest rozwiązaniem równania (58) w zbiorze D.

Istotnie, zgodnie z przyjętym założeniem, przez dowolny punkt P=(x,y,u(x,y)) powierzchni S, przechodzi rozwiązanie układu równań (60) leżące na S. Oczywiście wektor $\vec{w}(P)$, styczny do tego rozwiązania w punkcie P, leży na płaszczyżnie stycznej do powierzchni S w punkcie P, a zatem jest prostopadły do wektora

$$\vec{n}(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y), -1).$$

Zgodnie z równaniami (60)

$$\vec{w}(P) = \left(a(x, y, u(x, y)), b(x, y, u(x, y)), c(x, y, u(x, y))\right).$$

Oczywiście iloczyn skalarny wektorów $\vec{n}(x,y)$ i $\vec{w}(P)$ jest równy zeru, czyli

$$a(x, y, u(x, y))u_x(x, y) + b(x, y, u(x, y))u_y(x, y) - c(x, y, u(x, y)) = 0.$$

Ponieważ ostatnia równość zachodzi dla dowolnego $(x,y) \in D$, oznacza to, że u jest rozwiązaniem równania (58) w zbiorze D.



Uwaga 4:

Załóżmy, że funkcja $z=u(x,y), \ (x,y)\in D, \ \text{jest rozwiązaniem równania (58)}.$ Niech S będzie powierzchnią całkową odpowiadającą temu rozwiązaniu. Niech γ będzie charakterystyką równania (58) przechodzącą przez punkt $(x_0,y_0,z_0)\in S.$ Wówczas krzywa γ leży całkowicie na powierzchni S.

Istotnie, niech $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$, będzie rozwiązaniem układu równań zwyczajnych (60) z warunkami początkowymi $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$. Rozważmy funkcje $U: I \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$U(t) = z(t) - u(x(t), y(t)).$$

Oczywiście $U(t_0)=0$, bowiem $z_0=u(x_0,y_0)$. Różniczkując funkcje U względem t i uwzględniając fakt, że γ jest rozwiązaniem układu (60) otrzymamy

$$U'(t) = z'(t) - u_x(x(t), y(t))x'(t) - u_y(x(t), y(t))y'(t) = c(x(t), y(t), z(t)) - u_x(x(t), y(t))a(x(t), y(t), z(t)) - u_y(x(t), y(t), z(t))b(x(t), y(t), z(t)).$$
(61)

Ponieważ z(t) = U(t) + u(x(t), y(t)), więc z (61) mamy

$$U'(t) = c\left(x(t), y(t), U(t) + u(x(t), y(t))\right) - u_x(x(t), y(t))a\left(x(t), y(t), U(t) + u(x(t), y(t))\right) - u_y(x(t), y(t))b\left(x(t), y(t), U(t) + u(x(t), y(t))\right).$$
(62)

Jest to względem $\ U$ równanie różniczkowe zwyczajne.

Ponieważ prawa strona tego równania jest klasy C^1 (względem zmiennej t) - zgodnie z teorią równań różniczkowych zwyczajnych - dla zadanego warunku początkowego istnieje dokładnie jedno rozwiązanie.

Stąd i z faktu, że u jest rozwiązaniem równania (58) wynika, że funkcja U=0 jest jedynym rozwiązaniem równania (62) spełniającym warunek początkowy $U(t_0)=0$.

Zatem U(t) = z(t) - u(x(t), y(t)) = 0 dla $t \in I$, co oznacza, że wykres krzywej γ leży całkowicie na powierzchni S i kończy to dowód uwagi 4.



Uwaga 5:

Mając daną krzywą $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ zadaną równaniami

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)), \tag{63}$$

będziemy szukać takiego rozwiązania u równania (58), aby jego wykres zawierał krzywą γ , to znaczy, aby zachodził warunek

$$\gamma_3(s) = u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \quad \text{dla} \quad s \in I.$$
 (64)

Ponadto okreslimy dla jakich krzywych γ problem (58), (64) będzie miał dokładnie jedno rozwiązanie, a kiedy nieskończenie wiele rozwiązań.



TWIERDZENIE

Twierdzenie 3:

ZAŁOŻENIA:

Niech $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ będzie funkcją klasy C^1 i niech $s_0 \in I$. Załóżmy, że współczynniki a, b, c równania (58) są klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \left(\gamma_1(s_0), \gamma_2(s_0), \gamma_3(s_0)\right)$ i ponadto

$$\begin{vmatrix} \dot{\gamma_1}(s_0) & \dot{\gamma_2}(s_0) \\ a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$
 (65)

TEZA:

Równanie (58) posiada dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu D punktu (x_0, y_0) , które spełnia warunek (64) w pewnym stosownie dobranym otoczeniu punktu s_0 .

DOWÓD:

Ponieważ funkcje a, b, c są klasy C^1 w otoczeniu punktu P_0 , więc istnieje otoczenie $J = (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \subset I$ punktu s_0 takie, że dla dowolnego $\in J$ układ (60) z warunkami początkowymi

$$x(0) = \gamma_1(s), \quad y(0) = \gamma_2(s), \quad z(0) = \gamma_3(s)$$

posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Oznacza to, że przez każdy punkt $\gamma(s)$, dla $s \in I$, przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie układu (60), które możemy zapisać w postaci:

$$x(t) = X(s,t), \quad y(t) = Y(s,t), \quad z(t) = Z(s,t).$$
 (66)

Z teorii równań różniczkowych zwyczajnych i przyjętych założeń wynika, że funkcje X, Y, Z w pewnym otoczeniu Δ punktu $(s_0,0) \in \mathbb{R}^2$ posiadają ciągłe pochodne cząstkowe względem obu zmiennych. Zauważmy jeszcze, że w otoczeniu tym funkcje X, Y, Z spełniają równania:

$$X_t = a(X, Y, Z), \quad Y_t = b(X, Y, Z), \quad Z_t = c(X, Y, Z).$$
 (67)

oraz warunki początkowe:

$$X(s,0) = \gamma_1(s), \quad Y(s,0) = \gamma_2(s), \quad Z(s,0) = \gamma_3(s).$$
 (68)

(W szczególności $X(s_0, 0) = x_0$, $Y(s_0, 0) = y_0$, $Z(s_0, 0) = z_0$).

Na mocy powyższych obserwacji, zależności (68) i (67) oraz wyboru punktu (x_0, y_0, z_0) mamy

$$X_s(s_0, 0) = \gamma_1(s_0), \quad Y_s(s_0, 0) = \gamma_2(s_0)$$

огах

$$X_t(s_0,0) = a(x_0,y_0,z_0), \quad Y_t(s_0,0) = b(x_0,y_0,z_0).$$

Wykorzystując ostatnie równości, warunek (65) możemy zapisać w postaci

$$\begin{vmatrix} X_s(s_0, 0) & Y_s(s_0, 0) \\ X_t(s_0, 0) & Y_t(s_0, 0) \end{vmatrix} \neq 0.$$
(69)

która mówi, że dla odwzorowania $\Delta \ni (s,t) \to (X(s,t),Y(s,t))$ spełnione są założenia twierdzenia o funkcji odwrotnej. Istnieją zatem otoczenie V punktu (x_0,y_0) oraz funkcje $S,T\colon V\to R$ klasy C^1 takie, że

$$x = X(S(x, y), T(x, y)), \quad y = Y(S(x, y), T(x, y))$$
(70)

огах

$$s = S(X(s,t), Y(s,t)), \quad t = T(X(s,t), Y(s,t)). \tag{71}$$

W szczególności

$$S(x_0, y_0) = s_0, \quad T(x_0, y_0) = 0.$$
 (72)

Bez utraty ogólności rozważań (dobierając stosownie zbiory Δ i V) można przyjąć, że odwzorowanie (X,Y) przekształca

zbiór Δ na V, a odwzorowanie (S,T) zbiór V na Δ , przy czym - zgodnie z (72) - punktowi $(s_0,0)$ odpowiada punkt (x_0,y_0) .

Rozważmy funkcje $u: \Omega \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$u(x, y) = Z(S(x, y), T(x, y)),$$
 (73)

gdzie Z jest funkcją określoną w zbiorze Δ wzorami (66).

Pokażemy, że tak określona funkcja u jest szukanym rozwiązaniem równania (58) w zbiorze V. Różniczkując równość (73) względem zmiennych x i y otrzymamy

$$u_x = Z_s S_x + Z_t T_x, \qquad u_v = Z_s S_v + Z_t T_v.$$
 (74)

Następnie różniczkując równości (70) względem zmiennych x i y otrzymamy

$$1 = X_{s}S_{x} + X_{t}T_{x}, \quad 0 = X_{s}S_{y} + X_{t}T_{y},$$

$$0 = Y_{s}S_{x} + Y_{t}T_{x}, \quad 1 = Y_{s}S_{y} + Y_{t}T_{y},$$

skąd nietrudno wyliczyć, że

$$T_x = \frac{Y_s}{Y_s X_t - Y_t X_s}, \qquad T_y = \frac{X_s}{X_s Y_t - X_t Y_s},$$

$$S_x = \frac{Y_t}{X_s Y_t - X_t Y_s}, \qquad S_v = \frac{X_t}{X_t Y_s - X_s Y_t}.$$

Wykorzystując związki (67), (73) i (74) oraz ostatnie równości otrzymamy

$$\begin{split} a(x,y,u)u_{x} + b(x,y,u)u_{y} &= X_{t} \left(Z_{s} S_{x} + Z_{t} T_{x} \right) + Y_{t} \left(Z_{s} S_{y} + Z_{t} T_{y} \right) = \\ &\frac{Z_{s} Y_{t}}{X_{s} Y_{t} - X_{t} Y_{s}} + \frac{Z_{t} Y_{s}}{Y_{s} X_{t} - Y_{t} X_{s}} \right) + Y_{t} \left(\frac{Z_{s} X_{t}}{X_{t} Y_{s} - X_{s} Y_{t}} + \frac{Z_{t} X_{s}}{X_{s} Y_{t} - X_{t} Y_{s}} \right) = \\ &\frac{Z_{s} \left(X_{t} Y_{t} - X_{t} Y_{t} \right)}{X_{s} Y_{t} - X_{t} Y_{s}} + \frac{Z_{t} \left(X_{s} Y_{t} - X_{t} Y_{s} \right)}{X_{s} Y_{t} - X_{t} Y_{s}} = Z_{t} = c(x, y, u), \end{split}$$

co oznacza, że funkcja u jest rozwiązaniem równania (58) w zbiorze V.

Korzystając następnie z (68), (73) i (71) otrzymamy

$$u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = u(X(s, 0), Y(s, 0)) = Z(S(X(s, 0), Y(s, 0)), T(X(s, 0), Y(s, 0))) = Z(s, 0) = \gamma_3(s),$$

co oznacza. że rozwiązanie u spełnia warunek (64) w pewnym otoczeniu punktu s_0 .

Pozostaje sprawdzić, że rozwiązanie to jest określone jednoznacznie.

Niech v będzie dowolnym rozwiązaniem równania (58) zawierającym krzywą γ . Na mocy uwagi 2 charakterystyka równania (58) przechodząca przez dowolny punkt krzywej γ leży całkowicie na powierzchni całkowej z = v(x, y). W szczególności wynika stąd, że powierzchnia

$$x = X(s,t), \quad y = Y(s,t), \quad z = Z(s,t), \quad (s,t) \in \Delta,$$

czyli zgodnie z (73) powierzchnia z = u(x,y) = Z(S(x,y),T(x,y)), leży całkowicie na powierzchni całkowej z = v(x,y) co oznacza, że lokalnie rozwiązania u i v pokrywają się. Dowód twierdzenia 1 został zakończony.

Rozpatrzmy teraz przypadek

$$\begin{vmatrix} \dot{\gamma_1}(s) & \dot{\gamma_2}(s) \\ a(P) & b(P) \end{vmatrix} = 0, \tag{75}$$

dla $s \in J$, $P = (X(s,0), Y(s,0), Z(s,0)) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$.

Warunek (75) możemy zapisać w postaci

$$\gamma_{1}^{\prime}(s) = \lambda a(P), \quad \gamma_{2}^{\prime}(s) = \lambda b(P). \tag{76}$$

Po zróżniczkowanie (64) względem s otrzymamy

$$\gamma_{3}^{'}(s) = u_{x}(\gamma_{1}(s), \gamma_{2}(s))\gamma_{1}^{'}(s) + u_{y}(\gamma_{1}(s), \gamma_{2}(s))\gamma_{2}^{'}(s)$$
(77)

natomiast z (58) i (68) wynika natychmiast, że

$$c(P) = a(P)u_{\chi}(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) + b(P)u_{\chi}(\gamma_1(s), \gamma_2(s))$$

$$(78)$$

Z równości (76), (77) i (78) wynika, że $\gamma_3(s) = \lambda c(P)$. Zatem wektory $\left(\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s)\right)$ oraz $\left(a(P), b(P), c(P)\right)$, $s \in J$, są równoległe, co oznacza, że γ jest charakterystyką równania (58). Zauważmy, że w tym przypadku problem (58), (64) posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Istotnie, niech $\tilde{\gamma}$ będzie krzywą przecinającą krzywą γ . Na mocy twierdzenia 3 istnieje (dokładnie jedno) rozwiązanie równania (58) zawierające krzywą $\tilde{\gamma}$. Z drugiej strony γ ma wspólny punkt z tym rozwiązaniem, zatem na mocy uwagi 4, również krzywa γ leży całkowicie na tym rozwiązaniu. Ponieważ takich krzywych $\tilde{\gamma}$ może być nieskończenie wiele, więc otrzymamy nieskończenie wiele rozwiązań zawierających krzywą γ .

Metoda charakterystyk - przykłady

Na poniższym przykładzie prześledzimy różne sposoby praktycznego wykorzystania metody charakterystyk, które umownie nazwiemy metodą krzywych charakterystycznych, metodą charakterystyk, metodą zmiany zmiennych oraz metodą całek pierwszych.

Znaleźć rozwiązanie równania

$$xu_{x} + yu_{y} = u, (79)$$

przechodzące przez krzywą

$$x = s, y = s + 1, z = 2, s \in \mathbb{R}.$$
 (80)



PRZYKŁAD

Przykład 13: Metoda krzywych charakterystycznych

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = y, \qquad \frac{du}{dt} = u,$$

otrzymamy

$$x = Ae^t$$
, $y = Be^t$, $u = Ce^t$.

Załóżmy, że charakterystyka przechodzi przez punkt (s, s + 1, 2) dla t = 0. Wynika stąd, że

$$A = s$$
, $B = s + 1$, $C = 2$.

Zatem równania charakterystyk przechodzących przez zadaną krzywą mają postać

$$x = se^t$$
, $y = (s + 1)e^t$, $u = 2e^t$.

Eliminując z tego układu s i t, otrzymamy rozwiązanie problemu (79), (80)

$$u=2(y-x).$$

PRZYKŁAD

Przykład 14: Metoda charakterystyk

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 1, y(0) = y_0, \text{ otrzymamy}$

$$x = e^t$$
, $y = y_0 e^t$

a po wyrugowaniu t

$$\frac{y}{x} = y_0.$$

Rozwiązując pozostałe równanie charakterystyk

$$\frac{dz}{dt} = z$$

otrzymamy

$$z = Ce^t$$
,

gdzie stała $\,C\,$ zależy od krzywej $\frac{y}{x}=y_0.\,$ Fakt ten możemy zapisać w postaci

$$z = F(v_0)e^t$$

gdzie F jest dowolną funkcją klasy C^1 . Wracając do zmiennych x i y otrzymamy

$$u = F(\frac{y}{x})x.$$

Uwzględniając zadane warunki mamy

$$2 = F(1 + \frac{1}{s})s$$

Podstawiając $\tau = 1 + \frac{1}{s}$ otrzymamy

$$F(\tau) = 2(\tau - 1)$$

Zatem szukane rozwiązanie problemu (79), (80) ma postać

$$u = 2\left(\frac{y}{x} - 1\right)x = 2(y - x).$$

Przykład 15: Metoda zmiany zmiennych

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

otrzymamy y = Cx. Zmiana zmiennych

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{x}$$

sprowadza równanie wyjściowe do postaci

$$\xi \frac{dw}{d\xi} = w$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy

$$w = \xi F(\eta),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej. Wracają do zmiennych wyjściowych otrzymamy całkę ogólną równania wyjściowego

$$u(x,y) = xF\left(\frac{y}{x}\right).$$

Uwzględniając warunek początkowy u(s, s + 1) = 2 otrzymamy

$$2 = sF(\frac{s+1}{s})$$

 $\text{K\'ed\'ac } t = \frac{s+1}{s} \text{, czyli } s = \frac{1}{t-1}, \text{ mamy}$

$$2 = \frac{1}{t - 1} F(t)$$

Zatem F(t) = 2(t-1). Stąd szukane rozwiązanie problemu (79), (80) ma postać

$$u(x,y) = 2(\frac{y}{x} - 1)x = 2(y - x).$$



Przykład 16: Metoda całek pierwszych

Rozwiązując równania

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$
, $\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}$.

otrzymamy rodziny charakterystyk

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{u}{x} = C_2.$$

Ponieważ funkcje $\psi_1=\frac{u}{x}, \quad \psi_2=\frac{u}{x}$ są funkcyjnie niezależnmi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}$$

zgodnie z wzorem (56) całka ogólna równania wyjściowego ma postać

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0,$$

gdzie F jest dowolną różniczkowalną funkcją dwóch zmiennych. Zauważmy, że wzór na całkę ogólną możemy formalnie zapisać w postaci $F(C_1,C_2)=0$, gdzie $C_1=\psi_1,\ C_2=\psi_2$. Aby znaleźć całkę szczególną przechodzącą przez zadaną krzywą należy wyznaczyć funkcje F. W tym celu wystarczy wyznaczyć związek pomiędzy C_1 i C_2 . Możemy go uzyskać rugując S, S, S0 oraz S1 z równań

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{u}{x} = C_2, \quad x = s, \quad y = s + 1, \quad u = 2.$$

Po przeprowadzeniu prostych rachunków otrzymamy

$$C_2 = 2(C_1 - 1).$$

Podstawiając w miejsce $\ C_1 \ {\rm i} \ C_2 \ {\rm stosowne} \ {\rm funkcje} \ {\rm mamy}$

$$\frac{u}{x} = 2\left(\frac{y}{x} - 1\right).$$

Stąd otrzymujemy rozwiązanie problemu (79), (80)

$$u = 2(y - x).$$

ZADANIE

Zadanie 1:

Treść zadania:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + uu_y = u^2,$$

które na krzywej $y = \ln x$ przyjmuje wartość u = 1, tzn. $u(x, \ln x) = 1$.

Rozwiązanie:

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = 1, \qquad \frac{du}{dt} = u^2, \qquad \frac{dy}{dt} = u,$$

otrzymamy

$$x = t + A$$
, $u = \frac{1}{C - t}$, $y = -\ln|C - t| + B$

Przyjmując, że dla t=0 charakterystyki przechodzą przez punkt $(s,\,\ln\!s,\,1),\,\,$ możemy wyznaczyć stałe

$$A = s$$
, $C = 1$, $B = lns$.

Zatem

$$x = t + s$$
, $y = -\ln|1 - t| + \ln s$, $u = \frac{1}{1 - t}$.

Eliminując z tego układu t i s otrzymamy szukane rozwiązanie w postaci uwikłanej

$$x + \frac{\frac{1}{u}}{u} - 1 = \frac{1}{|u|} e^y.$$

Zadanie 2:

Treść zadania:

Znaleźć całkę ogólną równania

$$(y + z)u_x + yu_y + (x - y)u_z = 0.$$

Rozwiązanie:

Równania charakterystyk mają postać:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x-y}.$$

Rozwiązując równania:

$$\frac{d(x+z)}{x+z} = \frac{dy}{y}, \qquad \frac{d(x-y)}{z} = \frac{dz}{x-y},$$

otrzymujemy

$$\frac{x+z}{y} = C_1, \quad (x-y)^2 - z^2 = C_2.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje

$$\psi_1 = \frac{x+z}{y}, \quad \psi_2 = (x-y)^2 - z^2$$

są liniowo niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk. Zatem - na mocy twierdzenia 1 i twierdzenia 2 - całka ogólna równania wyjściowego ma postać:

$$u = F\left(\frac{x+z}{y}, (x-y)^2 - z^2\right),$$

gdzie $\,F\,$ jest dowolną funkcją różniczkowalną dwóch zmiennych.

Zadanie 3:

Treść zadania:

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$yu_x - 4x^3u_y = yu^2.$$

Rozwiązanie:

W celu znalezienia całek pierwszych układu równań charakterystyk

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-4x^3} = \frac{du}{yu^2}$$

rozwiążmy równania

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-4x^3}, \qquad \frac{dx}{y} = \frac{du}{yu^2}.$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$2x^4 + y^2 = C_1, \qquad x + \frac{1}{u} = C_2.$$

Ponieważ funkcje $\psi_1=2x^4+y^2, \ \psi_2=x+\frac{1}{u}$ są funkcyjnie niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk, szukane rozwiązanie ogólne ma postać:

$$F(2x^4 + y^2, x + \frac{1}{u}) = 0.$$

Zadanie 4:

Treść zadania:

Znaleźć całkę ogólną równania

$$x^2 u_x + y^2 u_y = (x + y)u.$$

Rozwiązanie:

Równania charakterystyk mają postać

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{du}{(x+y)u}.$$

Rozważmy układ równań

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}, \qquad \frac{d(y-x)}{y^2 - x^2} = \frac{du}{(x+y)u}.$$

 $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$ Całka pierwszego równania ma postać $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=C_1$. Zapisując natomiast drugie równanie w postaci równoważnej

$$\frac{d(y-x)}{y-x} = \frac{du}{u}$$

zauważymy łatwo, że jego całka ma postać $\frac{u}{y-x}=C_2$. W konsekwencji szukane rozwiązanie możemy wyrazić w formie

$$F\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{u}{y - x}\right) = 0.$$



Zadanie 5:

Treść zadania:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$(y-z)u_x + (z-x)u_y + (x-y)u_z = 0.$$

Rozwiązanie:

Z układu równań chrakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = y - z, \qquad \frac{dy}{dt} = z - x, \qquad \frac{dz}{dt} = x - y,$$

otrzymamy zależności

$$dx + dy + dz = 0$$
, $xdx + ydy + zdz = 0$,

które implikują natychmiast rodziny całek pierwszych

$$x + y + z = C_1$$
, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

Szukana całka ogólna ma zatem postać

$$u = F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2).$$

Rozdział 3. Klasyfikacja równań liniowych rzędu drugiego. Metoda charakterystyk

Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych 2-go rzędu 2-zmiennych

Rozważmy równanie różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, (81)$$

gdzie a_{11} , a_{12} , a_{22} są funkcjami określonymi w zbiorze $D \subset \mathbb{R}^2$, nie zerującymi się równocześnie w żadnym punkcie tego zbioru, u jest szukaną funkcją klasy C^2 zmiennych x i y, a F jest zadaną funkcją pięciu zmiennych. Zauważmy, że przy przyjętych założeniach o funkcji u - na mocy twierdzenia Schwarza - pochodne mieszane tej funkcji są sobie równe, tzn.

$$u_{xy} = u_{yx}$$
.

Pokażemy, że dokonując stosownej zmiany zmiennych, możemy równanie (81) doprowadzić do postaci, w której współczynnik przy pochodnej mieszanej przyjmie wartość zero. Postać taką nazywamy postacią **kanoniczną**, przy czym: jeśli pozostałe współczynniki przy pochodnych drugiego rzędu są różne od zera i mają ten sam znak, równanie nazywamy typu **eliptycznego**, jeśli

są znaków różnych, typu **hiperbolicznego**, jeśli przynajmniej jeden ze współczynników przy pochodnych drugiego rzędu jest równy zeru, natomiast pochodne pierwszego rzędu względem tych zmiennych nie znikają, typu **parabolicznego**. Tak więc równania:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$
, $u_{xx} - u_{yy} = 0$, $u_x + u_{yy} = 0$,

są odpowiednio typu eliptycznego, hiperbolicznego i parabolicznego.

Należy podkreślić, że typ równania nie zależy od sposobu sprowadzenia do postaci kanonicznej. Okazuje się, że jest on niezmiennikiem względem przekształceń nieosobliwych.

Rozważmy przekształcenie

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (x, y) \in D.$$
 (82)

Przyjmijmy, że przekształcenie to obszar $\,D\,$ przekształca w obszar $\,\Delta.$

Załóżmy, że funkcje ξ i η są klasy C^1 w zbiorze D i ponadto istnieje przekształcenie

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Delta$$
 (83)

odwrotne do przekształcenia (82). Przypomnijmy, że jeśli jakobian przekształcenia (82) jest różny od zera, to przekształcenie takie nazywamy przekształceniem **nieosobliwym**. Przekształcenie nieosobliwe jest zawsze odwracalne. Kładąc

$$w(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad (\xi, \eta) \in \Delta,$$

równanie (81) przekształcimy na równanie względem zmiennych ξ i η . Niech w będzie rozwiązaniem równania przekształconego. Po powrocie do współrzędnych wyjściowych otrzymamy rozwiązanie równania wyjściowego.

$$u(x, y) = w(\xi(x, y), \eta(x, y)), \quad (x, y) \in D.$$

Oczywiście

$$\begin{split} u_x &= w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x, & u_y &= w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= w_\xi \xi_x^2 + 2 w_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + w_{\eta\eta} \eta_x^2 + w_\xi \xi_{xx} + w_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= w_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + w_{\xi\eta} \left(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x \right) + w_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + w_\xi \xi_{xy} + w_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} &= w_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2 w_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + w_{\eta\eta} \eta_y^2 + w_\xi \xi_{yy} + w_\eta \eta_{yy}. \end{split}$$

Jeśli położymy

$$\begin{split} \tilde{a}_{11} &= a_{11} \xi_x^2 + 2 a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2, \\ \tilde{a}_{12} &= a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y, \\ \tilde{a}_{22} &= a_{11} \eta_x^2 + 2 a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2, \end{split} \tag{84}$$

to równanie (81) po zastosowaniu przekształcenia (83) przyjmie postać

$$\tilde{a}_{11}w_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12}w_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22}w_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi,\eta,w,w_{\xi},w_{\eta}) = 0,$$

gdzie współczynniki \tilde{a}_{11} , \tilde{a}_{12} , \tilde{a}_{22} są funkcjami zmiennych ξ i η . Założmy, że przekształcenie (82) jest tak dobrane, że $\tilde{a}_{11}=0$ oraz $\tilde{a}_{22}=0$. Równość $\tilde{a}_{11}=0$ oznacza, że

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0. {(85)}$$

Podobnie równość $\tilde{a}_{22}=0$ oznacza, że jest spełnione równanie (85) z funkcją η w miejsce ξ . Oba zatem przypadki dają to samo równanie (85).



Uwaga 6:

Jeśli funkcja $\xi=\varphi(x,y),\;{
m gdzie}\;\; \varphi_y\neq 0,\;\;{
m jest}\;{
m całką}\;{
m r\'ownania}\;{
m (85)},\;{
m to}\;{
m rodzina}\;{
m funkcji}$

$$\varphi(x,y) = C$$

jest całką ogólną równania

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$
 (86)

Na odwrót, jeśli rodzina funkcji $\varphi(x,y)=C$ jest całką ogólną równania (86), to funkcja $\xi=\varphi(x,y)$ jest całką równania (85),

Istotnie, niech $\xi = \phi(x, y)$ będzie całką równania (85). Załóżmy, że $\xi_y \neq 0$. Dzieląc równanie (85) przez ξ_y^2 otrzymamy

$$\frac{\xi_x}{a_{11}} \left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + 2a_{12} \frac{\xi_x}{\xi_y} + a_{22} = 0.$$
 (87)

Rozważmy rodzinę krzywych $\varphi(x, y) = C$.

Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{\xi_x}{\xi_y} \tag{88}$$

Podstawiając ostatnią równość do równania (87) otrzymamy równanie (86), co oznacza, że $\varphi(x,y)=C$ jest całką ogólną tego równania.

Załóżmy teraz, że $\varphi(x,y) = C$ jest całką ogólną równania (86). Z twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej otrzymamy wzór (88). Podstawiając zależność (88) do równania (86) otrzymamy (87), a w konsekwencji (85), co kończy dowód.

Równanie (86) nazywamy **równaniem charakterystyk** równania (81). Zauważmy jeszcze, że warunek $\varphi_y \neq 0$ w powyższej uwadze nie jest ograniczający.

Istotnie, jeśli chcemy aby rozważane przekształcenie było nieosobliwe, pochodne cząstkowe φ_x i φ_y funkcji φ nie mogą zerować się równocześnie, zatem jedna z nich jest różna od zera. Jeśli $\varphi_x \neq 0$, argument jest analogiczny.

Kładąc $\lambda = \frac{dy}{dx}$ równanie (86) przyjmie postać

$$a_{11}\lambda^2 - 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0. ag{89}$$

Jak wiadomo, rozwiązanie tego równania względem λ zależy od wyróżnika

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

przy czym należy rozważyć trzy przypadki: $\delta < 0, \ \delta = 0 \ \ {\rm i} \ \ \delta > 0.$

Przypadek $\delta < 0$. Załóżmy, że $\delta(x,y) < 0$ dla $(x,y) \in D$.

Równanie (89) posiada wówczas dwa rozwiązania o wartościach rzeczywistych:

$$\lambda_1 = \frac{a_{12} - \sqrt{-\delta}}{a_{11}}, \qquad \lambda_2 = \frac{a_{12} + \sqrt{-\delta}}{a_{11}}.$$

Niech $\, \varphi \,$ i $\, \psi \,$ będą odpowiednio rozwiązaniami równań

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y).$$

Z Uwagi 1 wynika, że przekształcenie

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

sprowadza równanie (81) do postaci

$$\tilde{a}_{12}w_{\xi\eta} = \bar{F}(\xi, \eta, w, w_{\xi}, w_{\eta}),$$

a po podzieleniu przez \tilde{a}_{12} do postaci

$$w_{\xi_n} = \tilde{F}(\xi, \eta, w, w_{\xi}, w_n), \tag{90}$$

gdzie funkcja \tilde{F} zawiera wszystkie wyrazy z pochodnymi niższego rzędu. Dokonując kolejnej zmiany zmiennych

$$s = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2}$$

i kładąc

$$v(s,t) = w(\xi(s,t), \eta(s,t)) = w(s+t, s-t),$$

otrzymamy

$$w(\xi,\eta) = v\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right).$$

Stad

$$w_{\xi} = \frac{v_s + v_t}{2}, \quad w_{\eta} = \frac{v_s - v_t}{2}, \quad w_{\xi\eta} = \frac{v_{ss} - v_{tt}}{4}.$$

Po uwzględnieniu ostatnich zależności równanie (90) przyjmuje postać

$$v_{ss} - v_{tt} = \hat{F}(s, t, v, v_s, v_t),$$

gdzie podobnie jak poprzednio funkcja \hat{F} zawiera wszystkie wyrazy o pochodnych niższego rzędu. Jest to więc równanie typu **hiperbolicznego**.

Przypadek $\delta = 0$. Załóżmy, że $\delta(x,y) = 0$ dla $(x,y) \in D$.

Oznacza to, że
$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$
, czyli $a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}$ lub $a_{12} = -\sqrt{a_{11}a_{22}}$.

Załóżmy, że a_{12} przyjmuje pierwszą z wymienionych wartości, a ponadto $a_{11} > 0$. Korzystając z ostatniej równości otrzymamy

$$\begin{split} \tilde{a}_{11} &= \, a_{11} \xi_x^2 + 2 a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2 = \big(\sqrt{a_{11}} \xi_x + \sqrt{a_{22}} \xi_y \big)^2, \\ \tilde{a}_{12} &= \, a_{11} \xi_x \eta_x + \sqrt{a_{11}} \sqrt{a_{22}} \big(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x \big) + a_{22} \xi_y \eta_y = \\ &\quad \big(\sqrt{a_{11}} \xi_x + \sqrt{a_{22}} \xi_y \big) \big(\sqrt{a_{11}} \eta_x + \sqrt{a_{22}} \eta_y \big). \end{split}$$

Zatem $\tilde{a}_{11}=0$ implikuje $\tilde{a}_{12}=0$. Analogiczny rezultat uzyskamy gdy a_{12} przyjmuje drugą z wymienionych wartości. Jeśli zatem za funkcje ξ przyjmiemy rozwiązanie równania (86) a za η dowolną funkcje tak aby przekształenie było nieosobliwe, to po zmianie zmiennych równanie (81) przyjmie postać

$$w_{\eta\eta} = \tilde{F}\big(\xi,\eta,w,w_\xi,w_\eta\big).$$

Jeśli przy tym po prawej stronie nie znika w_{ξ} , jest to równanie typu **parabolicznego**.

Oczywiście najprostrze wydaje się podstawienie $\xi = \varphi(x, y), \ \eta = y \ \text{lub} \ \xi = x, \ \eta = \varphi(x, y), \ \text{gdzie} \ \varphi \ \text{jest całką równania (86)}.$

Przypadek $\delta > 0$. Załóżmy, że $\delta(x,y) > 0$ dla $(x,y) \in D$.

W tym przypadku równanie (89) posiada dwa rozwiązania o wartościach zespolonych:

$$\lambda_1 = \frac{a_{12} + i\sqrt{\delta}}{a_{11}}, \qquad \lambda_2 = \frac{a_{12} - i\sqrt{\delta}}{a_{11}}.$$

Niech Φ i Ψ będą odpowiednio rozwiązaniami równań

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y).$$

Oznaczmy przez $\, \varphi \,$ część rzeczywistą funkcji $\, \Phi , \,$ a przez $\, \psi \,$ jej część urojoną. Wówczas

$$\Phi = \varphi + i\psi, \quad \Psi = \varphi - i\psi.$$

Oczywiście krzywe $\Phi(x,y)=C$ (podobnie $\Psi(x,y)=C$) są całkami równania (85), a warunek $\tilde{a}_{11}=0$ przyjmie postać

$$a_{11}\Phi_x^2 + 2a_{12}\Phi_x\Phi_y + a_{22}\Phi_y^2 = 0.$$

Podstawiając do ostatniego równania związki

$$\Phi_{x} = \varphi_{x} + i\psi_{x}, \qquad \Phi_{y} = \varphi_{y} + i\psi_{y},$$

otrzymamy

$$\left(a_{11}\varphi_{x}^{2}+2a_{12}\varphi_{x}\varphi_{y}+a_{22}\varphi_{y}^{2}\right)-\left(a_{11}\psi_{x}^{2}+2a_{12}\psi_{x}\psi_{y}+a_{22}\psi_{y}^{2}\right)+2i\left(a_{11}\varphi_{x}\psi_{x}+a_{12}(\varphi_{x}\psi_{y}+\varphi_{y}\psi_{x})+a_{22}\varphi_{y}\psi_{y}\right)=0,$$

skąd wynika natychmiast, że

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2,$$

$$a_{11}\varphi_x\psi_x + a_{12}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + a_{22}\varphi_x\psi_y = 0.$$
(91)

Stosując teraz zmianę zmiennych

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \tag{92}$$

gdzie φ i ψ są odpowiednio częścią rzeczywistą i urojoną całki Φ , ze związków (84) i (91) otrzymamy natychmiast: $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22}$, $\tilde{a}_{12} = 0$. Zatem przekształcenie (92) sprowadza równanie (81) do postaci

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} = \tilde{F}(\xi, \eta, w, w_{\xi}, w_{\eta}).$$

Jest to zatem równanie typu eliptycznego.

Na zakończenie rozważań rozpatrzmy przypadek, gdy w równaniu (81) współczynnik $a_{22}=0$. Wówczas zgodnie z (84)

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y, \qquad \tilde{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y.$$

Jeśli $\varphi(x,y)=0$ jest całką ogólną równania (86), wówczas zerowanie się współczynników \tilde{a}_{11} , \tilde{a}_{22} uzyskamy przyjmując $\xi=\varphi(x,y),\;\eta=y.$ Jeśli natomiast $a_{11}=0,\;$ przyjmując $\xi=\varphi(x,y),\;\eta=x.$



Uwaga 7:

Typ równania zależy od wyróżnika δ . Korzystając z wzorów (84) nietrudno sprawdzić, że

$$\tilde{a}_{12}^2 - \tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2,$$

skąd wynika natychmiast, że typ równania jest niezmiennikiem względem przekształceń nieosobliwych.



Uwaga 8:

Zauważmy też, że znak wyróżnika δ może się zmieniać w zależności od punktu $(x,y) \in D$. Niech

$$D_1 = \{(x,y) \in D : \delta(x,y) < 0\}, \quad D_2 = \{(x,y) \in D : \delta(x,y) = 0\}\}, \quad D_3 = \{(x,y) \in D : \delta(x,y) > 0\}.$$

Zatem w obszarze D_1 równanie jest typu hiperbolicznego, w obszarze D_2 typu parabolicznego a w obszarze D_3 typu eliptycznego.



PRZYKŁAD

Przykład 17:

Rozważmy równanie

$$u_{xx} - xyu_{yy} = 0.$$

Ponieważ $\delta = -xy$ jest ujemne w pierwszej i trzeciej ćwiartce, dodatnie w drugiej i czwartej ćwiartce, równanie to jest typu hiperbolicznego w pierwszej i trzeciej ćwiartce oraz typu eliptycznego w drugiej i czwartej ćwiartce.

Na osiach x=0 oraz y=0, równanie redukuje sią do postaci $u_{\chi\chi}=0$, czyli równania zwyczajnego.



Zadanie 6:

Treść zadania:

Sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\delta=0$, czyli jest to równanie typu parabolicznego. Jeśli $x=0,\ y\neq 0$, przyjmuje ono postać $u_{yy} = 0.$

Jeśli $y = 0, x \neq 0$, przyjmuje postać

$$u_{xx} = 0.$$

Załóżmy teraz, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Równanie charakterystyk ma postać

$$x^{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2} + 2xy^{\frac{dy}{dx}} + y^{2} = 0,$$

czyli

$$\left(x^{\frac{dy}{dx}} + y\right)^2 = 0.$$

Całką równania

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

jest funkcja

$$v = \frac{C}{x}$$

Podstawiając

$$\xi = x, \quad \eta = xy$$

otrzymamy

$$\begin{split} u_x &= w_\xi + y w_\eta, & u_y = x w_\eta, & u_{yy} = x^2 w_{\eta\eta}, \\ u_{xx} &= w_{\xi\xi} + 2y w_{\xi\eta} + y^2 w_{\eta\eta}, & u_{xy} = x w_{\xi\eta} + x y w_{\eta\eta} + w_\eta \end{split}$$

a po podstawieniu tych wielkości do równania wyjściowego mamy

$$x^2 w_{\xi\xi} - 2xy w_{\eta} = 0,$$

czyli

$$w_{\xi\xi} = \frac{\frac{2\eta}{\xi^2}}{w_{\eta}}$$



ZADANIE

Zadanie 7:

Treść zadania:

Sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 3u_x + 2u_y = 0.$$

Rozwiązanie:

Nietrudno sprawdzić, że $\delta = -4$. Jest to zatem równanie typu hiperbolicznego. Równanie charakterystyk ma postać

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0.$$

Rozwiązując równanie

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

znajdziemy jego pierwiastki: $\lambda_1 = -1 \; \mathrm{i} \; \lambda_2 = 3. \; \mathrm{Całkami} \; \mathrm{ogólnymi} \; \mathrm{równań}$

$$\frac{dy}{dx} = -1, \qquad \frac{dy}{dx} = 3$$

są rodziny funkcji

$$x + y = C_1$$
, $3x - y = C_2$.

Stosując podstawienie

$$\xi = x + y, \quad \eta = 3x - y$$

i kładąc

$$w(\xi,\eta)=u\Big(x(\xi,\eta),y((\xi,\eta)\Big)=u\bigg(\frac{\xi+\eta}{4}\,,\frac{3\xi-\eta}{4}\bigg),$$

mamy

$$u(x, y) = w(\xi(x, y), \eta(x, y)) = w(x + y, 3x - y).$$

Zatem

$$\begin{split} u_x &= w_\xi + 3w_\eta, & u_y &= w_\xi - w_\eta, & u_{xx} &= w_{\xi\xi} + 6w_{\xi\eta} + 9w_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} - 3w_{\eta\eta}, & u_{yy} &= w_{\xi\xi} - 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}. \end{split}$$

Wstawiając te wielkości do równania wyjściowego otrzymamy

$$w_{\xi\eta} + \frac{5}{16} w_{\xi} + \frac{7}{16} w_{\eta} = 0.$$

Podstawiając z kolei

$$s = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2}$$

i kładąc

$$v(s,t) = w\big(\xi(s,t), \eta(s,t)\big) = w(s+t,\,s-t),$$

otrzymamy szukaną postać kanoniczną

$$v_{ss} - v_{tt} + \frac{3}{2}v_s - \frac{1}{4}v_t = 0.$$

Zadanie 8:

Treść zadania:

Sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$y^2 u_{xx} + 2x^2 u_{yy} + 2xy u_{xy} + y u_y = 0.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyróżnik $\delta=x^2y^2$ może przyjmować zarówno wartość zero jak i wartości dodatnie, należy rozpatrzeć dwa przypadki: $\delta=0$ i $\delta>0$.

Jeśli $\delta = 0$, wówczas albo x = 0, $y \neq 0$, a równanie przyjmuje postać

$$u_{xx} + \frac{1}{y}u_y = 0,$$

albo $y = 0, x \neq 0$, a równanie przyjmuje postać

$$u_{yy} = 0.$$

Rozważmy teraz przypadek $\delta > 0$. Pierwiastkami równania

$$y^2\lambda^2 - 2xy\lambda + 2x^2 = 0$$

są liczby zespolone $\ \lambda_1=\dfrac{(1-i)x}{y}$ oraz $\ \lambda_2=\dfrac{(1+i)x}{y}$. Rozwiązując równania

 $\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{x}{y}}_{\text{oraz}} \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{x}{y}}_{\text{oraz}}$

otrzymamy następujące rozwiązania

$$\Phi = (x^2 - y^2) - ix^2, \quad \Psi = (x^2 - y^2) + ix^2.$$

Stosując zmianę zmiennych

$$\xi = x^2 - y^2, \quad \eta = x^2,$$

otrzymamy

$$\begin{split} u_x &= 2xw_{\xi} + 2xw_{\eta}, \quad u_y = -2yw_{\xi}, \quad u_{yy} = 4y^2w_{\xi\xi} - 2w_{\xi}, \\ u_{xx} &= 4x^2\big(w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}\big) + 2w_{\xi} + 2w_{\eta}, \quad u_{xy} = -4xy\big(w_{\xi\xi} + w_{\xi\eta}\big). \end{split}$$

Wstawiając uzyskane wielkości do równania wyjściowego, otrzymamy

$$w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta-\xi}w_{\xi}+\frac{1}{2\eta}w_{\eta}=0.$$

Informacja dodatkowa 1:

Na zakończenie tego modułu zauważmy, że dobierając stosowne przekształcenie nie tylko możemy doprowadzić równanie do postaci kanonicznej, ale również znacznie go uprościć. Na przykład, w przypadku równania liniowego o stałych współczynnikach, stosując przekształcenie

$$u = ve^{\alpha x + \beta y}$$

i dobierając odpowiednio α i β możemy pozbyć się wyrazów z pierwszą pochodną.



PRZYKŁAD

Przykład 18:

Rozważmy równanie

$$u_{xx} - u_{yy} + \frac{3}{2}u_x - \frac{1}{4}u_y = 0.$$

(Zauważmy, że jest to postać kanoniczna równania z zadania 2). Stosując powyższe podstawienie otrzymamy:

$$\begin{split} u_x &= (v_x + \alpha v)e^{\alpha x + \beta y}, \qquad u_y &= (v_y + \beta v)e^{\alpha x + \beta y}, \\ u_{xx} &= (v_{xx} + 2\alpha v_x + \alpha^2 v)e^{\alpha x + \beta y}, \qquad u_{yy} &= (v_{yy} + 2\beta v_y + \beta^2 v)e^{\alpha x + \beta y}. \end{split}$$

Podstawiając powyższe wielkości do równania wyjściowego otrzymamy po uporządkowaniu

$$v_{xx} - v_{yy} + \left(2\alpha + \frac{3}{2}\right)v_x - \left(2\beta + \frac{4}{4}\right)v_y + \left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{4}\beta\right)v = 0.$$

Przyjmując $\alpha=-\frac{3}{4},\;\beta=-\frac{1}{8}$ otrzymamy

$$v_{xx} - v_{yy} - \frac{35}{64}v = 0.$$

Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych 2-go rzędu n-zmiennych

Rozważmy prawie-liniowe równanie różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \dots, x_n) u_{x_i x_j} + F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots u_{x_n}) = 0,$$
(93)

gdzie a_{ij} , i,j=1,...,n są funkcjami określonymi na zbiorze $U \subset \mathbb{R}^n$, niezerującymi się równocześnie w żadnym punkcie tego zbioru, u jest szukaną funkcją zmiennych $x_1,...,x_n$, a F jest funkcją zadaną.

Z równaniem (93) możemy związać formę kwadratową

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\lambda_i\lambda_j. \tag{94}$$

Z teorii form kwadratowych wiadomo, że dla każdego ustalonego punktu $(x_1,...,x_n) \in U$ istnieje przekształcenie postaci

$$\sum_{\mu_{i}=k=1}^{n} \alpha_{ik}(x_{1},...,x_{n})\lambda_{k}, \qquad i=1,...,n$$
(95)

które formę (95) sprowadza do postaci kanonicznej,

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i}(x_{1}, \dots, x_{n}) \mu_{i}^{2}, \tag{96}$$

tzn. postaci w której występują tylko kwadraty μ_i .

Z twierdzenia Sylwestera-Jacobiego o bezwładności form kwadratowych wynika, że ilość współczynników dodatnich oraz ujemnych nie zależy od sposobu sprowadzenia do postaci kanonicznej. Jest ona niezmiennikiem względem przekształceń nieosobliwych. Oznacza to, że równanie (93) poprzez stosowne przekształcenie możemy sprowadzić do postaci kanonicznej

$$\sum_{i=1\tilde{a}_{i}(x_{1},...,x_{n})v_{x_{i}x_{i}}}^{n} + \tilde{F}(x_{1},...,x_{n},v,v_{x_{1}},...v_{x_{n}}) = 0.$$

$$(97)$$

Mówimy, że równanie (93) jest w punkcie $(x_1,...,x_n)$ typu eliptycznego, jeżeli wszystkie współczynniki \tilde{a}_i w postaci kanonicznej (97) są różne od zera i mają ten sam znak, typu hiperbolicznego jeżeli są różne od zera i występują zarówno współczynniki ujemne jak i dodatnie, typu parabolicznego, jeżeli niektóre współczynniki są równe zeru a odpowiadające im pochodne pierwszego rzędu nie znikają równocześnie. Jeśli ponadto współczynniki różne od zera mają ten sam znak, równanie nazywamy paraboliczno-eliptycznym, jeśli znaki różne, paraboliczno-hiperbolicznym.

Jeśli $\Lambda=[\lambda_1,...,\lambda_n]$ oznacza macierz jednowierszową Λ^T macierz transponowaną, a A macierz $n\times n$ wymiarową o wyrazach $a_{ij}, \quad i,j=1,...,n$ to formę kwadratową (94) możemy zapisać w postaci macierzowej $\Lambda A\Lambda^T$. Sprowadzenie formy do postaci kanonicznej odpowiada przekształceniu macierzy A do postaci diagonalnej, tzn. postaci w której poza przekątną występują same zera. Jeśli w macierzy diagonalnej na przekątnej wszystkie wyrazy są różne od zera i mają ten sam znak, równanie różniczkowe (93) jest typu eliptycznego, jeśli są różnych znaków , typu hiperbolicznego, a jeśli niektóre wyrazy są równe zeru, przy czym odpowiadające tym zmiennym pochodne pierwszego rzędu nie znikają -typu parabolicznego.

Zapiszmy równanie (93) w postaci Lu = g, gdzie L jest operatorem określonym wzorem

$$\sum_{L=i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$
(98)

lub

$$\sum_{L=i,j=1}^{n} \frac{\partial^{2}}{\partial x_{i} \partial x_{j}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i}}.$$
(99)

Jeśli równanie to jest typu eliptycznego (odp. hiperbolicznego, parabolicznego), to operator L nazywamy operatorem typu eliptycznego (odp. hiperbolicznego, parabolicznego).

Zadanie 9:

Treść zadania:

Określić typ równania

$$u_{xx} + 4u_{yy} + 2u_{zz} + 2u_{xz} + u_x - u_y + 2u = 0.$$

Rozwiązanie:

Forma kwadratowa związana z tym równaniem ma postać

$$q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 4\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_3.$$

Wprowadzając nowe zmienne

$$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_3$$
, $\mu_2 = 2\lambda_2$, $\mu_3 = \lambda_3$

otrzymamy postać kanoniczną

$$q(\mu_1,\mu_2,\mu_3) = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2.$$

Rozpatrywane równanie jest więc typu eliptycznego.



ZADANIE

Zadanie 10:

Treść zadania:

Określić typ równania

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + u_x + 3u_y + u_z = 0.$$

Rozwiązanie:

Forma kwadratowa związana z tym równaniem ma postać

$$q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2.$$

Wprowadzając nowe zmienne

$$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$$
, $\mu_2 = \lambda_2$, $\mu_3 = \lambda_3$

otrzymamy postać kanoniczną

$$q(\mu_1,\mu_2,\mu_3) = \mu_1^2 + \mu_3^2.$$

Rozpatrywane równanie jest zatem typu parabolicznego.



Zadanie 11:

Treść zadania:

Określić typ równania

$$u_{xx} + 2u_{yy} - u_{zz} + 2u_{xy} + u_y + 4u = 0.$$

Rozwiązanie:

Forma kwadratowa związana z tym równaniem ma postać

$$q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 - \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2.$$

Wprowadzając nowe zmienne

$$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$$
, $\mu_2 = \lambda_2$, $\mu_3 = \lambda_3$

otrzymamy postać kanoniczną

$$q(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2,$$

a więc rozpatrywane równanie jest typu hiperbolicznego.

Rozwiązywanie równań liniowych cząstkowych 2-go rzędu metodą charakterystyk

Dla równania różniczkowego cząstkowego rzędu drugiego

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_{x}, u_{y}) = 0,$$
(100)

równanie charakterystyk ma postać:

$$\frac{dy}{a_{11}} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$
 (101)

W niniejszym paragrafie pokażemy przykłady rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu wykorzystując postać kanoniczną rozważanego równania. Istotną rolę w tej metodzie ogrywa równanie charakterystyk (101).



DDZVKŁ VD

Przykład 19:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_{xx} - 3u_{yy} + 2u_{xy} = 0, (102)$$

spełniające warunki początkowe

$$u(x, 0) = 3x^2$$
, $u_v(x, 0) = 0$.

Równanie charakterystyk ma postać

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0,$$

stąd

$$\frac{dy}{dx} = -1$$
 oraz $\frac{dy}{dx} = 3$.

Charakterystykami równania (102) są rodziny prostych

$$x + y = C_1$$
, $3x - y = C_2$.

W celu sprowadzenia równania do postaci kanonicznej wprowadzamy nowe zmienne

$$\xi = x + y, \quad \eta = 3x - y.$$

Mamy

$$\begin{split} u_x &= w_\xi + 3w_\eta, & u_y &= w_\xi - w_\eta, & u_{xx} &= w_{\xi\xi} + 6w_{\xi\eta} + 9w_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= w_{\xi\xi} + 2w_{\xi\eta} - 3w_{\eta\eta}, & u_{yy} &= w_{\xi\xi} - 2w_{\xi\eta} + w_{\eta\eta}. \end{split}$$

Podstawiając uzyskane wielkości do równania wyjściowego otrzymamy

$$w_{\varepsilon_n} = 0.$$

Podstawiając $v = w_{\xi}$ otrzymamy

$$v_{..} = 0$$

Stąd v=C. Oczywiście v mże być funkcją zmiennej $\xi,\;$ czyli $C=f(\xi).$ Zatem

$$w_{\xi} = f(\xi)$$
.

Całkując ostatnie równanie względem ξ otrzymamy

$$w(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

gdzie F i G są dowolnymi funkcjami klasy C^1 . Wracając do zmiennych wyjściowych mamy

$$u(x,y) = F(x+y) + G(3x-y). (103)$$

Szukamy teraz funkcji $\,F\,$ i $\,G\,$ tak aby były spełnione warunki początkowe, czyli

$$u(x, 0) = F(x) + G(3x) = 3x^2,$$

 $u_v(x, 0) = F'(x) - G'(3x) = 0.$

Z równań

$$F'(x) + 3G'(3x) = 6x$$
, $F'(x) - G'(3x) = 0$,

otrzymamy

$$G'(3x) = \frac{3}{2}x.$$

a przyjmując t = 3x mamy

$$G'(t) = \frac{1}{2}t$$

czyli

$$G(t) = \frac{\frac{1}{4}t^2 + C}{2t^2 + C}$$

Wykorzystując ponownie pierwszy warunek początkowy oraz ostatnią relacje otrzymamy

$$F(x) = 3x^2 - G(3x) = 3x^2 - \frac{9}{4}x^2 - C = \frac{3}{4}x^2 - C$$

Podstawiając wyznaczone funkcje $\,F\,$ i $\,G\,$ do wzoru (103) otrzymamy szukane rozwiązanie

$$u(x,y) = \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(3x-y)^2$$

Przykład 20:

Znaleźć całkę ogólną równania

$$u_{xx} - u_{yy} = \frac{2}{y - x} (u_x + u_y). \tag{104}$$

Równanie charakterystyk ma postać

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$$

Stąd

$$\frac{dy}{dx} = -1$$
 oraz $\frac{dy}{dx} = 1$.

Charakterystykami równania (104) są rodziny prostych

$$x + y = C_1, \quad x - y = C_2.$$

Stosując zmianę zmiennych

$$\xi = x + y, \qquad \eta = x - y$$

sprowadzamy równanie wyjściowe do postaci

$$w_{\xi\eta} = -\frac{\frac{1}{\eta}}{w_{\xi}}$$

Kładąc $v = w_{\xi}$ otrzymamy równanie

$$v_{\eta} = -\frac{1}{\eta}v$$

 $\frac{C}{\sum}$ Stąd $v=\frac{\eta}{n}$. Oczywiście stała C może być funkcją zmiennej $\xi, \ \text{czyli} \ C=f(\xi)$. Zatem

$$w_{\varepsilon} = \frac{f(\xi)}{\eta}.$$

Po scałkowaniu względem ξ otrzymamy

$$w = \frac{1}{\eta} F(\xi) + G(\eta).$$

gdzie $\,F\,$ jet całką z funkcji $\,f.\,$ Wracając do zmiennych wyjściowych mamy

$$u(x, y) = \frac{1}{x - y} F(x + y) + G(x - y).$$



PRZYKŁAD

Przykład 21:

Znależć całkę równania

$$x^{2}u_{xx} + y^{2}u_{yy} - 2xyu_{xy} + xu_{x} + yu_{y} = 0,$$
(105)

spełniającą warunki:

$$u(1, y) = y^2, u_x(1, y) = 2(y^2 + y).$$
 (106)

Równanie charakterystyk ma postać

$$x^{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2} + 2xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + y^{2} = 0,$$

czyli

$$\left(x^{\frac{dy}{dx}} + y\right)^2 = 0.$$

Rozwiązując równanie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

otrzymamy

$$yx = C$$
.

Po zmianie zmiennych

$$\xi = xy, \qquad \eta = x$$

równanie (105) przyjmie postać

$$w_{\eta\eta} + \frac{1}{\eta} w_{\eta} = 0.$$

Kładąc

$$v = w_{\eta}$$

otrzymamy

$$\frac{dv}{d\eta} + \frac{1}{\eta}v = 0.$$

Całka tego równania ma postać

$$\frac{C}{\eta}$$

Ponieważ C może być funkcją ξ , przyjmując $C=F(\xi)$ otrzymamy

$$\frac{dw}{d\eta} = \frac{1}{\eta} F(\xi)$$

Stąd

$$w = F(\xi) \ln |\eta| + G(\xi),$$

a wracając do zmiennych wyjściowych

$$u(x, y) = F(xy)\ln|x| + G(xy).$$

Z pierwszego z warunków (106) otrzymamy $G(y)=y^2$, a z drugiego F(y)=2y. W konsekwencji szukane rozwiązanie ma postać

$$u(x, y) = 2xy\ln|x| + (xy)^2.$$



Zadanie 12:

Treść zadania:

Znaleźć całkę równania

$$u_{xx} - (\cos^2 x)u_{yy} - 2(\sin x)u_{xy} - (\cos x)u_y = 0.$$

Rozwiązanie:

Łatwo sprawdzić, że $\delta = -1$, , a zatem jest to równanie typu hiperbolicznego.

Równanie charakterystyk ma postać

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(\sin x)\left(\frac{dy}{dx}\right) - \cos^2 x = 0,$$

skąd otrzymamy układ równań

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x - 1. \qquad \frac{dy}{dx} = -\sin x + 1.$$

Rozwiązaniami ostatnich równań są rodziny krzywych:

$$y = \cos x - x + C_1,$$
 $y = \cos x + x + C_2.$

Stosując zmianę zmiennych

$$\xi = x + y - \cos x,$$
 $\eta = x - y + \cos x,$

równanie wyjściowe zredukujemy do równania

$$w_{\xi\eta} = 0.$$

Dwukrotnie całkując powyższe równanie kolejno ze względu na $\,\xi\,$ i $\,\eta\,$ dostajemy

$$w(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

a wracając do zmiennych wyjściowych otrzymamy

$$u(x,y) = F(x+y-\cos x) + G(x-y+\cos x).$$



Zadanie 13:

Treść zadania:

Znaleźć całkę równania

$$y^2 u_{xx} + 2x^2 u_{yy} + 2xy u_{xy} + y u_y = 0.$$

Rozwiązanie:

Łatwo sprawdzić, że $\delta=x^2y^2$. Dla $y=0, \quad x\neq 0, \quad \text{równanie redukuje się do postaci} \ u_{yy}=0, \quad \text{dla} \ x=0, \quad y\neq 0$

jest to równanie typu parabolicznego i redukuje się do postaci $yu_{xx} + u_y = 0$, a dla $xy \neq 0$ jest to równanie typu eliptycznego.

Równanie charakterystyk ma postać

$$y^{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2} - 2xy^{\frac{dy}{dx}} + 2x^{2} = 0.$$

Rozwiązując równania:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + i^{\frac{1}{y}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} - i^{\frac{1}{y}}.$$

otrzymamy rodziny rozwiązań:

$$x^2 - y^2 + ix^2 = C_1,$$
 $x^2 - y^2 - ix^2 = C_2.$

Stosując zmianę zmiennych

$$\xi = x^2 - y^2, \qquad \eta = x^2,$$

równanie wyjściowe zredukujemy do postaci kanonicznej

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + \frac{1}{2\eta} u_{\eta} - \frac{1}{\eta - \xi} u_{\xi} = 0.$$

Niestety, metoda charakterystyk nie umożliwia w prosty sposób znalezienie rozwiązań tego równania.

Rozdział 4. Metoda rozdzielania zmiennych

Rozwiązanie równania struny ograniczonej metodą rozdzielania zmiennych

Metoda rozdzielania albo separacji zmiennych, zwana też metodą Fouriera, jest jedną z najstarszych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Polega ona na próbie wyznaczenia rozwiązania danego równania w postaci kombinacji funkcji o mniejszej ilości zmiennych. Najczęściej szukamy rozwiązania w postaci sumy lub iloczynu funkcji. W szczególności, jeśli szukane rozwiązanie u jest funkcją zmiennych x i t, , to rozwiązania tego możemy szukać w postaci iloczynu dwóch funkcji z których jedna jest funkcją zmiennej x, a druga zmiennej t. Metoda ta jest szczególnie przydatna, jeśli szukamy rozwiązania w zbiorze ograniczonym o zadanych wartościach na brzegu obszaru. Zinterpretujemy to poniżej rozważając równanie struny ograniczonej jednorodnej o jednorodnych warunkach brzegowych.

Rozważmy równanie struny

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
 (107)

z warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0.$$
 (108)

oraz warunkami początkowymi

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l.$$
 (109)

Przyjmujemy przy tym, że $\varphi(0)=\varphi(l)=0, \quad \psi(0)=\psi(l)=0.$ Szukamy rozwiązania w postaci

$$u(x, t) = T(t)X(x).$$

Podstawiając ostatnią funkcje do równania (107) otrzymamy

$$T^{''}(t)X(x) = a^2T(t)X^{''}(x).$$

Przyjmując, że $T \neq 0$ i $X \neq 0$ możemy ostatnie równanie przekształcić do postaci

$$\frac{1}{a^2} \frac{T^{''}(t)}{T(t)} = \frac{X^{''}(x)}{X(x)}$$

Ponieważ lewa strona zależy tylko od t, zaś prawa strona tylko od x, zatem oba ilorazy muszą być równe stałej. Oznaczając tę stałą przez $-\lambda$, ostatnią równość możemy zapisać w postaci dwóch równań:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$
 (110)

Ponadto z warunków brzegowych (108) wynika natychmiast, że

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$
 (111)

Przedyskutujemy teraz rozwiązania równań (110) w zależności od znaku $\,\lambda\,$

Przypadek $\lambda < 0$.

Rozwiązania równań (110) mają postać:

$$T(t) = Ae\sqrt{-\lambda at} + Be^{-\sqrt{-\lambda at}}, \qquad X(x) = Ce\sqrt{-\lambda x} + De^{-\sqrt{-\lambda x}}.$$

Z warunków brzegowych (111) wynika, że C = D = 0, czyli u(x, t) = 0. Ponieważ rozwiązanie zerowe nie jest dla nas interesujące, przypadek ten należy odrzucić.

Przypadek $\lambda = 0$.

Rozwiązania równań (110) mają postać:

$$T(t) = A + Bt,$$
 $X(x) = C + Dx.$

Uwzględniając warunki brzegowe (111) otrzymamy jak poprzednio u(x,t)=0, , a zatem również ten przypadek należy odrzucić. **Przypadek** $\lambda > 0$. Wygodnie jest teraz w równaniu (110) symbol λ zastąpić symbolem λ^2 , czyli zapisać te równania w postaci:

$$T^{''}(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad X^{''}(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Rozwiązania mają wówczas postać

$$T(t) = A\cos(\lambda at) + B\sin(\lambda at), \quad X(x) = C\cos(\lambda x) + D\sin(\lambda x).$$

Z warunku X(0) = 0 wynika, że C = 0, a warunek X(l) = 0 daje równość

$$\sin(\lambda l) = 0,$$

która jest spełniona dla $\lambda_n = \overline{l}$, $n \in \mathbb{N}$. Wartości te nazywamy **wartościami własnymi**. Zauważmy, że tylko dla takich wartości λ może istnieć szukane rozwiązanie.

Dla $n \in N$ połóżmy

$$T_n(t) = A_n \cos(\frac{n\pi}{l}t) + B_n \sin(\frac{n\pi}{l}t), \qquad X_n(x) = C_n \sin(\frac{l}{l}x)$$

огах

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos(\frac{na\pi}{l}t) + B_n \sin(\frac{n\pi}{l}t)\right) \sin(\frac{l}{l}x).$$
(112)

Zauważmy, że tak określona funkcja u_n jest rozwiązaniem równania (107), spełnia warunki brzegowe (108), ale na ogół nie spełnia warunków początkowych (109).

Rozwiązania równania (107) które będzie spełniać waruneki (108) i (109) będziemy szukać w postaci sumy szeregu

$$\sum_{u(x,t)=n=1}^{\infty} u_n(x,t). \tag{113}$$

Załóżmy, że szereg po prawej stronie jest jednostajnie zbieżny jak również szereg pierwszych i drugich pochodnych jest jednostajnie zbieżny do odpowiedniej pochodnej z funkcji u. Przy przyjętych założeniach pochodne szeregu są równe szeregowi pochodnych, a funkcja u spełnia równanie (107) oraz warunki brzegowe (108). Oczywiście

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l}$$

$$u(x,0) = {n = 1 \choose n} \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

Załóżmy dalej, że funkcje $\,\varphi\,$ można rozwinąć w szereg sinusów w przedziale $\,[0,l]\,$

$$\sum_{\varphi(x) = n = 1}^{\infty} \frac{n\pi}{\alpha_n \sin(x^n)} \sin(x^n),$$

gdzie

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin(\frac{n\pi}{l} s) ds.$$

Zauważmy, że pierwszy z warunków początkowych $u(x,0)=\varphi(x)$ jest spełniony, jeśli $A_n=\alpha_n$, czyli

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin(\frac{n\pi}{l} s) ds.$$

W celu zapewnienia drugiego z warunków początkowych należy policzyć pochodną z funkcji u względem t.

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na\pi}{l}}_{u(x,t) = n} \underbrace{\frac{na\pi}{l}}_{n} \underbrace{\frac{na\pi}{l}}_{t) + B_{n}\cos(\frac{na\pi}{l})}_{sin(\frac{n\pi}{l}x)}.$$

Stąd

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{u(x,0)=n=1}^{\infty} \frac{na\pi}{l} \frac{n\pi}{B_{u}\sin(\frac{l}{l}x)}$$

Rozwijając funkcje ψ w szereg sinusów otrzymamy

$$\sum_{\psi(x) = n = 1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} x,$$

gdzie

$$\beta_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(s) \sin(\frac{n\pi}{l} s) ds.$$

Zatem drugi z warunków początkowych (109) jest spełniony, jeśli $\frac{na\pi}{l}$ $B_n=\beta_n$, czyli

$$B_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^l \psi(s) \sin(\frac{n\pi}{l}s) ds.$$

Szukane rozwiązanie (113) ma zatem postać

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_{0}^{t} (\varphi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)) ds \cos(\frac{n\pi}{l}t) + \frac{2}{na\pi} \int_{0}^{t} (\psi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)) ds \sin(\frac{n\pi}{l}t) \right] \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$
(114)

Rozważmy ponownie rozwiązanie $\,u_{n}\,$ dane wzorem (112). Kładąc

$$\rho_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \cos(\tilde{\varphi}_n) = \frac{A_n}{\rho_n}, \quad \sin(\tilde{\varphi}_n) = \frac{B_n}{\rho_n}, \quad \varphi_n = \frac{l}{na\pi}\tilde{\varphi}_n,$$

otrzymamy

$$u_n(x,t) = \rho_n \cos\left(\frac{na\pi}{l}(t - \varphi_n)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Funkcja u_n opisuje drgania harmoniczne (tzw. n-ta harmoniczna) odpowiadające wartości własnej $\lambda_n = \overline{l}$, przy czym występujące tu wielkości mają następującą interpretacje fizyczną:

 $\rho_n \sin(\frac{\overline{l}}{x})$ – amplituda drgania n -tejharmonicznej;

 $\omega_n = \frac{l}{l}$ – częstotliwość drgania n -tej harmonicznej.

Pamiętając że $a^2=\frac{T}{\rho}$, gdzie T oznacza siłę naprężenia a ρ gęstość, otrzymamy

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Częstotliwość $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ odpowiada tzw. dźwiękowi podstawowemu (zwanemu też pierwszą harmoniczną). Jest to dźwięk najsilniejszy. Melodia struny zależy natomiast od dalszych dźwięków uzupełniających.

 $\text{Jeśli } A_1=\ldots=A_{n-1}=0 \text{ oraz } B_1=\cdots=B_{n-1}=0, \text{ natomiast } A_n\neq 0 \text{ lub } B_n\neq 0 \text{ , dźwięk podstawowy odpowiada}$ częstotliwości ω_n . Wynika stąd, że dźwięk struny zależy od warunków początkowych

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)$$

oraz wielkości $\mathit{l}, \quad \mathit{T} \; \mathrm{i} \; \rho \; .$



Informacja dodatkowa 2: Uzasadnienie poprawności metody

Opisane w powyżej postępowanie jest słuszne, jeśli szereg (113) oraz szeregi pierwszych i drugich pochodnych są jednostajnie zbieżne. Podamy teraz proste warunki przy których zbieżność taka zachodzi.

Przypomnijmy, że

$$\sum_{u(x,\,t)\,=\,n\,=\,1}^{\infty} \sum_{u\,=\,1}^{\infty} \sum_{n\,=\,1}^{\infty} \left(A_n \mathrm{cos}(\frac{an\pi}{l} t) + B_n \mathrm{sin}(\frac{an\pi}{l} t)\right) \mathrm{sin}(\frac{n\pi}{l} x),$$

gdzie

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin(\frac{n\pi}{l}s) ds, \quad B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(s) \sin(\frac{n\pi}{l}s) ds.$$

Oczywiście

$$|u_n(x,t)| \le |A_n| + |B_n|.$$

Z równości

$$\frac{\partial}{\partial t} u_n(x,t) = \frac{an\pi}{l} \left(-A_n \sin(\frac{na\pi}{l}t) + B_n \cos(\frac{l}{l}t) \right) \sin(\frac{n\pi}{l}x),$$

wynika, że

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)\right| \le \frac{na\pi}{l} \left(|A_n| + |B_n|\right).$$

Podobnie możemy pokazać, że

$$\begin{split} &|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n(x,t)| \leq \left(\frac{na\pi}{l}\right)^2 \left(|A_n| + |B_n|\right); \\ &|\frac{\partial}{\partial x}u_n(x,t)| \leq \frac{n\pi}{l} \left(|A_n| + |B_n|\right); \\ &|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n(x,t)| \leq \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \left(|A_n| + |B_n|\right). \end{split}$$

Aby uzyskać jednostajną zbieżność wspomnianych wyżej szeregów wystarczy pokazać, że zbieżne są szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1n^k |A_n| \quad \text{oraz}}^{\infty} \sum_{n=1n^k |B_n|, \quad \text{dla} \quad k=0,1,2.}^{\infty}$$

Oczywiście wystarczy pokazać zbieżność tych szeregów dla $\ k=2.$ Pokażemy teraz zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2} |A_{n}|$$

przy dodatkowym założeniu, że funkcja $\, \varphi \,$ posiada czwartą pochodną, pochodna ta jest funkcją całkowalną i ponadto

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0 \ \text{oraz} \ \varphi^{''}(0)=\varphi^{''}(l)=0. \ \text{Przyjmując} \ \lambda_n=\frac{n\pi}{l} \ \text{mamy}$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin(\lambda_n s) ds.$$

Całkując czterokrotnie przez części otrzymamy

$$\int_{0}^{t} \varphi(s) \sin(\lambda_{n}s) ds = -\frac{1}{\lambda_{n}} \varphi(s) \cos(\lambda_{n}s) \Big|_{0}^{t} + \frac{1}{\lambda_{n}} \int_{0}^{t} \varphi'(s) \cos(\lambda_{n}s) ds$$

$$= \frac{1}{\lambda_{n}} \int_{0}^{t} \varphi'(s) \cos(\lambda_{n}s) ds = \frac{1}{\lambda_{n}^{2}} \int_{0}^{t} \varphi''(s) \sin(\lambda_{n}s) \Big|_{0}^{t} - \frac{1}{\lambda_{n}^{2}} \int_{0}^{t} \varphi'''(s) \sin(\lambda_{n}s) ds$$

$$= -\frac{1}{\lambda_{n}^{2}} \int_{0}^{t} \varphi'''(s) \sin(\lambda_{n}s) ds = \frac{1}{\lambda_{n}^{2}} \int_{0}^{t} \varphi'''(s) \cos(\lambda_{n}s) \Big|_{0}^{t} - \frac{1}{\lambda_{n}^{2}} \int_{0}^{t} \varphi''''(s) \cos(\lambda_{n}s) ds$$

$$= -\frac{1}{\lambda_{n}^{2}} \int_{0}^{t} \varphi''''(s) \cos(\lambda_{n}s) ds = -\frac{1}{\lambda_{n}^{2}} \int_{0}^{t} \varphi''''(s) \sin(\lambda_{n}s) ds$$

$$= \frac{1}{\lambda_{n}^{2}} \int_{0}^{t} \varphi''''(s) \sin(\lambda_{n}s) ds.$$

Stąd

$$|A_n| = \Big| \frac{2}{l} \frac{1}{\lambda_n^4} \int_0^l \varphi''''(s) \sin(\lambda_n s) ds \Big| \le \frac{2l^3}{n^4 \pi^4} \int_0^l |\varphi''''(s)| ds = \frac{1}{n^4} C,$$

gdzie

$$C = \frac{2l^3}{\pi^4} \int_0^l |\varphi''''(s)| \, ds.$$

W konsekwencji

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n^2|A_n|}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |A_n| \ \ \text{jest zbieżny. Analogicznie}$ skąd - na mocy kryterium porównawczego - wynika natychmiast, że badany szereg

 $\sum_{n=1}^{n} \sum_{n=1}^{n-1} |B_n| \text{ jest zbieżny. Oczywiście, przy przyjętych założeniach, również szeregi } n=1 n |A_n|$

 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |B_n| = |a_n| = |a_n| |B_n| = |a_n| = |a_n|$ ψ jest poprawna.

Z teorii szeregów Fouriera wiadomo, że przyjęte tu założenia o funkcjach φ i ψ można znacznie osłabić.

Rozwiązanie równania niejednorodnego struny metodą rozdzielania zmiennych

Rozważmy niejednorodne równanie struny

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
 (115)

z warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0.$$
 (116)

oraz warunkami początkowymi

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 < x < l.$$
 (117)

Szukamy rozwiązania postaci

$$\sum_{u(x,t)=n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{u_n(t)\sin(\frac{n\pi}{l}x)},$$
(118)

gdzie ω_n , $n \in \mathbb{N}$, są nieznanymi funkcjami które będziemy starali się wyznaczyć tak, aby uzyskać szukane rozwiązanie. Zapiszmy funkcje f, φ i ψ w postaci szeregów Fouriera

$$\sum_{f(r,t)=n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} \tag{119}$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} \chi_n(t) \sin(\frac{n\pi}{l}x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\alpha_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)}, \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} \chi_n(t) \sin(\frac{n\pi}{l}x),$$
(120)

gdzie

$$\gamma_{\nu}(t) = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} \frac{n\pi}{(t,t)\sin(\frac{l}{l}\tau)} d\tau, \tag{121}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} \frac{n\pi}{\varphi(\tau) \sin(\frac{l}{l}\tau) d\tau}, \qquad \beta_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} \frac{n\pi}{\psi(\tau) \sin(\frac{l}{l}\tau) d\tau}.$$

Podstawiając (118) i (119) do (115) otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\omega_n^{''}(t) + a^2 \lambda_n^2 \omega(t) - \gamma_n(t) \right] \sin(\lambda_n x) = 0$$
(122)

 $\text{gdzie } \lambda_n = \frac{n\pi}{l}.$

Z kolei podstawiając (118) i (120) do warunków początkowych (117) otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\omega_n(0) - \alpha_n \right] \sin(\lambda_n x) = 0.$$
 (123)

огах

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\omega_n^{'}(0) - \beta_n\right] \sin(\lambda_n x) = 0.$$
(124)

Warunki (122), (123) i (124) są spełnione, jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\omega_{n}^{''}(t) + a^{2}\lambda_{n}^{2}\omega(t) = \gamma_{n}(t), \qquad \omega_{n}(0) = \alpha_{n}, \quad \omega_{n}^{'}(0) = \beta_{n}.$$
 (125)

Rozwiązując problem (125) otrzymamy

$$\omega_n(t) = \alpha_n \cos(a\lambda_n t) + \frac{\frac{\beta_n}{a\lambda_n}}{\sin(a\lambda_n t)} - \frac{1}{a\lambda_n} \int_0^t (\gamma_n(s)\sin(\lambda_n s)) ds\cos(a\lambda_n t) + \frac{1}{a\lambda_n} \int_0^t (\gamma_n(s)\cos(a\lambda_n s)) ds\sin(a\lambda_n t) = \alpha_n \cos(a\lambda_n t) + \frac{\frac{\beta_n}{a\lambda_n}}{a\lambda_n} \sin(a\lambda_n t) + \frac{1}{a\lambda_n} \int_0^t (\gamma_n(s)\sin(a\lambda_n t) - \frac{1}{a\lambda_n}) ds$$

Podstawiając ostatni związek do wzoru (118) otrzymamy

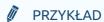
$$\begin{split} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \mathrm{cos}(a\lambda_n t) + \frac{\beta_n}{a\lambda_n} \mathrm{sin}(a\lambda_n t) \right) \mathrm{sin}(\lambda_n x) + \\ &\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\lambda_n} \int_{0} \left(\gamma_n(s) \mathrm{sin} \left(a\lambda_n (t-s) \right) \right) ds \, \mathrm{sin}(\lambda_n x). \end{split}$$

Kładąc

$$G(x, s, t, \tau) = \frac{2}{al} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sin(\lambda_n \tau) \sin(a\lambda_n (t - s)) \sin(\lambda_n x)$$

i uwzględniając (121) rozwiązanie $\,u\,$ możemy zapisać w postaci

$$\sum_{u(x,t)=n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos(\lambda_n t) + \frac{\beta_n}{a\lambda_n} \sin(\lambda_n t)\right) \sin(\lambda_n x) + \int_0^t \int_0^t G(x,s,t,\tau) f(\tau,t) d\tau ds.$$



Przykład 22:

Rozważmy równanie

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
 (126)

z warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = \alpha, \quad u(l,t) = \beta, \quad t \ge 0.$$
 (127)

oraz warunkami początkowymi

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l.$$
 (128)

Szukamy rozwiązania w postaci sumy

$$u(x,t) = w(x) + v(x,t),$$

gdzie w jest rozwiązaniem równania zwyczajnego

$$a^2 w_{xx} + f(x) = 0, (129)$$

spełniającego warunki brzegowe $w(0) = \alpha, \ w(l) = \beta.$

Funkcja v jest rozwiązaniem równania cząstkowego

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

spełniającym warunki początkowe

$$v(x, 0) = \varphi(x) - w(x), \quad v_t(x, 0) = \psi(x), \qquad 0 < x < l,$$

oraz warunki brzegowe

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

Rozwiązanie ostatniego problemu, jeśli znamy funkcje w, zostało podane w module (zob. wzór (122)). Wystarczy zatem znależć rozwiązanie problemu (129), które - jak łatwo sprawdzić - wyraża się wzorem

$$w(x) = \alpha + \frac{x}{l}(\beta - \alpha) + \frac{x}{a^2 l} \int_{0}^{l} \int_{0}^{t} \int_{0}^{t} ds dt - \frac{1}{a^2} \int_{0}^{x} \int_{0}^{t} f(s) ds dt.$$



Uwaga 9:

Zauważmy, że metodę opisaną w powyrzszym przykładzie możemy również stosować w przypadku równania postaci (115), jeśli druga pochodna z funkcji f względem t jest równa zeru.

Przykłady metody rozdzielania zmiennych dla równań parabolicznych i hiperbolicznych

Metoda rozdzielania albo separacji zmiennych, zwana też metodą Fouriera, jest jedną z najstarszych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Polega ona na próbie wyznaczenia rozwiązania danego równania w postaci kombinacji funkcji o mniejszej ilości zmiennych. Najczęściej szukamy rozwiązania w postaci sumy lub iloczynu funkcji. W szczególności, jeśli szukane rozwiązanie u jest funkcją zmiennych x i t, to rozwiązania tego możemy szukać w postaci iloczynu dwóch funkcji z

których jedna jest funkcją zmiennej x, a druga zmiennej t. Metoda ta jest szczególnie przydatna, jeśli szukamy rozwiązania w zbiorze ograniczonym o zadanych wartościach na brzegu obszaru. W niniejszym module podamy przykłady zastosowania tej metody dla równań parabolicznych i hiperbolicznych.



PRZYKŁAD

Przykład 23: Równanie przewodnictwa cieplnego w pręcie ograniczonym z jednorodnymi warunkami brzegowymi

Rozważmy równanie

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
 (130)

z warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0.$$
 (131)

oraz warunkiem początkowym

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l.$$
 (132)

Szukamy rozwiązania w postaci

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$
.

Po podstawieniu do równania (130) i rozdzieleniu zmiennych otrzymamy

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \frac{T^{'}(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda.$$

czyli

$$X^{''}(x) + \lambda X(x) = 0,$$
 $T^{'}(t) + a^2 \lambda T(t) = 0.$

Z warunków brzegowych (131) wynika, że

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Ponieważ dla $~\lambda \leq 0~$ otrzymujemy rozwiązanie zerowe, przyjmujemy $~\lambda > 0~$. Rozwiązując powyższe równania otrzymamy:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x), \qquad T(t) = Ce^{-a^2\lambda t}.$$

Z warunku $\mathit{X}(0) = 0$ wynika, że $\mathit{A} = 0$, zaś warunek $\mathit{X}(\mathit{l}) = 0$ implikuje

$$\sin(\sqrt{\lambda l}) = 0.$$

Ostatnie równanie jest spełnione dla

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ funkcja

$$u_n(x,t) = B_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

jest rozwiązaniem równania (130) spełniającym warunki brzegowe (131). Rozwiązanie to na ogół nie spełnia warunku początkowego (132).

Rozważmy funkcje

$$\sum_{u(x,t)=n=1}^{\infty} u_n(x,t).$$

Podobnie jak w module 5.2 można sprawdzić, że przy stosownych założeniach powyższa funkcja spełnia równanie (130) oraz warunki brzegowe (131). Powstaje pytanie, czy można tak dobrać stałe B_n aby był spełniony również warunek początkowy (132).

W tym celu rozwińmy funkcje $\,\varphi\,$ w przedziale $\,[0,l]\,$ w szereg sinusów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\alpha_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)},$$

gdzie

$$\alpha_n = \frac{\frac{2}{l}}{\int_0^l \varphi(s) \sin(\frac{n\pi}{l}s) ds}.$$

Ponieważ

$$\sum_{u(x,0)=n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} x,$$

warunek (132) jest spełniony, jeśli

$$B_n = \alpha_n, \qquad n = 1, 2, \dots$$

W konsekwencji

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_{0}^{t} \left(\varphi(s) \sin\left(\frac{n\pi}{l}s\right) \right) ds \, e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) =$$

$$\int_{0}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}s\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right] \varphi(s) \, ds.$$
(133)

Kładąc

$$G(x,s,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)}$$

otrzymamy

$$u(x,t) = \int_0^t G(x,s,t)\varphi(s) \, ds.$$

Zauważmy, że ostatni wzór podaje rozwiązanie problemu (130) - (132) w zależności od warunków początkowych.



PRZYKŁAD

Przykład 24: Równanie przewodnictwa cieplnego w pręcie ograniczonym z niejednorodnymi warunkami brzegowymi

Rozważmy równanie

$$u_t = a^2 u_{xx}$$
 dla $0 < x < l, t > 0,$ (134)

z warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = b$$
, $u(l,t) = ct$ dla $t > 0$.

oraz warunkiem początkowym

$$u(x,0) = 0$$
 dla $0 < x < l$.

Powyższy problem możemy sprowadzić do jednorodnych warunków brzegowych kładąc

$$u(x,t) = v(x,t) + b + \frac{ct - b}{l}x.$$

Istotnie, podstawiając wielkości

$$u_t = v_t + \frac{c}{l}x, \qquad u_{xx} = v_{xx}.$$

do problemu wyjściowego otrzymamy równanie

$$v_t = a^2 v_{xx} - \frac{c}{l}x, \tag{135}$$

z warunkami brzegowymi

$$v(0,t) = 0, v(l,t) = 0$$
 (136)

oraz warunkiem początkowym

$$v(x,0) = b(\frac{l}{l} - 1). \tag{137}$$

Szukamy rozwiązania równania (135) w postaci szeregu

$$\sum_{v(x,t)=n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\omega_n(t)\sin(\frac{n\pi}{l}x)},$$
(138)

gdzie $\,\omega_n\,$ są niewiadomymi funkcjami, które należy wyznaczyć. Podstawiając (138) oraz rozwinięcie

$$\frac{c}{l} \sum_{x=n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\alpha_n \sin(\frac{n\pi}{l}x)},$$

gdzie

$$\alpha_n = \frac{2c}{l^2} \int_0^l \frac{n\pi}{x \sin(\frac{l}{l}x) dx} = \frac{2c}{n\pi} (-1)^{n+1},$$
(139)

do równania (135) otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\omega_n'(t) + \left(\frac{an\pi}{l} \right)^2 \omega_n(t) + \alpha_n \right) \sin(\frac{n\pi}{l} x) = 0.$$

Stąd

$$\omega_{n}'(t) + \lambda_{n}^{2} a^{2} \omega_{n}(t) + \alpha_{n} = 0,$$
 (140)

gdzie

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \tag{141}$$

Podstawiając natomiast (138) do (137), po uwzględnieniu rozwinięcia

$$b(\frac{x}{l} - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l}$$

$$b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l} x,$$

gdzie

$$\beta_{n} = \frac{2b}{l} \int_{0}^{l} \frac{x}{(l-1)\sin(\frac{n\pi}{l}x)} dx = -\frac{2b}{n\pi}.$$
 (142)

otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\omega_n(0) - \beta_n) \sin(\frac{l}{l}x) = 0$$

co implikuje $\ \omega_n(0)=\beta_n.$ Rozwiązując równanie (140) z warunkiem początkowym $\ \omega_n(0)=\beta_n.$ otrzymamy

$$\omega_n(t) = \left(\beta_n + \frac{\alpha_n}{a^2 \lambda_n^2}\right) e^{-a^2 \lambda_n^2 t} - \frac{\alpha_n}{a^2 \lambda_n^2}.$$

Podstawiając uzyskaną wielkość do wzoru (138), rozwiązanie problemu (135), (136), (137) przyjmie postać

$$\sum_{v(x,t)=n=1}^{\infty} \left(\left(\beta_n + \frac{\alpha_n}{a^2 \lambda_n^2} \right) e^{-a^2 \lambda_n^2 t} - \frac{\alpha_n}{a^2 \lambda_n^2} \right) \sin(\frac{n\pi}{l} x).$$

gdzie λ_n , α_n oraz β_n są dane odpowiednio wzorami (141), (139), (142).



PRZYKŁAD

Przykład 25: Równanie przewodnictwa cieplnego w pręcie nieograniczonym

Rozważmy równanie

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$
 (143)

z warunkiem początkowym

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{144}$$

Szukamy rozwiązania w postaci

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Po podstawieniu do równania (143) i rozdzieleniu zmiennych otrzymamy

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2,$$

czyli

$$X^{''}(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$
 $T^{'}(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0.$

Rozwiązując powyższe równania mamy:

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x), \qquad T(t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Dla dowolnego $\lambda \in R$ funkcja

$$u(x, t, \lambda) = e^{-\lambda^2 a^2 t} \Big(A(\lambda) \cos(\lambda x) + B(\lambda) \sin(\lambda x) \Big)$$

jest rozwiązaniem równania (143). Na ogół rozwiązanie to nie spełnia warunku początkowego (144). Rozważmy teraz funkcje

$$u(x,t) = \int_{0}^{+\infty} \int_{u(x,t,\lambda)d\lambda = \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^{2}a^{2}t} \left(A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x) \right) d\lambda.$$

Jeśli ostatnia całka jet zbieżna, to oczywiście określa ona rozwiązanie równania (143). Aby rozwiązanie to spełniało warunek początkowy (144), winna zachodzić równość

$$u(x,0) = \int_{0}^{+\infty} \left(A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x) \right) d\lambda = \varphi(x).$$

Jeśli φ jest funkcją całkowalną, to zgodnie z wzorem Fouriera

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) \cos(\lambda(s-x)) \, ds \, d\lambda.$$

Wstawiając ostatnią równość do poprzedniego wzoru i uwzględniając związek

$$\cos(\lambda(s-x)) = \cos(\lambda s)\cos(\lambda x) + \sin(\lambda s)\sin(\lambda x)$$

otrzymamy

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\cos(\lambda s) ds, \qquad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\sin(\lambda s) ds$$

Ostatecznie rozwiązanie równania wyjściowego ma postać

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty}$$



PRZYKŁAD

Przykład 26: Drgania membrany prostokatnej

Rozważmy równanie

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \qquad (x, y) \in (0, l) \times (0, l),$$
 (145)

z warunkami brzegowymi

$$u(0, y, t) = 0,$$
 $u(l, y, t) = 0,$ dla $y \in (0, l), t > 0,$ (146)
 $u(x, 0, t) = 0,$ $u(x, l, t) = 0,$ dla $x \in (0, l), t > 0,$ (147)

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, l, t) = 0, \quad \text{dla} \quad x \in (0, l), \ t > 0,$$
 (147)

oraz warunkami początkowymi

$$u(x, y, 0) = cxy(l - x)(l - y), \quad u_t(x, y, 0) = 0, \quad \text{dia } x, y \in (0, l).$$
 (148)

Problem ten opisuje drgania membrany prostokątnej, unieruchomionej na brzegu, o zadanym kształcie początkowym. Szukamy rozwiązania w postaci

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t).$$

Po podstawieniu do równania (144) i rozdzieleniu zmiennych otrzymamy

$$\frac{1}{a^2} \frac{T^{'}(t)}{T(t)} = \frac{X^{''}(x)}{X(x)} + \frac{Y^{'}(y)}{Y(y)}.$$

Ponieważ poszczególne składniki w powyższym równaniu są funkcjami innej zmiennej, więc każdy ze składników musi przyjmować wartości stałe. Dostajemy zatem równania:

$$\frac{X^{'}(x)}{X(x)} = -\lambda^{2}, \qquad \frac{Y^{'}(y)}{Y(y)} = -\mu^{2}, \qquad \frac{1}{a^{2}} \frac{T^{'}(t)}{T(t)} = -\lambda^{2} - \mu^{2}.$$

Po uwzględnieniu warunków (146) oraz (147) otrzymamy następujące problemy brzegowe:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$
, $X(0) = 0$, $X(l) = 0$

огах

$$Y^{\prime\prime}(y) + \mu^2 Y(y) = 0$$
, $Y(0) = 0$, $Y(l) = 0$.

Rozwiązując powyższe problemy otrzymamy

$$X_n(x) = A_n \sin(\lambda_n x), \quad n = 1, 2, ...,$$

 $Y_m(y) = B_m \sin(\mu_m y), \quad m = 1, 2, ...,$

gdzie $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, $\mu_m = \frac{m\pi}{l}$.

$$T^{(\prime)}(t) + a^2(\lambda_n^2 + \mu_m^2)T(t) = 0,$$

otrzymamy

$$\begin{split} T_{nm}(t) &= A_{nm} \text{cos}(a \sqrt{\lambda_n^2 + \mu_m^2} t) + B_{nm} \text{sin}(a \sqrt{\lambda_n^2 + \mu_m^2} t) = \\ &A_{nm} \text{cos}(\frac{a\pi}{l} \sqrt{n^2 + m^2} t) + B_{nm} \text{sin}(\frac{a\pi}{l} \sqrt{n^2 + m^2} t). \end{split}$$

Dla $m,n \in N$ funkcja

$$u_{nm}(x,y,t) = \left(A_{nm} \text{cos}(\frac{a\pi}{l} \sqrt{n^2 + m^2}t) + B_{nm} \text{sin}(\frac{a\pi}{l} \sqrt{n^2 + m^2}t)\right) \text{sin}(\frac{n\pi}{l} x) \text{sin}(\frac{m\pi}{l} y).$$

jest rozwiązaniem problemu (145) spełniającym warunki brzegowe (146) i (147). Na ogół nie spełnia ona warunków początkowych (148). Rozważmy teraz funkcje

$$\sum_{u(x,y,t)=n,m=1}^{\infty} u_{nm}(x,y,t).$$

Jeśli szereg występujący po prawej stronie jest jednostajnie zbieżny oraz szeregi drugich pochodnych są jednostajnie zbieżne, to funkcja u jest rozwiązaniem równania (145). W oczywisty sposób spełnia ona warunki brzegowe (146) i (147). Pozostaje dobrać stałe A_{mn} oraz B_{nm} tak aby zachodziły warunki początkowe (147). Z warunku

$$u_t(x, y, 0) = 0$$

wnioskujemy, że $B_{nm}=0$ dla $n,m\in \mathbb{N},$ natomiast z warunku

$$u(x, y, 0) = cxy(l - x)(l - y)$$

wynika, że $A_{nm}=c\alpha_{n}\beta_{m}$, gdzie

$$\alpha_{n} = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} x(l-x) \sin(\frac{n\pi}{l}x) dx = \frac{2l^{2}}{n\pi} (-1)^{n+1} + \frac{2l^{2}}{n\pi} (-1)^{n} - \frac{4l^{2}}{(n\pi)^{3}} (-1)^{n} + \frac{4l^{2}}{(n\pi)^{3}},$$

$$\beta_{m} = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} y(l-y) \sin(\frac{m\pi}{l}y) dy = \frac{2l^{2}}{m\pi} (-1)^{m+1} + \frac{2l^{2}}{m\pi} (-1)^{m} - \frac{4l^{2}}{(m\pi)^{3}} (-1)^{m} + \frac{4l^{2}}{(m\pi)^{3}}.$$



PRZYKŁAD

Przykład 27: Równanie Laplace'a

Szukamy rozwiązania równania Laplace'a

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \infty),$$
 (149)

spełniające warunki

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad y \in (0, \infty),$$
 (150)

огах

$$u(x,0) = 1 - \frac{x}{\pi} \lim_{y \to +\infty} u(x,y) = 0, \quad x \in (0,\pi).$$
 (151)

Szukamy rozwiązania w postaci

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Po podstawieniu do równania (149) i rozdzieleniu zmiennych otrzymamy

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = -\frac{Y^{'}(y)}{Y(y)}$$

Równość ta może zachodzić tylko wówczas gdy obie strony są równe pewnej stałej, powiedzmy $-\lambda$. Otrzymujemy zatem następujące równania różniczkowe:

$$X^{''}(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad Y^{''}(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

lim

Z warunków (150) i (151) wynika natomiast, że $X(0)=0, \quad X(\pi)=0, \quad y\to +\infty Y(y)=0$. Rozważmy problem

$$X^{''}(x) + \lambda X(x) = 0,$$
 $X(0) = 0, X(\pi) = 0.$

Dla $\lambda \leq 0$ problem ten posiada wyłącznie rozwiązanie zerowe. Załóżmy więc, że $\lambda > 0$. Wówczas

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Z warunków brzegowych wynika, że A=0 oraz $\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0$. Zatem rozwiązanie niezerowe istnieje dla $\lambda=n^2, n\in\mathbb{N},$ czyli

$$X_n = B_n \sin(nx)$$
.

Zauważmy teraz, że rozwiązanie problemu

$$\lim_{y \to +\infty} Y'(y) - n^2 Y(y) = 0, \qquad y \to +\infty Y(y) = 0$$

ma postać

$$Y_n(y) = C_n e^{-ny}.$$

Wynika stąd, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ funkcja

$$u_n(x, y) = C_n e^{-ny} \sin(nx).$$

jest rozwiązaniem problemu (149) spełniającym warunki brzegowe. Na ogół rozwiązanie to nie spełnia warunku początkowego. Rozważmy więc funkcje

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-ny} \sin(nx).$$

Jeśli ostatni szereg oraz szeregi jego pochodnych drugiego rzędu są jednostajnie zbieżne, funkcja ta spełnia równanie (149) oraz warunki brzegowe (150). Aby spełniała ona również warunek początkowy (151) wystarczy przyjąć

$$C_n = \frac{\frac{2}{\pi}}{\int_0^{\pi} (1 - \frac{x}{\pi}) \sin(nx) dx} = \frac{\frac{2}{n\pi}}{n\pi}.$$

Szukane rozwiązanie ma zatem postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} e^{-ny} \sin(nx).$$

PRZYKŁAD

Przykład 28: Drgania poprzeczne belki

Metoda rozdzielania zmiennych może być również stosowana do równań rzędu wyższego.

Rozważmy zagadnienie drgającej belki opisane równaniem rzędu czwartego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \qquad 0 < x < l, \ t > 0$$
(152)

o zadanych warunkach początkowych:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \qquad 0 < x < l,$$
 (153)

oraz warunkach brzegowych:

$$u(0,t) = 0$$
, $u(l,t) = 0$, $u_{xx}(0,t) = 0$, $u_{xx}(l,t) = 0$ $t > 0$. (154)

Szukamy rozwiązania w postaci

$$u(x, y) = T(t)X(x).$$

Po podstawieniu do równania (152) i rozdzieleniu zmiennych otrzymamy równość

$$\frac{X^{''''}(x)}{X(x)} = -\frac{T^{''}(t)}{a^2 T(t)}$$

równoważną układowi równań

$$X^{'''}(x) - \lambda^2 X(x) = 0, \quad T^{'} + a^2 \lambda^2 T = 0.$$

Całka ogólna pierwszego równania ma postać

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x).$$

Z warunków brzegowych (154) wynika, że

$$X(0) = 0$$
, $X(l) = 0$, $X^{''}(0) = 0$, $X^{''}(l) = 0$.

Stąd $C_1=C_2=C_3=0$, a jedynymi liczbami λ dla których mogą być spełnione powyższe warunki, są liczby

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

którym odpowiadają rozwiązania

$$X_n(x) = C_n \sin(\frac{n\pi}{l}x), \quad T_n(t) = A_n \cos(\frac{an^2\pi^2}{l^2}t) + B_n \sin(\frac{an^2\pi^2}{l^2}t).$$

Przyjmując

$$\sum_{u(x,\,t)\,=\,n\,=\,1}^{\infty} \sum_{n\,=\,1}^{\infty} \sum_{A_n\cos(\frac{an^2\pi^2}{l^2}\,t)\,+\,B_n\sin(\frac{an^2\pi^2}{l^2}\,t)}^{\infty} \int_{\sin(\frac{1}{l}\,x),}^{n\pi}$$

gdzie

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^t \varphi(x) \sin(\frac{n\pi}{l} x) dx, \quad B_n = \frac{2l}{an^2 \pi^2} \int_0^t \psi(x) \sin(\frac{n\pi}{l} x) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

jest rozwiązaniem postawionego problemu.

Metoda rozdzielania zmiennych dla równania Laplace'a we współrzędnych biegunowych

Rozważmy równanie Laplace'a

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad (x, y) \in \Omega,$$
 (155)

z warunkiem

$$u(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \partial\Omega,$$
 (156)

gdzie

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2 \}.$$

Postać obszaru Ω sugeruje przejście na współrzędne biegunowe

$$x = \rho \cos(\alpha), \quad y = \rho \sin(\alpha), \qquad 0 \le \rho \le r, \quad 0 \le \alpha < 2\pi.$$

Przyjmując

$$v(\rho, \alpha) = u(\rho\cos(\alpha), \rho\sin(\alpha))$$

i korzystając z zależności:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha = \arctan \frac{y}{x},$$

nietrudno sprawdzić, że:

$$\begin{split} u_{xx} &= \frac{x^2}{\rho^2} v_{\rho\rho} - \frac{2xy}{\rho^3} v_{\rho\alpha} + \frac{y^2}{\rho^4} v_{\alpha\alpha} + \frac{y^2}{\rho^3} v_{\rho} + \frac{2xy}{\rho^4} v_{\alpha}, \\ u_{yy} &= \frac{y^2}{\rho^2} v_{\rho\rho} + \frac{2xy}{\rho^3} v_{\rho\alpha} + \frac{x^2}{\rho^4} v_{\alpha\alpha} + \frac{x^2}{\rho^3} v_{\rho} - \frac{2xy}{\rho^4} v_{\alpha}. \end{split}$$

Podstawiając ostatnie związki do równania (155) otrzymamy równanie Laplace'a we współrzędnych biegunowych

$$v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} v_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} v_{\alpha\alpha} = 0.$$
 (157)

Warunek (156) przyjmie postać

$$v(r, \alpha) = g(\alpha), \qquad \alpha \in [0, 2\pi),$$

gdzie $g(\alpha) = f(r\cos(\alpha), r\sin(\alpha))$. Szukamy rozwiązania w postaci

$$v(\rho, \alpha) = \phi(\rho)\psi(\alpha).$$

Ze względu na charakter współrzędnych biegunowych możemy przyjąć, że ψ jest funkcją okresową o okresie 2π określoną na R

Po podstawieniu ostatniego wzoru do równania (157) i rozdzieleniu zmiennych otrzymamy

$$\rho^{2} \frac{\phi''(\rho)}{\phi(\rho)} + \rho \frac{\phi'(\rho)}{\phi(\rho)} = -\frac{\psi''(\alpha)}{\psi(\alpha)}.$$
(158)

Równość ta może zachodzić tylko wówczas gdy obie strony są równe pewnej stałej, powiedzmy λ . Otrzymujemy zatem równania różniczkowe:

$$\psi''(\alpha) + \lambda \psi(\alpha) = 0 \tag{159}$$

огал

$$\rho^2 \phi^{\prime\prime}(\rho) + \rho \phi^{\prime}(\rho) - \lambda \phi(\rho) = 0. \tag{160}$$

Z okresowości funkcji ψ wynika, że przypadki $\lambda < 0$ oraz $\lambda = 0$ prowadzą do rozwiązania zerowego. Dla przypadku $\lambda > 0$

rozwiązanie równania (159) ma postać

$$\psi(\alpha) = A\cos(\sqrt{\lambda}\alpha) + B\sin(\sqrt{\lambda}\alpha). \tag{161}$$

Ponieważ ψ jest funkcją okresową o okresie 2π , $\sqrt{\lambda}$ musi być liczbą naturalną, czyli $\lambda=n^2$, $n\in\mathbb{N}$. Zatem

$$\psi(\alpha) = A\cos(n\alpha) + B\sin(n\alpha).$$

Szukając rozwiązania równania (160) w postaci

$$\phi = \rho^k$$
 gdzie $k \in \mathbb{N}$,

otrzymamy

$$(k(k-1) + k - n^2)\rho^k = 0.$$

Stąd k = n lub k = -n. Rozwiązanie ogólne równania (160) ma zatem postać

$$\phi(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}.$$

Ponieważ dla $\rho=0$ wyraz ρ^{-n} nie jest określony i ponadto $\lim_{\rho\to 0^+} \rho^{-n}=\infty$, aby uniknąć osobliwości w początku układu należy przyjąć D=0. W konsekwencji dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ funkcja

$$v_n = \rho^n (A_n \cos(n\alpha) + B_n \sin(n\alpha))$$

jest rozwiązaniem klasy C^2 równania (157).

Rozwiązanie to na ogół nie spełnia warunku (158). Rozważmy więc funkcje

$$v = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \cos(n\alpha) + B_n \sin(n\alpha)).$$

Jeśli ostatni szereg oraz szereg pochodnych pierwszego i drugiego rzędu jest jednostajnie zbieżny, to tak określona funkcja ν jest rozwiązaniem równania (157). Warunek (158) przyjmuje postać

$$\frac{1}{2} \sum_{A_0 + n = 1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\alpha) + B_n \sin(n\alpha)) = g(\alpha).$$

Jeśli funkcja $\,g\,$ jest rozwijalna w szereg Fouriera, to ostatnia równość jest spełniona, jeśli

$$A_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad B_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Zatem

$$v(\rho,\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} {\rho \over r} e^{-r} \int_0^{2\pi} (\cos(n\alpha)\cos(n\theta) + \sin(n\alpha)\sin(n\theta)) g(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + 2^{n-1}) (r^2) e^{-r} e^{-r}$$

Korzystając ze wzoru

$$\cos(\beta) = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2}$$

otrzymamy

$$1 + 2^{n=1} \binom{\rho}{r} n \cos(n(\theta - \alpha)) = 1 + n = 1 \binom{\rho}{r} n e^{in(\theta - \alpha)} + n = 1 \binom{\rho}{r} n e^{-in(\theta - \alpha)} = \frac{\frac{\rho}{r} e^{i(\theta - \alpha)}}{\frac{\rho}{r} e^{-i(\theta - \alpha)}} - \frac{\frac{\rho}{r} e^{-i(\theta - \alpha)}}{\frac{\rho}{r} e^{-i(\theta - \alpha)}} = \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha) + \rho^2}.$$

Uwzględniając ostatnią równość rozwiązanie v możemy zapisać w postaci:

$$v(\rho,\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - \rho^2)g(\theta)}{r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha) + \rho^2} d\theta.$$

Dla $\rho = 0$ oraz $\alpha = 0$ ostatni wzór daje zależność

$$v(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \, d\theta.$$

Uzyskana równość mówi, że wartość średnia rozwiązania po brzegu kuli o środku w punkcie (0,0) jest równa wartości rozwiązania w tym punkcie.

Rozdział 5. Równanie falowe

Rozwiązanie równania struny metodą d'Alemberta

Rozważmy równanie struny

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a > 0,$$
 (162)

w obszarze $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$ spełniające warunki początkowe:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$
 (163)

gdzie $\,\varphi\,$ i $\,\psi\,$ są zadanymi funkcjami.

Równanie charakterystyk w naszym przypadku ma postać

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - a^2 = 0.$$

Rozwiązując równania

$$\frac{dx}{dt} = a$$
 $\frac{dx}{dt} = -a$

otrzymamy następujące rodziny rozwiązań

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Stosując podstawienie

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at,$$

równanie wyjściowe sprowadzimy do postaci

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Całkując względem η otrzymamy

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = f(\xi).$$

a następnie całkując względem $\,\xi\,$ otrzymamy

$$w(\xi, \eta) = \int f(\xi) d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta),$$

gdzie F i G są dowolnymi funkcjami klasy C^2 . Wracając do zmiennych wyjściowych mamy

$$u(x,t) = F(x-at) + G(x+at).$$
 (164)

Rozwiązania zadane odpowiednio funkcjami F i G nazywają się falami prostymi. Uwzględniając warunki początkowe mamy

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = \varphi(x),$$

 $u_t(x, 0) = -aF'(x) + aG'(x) = \psi(x).$

Rozwiązując układ równań

$$F(x) + G(x) = \varphi(x),$$

$$-F'(x) + G'(x) = \frac{1}{a}\psi(x),$$

otrzymamy

$$G'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\varphi'(x)} + \frac{\frac{1}{2a}}{\psi(x)},$$

a po scałkowaniu w przedziale $[x_0, x]$ dostajemy

$$G(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2} \varphi(x_0) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x} \varphi(s) \, ds + G(x_0).$$

Z pierwszego równania mamy

$$F(x) = \varphi(x) - G(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(s) \, ds + \frac{1}{2} \varphi(x_0) - G(x_0).$$

Postawiając uzyskane wzory na F i G do (164) otrzymamy

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x - at) + \varphi(x + at) \right) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x - at} \frac{1}{y(s)} ds + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x + at} \frac{1}{y(s)} ds,$$

a po przekształceniu całek

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(\varphi(x-at) + \varphi(x+at) \right) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) \, ds.$$

$$(165)$$

Uzyskany w ten sposób wzór (165) na rozwiązanie problemu początkowego (162), (163) nosi nazwę wzoru d'Alemberta.



UWAGA

Uwaga 10:

Ze wzoru (165) wynika natychmiast, że rozwiązanie problemu (162), (163) zależy w sposób ciągły od warunków początkowych. Istotnie, niech u_1 będzie rozwiązaniem równania (162) odpowiadającym położeniu początkowemu φ_1 oraz prędkości początkowej ψ_1 zaś u_2 rozwiązaniem odpowiadającym położeniu początkowemu φ_2 oraz prędkości początkowej ψ_2 . Załóżmy, że

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|<\delta,\quad |\psi_2(x)-\psi_1(x)|<\delta\quad {\rm dla}\ \ x\in {\bf R}.$$

Wykorzystując wzór (165) łatwo sprawdzić, że

$$|u_2(x,t) - u_1(x,t)| < (1+t)\delta$$
 dla $x \in \mathbb{R}$.



Uwaga 11:

Z liniowości operacji różniczkowania widać natychmiast, że jeśli

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2, \qquad \psi=\psi_1+\psi_2,$$

to rozwiązanie problemu (162), (163) możemy przedstawić jako sumę $u=u_1+u_2$, gdzie u_1 jest rozwiązaniem równania (162) spełniającym warunki początkowe

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad u_t(x,0) = \psi_1(x),$$

a u_2 jest rozwiązaniem problemu (162) spełniającym warunki początkowe

$$u(x, 0) = \varphi_2(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi_2(x).$$

Zauważmy jeszcze, że jeśli $\varphi=0$, rozwiązanie problemu (162), (163) przyjmuje postać

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds,$$
(166)

a jeśli $\psi = 0$, postać

$$\frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} \tag{167}$$



Uwaga 12:

Zinterpretujemy teraz rozwiązanie ogólne równania (162) dane wzorem (164). Rozważmy wpierw przypadek G=0. Wówczas

$$u(x,t) = F(x - at).$$

Zauważmy, że na prostej $x - at = x_0$ amplituda fali jest stała i wynosi $F(x_0)$, przy czym fala ta rozchodzi się z prędkością a w kierunku dodatnim osi Ox.

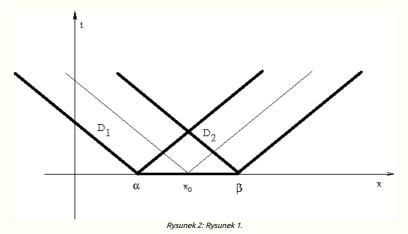
Podobnie, jeśli F = 0, równanie fali ma postać

$$u(x,t) = G(x+at),$$

amplituda fali jest stała na prostej $x + at = x_0$ i wynosi $G(x_0)$, a fala rozchodzi się z prędkości a w kierunku ujemnym osi Ox

Przypuśćmy teraz, że funkcje F i G są równe zeru poza przedziałem $[\alpha, \beta]$.

Wówczas fala prosta zadana funkcją F(x-at) w płaszczyźnie Oxu przesuwa się w obszarze D_2 wyznaczonym prostymi $x-at=\alpha, \quad x-at=\beta, \quad t\geq 0, \quad \text{a fala zadana funkcją } G(x+at)$ przesuwa się w obszarze D_1 wynaczonym prostymi $x+at=\alpha, \quad x+at=\beta, \quad t\geq 0$ (zob. Rys. 2). Rzutując rozwiązanie na oś Ox możemy stwierdzić, że fala prosta opisana funkcją F(x-at) przesuwa się względem osi Ox z prędkością Ax0 w kierunku dodatnim osi Ax0 y rzesuwa się względem osi Ax1 z prędkością Ax2 w kierunku ujemnym osi Ax3.



PRZYKŁAD

Przykład 29:

Rozważmy przypadek, gdy prędkość początkowa $\psi=0$, a położenie początkowe ϕ ma postać

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + \alpha, & \text{jeśli} \quad -\alpha \le x \le 0; \\ \alpha - x, & \text{jeśli} \quad 0 < x \le \alpha; \\ 0, & \text{jeśli} \quad |x| > \alpha, \end{cases}$$

gdzie $\alpha > 0$. Zgodnie z uwagą 2 rozwiązanie wyraża się wzorem (167). Nietrudno sprawdzić, że $u(x,0) = \varphi(x)$,

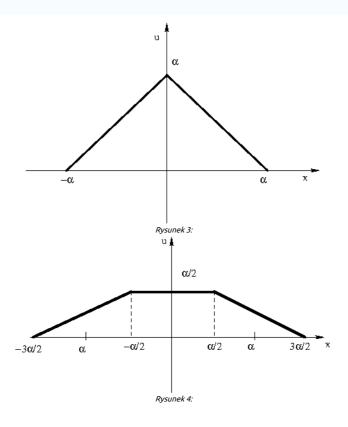
$$u(x, \alpha/(2a)) = \begin{cases} x/2 + 3\alpha/4, & \text{jeśli } -3\alpha/2 \le x < -\alpha/2; \\ \alpha/2, & \text{jeśli } |x| \le \alpha/2; \\ -x/2 + 3\alpha/4, & \text{jeśli } \alpha/2 < x \le 3\alpha/2; \\ 0, & \text{jeśli } |x| > 3\alpha/2. \end{cases}$$

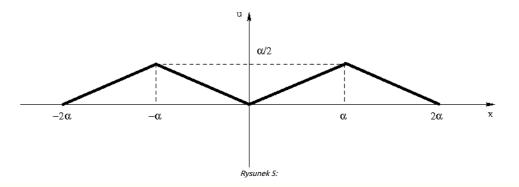
огах

$$u(x, \alpha/a) = \begin{cases} x/2 + \alpha, & \text{jeśli } -2\alpha \le x < -\alpha; \\ -x/2, & \text{jeśli } -\alpha \le x \le 0; \\ x/2, & \text{jeśli } 0 < x \le \alpha; \\ \alpha - x/2, & \text{jeśli } \alpha < x \le 2\alpha; \\ 0, & \text{jeśli } |x| > 2\alpha. \end{cases}$$

Wartości funkcji u(x,t) dla t=0, $t=\frac{\alpha}{2a}$ oraz $t=\frac{\alpha}{a}$

zostały przedstawione na rysunkach Rys. 3, Rys. 4 i Rys. 5.





∵©: UWAGA

Uwaga 13:

Jeśli funkcje $\,\varphi\,$ i $\,\psi\,$ są nieparzyste, to

$$u(0,t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \int_{-at}^{at} \psi(s) \, ds = 0.$$

Jeśli funkcje $\,\varphi\,$ i $\,\psi\,$ są parzyste, to

$$\frac{\partial}{\partial x}_{u(0,t)} = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left(\psi(at) - \psi(-at) \right) = 0.$$

Skorzystaliśmy tutaj z oczywistego faktu, że $\varphi^{'}$ jako pochodna funkcji parzystej jest funkcją nieparzystą. Uzyskane relacje wykorzystamy przy rozwiązywaniu równania struny na półosi dodatniej (zobacz poniżej przykład 2).

Przykład 30:

Rozważmy równanie (162) dla x>0. Załóżmy, że zachodzą warunki (163) dla x>0. Oczywiście w tym przypadku ze wzoru (165) nie możemy skorzystać bezpośrednio, bowiem funkcje φ i ψ nie są określone dla x<0.

Przypadek 1. Załóżmy dodatkowo, że szukamy rozwiązania spełniającego warunek

$$u(0,t) = 0$$
 dla $t > 0$.

Wykorzystując uwagę 4 możmy rozszerzyć funkcje $\, \varphi \,$ i $\, \psi \,$ na prostą $\,$ R $\,$ jako funkcje nieparzyste. Połóżmy

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{dla } x > 0; \\ -\varphi(-x), & \text{dla } x < 0, \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{dla } x > 0; \\ -\psi(-x), & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Przyjmijmy ponadto, że $\Phi(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$.

Rozwiązanie równania (162) z warunkami początkowymi

$$u(x,0) = \Phi(x),$$
 $u_t(x,0) = \Psi(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$,

zgodnie z formułą (165) wyraża się wzorem

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(s) \, ds.$$
 (168)

Zatem wzór na rozwiązanie problemu wyjściowego ma ostatecznie postać

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \int_{x-at}^{x+at} \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{1}{2a} \int_{x-at-x}^{x+at} \frac{1}{2a} \int_{x-at-x}^{x+at} \frac{1}{2a} \int_{x-at-x}^{x+at} \frac{1}{2a} \int_{x-at-x}^{x+at} \frac{1}{2a} \int_{x-at-x}^{x+at} \frac{1}{2a} \int_{x-at-x}^{x+at-x} \frac{1}{2a} \int_{x-x}^{x+at-x} \frac{1}{2$$

Przypadek 2. Załóżmy teraz, że

$$u_{r}(0,t) = 0$$
 dla $t > 0$.

Wykorzystując ponownie uwagę 4 rozszerzamy funkcje φ i ψ na R jako funkcje parzyste, czyli

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{dla } x > 0; \\ \varphi(-x), & \text{dla } x < 0, \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{dla } x > 0; \\ \psi(-x), & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Podobnie jak w przypadku 1 rozwiązanie równania (162) z warunkami początkowymi

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad u_t(x, 0) = \Psi(x) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R},$$

wyraża się wzorem (168).

Stąd wzór na rozwiązanie problemu wyjściowego ma postać:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \int_{x-at}^{x+at} \frac{1}{2a} \int_{x-at$$

Równanie niejednorodne struny

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$
 (169)

z warunkami początkowymi

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
 (170)

Zauważmy wpierw, korzystając z liniowości operacji różniczkowania, że rozwiązanie u problemu (169), (170) możemy zapisać jako sumę $u = u_1 + u_2$, gdzie u_1 jest rozwiązaniem problemu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

zaś u_2 jest rozwiązaniem problemu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$
 (171)

W celu znalezienia rozwiązania problemu (171) rozważmy najpierw równanie

$$w_{tt} = a^2 w_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \ge \tau > 0,$$
 (172)

z warunkami początkowymi

$$w(x,\tau) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x,\tau) = f(x,\tau), \quad x \in \mathbb{R}.$$
 (173)

Ponieważ warunek początkowy jest zadany w chwili $t_0 = \tau$, rozwiązanie problemu (172), (173) zależy od τ , co symbolicznie będziemy zapisywać $w(\cdot; \tau)$.

Zauważmy, ze rozwiązanie problemu (172), (173) możemy wyrazić w postaci

$$w(x,t;\tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \int_{(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau) ds.$$
 (174)

Oczywiście w(x,t,t)=0 dla $x\in \mathbf{R}$, t>0.



Lemat 1:

Funkcja

$$\int_{V(x,t)=0}^{t} w(x,t;\tau)d\tau$$
(175)

jest rozwiązaniem problemu (171).

Istotnie, różniczkując funkcje v względem t otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial t} v(x,t) = w(x,t;t) + \int_{0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} w(x,t;\tau) d\tau = \int_{0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} w(x,t;\tau) \tau$$

огах

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}w(x,t;\,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t;\,\tau)d\tau = f(x,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t;\,\tau)d\tau,$$

zaś różniczkując dwukrotnie funkcje v względem x otrzymamy

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t) = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x,t;\tau) d\tau.$$

Wykorzystując uzyskane wzory mamy

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t)-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t)=f(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^t\frac{\partial^2}{\partial t^2}w(x,t;\tau)-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x,t;\tau)\Big)d\tau.$$

Ponieważ funkcja w jest rozwiązaniem równania (172), wyrażenie pod całką jest równe zeru, skąd wynika, że funkcja v spełnia równanie (171). W oczywisty sposób v(x,0)=0, $v_t(x,0)=0$ dla $x\in\mathbb{R}$. Zatem dowód lematu 1 jest zakończony.

Na mocy lematu 1 oraz wzoru 4 z modułu "Rozwiązanie równania struny metodą d'Alemberta", rozwiązanie problemu (169), (170) możemy zapisać w postaci

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \int_{y-at}^{t} \int_{0}^{x+a(t-\tau)} \int_{0}^{t} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau) ds d\tau.$$



PRZYKŁAD

Przykład 31:

Rozważmy równanie

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad \text{dla} \quad x > 0, \quad t > 0,$$

z warunkami początkowymi

$$u(x, 0) = 0$$
, $u_t(x, 0) = 0$ dla $x > 0$

oraz warunkiem brzegowym

$$u(0,t) = g(t)$$
 dla $t > 0$.

Ponieważ warunki początkowe są zadane tylko dla x>0, bezpośrednio nie możemy skorzystać z wzoru 4 z modułu "Rozwiązanie równania struny metodą d'Alemberta". Ponadto, jeśli $g\neq 0$ oraz $g^{'}\neq 0$, nie możemy również skorzystać z uwagi o przedłużaniu warunków początkowych. Możemy natomiast wykorzystać wzór 3 z modułu "Rozwiązanie równania struny metodą d'Alemberta". Zgodnie z tym wzorem

$$u(x,t) = F(x - at) + G(x + at).$$

Dla x > 0 z warunku u(x,0) = 0 otrzymamy F(x) + G(x) = 0, czyli

$$G(x) = -F(x)$$
 dla $x > 0$, $t > 0$.

Zatem

$$u(x,t) = F(x-at) - F(x+at) \qquad \text{dla} \quad x > 0, \quad t > 0.$$

Z kolei z warunku $u_t(x,0)=0$ wynika, że F'(x)=0 dla x>0, a w konsekwencji F(x)=C. Wykorzystując ostatni warunek mamy

$$u(0,t) = F(-at) - F(at) = F(-at) - C.$$

Stąd i z warunku u(0,t) = g(t) dla t > 0 otrzymujemy

$$F(-at) = g(t) + C,$$

a kładąc s = -at mamy

$$F(s) = g(-s/a) + C \qquad \text{dla} \quad s < 0.$$

Zatem

$$F(s) = \begin{cases} g(-s/a) + C, & \text{jeśli } s < 0; \\ C, & \text{jeśli } s > 0. \end{cases}$$

W konsekwencji

$$u(x,t) = \begin{cases} g(t-x/a), & \text{jeśli } 0 < x < at; \\ 0, & \text{jeśli } x \ge at. \end{cases}$$



PRZYKŁAD

Przykład 32:

Znaleźć rozwiązanie problemu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$
 dla $x > 0, t > 0$

spełniające warunki początkowe

$$u(x, 0) = 0$$
, $u_t(x, 0) = 0$ dla $x > 0$

oraz warunek brzegowy

$$u(0,t) = g(t) \qquad \text{dla} \quad t > 0.$$

Szukane rozwiązanie jest równe sumie rozwiązania u_1 problemu (171), gdzie funkcja $f(\cdot,t)$ jest rozszerzona na R jako funkcja nieparzysta, oraz rozwiązania u_2 problemu z przykładu 1. Zauważmy, że tak określone rozwiązanie u_1 spełnia - zgodnie z uwagą 4 z modułu "Rozwiązanie równania struny metodą d'Alemberta" - warunek $u_1(0,t)=0$ dla t>0.

Równanie fal kulistych. Metoda uśredniania

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad (x, y, z) \in V, \quad t > 0$$
 (176)

z warunkami początkowymi

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V,$$
 (177)

 $\text{gdzie laplasjan } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}, \quad \text{a} \quad V \text{ jest podzbiorem otwartym i spójnym w przestrzeni } \ \mathbb{R}^3.$

Technika rozwiązania zaprezentowana poniżej polega na przekształceniu równania o trzech zmiennych na jednowymiarowe równanie falowe. Redukcję taką uzyskamy wprowadzjąc tak zwane średnie sferyczne.

Przypuśćmy, że problem (176), (177) posiada rozwiązanie u w obszarze $\Omega = V \times [0, \infty)$. Ustalmy punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V$. Dobierzmy r>0 tak, aby kula $K(P_0,r)\subset V$. Niech $S(P_0,r)$ będzie sferą o środku w punkcie P_0 i promieniu r. Połóżmy

$$\frac{1}{\tilde{u}(r,t)} = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S(P_0,r)} u(\xi,\eta,\zeta,t) \, dS,$$
(178)

gdzie po prawej stronie występuje całka powierzchniowa po sferze $S(P_0,r)$, a (ξ,η,ζ) oznaczają współrzędne kartezjańskie punktu bieżącego na sferze. Wielkość $\tilde{u}(r,t)$ oznacza wartość średnią funkcji u na sferze $S(P_0,r)$ w chwili t.

Zapiszmy równanie sfery $S(P_0,r)$ we współrzędnych sferycznych

$$\xi = x_0 + r \cos\alpha \cos\beta, \quad \eta = y_0 + r \sin\alpha \cos\beta, \quad \zeta = z_0 + r \sin\beta,$$

gdzie $0 \le \alpha < 2\pi, -\pi/2 \le \beta \le \pi/2$. Przypomnijmy też, że

element powierzchniowy dS na sferze $S(P_0,r)$, po przejściu na współrzędne sferyczne wyraża się wzorem

$$dS = r^2 \cos\beta \, d\alpha \, d\beta.$$

Zamieniając we wzorze (178) całkę powierzchniową na całkę iterowaną otrzymamy

$$\tilde{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} u(x_0 + r \cos\alpha \cos\beta, y_0 + r \sin\alpha \cos\beta, z_0 + r \sin\beta, t) \cos\beta \, d\alpha \, d\beta,$$

lub krótko

$$\tilde{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S(P_0,r)} u dS = \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u \cos\beta \, d\alpha \, d\beta.$$
 (179)

Oczywiście

$$\tilde{u}(0,t) = u(x_0, y_0, z_0, t). \tag{180}$$

Całkując równanie (176) po kuli $K(P_0, r)$ otrzymamy

$$\iiint\limits_{K(P_0,r)} \iiint\limits_{u_{tt} dx dy dz} = a^{2K(P_0,r)} \Delta u dx dy dz,$$

a po zastosowaniu do prawej strony wzoru Gaussa-Greena mamy

$$\iiint\limits_{K(P_0,r)} \iint\limits_{u_r,dxdydz} \frac{\iint\limits_{P_0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

gdzie $\overline{^{\partial
u}}$ oznacza pochodną funkcji u w kierunku normalnej zewnętrznej do powierzchni $\mathit{S}(P_0,r)$. Zauważmy, że jeśli $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ jest unormowanym wektorem normalnym do powierzchni $S(P_0, r)$ w punkcie (ξ, η, ζ) , wówczas $\xi = x_0 + \nu_1 r$, $\eta=y_0+\nu_2 r, \quad \zeta=z_0+\nu_3 r. \;\;$ Prosty rachunek pokazuje, że

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \eta}}_{\nu_1} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \zeta}}_{\nu_2} + \frac{\partial u}{\partial r}$$

Stąd

$$\iiint\limits_{K(P_0,r)} \iint\limits_{u_{tt}} \frac{\partial u}{\partial r} dS.$$

Po wprowadzeniu współrzędnych sferycznych i zamianie całek na całki iterowane otrzymamy

$$\int\limits_{0}^{r}\int\limits_{\rho^{2}}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\partial u}{\partial r}\cos\beta\,d\alpha\,d\beta\,d\rho\,=\,a^{2}\int\limits_{0}^{0}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\partial u}{\partial r}\cos\beta\,d\alpha\,d\beta.$$

Różniczkując ostatnią równość względem r i dzieląc przez $4\pi r^2$ otrzymamy

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_{u_{tt}\cos\beta}d\alpha d\beta=\frac{a^{2}}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\partial u}{\partial r}\int\limits_{\cos\beta}d\alpha d\beta\right).$$

Zapisując różniczkowanie względem t na zewnątrz całki i wprowadzając średnie wartości sferyczne (zob. (179)) otrzymamy

$$\frac{\partial^{2\tilde{u}}}{\partial t^{2}} - \frac{a^{2}}{r^{2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) = 0.$$
 (181)

Ponieważ

$$\frac{\partial^{2}(r^{\tilde{u}})}{\partial r^{2}} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\tilde{u} + r^{\frac{\partial}{\partial r}} \right) = 2^{\frac{\partial}{\partial r}} + r^{\frac{\partial^{2}\tilde{u}}{\partial r^{2}}},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{2\frac{\partial}{\partial r}} \right) = r \left(2^{\frac{\partial}{\partial r}} + r^{\frac{\partial^{2}\tilde{u}}{\partial r^{2}}} \right) = r \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\tilde{u} + r^{\frac{\partial}{\partial r}} \right) \right) = r \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\tilde{u}} \right) \right) = r^{\frac{\partial^{2}(r^{\tilde{u}})}{\partial r^{2}}},$$

równanie (181) przyjmuje postać

$$\frac{\partial^{2\tilde{u}}}{\partial t^{2}} - \frac{a^{2}}{r} \frac{\partial^{2}(r^{\tilde{u}})}{\partial r^{2}} = 0$$

a po pomnożeniu przez $\ r$

$$\frac{\partial^2 (r^{\tilde{u}})}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 (r^{\tilde{u}})}{\partial r^2} = 0$$

Kładąc

$$v(r,t) = r^{\tilde{u}}(r,t)$$

otrzymamy

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad \text{dla} \quad r > 0, \quad t > 0.$$

(Oczywiście równanie (182) możemy rozważać dla $t \in \mathbb{R}$.) Uśredniając - zgodnie z wzorem (178) - warunki początkowe (177) otrzymamy

$$\tilde{u}(r,0) = \tilde{\varphi}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S(\tilde{P}_0,r)} \varphi(\xi,\eta,\zeta) dS,$$

$$\tilde{u}_t(r,0) = \tilde{\psi}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S(\tilde{P}_0,r)} \psi(\xi,\eta,\zeta) dS,$$

Zatem funkcja v jest rozwiązaniem równania (182) spełniającym warunki

$$v(r,0) = r \tilde{\varphi}(r), \quad v_t(r,0) = r \tilde{\psi}(r), \quad v(0,t) = 0 \quad \text{dla} \quad r > 0, \ t \in \mathbb{R}.$$
 (183)

Rozwiązując równania charakterystyk

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 - \frac{1}{a^2} = 0,$$

zgodnie z metodą d'Alemberta rozwiązanie ogólne równania (182) możemy zapisać w postaci

$$v(r,t) = F(t+r/a) + G(t-r/a),$$

gdzie F i G są dowolnymi funkcjami klasy C^2 .

Z warunku v(0,t)=0 wynika, że G(t)=-F(t) dla $t\in\mathbb{R}$. W konsekwencji

$$v(r,t) = F(t+r/a) - F(t-r/a).$$

Przechodząc w równości

$$\tilde{u}(r,t) = \frac{1}{r}v(t,r) = \frac{1}{a}\left(\frac{F(t+r/a)-F(t)}{r/a} + \frac{F(t)-F(t-r/a)}{r/a}\right)$$

z r do zera, otrzymamy

$$\frac{2}{\tilde{u}(0,t)} = \frac{a}{a} F'(t). \tag{184}$$

Sumując równości

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\tilde{u}) = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{a} F'(t + r/a) + \frac{1}{a} F'(t - r/a),$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} (r\tilde{u}) = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{a} F'(t + r/a) - \frac{1}{a} F'(t - r/a)$$

otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^{\tilde{t}t}) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} (r^{\tilde{t}t}) = \frac{2}{a} F'(t + r/a).$$

Obliczając wartości obu stron ostatniej równości w punkcie (0, at) i wykorzystując równości (184) i (180) otrzymamy

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\tilde{u}) + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\tilde{u})\right)(0,at) = \frac{2}{a}F'(t) = \tilde{u}(0,t) = u(x_0,y_0,z_0,t).$$

Podstawiając w ostatnim wzorze w miejsce funkcji \tilde{u} jej reprezentacje daną wzorem (178) otrzymamy

$$u(x_0,y_0,z_0,t) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \iint\limits_{S(P_0,r)} \frac{u}{r} \frac{1}{dS} + \frac{1}{a} \iint\limits_{S(P_0,r)} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} dS \right) \bigg|_{(t,r) \, = \, (0,at)}.$$

Uwzględniając warunki początkowe (177) oraz fakt, że

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t}$$
 dla $r = at$

mamy

$$u(x_0,y_0,z_0,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \bigg(\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S(\tilde{P}_0,at)} \frac{\varphi}{t} \iint\limits_{dS + S(\tilde{P}_0,at)} \frac{\psi}{t} dS \bigg).$$

Przypomnijmy, że punkt $(x_0,y_0,z_0)\in V$ był ustalony dowolnie. Zatem opuszczając wskażnik 0 otrzymamy wartość rozwiązania u dla dowolnych $(x,y,z)\in V$ w postaci tak zwanego wzoru Kirchhoffa

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S(P,at)} \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{t} \iint\limits_{dS + S(P,at)} \frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t} dS \right),$$

lub po zastosowaniu transformacji

$$\xi = x + at\cos\alpha\cos\beta$$
, $\eta = y + at\sin\alpha\cos\beta$, $\zeta = z + at\sin\beta$,

gdzie $0 \le \alpha < 2\pi$, $-\pi/2 \le \beta \le \pi/2$,

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{0}^{2\pi\pi/2} \int_{-\pi/2}^{2\pi\pi/2} t \varphi(\xi(\alpha, \beta), \eta(\alpha, \beta), \zeta(\alpha, \beta)) \cos\beta \, d\alpha \, d\beta \right)$$
$$+ \int_{0}^{2\pi\pi/2} \int_{-\pi/2}^{2\pi\pi/2} t \psi(\xi(\alpha, \beta), \eta(\alpha, \beta), \zeta(\alpha, \beta)) \cos\beta \, d\alpha \, d\beta \right).$$

Przypomnijmy, że wzór Kirchhoffa otrzymaliśmy przy założeniu, że problem (176), (177) posiada rozwiązanie. Na odwrót, jeśli założymy, że funkcja φ jest klasy C^3 a funkcja ψ klasy C^2 to nietrudno pokazać bezpośrednim rachunkiem, że funkcja u dana wzorem Kirchhoffa jest rozwiązaniem problemu (176), (177). Oczywiście rozwiązanie to jest określone jednoznacznie. Pokazaliśmy zatem następujące twierdzenie.



TWIERDZENIE

Twierdzenie 4:

ZAŁOŻENIA:

Funkcja φ jest klasy C^3 a funkcja ψ klasy C^2 w zbiorze V.

TEZA:

Wtedy w obszarze $\Omega = \{(x, y, z, t): (x, y, z) \in V, \ t > 0\}$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie problemu (176), (177), przy czym jest ono określone następującym wzorem Kirchhoffa

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(P, at)} \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS + \iint_{S(P, at)} \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS \right)$$
$$= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(P, at)} \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS + \iint_{S(P, at)} \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS \right)$$

gdzie S(P,at) oznacza sferę o środku w punkcie P(x,y,z) i promieniu at. Zauważmy, że pierwsza wersja wzoru Kirchhoffa podana jest we współrzędnych kartezjańskich, zaś druga we współrzędnych sferyznych.

Niejednorodne równanie fal kulistych

Rozważmy niejednorodne równanie fal kulistych

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in V, \quad t > 0$$
 (185)

z warunkami początkowymi

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V,$$
 (186)

gdzie f i ψ są funkcjami klasy C^2 , a φ funkcją klasy C^3 w zbiorze V. W celu rozwiązania problemu (185), (186) rozbijamy go na dwa problemy oddzielne:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \qquad (x, y, z) \in V, \quad t > 0,$$
 (187)

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V$$
 (188)

огах

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, y, z, t), \qquad (x, y, z) \in V, \quad t > 0,$$
 (189)

$$u(x, y, z, 0) = 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = 0, \quad (x, y, z) \in V.$$
 (190)

Rozwiązanie problemu (187), (188) dane jest wzorem Kirchhoffa (zob. twierdzenie 1 w module "Równanie fal kulistych. Metoda uśredniania"). Aby znaleźć rozwiązanie problemu (189), (190)

rozważmy problem pomocniczy

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 \Delta v, & (x,y,z) \in V, \quad t \geq \tau > 0, \\ v(x,y,z,\tau) &= 0, & v_t(x,y,z,\tau) = f(x,y,z,\tau), & (x,y,z) \in V. \end{aligned} \tag{191}$$

$$v(x, y, z, \tau) = 0, \quad v_t(x, y, z, \tau) = f(x, y, z, \tau), \quad (x, y, z) \in V.$$
 (192)

Ponieważ rozwiązanie problemu (191), (192) zależy od τ , będziemy zaznaczać to pisząc $v(\,\cdot\,,\,\,\cdot\,,\,\,\cdot\,,\,\,\cdot\,;\tau)$. Wykorzystując wzór Kirchhoffa, rozwiązanie problemu (191), (192) możemy zapisać w postaci:

$$v(x,y,z,t;\tau) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{S\left(P,a(t-\tau)\right)} \frac{f(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{t-\tau} \, dS, \qquad (x,y,z) \in V, \ t > \tau.$$

Połóżmy

$$\begin{split} w(x,y,z,t) &= \int\limits_0^t v(x,y,z,t;\tau) d\tau = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^t \left(\iint\limits_{S(P,a(t-\tau))} \frac{f(\xi,\eta,\zeta,\tau)}{t-\tau} dS \right) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^t \left(\iint\limits_{0-\pi/2} \frac{2\pi\pi/2}{t-\tau} f(\xi(\alpha,\beta),\eta(\alpha,\beta),\zeta(\alpha,\beta),\tau) \cos\beta \, d\alpha \, d\beta \right) d\tau, \end{split}$$

gdzie

$$\xi = x + a(t - \tau)\cos\alpha\cos\beta$$
, $\eta = y + a(t - \tau)\sin\alpha\cos\beta$, $\zeta = z + a(t - \tau)\sin\beta$.

Pokażemy, że funkcja w jest rozwiązaniem problemu (189), (190). Istotnie, zauważmy najpierw, że

$$\frac{\partial w}{\partial t} \underbrace{\int\limits_{(x,y,z,t)}^{t} \int\limits_{(x,y,z,t;\tau)}^{t} \int\limits_{(x,y,z,t;\tau)}^{t} \int\limits_{(x,y,z,t;\tau)}^{t} \int\limits_{(x,y,z,t;\tau)}^{t} \int\limits_{(x,y,z,t;\tau)}^{t} \int\limits_{(x,y,z,t)}^{t} \int\limits_{(x$$

Zatem

$$\int_{0}^{t} \int_{0}^{t} (v_{tt} - a^2 \Delta v) d\tau = f(x, y, z, t) + \int_{0}^{t} (v_{tt} - a^2 \Delta v) d\tau = f(x, y, z, t),$$

co oznacza, że funkcja w spełnia równanie (189). Ponieważ w oczywisty sposób funkcja w spełnia również warunki początkowe (190), jest ona rozwiązaniem problemu (189), (190).

Zgodnie z zasadą liniowości rozwiązanie problemu (185), (186) możemy uzyskać jako sumę rozwiązań problemu (187), (188) oraz problemu (189), (190), czyli

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/2}^{2\pi\pi/2} \int_{-\pi/2}^{2\pi/2} \int_{-\pi/2}^{2\pi/$$

Przykład 33:

Znaleźć rozwiązanie następującego problemu

$$u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + t(x+y+z), \quad u(x,y,z,0) = x, \quad u_t(x,y,z,0) = y-x.$$

Rozwiązanie to otrzymamy jako sumę rozwiązań problemu

$$u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad u(x, y, z, 0) = x, \quad u_t(x, y, z, 0) = y - x$$

oraz problemu

$$u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + t(x + y + z), \quad u(x, y, z, 0) = 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = 0.$$

Rozwiązanie pierwszego problemu otrzymamy korzystając ze wzoru Kirchoffa:

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{0}^{2\pi\pi/2} \int_{-\pi/2}^{2\pi} t(x + 2t\cos\alpha\cos\beta)\cos\beta d\alpha d\beta + \frac{2\pi\pi/2}{\int_{0}^{2\pi\pi/2} t(y + 2t\sin\alpha\cos\beta - x - 2t\cos\alpha\cos\beta)\cos\beta d\alpha d\beta} \right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} tx\cos\beta d\beta + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} t(y - x)\cos\beta d\beta = x + t(y - x).$$

Rozwiązanie drugiego problemu ma postać:

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{t} \int_{0}^{2\pi\pi/2} \int_{-\pi/2}^{t} (t - \tau)\tau(x + 2\tau\cos\alpha\cos\beta + y + 2\tau\sin\alpha\cos\beta + z + t)$$

$$2\tau\sin\beta\right)\cos\beta\,d\alpha\,d\beta\right)d\tau = (x+y+z)\int_0^t (t-\tau)\tau d\tau = \frac{1}{6}t^3(x+y+z).$$

Stąd szukane rozwiązanie ma postać

$$u(x, y, z, t) = x + t(y - x) + \frac{1}{6}t^{3}(x + y + z)$$

Równanie fal walcowych. Metoda redukcji

Rozważmy równanie fali dla n=2

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$$
 dla $(x, y) \in D, \ t > 0,$ (193)

z warunkami początkowymi

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad \text{dla} \quad (x, y) \in D,$$
 (194)

$$\mbox{gdzie} \ \ D \subset {\bf R}^2 \ \mbox{,} \ \ \Delta = \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}{\partial x^2} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial y^2}}{\partial y^2} \ .$$

Okazuje się, że nie widać prostego podstawienia które pozwoliłoby zredukować problem dwuwymiarowy do problemu jednowymiarowego. Posłużymy się więc następującym chwytem. Rozważamy nasz problem w przestrzeni trójwymiarowej przyjmując, że funkcje występujące w równaniu nie zależą od zmiennej $\,z\,$. Mianowicie połóżmy

$$\tilde{u}(x,y,z,t) = u(x,y,t), \quad \tilde{\varphi}(x,y,z) = \varphi(x,y), \quad \tilde{\psi}(x,y,z) = \psi(x,y).$$

Niech \tilde{u} bedzie rozwiązaniem problemu

$$\begin{split} \tilde{u}_{tt} - a^2 \Delta \tilde{u} &= 0, \qquad (x,y,z) \in V, \ t > 0, \\ \tilde{u}(x,y,z,0) &= \tilde{\varphi}(x,y,z), \quad \tilde{u}_t(x,y,z,0) &= \tilde{\psi}(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in V, \end{split}$$

gdzie $V = D \times R$.

Niech $P_0=(x_0,y_0)\in D$ i niech $S(P_0,at)$ i $K(P_0,at)$ oznacza, odpowiednio sferę i kulę w przestrzeni \mathbb{R}^2 zawarte w D o środku w punkcie P_0 i promieniu at, a $\tilde{S}(\tilde{P}_0,at)$ i $\tilde{K}(\tilde{P}_0,at)$, gdzie $\tilde{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $z_0\in\mathbb{R}$, sferę i kulę w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Niech $\tilde{P}=(\xi,\eta,\zeta)$ będzie punktem bieżącym na sferze $\tilde{S}(\tilde{P}_0,at)$.

Na mocy wzoru Kirchhoffa

$$\tilde{u}(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\tilde{P}_0, at} \frac{\tilde{\varphi}(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS + \int_{\tilde{S}(\tilde{P}_0, at)} \frac{\tilde{\psi}(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS \right)$$

$$(195)$$

Zamieńmy teraz całki powierzchniowe we wzorze (195) na całki podwójne. Oczywiście równanie sfery $\tilde{S}(\tilde{P}_0, at)$ możemy zapisać za pomocą równań półsfer:

$$\zeta=z_0+g(\xi,\eta), \quad \zeta=z_0-g(\xi,\eta), \qquad (\xi,\eta)\in K(P_0,at),$$

gdzie $\mathit{K}(P_0,\mathit{at})$ oznacza kulę domkniętą w przestrzeni \mathbb{R}^2 , a

$$g(\xi,\eta) = \sqrt{(at)^2 - (\xi - x_0)^2 - (\eta - y_0)^2}.$$

Nietrudno sprawdzić, że element powierzchniowy na obu półsferach wyraża się wzorem

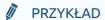
$$dS = \sqrt{1 + (g_{\xi})^{2} + (g_{\eta})^{2}} d\xi d\eta = \frac{at}{\sqrt{(at)^{2} - (\xi - x_{0})^{2} - (\eta - y_{0})^{2}}} d\xi d\eta.$$

W konsekwencji, uwzględniając definicje funkcji $\tilde{\varphi}$ i $\tilde{\psi}$, po zamianie całek powierzchniowych na całki podwójne, otrzymamy

$$\tilde{u}_{(x_0,y_0,z_0,t)} = \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{K(\tilde{P}_0,at)} \frac{\varphi(\xi,\eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x_0)^2 - (\eta - y_0)^2}} + \iint\limits_{K(\tilde{P}_0,at)} \frac{\psi(\xi,\eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x_0)^2 - (\eta - y_0)^2}} \right)$$

Ponieważ punkt $(x_0, y_0) \in D$ był dobrany dowolnie, możemy opuścić wskaźnik 0. Ponadto, uwzględniając związek $u(x, y, t) = \tilde{u}(x, y, z, t)$, otrzymamy rozwiązanie problemu (193), (194) w postaci tzw. wzoru **Poissona**:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{0}^{2\pi a} \int_{0}^{2\pi a} \int_{0}^{2\pi a} \int_{0}^{2\pi a} \frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^{2} - (\xi - x)^{2} - (\eta - y)^{2}}} \int_{0}^{2\pi a} \int_{0}^{2\pi a} \frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^{2} - (\xi - x)^{2} - (\eta - y)^{2}}} \int_{0}^{2\pi a} \int_{0}^{2\pi a}$$



Przykład 34: Niejednorodne równanie fal walcowych

Znaleźć rozwiązanie niejednorodnego równania fali płaskiej

$$u_{tt}-a^2\Delta u=f(x,y,t)\qquad {\rm dla}\quad (x,y)\in D,\quad t>0,$$

spełniające warunki początkowe

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad \text{dla} \quad (x, y) \in D$$

Zgodnie z zasadą liniowości rozwiązanie tego problemu możemy przedstawić jako sumę rozwiązania problemu (193), (194) oraz problemu

$$w_{tt} = a^2 \Delta w + f(x, y, t), \quad w(x, y, 0) = 0, \quad w_t(x, y, 0) = 0.$$
 (196)

Rozważamy problem pomocniczy

$$\begin{split} v_{tt} &= a^2(v_{xx} + v_{yy}), \quad (x,y) \in D, \quad t \geq \tau > 0, \\ v(x,y,\tau) &= 0, \quad v_t(x,y,\tau) = f(x,y,\tau), \quad (x,y) \in D \end{split}$$

Zgodnie ze wzorem Poissona rozwiązanie tego problemu możemy zapisać w postaci

$$v(x, y, t; \tau) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{K(P, a(t-\tau))} \frac{f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}.$$

Prosty rachunek pokazuje, że funkcja

$$w(x, y, t) = \int_0^t v(x, y, t; \tau) d\tau$$

jest rozwiązaniem problemu (196).

Zatem szukane rozwiązanie ma postać:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{0}^{2\pi a} \int_{K(P,at)}^{2\pi a} \frac{\varphi(\xi,\eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} \iint_{K(P,at)} \frac{\psi(\xi,\eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \int_{0}^{t} \int_{K(P,a(t-\tau))} \frac{f(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\tau.$$

Rozdział 6. Rozwiązania podstawowe równania Laplace'a i przewodnictwa cieplnego. Zasada maksimum

Równanie Laplace'a

Niewątpliwie do jednych z najważniejszych równań różniczkowych cząstkowych należą równanie Laplacc'a

$$\Delta u = 0, \qquad x \in \Omega \tag{197}$$

oraz równanie Poissona

$$\Delta u + f = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{198}$$

gdzie u jest szukaną funkcją określoną na obszarze $\Omega\subset \mathbb{R}^n$, $x=(x_1,...,x_n)$, $\Delta u=\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}}+...+\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x_n}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x_n}}$, a f jest zadaną funkcją. Równania te spotykamy przy opisie licznych zjawisk. Przypomnijmy niektóre z nich:

- (i). **Ustalony stan pola cieplnego**. Zjawisko rozchodzenia się ciepła jest opisane równaniem $u_t \Delta u = 0$. W przypadku pola stacjonarnego, tzn. takiego, że rozkład temperatury nie zmienia się w czasie, funkcja u nie zależy od czasu i spełnia równanie Laplace'a (197). Jeśli występują przy tym źródła ciepła, to spełnia ona równanie Poissona (198), gdzie funkcja f opisuje źródła ciepła.
- (ii). Bezwirowy ruch cieczy. Przypuśćmy, że w pewnym ograniczonym obszarze występuje ruch cieczy nieściśliwej o prędkości v. Jeśli ruch cieczy jest bezwirowy, to prędkość v ma potencjał φ . Jeśli ponadto pole jest beźródłowe, to $\Delta \varphi = 0$. Zatem potencjał φ ustalonego pola elektrycznego spełnia równanie Laplace'a.
- (iii). Pole elektrostatyczne. Przypuśćmy, że dane jest pole elektrostatyczne ładunków stacjonarnych i niech $\rho(x,y,z)$ oznacza gęstość objętościową ładunków. Można pokazać, że potencjał elektrostatyczny pola φ spełnia równanie $\Delta \varphi = -4\pi \rho$, tzn. równanie Poissona. Gdy brak jest ładunków przestrzennych, potencjał spełnia równanie Laplace'a. W literaturze nietrudno znaleźć wiele dalszych zjawisk które opisane są równaniami Laplace'a lub Poissona (zob. np. Feynmana wykłady z fizyki)

Rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a.

Zastosujemy tutaj dość typowy dla teorii równań różniczkowych sposób postępowania. Najpierw znajdziemy stosunkowo proste rozwiązania równania wyjściowego, a następnie - przy pomocy tego rozwiązania - będziemy konstruuować dalsze rozwiązania, które spełniają żądane warunki, np. początkowe lub brzegowe. Takie rozwiązanie nazywamy rozwiązaniem podstawowym lub fundamentalnym.

Ponieważ równanie Laplace'a jest symetryczne względem zmiennych, a w konsekwencji niezmiennicze względem obrotów, naturalnym wydaje się szukać rozwiązań radialnych, tzn. rozwiązań zależnych tylko od odległości od początku układu. Spróbujemy zatem znaleźć rozwiązanie równania (197) postaci

$$u(x_1, \dots, x_n) = v(r), \qquad \text{gdzie} \quad \mathbf{r} = \ \parallel \mathbf{x} \parallel \ = \ \sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \dots \mathbf{x}_n^2}.$$

Zauważmy, że dla $r \neq 0$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \qquad i = 1, ..., n.$$

Zatem

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v^{'}(r) \frac{x_i}{r}, \qquad \frac{\partial u^2}{\partial x_i^2} = v^{''}(r) \left(\frac{x_i}{r}\right)^2 + v^{'}(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right), \quad i = 1, ..., n.$$

Nietrudno teraz sprawdzić, że

$$\Delta u = v^{''}(r) + \frac{n-1}{r} v^{'}(r)$$

Postawione zadanie sprowadza się zatem do rozwiązania równania

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0.$$

Stad

$$v'(r) = \frac{A}{r^{n-1}}$$

gdzie $\,A\,$ jest dowolną stałą. Rozwiązując ostatnie równanie otrzymamy

$$v(r) = \begin{cases} A \ln r + B, & \text{dla } n = 2; \\ \frac{A}{r^{n-2}} + B, & \text{dla } n \ge 3, \end{cases}$$

gdzie A i B są dowolnymi stałymi. Ze względu na dalsze zastosowania wygodnie jest przyjąć B=0, natomiast

$$A = \frac{-1}{2\pi} \quad \text{dla } n = 2 \quad \text{oraz} \quad A = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \quad \text{dla } n \ge 3,$$

gdzie $\alpha(n)$ oznacza objętość kuli jednostkowej w przestrzeni \mathbb{R}^n . Zgodnie z tymi rozważaniami przyjmujemy następującą definicje rozwiązania podstawowego.

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 3: Rozwiązania podstawowego.

Rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a (197) nazywamy funkcję

$$\Phi(x) = \begin{cases}
-\frac{1}{2\pi} \ln \|x\|, & \text{dla } n = 2; \\
\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, & \text{dla } n \ge 3.
\end{cases}$$
(199)

PRZYKŁAD

Przykład 35:

Dla n=2 rozwiązanie podstawowe ma postać

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Funkcję tę nazywamy również **potencjałem logarytmicznym**. Dla n=3 rozwiązanie podstawowe ma postać

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Rozwiązanie to nosi też nazwę **potencjału newtonowskiego**. Posiada ono prostą interpretację fizyczną. Mianowicie, umieszczony w punkcie $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ładunek elektryczny q wytwarza pole, którego potencjał u(x,y,z) w punkcie P(x,y,z) jest określony wzorem

$$u(x, y, z) = q\Phi(x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$



Lemat 2:

Niech $\mathit{B}(0,\varepsilon)$ oznacza kulę o środku 0 i promieniu ε . Wówczas

$$\int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(x)| dx \to 0 \quad \text{gdy} \quad \varepsilon \to 0$$

oraz

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(x)| dS \to 0 \quad \text{gdy} \quad \varepsilon \to 0.$$

Teza lematu jest natychmiastową konsekwencją nierówności

$$\int_{B(0,\epsilon)} \Phi(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{4} \varepsilon^2 (1 - 2 \ln \epsilon), & \text{jeśli } n = 2; \\ C_1 \varepsilon^2, & \text{jeśli } n \ge 3 \end{cases}$$

огах

$$\int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(x) dS = \begin{cases} \varepsilon \ln \varepsilon, & \text{jeśli } n=2 \ ; \\ C_2 \varepsilon, & \text{jeśli } n \geq 3, \end{cases}$$

gdzie $\ C_1$ i $\ C_2$ są stosownymi stałymi zależnymi od $\ n$.

W teorii równania Laplace'a niezmiernie ważne, ze względu na zastosowania, są: zagadnienie brzegowe Dirichleta, zagadnienie brzegowe Neumanna oraz zagadnienie brzegowe Robina, zwane też pierwszym, drugim i trzecim zagadnieniem brzegowym. W dalszym ciągu podzbiór otwarty i spójny (tzn. taki że każde dwa punkty tego zbioru można połączyć krzywą zawartą w tym zbiorze) będziemy nazywać **obszarem**.

Zagadnienie Dirichleta (zagadnienie brzegowe pierwszego rodzaju). Znaleźć rozwiązanie równania (197) (lub (198)) które jest ciągłe

w domknięciu obszaru Ω i spełniają warunek brzegowy

$$u(x) = \varphi(x)$$
 dla $x \in \partial\Omega$, (200)

gdzie $\varphi:\partial\Omega\to R$ jest zadaną funkcją ciągłą, a $\partial\Omega$ brzegiem obszaru Ω .

Zagadnienie Neumanna (zaganienie brzegowe drugiego rodzaju). Załóżmy, że brzeg $\partial\Omega$ obszaru Ω jest gładki (tzn. w każdym punkcie zbioru $\partial\Omega$ istnieje płaszczyzna styczna). Znaleźć rozwiązanie równania (197) (lub (198)) określone w obszarze Ω , klasy C^1 w jego domknięciu i spełniające warunek

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \varphi(x) \quad \text{dla } x \in \partial\Omega,$$

gdzie $\, \nu \,$ jest normalną zewnętrzną do $\, \partial \Omega \,$ w punkcie $\, x \,$, a $\, \varphi \colon \! \partial \Omega \to {\rm R} \,$ zadaną funkcją ciągłą.

Zagadnienie Robina (zagadnienie brzegowe trzeciego rodzaju). Znaleźć rozwiązanie równania (197) (lub (198)) w obszarze Ω spełniające warunek

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) + bu(x) = g(x) \quad \text{dla } x \in \partial\Omega,$$
(202)

gdzie $\partial\Omega$ jest brzegiem obszaru $\Omega,~a,~b,~g~$ są danymi funkcjami określonymi na $\partial\Omega,~~\nu~$ jest normalną zewnętrzną do $\partial\Omega.$

Własności funkcji harmonicznych

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 4: Funkcji harmonicznej.

Funkcję klasy C^2 w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, spełniającą w tym obszarze równanie Laplace'a:

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega,$$

nazywamy funkcją harmoniczną w Ω .

Funkcje harmoniczne posiadają wiele interesujących własności, a ich teoria stanowi rozbudowany dział matematyki. Poniżej podamy niektóre własności tych funkcji. Rozpoczniemy od prostych wniosków wynikających łatwo z wzorów Gaussa-Greena.

→ WNIOSEK

Wniosek 1:

Niech $\Omega\subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem ograniczonym o regularnym brzegu $\partial\Omega$. Niech u będzie funkcją harmoniczną

w obszarze $U \supset \Omega$. Wówczas

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS = 0,$$

gdzie $\,
u\,$ jest normalną do $\,\partial\Omega$.

Istotnie, ze wzoru 5 z modułu "Twierdzenie Gaussa-Greena i wzory Greena" wynika, że

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)dS=\int_{\Omega}\Delta u(x)dx=0.$$

→ WNIOSEK

Wniosek 2:

Jeśli funkcja u jest klasy C^2 w obszarze ograniczonym Ω i ponadto dla dowolnego obszaru regularnego $D \subset \Omega$

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS = 0,$$

to u jest funkcją harmoniczną w Ω .

Istotnie, niech $x \in \Omega$ i niech $B(x, \varepsilon)$ będzie kulą zawartą w Ω .

Ze wzoru 5 z modułu "Twierdzenie Gaussa-Greena i wzory Greena" oraz założeń wniosku 2 wynika że

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS = \int_{B(x,\varepsilon)} \Delta u(x) dx = 0.$$

Ponieważ ostatnia równość zachodzi dla dowolnego dostatecznie małego $\varepsilon>0$, wnosimy stąd, że $\Delta u(x)=0$. Teza wniosku została dowiedziona, bowiem $x\in\Omega$ jest dowolne.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $u:\Omega \to \mathbb{R}$ będzie funkcją harmoniczną w Ω . Wówczas dla dowolnego $x \in \Omega$ oraz kuli $B(x,r) \subset \Omega$, wartość u(x) jest równa średniej wartości funkcji u na sferze $\partial B(x,r)$ oraz średniej wartości funkcji u na kuli B(x,r).

Oznaczmy przez v_r powierzchnię, a przez ω_r objętość kuli $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$. Nietrudno sprawdzić, że $\omega_r = (r/n)v_r$ Jeśli $\alpha(n)$ oznacza objętość kuli jednostkowej w przestrzeni \mathbb{R}^n , to $\omega_r = \alpha(n)r^n$, natomiast $v_r = n\alpha(n)r^{n-1}$.



TWIERDZENIE

Twierdzenie 5: Własność wartości średniej.

ZAŁOŻENIA:

Niech $u \in C^2(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ otwarty})$ będzie funkcją harmoniczną.

TEZA:

Wtedy

$$u(x) = \frac{1}{v_r} \int_{\partial B(x,r)} u dS = \frac{1}{\omega_r} \int_{B(x,r)} u dy, \quad x \in \Omega,$$
(203)

dla dowolnego r > 0 takiego, że $B(x, r) \subset \Omega$.

DOWÓD:

Połóżmy

$$\varphi(r) = \frac{1}{v_r} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y). \tag{204}$$

Podstawiając y = x + rz i uwzględniając związki $dS(y) = r^{n-1}dS(z)$ oraz $v_r = r^{n-1}v_1$ otrzymamy

$$\varphi(r) = \frac{1}{v_1} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz) dS(z).$$

Różniczkując ostatni wzór względem $\ r$ a następnie wracając do zmiennych wyjściowych mamy

$$\varphi'(r) = \frac{1}{v_1} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz) \cdot z \, dS(z) = \frac{1}{v_r} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} \, dS(y) = \frac{1}{v_r} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial v}(y) \, dS(y),$$
ilectric declarate $v = v(x,y)/v$ is the property weak to some accomplished to the property $v = v(x,y)/v$.

gdzie symbol · oznacza iloczyn skalarny, a $\nu=(y-x)/r$ jest unormowanym wektorem normalnym do powierzchni $\partial B(x,r)$.

Po zastosowaniu twierdzenia Greena do ostatniej całki otrzymamy

$$\varphi'(r) = \frac{1}{v_r} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) \, dy = 0,$$

bowiem $\Delta u=0$. Oznacza to, że φ jest funkcją stałą. Z drugiej strony przechodząc z $r\to 0$ we wzorze (204) otrzymamy $\phi(0)=u(x)$. W konsekwencji $\varphi(r)=u(x)$, dla dowolnego r>0, takiego, że $B(x,r)\subset U$. Zatem pierwsza równość w (203) jest spełniona. Z kolei przechodząc na współrzędne biegunowe, po wykorzystaniu wzoru (204), równości $\varphi(r)=u(x)$ oraz równości

$$\omega_r = \int_0^r v_s ds,$$

otrzymamy

$$\int_{B(x,r)} u(y)\,dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u\,dS\right)ds = \int_0^r \varphi(s)v_s\,ds = u(x)\int_0^r v_s\,ds = \omega_r u(x),$$

co daje drugą równość we wzorze (203) i kończy dowód.

Własność wyrażoną wzorem (203) nazywamy własnością wartości średniej.



TWIERDZENIE

Twierdzenie 6:

ZAŁOŻENIA:

Załóżmy, że $u \in C^2(\Omega)$ i dla każdej kuli $B(x,r) \subset \Omega$

$$u(x) = \frac{1}{v_r} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y),$$

gdzie v_r oznacza powierzchnię sfery $\partial B(x,r)$.

TEZA:

Wtedy funkcja u jest harmoniczna w Ω .

DOWÓD:

Załóżmy, dla dowodu nie wprost, że $\Delta u \neq 0$. Wówczas istnieje kula $B(x,r) \subset \Omega$ taka, że $\Delta u > 0$ lub $\Delta u < 0$ na B(x,r). Niech φ będzie dane wzorem (204). Z założenia twierdzenia wynika, że φ jest funkcją stałą dla r dostatecznie małych. Z drugiej strony, powtarzając argumenty dowodu twierdzenia 1, nietrudno sprawdzić, że

$$\varphi'(r) = \frac{1}{v_r} \int_{B(x, r)} \Delta u dy.$$

Z ostatniej równości wynika, że dla r dostatecznie małych $\varphi'(r) \neq 0$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

TWIERDZENIE

Twierdzenie 7: Regularność.

ZAŁOŻENIA:

Zakładamy, że funkcja $u \in C^2(\Omega)$ ma własność wartości średniej.

TEZA:

Whedy $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

DOWÓD:

Rozważmy funkcje

$$\psi(r) = \begin{cases} Ce^{1/(r^2 - 1)}, & \text{dia } 0 \le r < 1; \\ 0, & \text{dia } r \ge 1, \end{cases}$$

gdzie $\,C\,$ jest stałą. Nietrudno pokazać, że funkcja $\,\psi\in C^\infty(\mathbb{R}).\,$ Niech

$$\Psi(x) := \psi(\parallel x \parallel), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dobieramy stałą C tak, aby

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x) \, dx = 1.$$

Oczywiście $\Psi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dla $\varepsilon > 0$ połóżmy

$$\Psi_{\varepsilon}(x) = \Psi(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$$
 dla $x \in \mathbb{R}^n$.

Oczywiście funkcja Ψ_{ε} jest klasy C^{∞} na \mathbb{R}^n , zeruje się poza kulą $B(0,\varepsilon)$ i ponadto

$$\int_{B(0,\varepsilon)} \Psi_{\varepsilon}(x) dx = 1.$$

Niech $\Omega_{\varepsilon}=\left\{x\in\Omega\colon B(x,\varepsilon)\subset\Omega\right\}$. Dla $x\in\Omega_{\varepsilon}$ połóżmy

$$u_{\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} \Psi_{\varepsilon}(x-z) u(z) dz = \int_{B(x,\varepsilon)} \Psi_{\varepsilon}(x-z) u(z) \, dz.$$

Stąd i własności funkcji Ψ_{ε} wynika, że $u_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon})$. Pokażemy teraz, że $u = u_{\varepsilon}$ w zbiorze Ω_{ε} . Istotnie, dla $x \in \Omega_{\varepsilon}$ mamy

$$u_{\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} \Psi_{\varepsilon}(x - z) u(z) dz = \frac{1}{\varepsilon^{n}} \int_{B(x, \varepsilon)} \Psi(\frac{x - z}{\varepsilon}) u(z) dz = \frac{1}{\varepsilon^{n}} \int_{0}^{\varepsilon} \left(\int_{\partial B(x, r)} \Psi(\frac{x - z}{\varepsilon}) u(z) dS(z) \right) dr = \frac{1}{\varepsilon^{n}} \int_{0}^{\varepsilon} \psi(\frac{r}{\varepsilon}) \left(\int_{\partial B(x, r)} u(z) dS(z) \right) dr = \frac{u(x)}{\varepsilon^{n}} \int_{0}^{\varepsilon} \psi(\frac{r}{\varepsilon}) u_{r} dr = \frac{u(x)}{\varepsilon^{n}} \int_{0}^{\varepsilon} \psi(\frac{r}{\varepsilon}) \int_{\partial B(0, r)} dS(z) dr = \frac{u(x)}{\varepsilon^{n}} \int_{0}^{\varepsilon} \left(\int_{\partial B(0, r)} \Psi(\frac{r}{\varepsilon}) dS(z) \right) dr = \frac{u(x)}{\varepsilon^{n}} \int_{B(0, \varepsilon)} \Psi(\frac{r}{\varepsilon}) dz = u(x) \int_{B(0, \varepsilon)} \Psi_{\varepsilon}(z) dz = u(x),$$

(c) The property of the property of

gdzie v_r oznacza powierzchnię kuli B(x,r). Z otrzymanej równości wynika, że $u\in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Ponieważ $\varepsilon>0$ może być dowolnie małe, $u\in C^\infty(\Omega)$, co kończy dowód.

Twierdzenie 8: Nierówność Harnacka.

ZAŁOŻENIA:

Niech u będzie nieujemną funkcją harmoniczną w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

TEZA:

Wówczas dla dowolnego spójnego i zwartego zbioru $K \subset \Omega$ istnieje stała c (zależna od K) taka, że

$$\frac{u(y)}{c} \le u(x) \le cu(y) \qquad \text{dla } x, y \in K.$$

W szczególności

$$\sup_{x \in K} \inf_{u(x) \le c^{x} \in K} u(x).$$

DOWÓD:

Niech $r = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(K, \partial \Omega)$. Niech $x, y \in K$, $||x - y|| \le r$.

Na podstawie twierdzenia 1

$$u(x) = \frac{1}{\omega_{2r}} \int_{B(x, 2r)} u(z) \, dz \ge \frac{1}{\omega_{2r}} \int_{B(y, r)} u(z) \, dz = \frac{1}{2^n \omega_r} \int_{B(y, r)} u(z) \, dz = \frac{1}{2^n} u(y).$$

Wnioskujemy stąd, że $2^{-n}u(y) \le u(x) \le 2^n u(y)$. Ponieważ K jest zbiorem zwartym, możemy pokryć go skończoną liczbą, powiedzmy N, kul o promieniu r. Ponieważ ponadto K jest zbiorem spójnym, dowolne dwa punkty $x, y \in K$ możemy połączyć łańcuchem liczącym co najwyżej N kul z tego pokrycia i takim, że pierwsza kula zawiera punkt x, ostatnia punkt y, a dowolne dwie kolejne kule mają niepuste przecięcie. Oczywiście

$$2^{-nN}u(y) \le u(x) \le 2^{nN}u(y),$$

skąd teza twierdzenia wynika natychmiast.

Istnieją też ścisłe związki między funkcjami harmonicznymi dwu zmiennych a funkcjami analitycznymi jednej zmiennej zespolonej. Mianowicie, część rzeczywista $u=u(x,y)\,$ i część urojona $v=v(x,y)\,$ funkcji analitycznej $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\,$ zmiennej zespolonej $z=x+iy\,$ są funkcjami harmonicznymi (dokładniej funkcjami harmonicznymi sprzężonymi). Na odwrót, mając daną funkcję harmoniczną, możemy łatwo skonstruować odpowiadającą jej funkcję analityczną. Stąd też szereg własności funkcji harmonicznych jest natychmiastową konsekwencją stosownych własności funkcji zmiennej zespolonej i na odwrót.

TWIERDZENIE

Twierdzenie 9:

ZAŁOŻENIA:

Funkcja u jest harmoniczna w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

TEZA:

Whedy $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

DOWÓD:

Ustalmy punkt $(x_0,y_0)\in\Omega$ i dla dowolnego punktu $(x,y)\in\Omega$ połóżmy

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} u_{\eta} d\xi - u_{\xi} d\eta.$$

Zauważmy, że funkcje u_x , u_y , v_x , v_y są klasy C^1 w Ω i ponadto spełnione są warunki Cauchy-Riemanna. Z teorii funkcji analitycznych wynika, że f(z) = u(x,y) + iv(x,y), gdzie z = x + iy, jest funkcją holomorficzną. Posiada ona zatem pochodne dowolnego rzędu, skąd wynika, że $u, v \in C^{\infty}(\Omega)$.

Równanie Poissona

Zauważmy, że funkcja $\,\Phi\,$ dana wzorem

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \|x\|, & \text{dla } n = 2; \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, & \text{dla } n \ge 3. \end{cases}$$
 (205)

jest harmoniczna dla $x \neq 0$. Jeśli początek układu przesuniemy do punktu y, to funkcja $x \mapsto \Phi(x-y)$ jest harmoniczna dla $x \neq y$. Zauważmy ponadto, że jeśli $f: X \to \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją, to $x \mapsto \Phi(x-y)f(y)$ jest również funkcją harmoniczna dla $x \neq y$. Można by zatem oczekiwać, że funkcja

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) dy$$
 (206)

będzie rozwiązaniem równania Laplace'a

$$\Delta u = 0, \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{207}$$

Okazuje się, że tak nie jest. Wynika to stąd, że funkcja $x \mapsto \Phi(x-y)$ ma osobliwość w punkcie x=y, a zatem nie możemy z operacją różniczkowania wejść pod całkę. Pokażemy natomiast, że dla dostatecznie regularnej funkcji f wzór (206) określa rozwiązanie równania Poissona

$$\Delta u + f = 0, \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{208}$$



TWIERDZENIE

Twierdzenie 10:

ZAŁOŻENIA:

Załóżmy, że funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ jest równa zeru poza pewną kulą (tzn. posiada nośnik zwarty). Niech u będzie dane wzorem (206).

TEZA:

Wówczas:

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$;
- (ii) $\Delta u + f = 0$ w \mathbb{R}^n .

DOWÓD:

Ad (i). Podstawiając z = x - y w całce (206) otrzymamy

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z) f(x - z) dz.$$
 (209)

Niech $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ będzie wektorem którego i-ta składowa jest równa 1 a pozostałe 0. Mamy

$$\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n \Phi(z)} \frac{f(x+he_i-z)-f(x-z)}{h} dz$$

Ponieważ iloraz różnicowy pod całką jest zbieżny jednostajnie, możemy z h przejść do 0. Otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z) \frac{\partial f}{\partial x_i} (x - z) \, dz$$

Analogicznie dostaniemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(z) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (x - z) dz.$$

Wynika stąd, że $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Ad (ii). Różniczkując wzór (209) mamy

$$\int_{\Delta_x u(x) = \mathbb{R}^n \Phi(z) \, \Delta_x f(x-z) \, dz} = I_1 + I_2,$$
(210)

gdzie

$$I_1 = \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(z) \Delta_x f(x-z) \, dz, \qquad I_2 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(z) \Delta_x f(x-z) \, dz.$$

(Symbol Δ_x oznacza laplasjan względem zmiennej x.) Ponieważ funkcja Φ ma osobliwość w punkcie 0, szacujemy całkę (209) w obszarach $B(0, \varepsilon)$ oraz $\mathbb{R}^n \setminus B(0, \varepsilon)$.

Nietrudno sprawdzić, że

$$|I_1| \leq \|\Delta_x f\|_{\infty}^{B(0,\varepsilon)} |\Phi(z)| dz \leq \begin{cases} C\varepsilon^2(|\ln\varepsilon|+1), & \text{jeśli } n=2; \\ C\varepsilon^{n/2+1}, & \text{jeśli } n \geq 3, \end{cases}$$

gdzie $\,C\,$ jest stosownie dobraną stałą. Wynika stąd, że $\,I_1 \to 0\,$ gdy $\,\varepsilon \to 0.$

Przed przystąpieniem do szacowania całki I_2 przypomnijmy dwa użyteczne w dalszym ciągu wzory:

$$\Delta u = \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} u = \nabla u \cdot \nabla u, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \operatorname{grad} u \cdot \nu = \nabla u \cdot \nu,$$

gdzie symbol \cdot oznacza iloczyn skalarny, a ν wektor normalny do powierzchni całkowania. Całkując I_2 przez części (zob. wzór 6 z modułu "Twierdzenie Gaussa-Greena i wzory Greena"), otrzymany

$$I_2 \ = \ \int_{\partial B\left(0,\,\varepsilon\right)} \Phi(z) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-z) dS(z) - \ \int_{\mathbb{R}^n \smallsetminus B\left(0,\,\varepsilon\right)} \nabla \Phi(z) \cdot \nabla_z f(x-z) \, dz.$$

Połóżmy

$$J_1 = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(z)^{\frac{\partial f}{\partial \nu}} (x-z) dS(z), \qquad J_2 = \int_{\mathbb{R}^{n} \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla \Phi(z) \cdot \nabla_z f(x-z) \, dz.$$

Oszacujemy teraz całki $\,J_1\,$ i $\,J_2.\,$ Nietrudno sprawdzić, że

$$|J_1| \leq \|\frac{\partial f}{\partial \nu} \int_{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} |\Phi(z)| dS(z) \leq \begin{cases} C\varepsilon \ln \varepsilon |n-z|, & \text{jeśli } n=2; \\ C\varepsilon, & \text{jeśli } n\geq 3, \end{cases}$$

gdzie C jest stosownie dobraną stałą. Wynika stąd, że $J_1 \to 0$ gdy $\varepsilon \to 0$. Stosując w całce J_2 wzór Greena, a nastepnie fakt, że $\Delta \Phi(z) = 0$ dla $z \neq 0$, otrzymujemy

$$J_2 = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-z) \frac{\partial \Phi(z)}{\partial \nu} dS(z) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} f(x-z) \Delta \Phi(z) dz = \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-z) \frac{\partial \Phi(z)}{\partial \nu} dS(z).$$

Zauważmy, że na sferze $B(0,\,\varepsilon)$ wektor normalny $\nu=\frac{\overline{z}}{\|z\|}=\frac{\overline{z}}{\varepsilon}$, zatem

$$\frac{\partial \Phi(z)}{\partial \nu} = \nabla \Phi(z) \cdot \nu = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{z}{\|z\|^n} \cdot \frac{z}{\varepsilon} = -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}.$$

Wynika stąd, że

$$J_2 = -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-z) dS(z).$$

Ponieważ $n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}$ jest powierzchnią sfery jednostkowej w przestrzeni \mathbb{R}^n , prawa strona ostatniego wzoru określa średnią wartość funkcji f na sferze $\partial B(0,\varepsilon)$ i wobec ciągłości funkcji f całka J_2 dąży do -f(x) gdy $\varepsilon \to 0$. Ponieważ $I_1 \to 0$ oraz $J_1 \to 0$ gdy $\varepsilon \to 0$, warunek (ii) jest natychmiastową konsekwencją równości (210).

Rozwiązanie podstawowe równania przewodnictwa cieplnego.

Równanie przewodnictwa cieplnego, zwane też równaniem dyfuzji, opisuje w jaki sposób zmienia się w czasie gęstość pewnej wielkości, np. temperatury, stężenia chemicznego czy potencjału elektrycznego. Przykłady zjawisk które możemy opisać tego typu równaniem zostały podane w module "Przykłady zagadnień prowadzących do równań różniczkowych cząstkowych". Rozważmy przypadek jednorodnego równania przewodnictwa cieplnego

$$u_t = \Delta u,\tag{211}$$

 $\text{gdzie } u : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ , } t > 0 \text{ , } x = (x_1, \, ..., \, x_n) \in \mathbf{R}^n, \text{ a symbol } \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \text{ oznacza operator Laplace'a}.$

Chociaż zaproponowaną poniżej metodę można bez żadnych istotnych zmian stosować dla dowolnego $n \ge 1$, dla uproszczenia zapisu ograniczymy się do n = 1, czyli do równania

$$u_t = u_{xx}, x \in \mathbb{R}, t > 0.$$
 (212)

Zauważmy, że jeśli funkcja u=u(x,t) jest rozwiązaniem równania (212), to również funkcja $u=u(\lambda x,\lambda^2 t)$, dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$, jest również rozwiązaniem równania (212). Nasuwa się stąd pomysł, aby szukać rozwiązań wzdłuż krzywych

 $\{(\lambda x, \lambda^2 t): \lambda \in \mathbb{R}\}, \ \ \text{tzn. krzywych wyznaczonych przez stosunek} \ \ \frac{\overline{\lambda^2 t}}{\lambda^2 t}, \ \ \text{czyli rozwiązań postaci}$

$$u(x,t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$$

Prosty rachunek daje

$$u_{t} = v'\left(\frac{x^{2}}{t}\right)\left(-\frac{x^{2}}{t^{2}}\right), \quad u_{x} = v'\left(\frac{x^{2}}{t}\right)\frac{2x}{t}, \quad u_{xx} = v''\left(\frac{x^{2}}{t}\right)\frac{4x^{2}}{t^{2}} + v'\left(\frac{x^{2}}{t}\right)\frac{2}{t}.$$

Podstawiając uzyskane wielkości do równania (212) otrzymamy

$$\frac{4x^2}{t^2}v''(\frac{t}{t}) + \frac{x^2}{t^2}v'(\frac{x^2}{t}) + \frac{2}{t}v'(\frac{x^2}{t}) = 0,$$

a kładąc
$$z = \frac{x^2}{t}$$
 mamy

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0.$$

Rozwiązując ostatnie równanie dostajemy

$$v(z) = A \int_0^z \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-s/4} ds + B.$$

Zatem funkcja

$$u(x,t) = A \int_0^{x^2/t} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-s/4} ds + B,$$
 (213)

gdzie A i B są dowolnymi stałymi, jest rozwiązaniem równania (212) dla $x \in \mathbb{R}$ oraz t > 0. Rozwiązanie to ma dość niewygodną postać całkową. Różniczkując funkcje (213) względem zmiennej x otrzymamy

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{A\sqrt{t}}{x} e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{2x}{t} = \frac{2A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Oczywiście tak uzyskana funkcja jest również rozwiązaniem równania (212) w zbiorze $D = \{(x, t): x \in \mathbb{R}, \ t > 0\}$. Wygodnie jest -

co będzie widać z dalszych rozważań - przyjąc $A=\frac{4\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\pi}}$ (Przy tak ustalonej stałej A otrzymamy rozwiązanie z którego całka jest równa 1).

Funkcję

$$\Phi(x,t) = \begin{cases}
\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, & \text{jesli } x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \\
0, & \text{jeśli } x \in \mathbb{R}, \ t < 0,
\end{cases}$$
(214)

nazywamy **rozwiązaniem podstawowym** równania (212). Zauważmy, że dla t=0 funkcja Φ ma osobliwość. Dla $n \ge 2$ przez rozwiązanie podstawowe równania (211) rozumiemy funkcję

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^n} e^{-\frac{||x||^2}{4t}}, & \text{jeśli } x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0; \\ 0, & \text{jeśli } x \in \mathbb{R}^n, \ t < 0, \end{cases}$$
(215)

gdzie
$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

Problem początkowy dla równania ciepła

Skonstruowane w (module (215)) rozwiązanie podstawowe równania ciepła wykorzystamy teraz dla znalezienia rozwiązania problemu Cauchy'ego (problemu początkowego) dla równania ciepła:

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u = 0 & \text{dla} & (x,t) \in R^n \times (0,\infty), \\ &u(x,0) = g(x) & \text{dla} & x \in R^n, \end{aligned} \tag{216}$$

gdzie $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją. Przypomnijmy, że dla $t \neq 0$ funkcja Φ dana wzorem

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^n} e^{-\frac{||x||^2}{4t}}, & \text{jeśli } x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0; \\ 0, & \text{jeśli } x \in \mathbb{R}^n, \ t < 0, \end{cases}$$
(217)

jest rozwiązaniem równania

$$u_t = \Delta u. \tag{218}$$

Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnie ustalonego $z \in \mathbb{R}^n$ również funkcja $(x,t) \mapsto \Phi(x-z,t)$ jest rozwiązaniem równania (218) dla $t \neq 0$. Rozważmy teraz funkcję $u: \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ daną wzorem

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-z,t) g(z) dz = \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-z\|^2}{4t}} g(z) dz.$$
 (219)

Zauważmy, że funkcja $\,u\,$ jest splotem rozwiązania podstawowego $\,\Phi\,$ oraz funkcji $\,g\,$.



LEMAT

Lemat 3:

Dla każdego t > 0

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) \, dx = 1.$$

Istotnie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) dx = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi t}\,\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{||x||^2}{4t}} dx = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi t}\,\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{x_1^2}{4t}} dx_1 \cdot \dots \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{x_n^2}{4t}} dx_n = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi t}\,\right)^n} \left(\sqrt{4\pi t}\,\right)^n = 1.$$

Zauważmy na koniec, że dla dowolnego t>0 funkcja $\Phi(\,\cdot\,,t)$ jest gęstością rozkładu normalnego (rozkładu Gaussa).

الم

TWIERDZENIE

Twierdzenie 11:

ZAŁOŻENIA:

Załóżmy, że $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Niech funkcja u będzie dana wzorem (219).

TEZA:

Wówczas:

(i)
$$u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$$
;

(ii)
$$u_t - \Delta u = 0 \text{ w } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$
;

lim

(iii)
$$(x,t) \to (x^0, 0+) u(x,t) = g(x^0)$$
 dla dowolnego $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

DOWÓD:

Ad (i). Ponieważ dla dowolnego $\delta>0$ funkcja $\left(1/t^{n/2}\right)e^{-\parallel x\parallel^2/(4t)}$ jest klasy C^∞ w zbiorze $\mathbb{R}^n\times(\delta,1/\delta)$, a jej pochodne są jednostajnie ograniczone, zatem $u\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\times(\delta,1/\delta)\right)$. Ponieważ $\delta>0$ było dowolne, funkcja u jest klasy C^∞ w zbiorze $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$.

Ad(ii). Mamy

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_t - \Delta_x \Phi)(x-z,t) g(z) dz = 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0,$$

bowiem Φ jest rozwiązaniem równania (218).

Ad (iii). Niech $x^0 \in \mathbb{R}^n$ oraz $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $\delta > 0$ tak, aby

$$|g(x) - g(x^0)| < \varepsilon$$
 dla $x \in B(x^0, \delta)$.

Z lematu 1 wynika natychmiast, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-z,t) dz = 1.$$

Wykorzystując ten fakt mamy

$$u(x,t) - g(x^o) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-z,t) \left[g(z) - g(x^o) \right] dz.$$

Połóżmy

$$I_1 = \int_{B(x^o, \delta)} \Phi(x - z, t) [g(z) - g(x^o)] dz,$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^o, \delta)} \Phi(x - z, t) [g(z) - g(x^o)] dz.$$

Na mocy doboru liczby δ oraz lematu 1

$$|I_1| \leq \varepsilon \int_{B(x^o,\,\delta)} \Phi(x-z,t) \, dz \leq \varepsilon.$$

Zauważmy, że jeśli $\|x-x^o\| \le \delta/2$ oraz $\|z-x^o\| > \delta$, to

$$\|z-x^o\| \ \le \ \|z-x\| + \|x-x^o\| \ \le \ \|z-x\| + \delta/2 < \|z-x\| + \|z-x^o\|/2$$

i w konsekwencji

$$||z-x|| > \frac{1}{2} ||z-x^o||.$$

Zatem, jeśli $||x - x^o|| < \delta/2$, to

$$|I_2| \leq 2 \parallel g \parallel_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^{n} \setminus B(x^o, \delta)} \Phi(x-z, t) \, dz = \frac{\frac{C}{t^{n/2}}}{\int_{\mathbb{R}^{n} \setminus B(x^o, \delta)} e^{-\frac{\parallel z-x \parallel^2}{4t}} \, dz} \leq \frac{\frac{C}{t^{n/2}}}{\int_{\mathbb{R}^{n} \setminus B(x^o, \delta)} e^{-\frac{\parallel z-x^o \parallel^2}{16t}} \, dz,$$

gdzie $C=2\parallel g\parallel_{L^\infty}/(\sqrt{4\pi})^n$. Zauważmy, że prawa strona ostatniej nierówności dąży do zera gdy $t\to 0+$. Zatem dla t dostatecznie małych oraz $\parallel x-x^o\parallel <\delta/2$ mamy

$$|u(x,t) - g(x^o)| \le |I_1| + |I_2| < 2\varepsilon.$$

Ponieważ $\varepsilon > 0$ było dowolne, warunek (iii) został pokazany.

Pierwszy problem brzegowy Dirichleta.

Obok problemu początkowego dla równania ciepła również bardzo ważnym jest tak zwany pierwszy problem brzegowy Dirichleta. Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n \times [0,T)$ o tej własności, że dla dowolnego $t \in [0,T)$ zbiór $\left\{x\colon (x,t) \in \Omega\right\}$ jest n-wymiarowym obszarem w \mathbb{R}^n . Oznaczmy przez S boczną powierzchnie Ω wraz z jego podstawą. Wówczas pierwszym zagadnieniem brzegowym Dirichleta nazywamy problem znalezienia rozwiązania równania

$$u_t = \Delta u, \quad (x, t) \in \Omega,$$

spełniającego warunek

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S,$$

gdzie φ jest zadaną funkcją.

Niejednorodny problem początkowy dla równania ciepła.

Rozważmy teraz niejednorodny problem Cauchy'ego

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f(x,t) & & \text{dla} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= 0 & & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

gdzie $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją. Rozważamy problem pomocniczy

$$\begin{split} w_t &= \Delta w & \text{dla} \quad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times (\tau, +\infty), \\ w(x,\tau) &= f(x,\tau) & \text{dla} \quad x \in \mathbf{R}^n. \end{split}$$

Zgodnie z wzorem (219), kładąc s=t- au, rozwiązanie tego problemu możemy zapisć w postaci

$$w(x,t;\tau) = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi(t-\tau)}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^{n}} e^{-\frac{||x-z||^2}{4(t-\tau)}} f(z,\tau) dz.$$

Nietrudno sprawdzić, że funkcja

$$u(x,t) = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi}\right)^n} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\left(\sqrt{t-\tau}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^{n}} e^{-\frac{\left\|x-z\right\|^2}{4(t-\tau)}} f(z,\tau) \, dz\right) d\tau$$

jest szukanym rozwiązaniem niejednorodnego problemu Cauchy'ego.

Zasada maksimum dla równania Laplace'a i równania ciepła

TWIERDZENIE

Twierdzenie 12: Zasada maksimum dla równania Laplace'a.

ZAŁOŻENIA:

Niech Ω będzie otwartym ograniczonym podzbiorem przestrzeni R^n . Zakładamy, że funkcja u jest ciągła w Ω , posiada pochodne cząstkowe 2-go rzędu w Ω i ponadto

$$\Delta u = f$$
 w Ω ,
 $u = g$ na $\partial \Omega$.

gdzie $f:\Omega \to \mathbb{R}_+, \quad g:\partial\Omega \to \mathbb{R}$ są danymi funkcjami ciągłymi, a $\partial\Omega$ oznacza brzeg obszaru Ω .

TEZA:

Funkcja u osiąga maksimum na $\partial\Omega$

DOWÓD:

Załóżmy najpierw, że f>0~ w zbiorze $~\Omega~$ jest zbiorem zwartym, ~u~ jako funkcja ciągła osiąga w tym zbiorze maksimum. Przypuśćmy, że maksimum to jest osiągnięte w punkcie $~x^0\in\Omega~$. Oczywiście

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^0) \le 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

W szczególności wynika stąd, że $\Delta u(x^0) \leq 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $f(x^0) > 0$. Zatem $x^0 \in \partial \Omega$.

Przypuśćmy teraz, że $\ f \geq 0$. Dla $\ k \in {\bf N}$ rozważmy funkcję $\ \nu_k : \Omega \to {\bf R}$ daną wzorem

$$v_k(x) = u(x) + \frac{\|x\|^2}{k}$$

 $\lim_{k\to\infty} v_k = u \ \ \text{w zbiorze} \ \ \stackrel{-}{\Omega} \ \ \text{oraz}$

$$\Delta v_k = \Delta u + \frac{\frac{2n}{k}}{\frac{2n}{k}} \ge \frac{n}{k} > 0 \quad \text{w} \quad \Omega.$$

Na mocy poprzedniej obserwacji $\ v_k$ osiąga maksimum na brzegu obszaru $\ \partial\Omega$, powiedzmy w punkcie $\ x^k$. Ponieważ $\ \partial\Omega$

jest zbiorem zwartym, istnieje podciąg $\{x^{k_i}\}_{i\geq 1}$ ciągu $\{x^k\}$, zbieżny do pewnego punktu $\tilde{x}\in\partial\Omega$. Niech $x\in\Omega$. Oczywiście

$$u(x) \leq u(x) + \frac{\|x\|^2}{k_i} = v_{k_i}(x) \leq v_{k_i}(x^{k_i}) = u(x^{k_i}) + \frac{\|x^{k_i}\|^2}{k_i}.$$

Przechodząc z $i \to \infty$ otrzymamy $u(x) \le u(\tilde{x})$. Ponieważ x jest dowolnym punktem w Ω , teza twierdzenia, wynika natychmiast.

→ WNIOSEK

Wniosek 3: Zasada ekstremum dla funkcji harmonicznej.

Funkcja u harmoniczna w obszarze otwartym ograniczonym Ω , różna od stałej, w żadnym punkcie tego obszaru nie może osiągać swojego ekstremum.

WNIOSEK

Wniosek 4:

Niech u_1 i u_2 będą funkcjami harmonicznymi w Ω , ciągłymi w Ω . Jeśli $u_1(x) \le u_2(x)$ dla $x \in \partial \Omega$, to $u_1(x) \le u_2(x)$ dla $x\in \Omega$.

Istotnie, wystarczy zastosować zasadę maksimum do funkcji harmonicznej $u = u_2 - u_1$.



PRZYKŁAD

Przykład 36:

Rozważmy równanie

$$\Delta u = 0$$
,

gdzie u = u(x, y), (x, y) należy do koła jednostkowego.

Przyjmujemy współrzędne biegunowe $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta < 2\pi$.

Zakładamy, że rozwiązanie spełnia warunek brzegowy

$$u(\cos\theta,\sin\theta)=\sin\theta,$$

dla $0 \le \theta < 2\pi$.

Zgodnie z zasadą maksimum rozwiązanie naszego problemu przyjmuje wartość maksymalną na brzegu okręgu. Wynika stąd, $\dot{z}e -1 \le u(x, y) \le 1$.



UWAGA

Uwaga 14:

Jeśli obszar $\,\Omega\,$ nie jest ograniczony, teza twierdzenia 1 nie musi zachodzić.

Istotnie, funkcja $u = e^y \sin x$ jest harmoniczna w obszarze $\Omega = \{(x,y): 0 < x < \pi, y > 0\}$, ale w oczywisty sposób nie osiąga maksimum na brzegu tego obszaru.

Twierdzenie 13: Zasada maksimum dla równania ciepła.

ZAŁOŻENIA:

Niech Ω będzie otwartym ograniczonym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Załóżmy, że funkcja u jest ciągła w Ω , posiada pochodne cząstkowe 2-go rzędu w Ω i ponadto

$$u_t = \Delta u \quad \text{w} \quad \Omega.$$
 (220)

TEZA:

Wówczas $\,u\,$ osiaga swoje ekstrema na brzegu obszaru $\,\Omega\,$.

DOWÓD:

Ograniczymy się do rozpatrzenia tylko przypadku maksimum, bowiem dla przypadku minimum argument jest analogiczny. Niech u będzie rozwiązaniem równania (220). Połóżmy

$$\max \qquad \max \qquad \max \qquad \max \qquad M = (x,t) \in {}^{\Omega}\!u(x,t), \qquad m = (x,t) \in \partial \Omega u(x,t).$$

Przypuśćmy, że m < M . Niech $(x^o, t_0) \in \Omega$ będzie punktem takim, że $M = u(x^o, t_0)$. Połóżmy

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{M-m}{2nd^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^o)^2,$$
(221)

 $\sum_{i=1}^n \sum_{(x_i-x_i^o)^2/n \leq d^2 \text{ oraz } m < M \text{ , mamy } n = 1,\dots,n$ gdzie d jest średnicą zbioru Ω , $x = (x_1,\dots,x_n)$. Ponieważ i=1

$$v(x,t) \le m + \frac{M-m}{2} < M \qquad \text{dla} \quad (x,t) \in \partial \Omega.$$

Ponieważ $v(x^o,t_0)=u(x^o,t_0)=M$, wynika stąd, że funkcja v przyjmuje maksimum w pewnym punkcie $(x^*,t_*)\in\Omega$. Oczywiście $v_{x,x_*}(x^*,t_*)\leq 0$ dla i=1,...,n oraz $v_t(x^*,t_*)=0$. W konsekwencji

$$\sum_{i=1}^{n} v_{x_{i}X_{i}}(x^{*}, t_{*}) - v_{t}(x^{*}, t_{*}) \leq 0.$$
 (223)

Z drugiej strony uwzględniając wzór (221) oraz równość $v_t(x^*,t^*) = u_t(x^*,t^*)$ a następnie (220), otrzymamy

$$\sum_{i=1}^n \sum_{v_{x,x}(x^*,t_*)-v_f(x^*,t_*)=i=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{M-m}{d^2} - u_f(x^*,t_*) = \frac{M-m}{d^2}.$$

Stąd i (222) wynika, że $M-m \le 0$. W konsekwencji m=M, co należało dowieść.

Zasada Duhamela

redukcji", "Problem poczatkowy dla równania ciepła" aby znaleźć rozwiązanie problemu niejednorodnego, rozważaliśmy najpierw pomocniczy problem jednorodny zależny od parametru, a następnie rozwiązanie problemu wyjściowego uzyskiwaliśmy całkując względem wspomnianego parametru rozwiązanie problemu pomocniczego. Zastosowaną metodę możemy sformułować nieco ogólniej, uzyskując tak zwaną zasadę Duhamela.

Rozważmy równanie

$$u_t(x,t) = L(u(x,t)) + f(x,t) \qquad \text{dla} \quad x \in \Omega, \ t > 0$$

z warunkiem początkowym

$$u(x,0) = \varphi(x)$$
 dla $x \in \Omega$ (225)

oraz warunkiem brzegowym

$$u(x,t) = \psi(x,t)$$
 dla $x \in \partial\Omega$, $t > 0$, (226)

qdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a L jest operatorem eliptycznym względem zmiennych przestrzennych.

Zauważmy, że w postawionym problemie funkcje f i ψ zależą od zmiennej t. Rozważmy analog problemu (224) - (226) z funkcjami f i ψ niezależnymi od t. Mianowicie, ustalmy $\tau > 0$ i rozważmy problem

$$u_t(x,t) = L\big(u(x,t)\big) + f(x,\tau) \qquad \text{dla} \quad x \in \Omega, \ t > 0; \tag{227}$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$
 dla $x \in \Omega$; (228)

$$u(x,t) = \psi(x,\tau)$$
 dla $x \in \partial\Omega$, $t > 0$. (229)

Załóżmy, że problem (227) - (229) posiada rozwiązanie dla dowolnego $\tau > 0$. Ponieważ zależy ono od parametru τ , oznaczmy go symbolem $v = v(x,t;\tau)$. Twierdzimy, że funkcja

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{0}^{t} v(x,t-\tau;\tau)d\tau$$
 (230)

jest rozwiązaniem problemu (224) - (226).

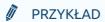
Istotnie, warunki (225) i (226) są spełnione w oczywisty sposób. Wykonując różniczkowanie w (230), po uwzględnieniu (228), otrzymamy

$$u(x,t) = v(x,0;t) + \int_0^t v_t(x,t-\tau;\tau)d\tau = \varphi(x) + \int_0^t v_t(x,t-\tau;\tau)d\tau.$$

Stąd oraz związków (227) i (230) dostajemy

$$\begin{split} u_t(x,t) - L\big(u(x,t)\big) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t v(x,t-\tau;\tau) d\tau - L\Big(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t v(x,t-\tau;\tau) d\tau\Big) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \Big(v(x,t-\tau;\tau) - L\big(v(x,t-\tau;\tau)\big)\Big) d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(x,\tau) d\tau = f(x,t), \end{split}$$

co kończy dowód. Taką metodę konstrukcji rozwiązań nazywamy zasadą Duhamela.



Przykład 37:

Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_t = u_{xx}$$
 dla $0 < x < 1, t > 0$,

spełniające warunki:

$$u(0,t) = 0$$
, $u(1,t) = \varphi(t)$ dla $t > 0$, $u(x,0) = 0$ dla $0 < x < 1$.

Rozważmy najpierw problem pomocniczy

$$v_t = v_{xx}$$
 dla $0 < x < 1, t > 0,$

$$v(0,t) = 0$$
, $v(1,t) = \varphi(\tau)$ dla $t > 0$, $v(x,0) = 0$ dla $0 < x < 1$.

Stosując metodę rozdzielania zmiennych, rozwiązanie problemu pomocniczego możemy wyrazić w postaci

$$v(x,t;\tau) = f(\tau) \left(x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x) \right) = f(\tau) g(x,t),$$

gdzie

$$g(x,t) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Zgodnie z zasadą Duhamela szukane rozwiązanie ma postać

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t v(x,t-\tau;\tau) d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(\tau)g(x,t-\tau) d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(t-\theta)g(x,\theta) d\theta.$$

Przykłady dotyczące równania Laplace'a i równania przewodnictwa cieplnego



Przykład 38:

Pokazać, że problem Cauchy'ego

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0,$$

w klasie funkcji u różniczkowalnych względem t i takich, że $u(\,\cdot\,,t)\in C^2(\mathbf{R})\cap L^2(\mathbf{R})$ dla $t\in(0,+\infty)$, posiada co najwyżej jedno rozwiązanie.

Istotnie, przypuśćmy, że u_1 , u_2 są rozwiązaniami tego problemu. Oczywiście $v = u_2 - u_1$ jest rozwiązaniem problemu

$$v_t = v_{xx}$$
, $v(x, 0) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$,

Połóżmy

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} v^2(x, t) \, dx.$$

Po zróżniczkowaniu względem t i scałkowaniu przez części względem x, otrzymamy:

$$\begin{split} \varphi^{'}(t) &= 2 \int_{\mathbb{R}} v(x,t) v_t(x,t) \, dx = 2 \int_{\mathbb{R}} v(x,t) v_{xx}(x,t) \, dx = \\ &= 2 v(x,t) v_x(x,t) \, \Big|_{-\infty}^{\infty} - 2 \int_{\mathbb{R}} \big(v_x(x,t) \big)^2 dx = - 2 \int_{\mathbb{R}} \big(v_x(x,t) \big)^2 dx \le 0. \end{split}$$

Zatem φ jest funkcją malejącą, nieujemną i ponadto $\varphi(0)=0$. Wynika stąd natychmiast, że $\varphi=0$, a w konsekwencji $\nu=0$, co kończy dowód.



PRZYKŁAD

Przykład 39:

Niech $\,\Omega\subset\mathbb{R}^n\,$ będzie obszarem jednospójnym o brzegu klasy $\,C^1\,$.

Pokazać, że jeśli $u \in C^2(\Omega)$ jest rozwiązaniem problemu

$$\Delta u = 0 \quad \text{w } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad \text{na } \partial \Omega,$$

gdzie v oznacza normalną do $\partial\Omega$, to u musi być funkcją stałą.

Istotnie, korzystając z równości $\Delta u=0$, wzoru 6 z modułu "Twierdzenie Gaussa-Greena i wzory Greena" oraz warunku brzegowego, otrzymamy

$$0 = \int_{\Omega} u \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial u}{\partial v} dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx = -\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Zatem $\nabla u = 0$ w Ω , skąd wynika, że u = const.



Przykład 40:

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem o brzegu klasy C^1 . Pokazać, że problem

$$\Delta u - cu = f$$
 w Ω , $u = g$ na $\partial \Omega$ $(c > 0)$,

posiada co najwyżej jedno rozwiązanie.

Istotnie, przypuśćmy, że u_1 , u_2 są rozwiązaniami tego problemu. Wówczas funkcja $v=u_2-u_1$ jest rozwiązaniem problemu

$$\Delta v - cv = 0$$
 w Ω , $v = 0$ na $\partial \Omega$.

Korzystając z równości $\Delta v - cv = 0$ oraz wzoru 6 z modułu "Twierdzenie Gaussa-Greena i wzory Greena" otrzymamy

$$0 = \int_{\Omega} v(\Delta v - cv) dx = \int_{\Omega} v \Delta v - c \int_{\Omega} v^2 dx = \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial v}{\partial v} dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v dx - c \int_{\Omega} v^2 dx = - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - c \int_{\Omega} v^2 dx.$$

Zatem

$$\int_{\Omega} v^2 dx = 0$$

i w konsekwencji $\,v=0\,$ w $\,\Omega$, co oznacza, że $\,u_1=u_2.$

W następnych przykładach rozwiniemy pomysły które wykorzystaliśmy dla znalezienia rozwiązań fundamentalnych dla równania Laplace'a oraz równania przewodnictwa cieplnego. W pierwszym przypadku szukaliśmy rozwiązań radialnych, w drugim rozwiązań wzdłuż specjalnie dobranych krzywych (powierzchni). Idea metody polega na redukcji ilości zmiennych niezależnych, a w sytuacji optymalnej, na sprowadzeniu problemu do rozwiązania równania zwyczajnego.

Przykład 41:

Wyznaczyć rozwiązanie radialne tzw. zmodyfikowanego równania Laplace'a

$$\nabla (\parallel x \parallel \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Istotnie, kładąc u(x)=v(r), gdzie $r=\parallel x\parallel=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, równanie wyjściowe możemy zapisać w postaci

$$\nabla \big(r \nabla v(r) \big) = 0.$$

Ponieważ $\nabla v(r)=v^{'}(r)^{r}, \; {\rm zatem} \; r \nabla v(r)=v^{'}(r)x. \; {\rm W} \; {\rm konsekwencji}$

$$\nabla (r \nabla v(r)) = \nabla (v'(r)x) = x \nabla v'(r) + v'(r) \nabla x = rv'' + nv'.$$

W celu wyznaczenia funkcji $\,v\,$ należy rozwiązać równanie

$$rv^{''} + nv^{'} = 0,$$

co daje

$$v = \frac{A}{(1-n)r^{n-1}} + B.$$

Zatem

$$u(x) = \frac{A}{(1-n) \|x\|^{n-1}} + B.$$

lim

Jeśli dodatkowo zażądamy aby $r o \infty v(r) = 0$, wówczas B = 0 , a rozwiązanie przyjmuje postać

$$u(x) = \frac{C}{\|x\|^{n-1}},$$

 $gdzie C = \frac{A}{1-n}$

PRZYKŁAD

Przykład 42:

Rozważmy równanie

$$u_t = au_{xx} + \frac{1}{t}u, \qquad x \in \mathbb{R}, \ t > 0$$

Przechodząc do nowych zmiennych niezależnych (y,τ) danych wzorami

$$y = x\lambda^{\alpha}, \quad \tau = t\lambda^{\beta},$$

gdzie λ jest parametrem, równanie wyjściowe przyjmie postać

$$\lambda^{\beta}w_{\tau} = a\lambda^{2\alpha}w_{yy} + \frac{1}{\tau}\lambda^{\beta}w,$$

gdzie $w(y,\tau)=u(y\lambda^{-\alpha},\tau\lambda^{-\beta})$. Jeśli $\beta=2\alpha$, z ostatniego równania możemy wyrugować parametr λ i otrzymamy równanie

$$w_{\tau} = aw_{yy} + \frac{1}{\tau}w,$$

czyli równanie wyjściowe. Oznacza to, że wzdłuż krzywej $\{(x\lambda^{-\alpha},t\lambda^{-2\alpha}):\lambda\in\mathbb{R}\}$ rozwiązanie jest stałe (nie zależy od parametru λ .) Obserwacja ta sugeruje, że należy szukać rozwiązania równania wyjściowego postaci

$$u(x,t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Przyjmując powyższe podstawienie i kładąc $z=\frac{x}{\sqrt{t}}$, równanie wyjściowe zredukujemy do równania różniczkowego zwyczajnego

$$2av^{''} + zv^{'} + 2v = 0$$
 $(v = v(z)).$

Oczywiście każde rozwiązanie tego równania generuje rozwiązanie równania wyjściowego.



Przykład 43:

Rozważmy równanie

$$u_t = au_{xx} + buu_x + \frac{1}{t}u, \qquad x \in \mathbb{R}, \ t > 0$$

Podobnie jak w przykładzie poprzednim chcemy zredukowć powyższe równanie o dwóch zmiennych niezależnych (x,t) do równania o jednej zmiennej. W tym celu rozważmy przekształcenie

$$u = \lambda w$$
, $x = \lambda^{\alpha} y$, $t = \lambda^{\beta} \tau$,

gdzie λ jest parametrem. Stosując to przekształcenie do równania wyjściowego otrzymamy

$$\lambda^{1-\beta}w_{\tau} = a\lambda^{1-2\alpha}w_{yy} + b\lambda^{2-\alpha}ww_{y} + \lambda^{1-\beta}\overline{\tau}.$$

Jeśli $1-\beta=1-2\alpha=2-\alpha$, czyli $\alpha=-1$, $\beta=-2$, z ostatniego równania możemy wyeliminować parametr λ , a równanie przyjmie postać

$$w_{\tau} = aw_{yy} + bww_{y} + {\tau \over \tau}u, \qquad y \in \mathbb{R}, \ \tau > 0.$$

Oznacza to, że przekształcenie $u=\lambda w, \quad x=\lambda^{-1}y, \quad t=\lambda^{-2}\tau, \;\;$ przeprowadza równanie wyjściowe w siebie. Z równań x τ

 $y=\lambda x, \quad au=\lambda^2 t \; ext{ otrzymamy } \lambda=rac{z}{t} rac{ au}{y}. \; ext{ Podstawiając tę wielkość do równania } u=\lambda w \; ext{ otrzymamy równość}$

$$\frac{t}{x}u = \frac{\tau}{y}w,$$

t

która mówi, że wzdłuż krzywej $\{(\lambda x, \lambda^2 t): \lambda \in \mathbb{R}\}$ wielkość u jest stała. Obserwacja ta sugeruje poszukiwanie rozwiązania równania wyjściowego w postaci

$$u(x,t) = \frac{\frac{x}{t}}{v} \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right).$$

Kładąc $z = x/\sqrt{t}$ i przyjmując powyższe podstawienie równanie wyjściowe zredukujemy do równania różniczkowego zwyczajnego

$$av^{''} + (1 + bzv)v^{'} + (2 + \frac{2u}{z} + bv)v = 0,$$

gdzie v = v(z). Oczywiście każde rozwiązanie tego równania generuje rozwiązanie równania wyjściowego.

Rozdział 7. Elementy teorii dystrybucji

Wprowadzenie do teorii dystrybucji

Chociaż teoria dystrybucji jest działem matematyki abstrakcyjnej, dostarcza ona ścisłych uzasadnień dla wielu manipulacji formalnych stosowanych w naukach przyrodniczych i w literaturze technicznej. Ponadto dostarcza ona możliwości dalszego rozwoju klasycznych dyscyplin matematycznych, np. równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych, rachunku operacyjnego, teorii transformacji. Pewne rodzaje dystrybucji (np. funkcja delta i jej pochodne) używane były w naukach fizycznych i technicznych już w XIX wieku, znacznie przed pojawieniem się teorii dystrybucji, która została zaproponowana w latach trzydziestych zeszłego stulecia przez L.S. Sobolewa. Zwykle stosowane dzisiaj ujęcie tej teorii należy do L. Schwartza, który

sfomułował je w latach pięćdziesiątych zeszłego stulecia.

Rozważmy punkt materialny o masie m poruszający się po linii prostej z prędkością jednostajną. Przypuśćmy, że w chwili t_0 punkt napotkał przeszkodę i w wyniku kolizji zmienił kierunek ruchu w stronę przeciwną. Zgodnie z prawami mechaniki powinna zachodzić zależność

$$m(v_2 - v_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt,$$
(231)

gdzie v_1 i v_2 są prędkościami w chwili t_1 i t_2 , a F(t) oznacza siłę działającą na punkt materialny w chwili t. Przyjmijmy, że F(t)=0 dla $t\neq t_0$. Zauważmy, że jeśli $t_1 < t_2 < t_0$, to $v_2=v_1$, a zatem równość (231) jest spełniona. Podobnie, gdy $t_0 < t_1 < t_2$. Jeśli natomiast $t_1 < t_0 < t_2$, wówczas $v_2=-v_1$. W konsekwencji lewa strona warunku (231) wynosi $2mv_2$, zaś prawa strona jest równa zeru. Oznacza to, że w tym przypadku warunek (231) nie jest spełniony. Powstaje naturalne pytanie: jak sformułować matematyczny opis obserwowanego zjawiska aby równość (231) była zawsze zachowana. Niestety, w zakresie klasycznego rachunku całkowego jest to niemożliwe, bowiem zarówno całka Riemanna jak i całka Lebesgue'a z funkcji równej zeru poza jednym punktem jest równa zeru. Oznacza to, że za pomocą wymienionych całek nie jesteśmy w stanie opisać zjawisk impulsowych. Z drugiej strony zjawiska impulsowe w fizyce występują w sposób naturalny. Wystarczy wyobrazić sobie ruch cząsteczek gazu. Każda kolizja cząstek powoduje impulsowe przekazanie energii. Powstaje więc naturalna potrzeba stworzenia aparatu matematycznego zdolnego opisywać takie zjawiska.

Przed wprowadzeniem formalnych pojęć pozwalających opisać reakcje impulsowe spróbujmy działania impulsowe opisać za pomocą procesu granicznego. Dla $n \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$\varphi_{n}(x) = \begin{cases} n^{2} \left(x + \frac{1}{n}\right), & \text{jeśli } -\frac{1}{n} \leq x \leq 0; \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ n^{2} \left(\frac{1}{n} - x\right), & \text{jeśli } 0 < x \leq \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{jeśli } |x| > \frac{1}{n}. \end{cases}$$
(232)

Przy $n \to \infty$ ciąg funkcji $\{\varphi_n\}$ jest punktowo zbieżny do funkcji

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x \neq 0, \\ \infty, & \text{jeśli } x = 0. \end{cases}$$
(233)

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ całka z funkcji φ_n po zbiorze R jest równa 1, natomiast całka Lebesgue'a z funkcji φ_0 jest równa zero. Oznacza to, że całki z funkcji φ_n nie są zbieżne do całki z funkcji granicznej φ_0 , tak więc, za pomocą opisanego procesu granicznego nie uzyskamy równości (231).

Aby opisać przedstawioną powyżej sytuacje reakcji impulsowych już w XIX wieku fizycy wprowadzili pojęcie tzw. delty Diraca δ . Jest to obiekt który posiada następującą własność. Dla dowolnej funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0).$$

Oczywistym jest, że tak wprowadzony obiekt nie jest funkcją w sensie klasycznym, bowiem wartość całki zależy tylko od wartości funkcji w punkcie 0 (Należy zaznaczyć, że użycie symbolu całki jest tutaj pewnym nadużyciem, bowiem zarówno całka Riemanna jak i całka Lebesgue'a były zdefiniowane tylko dla stosownych klas funkcji, natomiast w powyższym zapisie symbol ten odnosi się do zupełnie innych obiektów, które nie zostały jeszcze zdefiniowane). Niemniej przyjmując powyższą konwencje mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

огах

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = 0 \qquad \text{jeśli} \quad f(0) = 0.$$

Nietrudno sprawdzić, że jeśli ciąg $\{\varphi_n\}$ jest dany wzorem (232) to

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) f(x) dx = f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx.$$

a zatem pożądane przejście graniczne zostało zachowane.

Ciąg funkcji $\{\varphi_n\}$ nazywamy **ciągiem tworzącym** dla delty Diraca. Zauważmy, że dla delty Diraca można skonstruować ciągi tworzące których wyrazami są funkcje klasy C^{∞} o nośnikach zwartych. Rozważmy np. ciąg

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(nx)^2 - 1}, & \text{jeśli} \quad |x| < 1/n, \\ 0, & \text{jeśli} \quad |x| \ge 1/n. \end{cases}$$

Oczywiście $\psi_n \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad n=1,2,\ldots$ Widać też natychmiast, że ciąg $\{\psi_n\}$ jest zbieżny punktowo do funkcji ϕ_0 danej wzorem (233). Ponadto, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ całka z funkcji ψ_n jest równa 1. Oznacza to, że nawet dla tak regularnych funkcji ψ_n ciąg całek z tych funkcji nie jest zbieżny do całki z funkcji granicznej. Fakt ten praktycznie przekreśla nadzieje na przeprowadzanie rozsądnych analiz w zakresie pojęć analizy klasycznej. Aby usunąć tę trudność zbudowaną tzw. teorię funkcji uogólnionych, zwaną też teorią dystrybucji. Standartowym przykładem dystrybucji jest wspomniana wyżej delta Diraca. Przed formalnym wprowadzeniem pojęcia dystrybucji przypomnijmy pewne fakty z teorii funkcji i całki, które w naszych rozważaniach będą istotne. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym.

Nośnikiem funkcji $f: \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$\operatorname{supp} f = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}.$$

Funkcje $f: \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy **lokalnie całkowalną**, jeśli jest całkowalna na dowolnym podzbiorze zwartym zbioru Ω . Przestrzeń funkcji lokalnie całkowalnych na zbiore Ω będziemy oznaczać symbolem $L^1_{loc}(\Omega)$. Zauważmy, że każda funkcja całkowalna, w szczególności funkcja ciągła o nośniku zwartym, jest lokalnie całkowalna.



PRZYKŁAD

Przykład 44:

Funkcja $f(x)=\frac{1}{x}$ jest lokalnie całkowalna w przedziale (0,1) a funkcja g(x)=1 jest lokalnie całkowalna w R . Warto podkreślić, że f nie jest całkowalna na przedziale (0,1), a g nie jest całkowalna na zbiorze R. Zauważmy jeszcze, że funkcja f nie jest lokalnie całkowalna na dowolnym przedziale zawierającym 0, np. na odcinku (-1,1)

Istotna dla naszych celów jest następująca własność całki Lebesgue'a, którą przypomnimy w formie uwagi.



UWAGA

Uwaga 15:

Załóżmy, że funkcje $f,g:\Omega \to \mathbb{R}$ są lokalnie całkowalne. Jeśli

$$\int_{K} f dx = \int_{K} g dx$$

dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \Omega$, to f = g prawie wszędzie w Ω .

Uwaga 1 jest natychmiastową konsekwencją znanego faktu, że jeśli $\int_K f dx = 0$ dla każdego zbioru zwartego $K \subset \Omega$, to f = 0 prawie wszędzie w Ω .

Niech $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Niech $D(\Omega)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji $\varphi\colon\Omega\to\mathbb{R}$ klasy C^∞ o zwartych nośnikach. Widać natychmiast, że $D(\Omega)$ jest przestrzenią liniową. Zauważmy, że jeśli $\varphi\in D(\Omega)$ to $\varphi^{(n)}\in D(\Omega)$ dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$; ponadto, jeśli $\psi\in C^\infty(\Omega)$, $\varphi\in D(\Omega)$, to $\varphi\psi\in D(\Omega)$.

Nietrudno sprawdzić, że funkcja $\, \phi \!:\! R o R \,$ dana wzorem

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x^2 - 1}}, & \text{jeśli } |x| < 1, \\ 0, & \text{jeśli } |x| \ge 1 \end{cases}$$
 (234)

należy do D(R). Jeśli x^2 zastąpimy iloczynem skalarnym $x \cdot x, x \in R^n$, otrzymamy funkcje z przestrzeni $D(R^n)$.

→· DEFINICJA

Definicja 5:

Mówimy, że ciąg funkcji $\{\varphi_i\}$ należących do $D(\Omega)$ jest zbieżny do funkcji $\varphi \in D(\Omega)$, jeśli:

(i) Istnieje zbiór zwarty $K \subset \Omega$ który zawiera nośniki wszystkich funkcji φ_i , $i \in \mathbb{N}$;

(ii) Dla dowolnego ciągu liczb $k_1, ..., k_n \in \{0, 1, ...\}$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\partial^{|k|} \varphi_i}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{|k|} \varphi}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

jednostajnie w K, gdzie $|k| = k_1 + ... + k_n$

Innymi słowami, ciąg $\{\varphi_i\}$ jest zbieżny do funkcji φ , jeśli zarówno ciąg funkcji jak i ciągi ich pochodnych dowolnego rzędu są jednostajnie zbieżne odpowiednio do funkcji φ oraz jej stosownej pochodnej. Zauważmy, że jest to zbieżność bardzo silna. W dalszym ciągu tak zdefiniowaną zbieżność będziemy nazywać zbieżnością w $D(\Omega)$.

Wygodnie jest przyjąć następujące oznaczenie na pochodne mieszane

$$D^{k} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_{1}^{k_{1}} \dots \partial x_{n}^{k_{n}}},\tag{235}$$

gdzie $k=(k_1,\ldots,k_n)$, $|k|=k_1+\ldots+k_n$.

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 6:

Niech $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Dystrybucją na zbiorze Ω nazywamy dowolny ciągły funkcjonał liniowy T określony na $D(\Omega)$, tzn. odwzorowanie liniowe $T:D(\Omega)\to\mathbb{R}$ takie, że jeśli $\varphi_k,\varphi\in D(\Omega),\ \varphi_k\to\varphi$ w sensie definicji 1, to $\langle T,\varphi_k\rangle\to\ \langle T,\varphi\rangle$, gdzie symbol $\langle T,\varphi\rangle$ oznacza wartość funkcjonału T na elemencie φ , tzn. $\langle T,\varphi\rangle=T(\varphi)$.

Zbiór wszystkich funkcjonałów liniowych i ciągłych (czyli zbiór wszystkich dystrybucji) na Ω będziemy oznaczać symbolem $D^*(\Omega)$. Warto podkreślić, że dystrybucje nie są określone w punktach zbioru Ω lecz na elementach przestrzeni $D(\Omega)$. Funkcje z przestrzeni $D(\Omega)$ często nazywa się funkcjami próbnymi.

Mówimy, że dystrybucje $L,T\in D^*(\Omega)$ są równe, jeśli $\langle L,\varphi\rangle=\langle T,\varphi\rangle$ dla dowolnego $\varphi\in D(\Omega)$. Mówimy, że dystrybucje L i T są równe w zbiorze otwartym $U\subset\Omega$ jeśli $\langle L,\varphi\rangle=\langle T,\varphi\rangle$ dla dowolnego $\varphi\in D(\Omega)$ takiego, że $\operatorname{supp}\varphi\subset U$. W szczególności mówimy, że dystrybucja T zeruje się na zbiorze U, jeśli $\langle T,\varphi\rangle=0$ dla dowolnego $\varphi\in D(\Omega)$ takiego, że $\operatorname{supp}\varphi\subset U$. Podobnie jak nośnik funkcji można również wprowadzić pojęcie nośnika dystrybucji. Mianowicie, **nośnikiem dystrybucji** T nazywamy najmniejszy zbiór domknięty K taki, że T zeruje się na zbiorze $\Omega\smallsetminus K$. Podobnie jak dla funkcji, nośnik dystrybucji będziemy oznaczać symbolem $\operatorname{supp} T$.



Uwaga 16:

Aby pokazać, że funkcjonał liniowy $L:D(\Omega)\to \mathbb{R}$ jest ciągły, wystarczy sprawdzić, że $\langle L,\varphi_k\rangle\to 0$ dla dowolnego ciągu $\{\varphi_k\}\subset D(\Omega)$ takiego, że $\varphi_k\to 0$ w zbiorze $D(\Omega)$ (Jest to natychmiastowa konsekwencja liniowości funkcjonału L).

Możemy teraz formalnie zdefiniować wspomnianą poprzednio δ -Diraca kładąc

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$
 dla $\varphi \in D(\Omega)$

lub ogólniej, dla dowolnego $a \in \Omega$ możemy określić δ_a , kładąc

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$
 dla $\varphi \in D(\Omega)$,

Zauważmy, że δ_a jest dystrybucją na Ω . Istotnie, w oczywisty sposób δ_a jest funkcjonałem liniowym na $D(\Omega)$. Ponadto dla dowolnego ciągu $\{\varphi_k\}\subset D(\Omega)$ zbieżngo do φ mamy

$$\langle \delta_a, \varphi_k \rangle = \varphi_k(a) \to \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle.$$

Stąd wynika natychmiast, że δ_a jest funkcjonałem ciągłym, co należało pokazać.

Każdej funkcji ciągłej $f:\Omega \to \mathbb{R}~$ odpowiada dystrybucja T_f dana wzorem

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$
 (236)

Można pokazać, że jeśli dwie funkcje ciągłe wyznaczają tę samą dystrybucje to muszą być równe.

Co więcej, dla dowolnej funkcji lokalnie całkowalnej f całka po prawej stronie wzoru (236) istnieje, a formuła (236) określa funkcjonał liniowy na przestrzeni $D(\Omega)$. Ponadto, jeśli $\varphi_k \to \varphi$ w sensie powyższej definicji, a K jest odpowiadającym (zgodnie z definicją 2) zbiorem zwartym, to

$$\begin{split} \big| \left\langle T_{f}, \varphi_{k} \right\rangle - \left\langle T_{f}, \varphi \right\rangle \big| &= \Big| \int_{\Omega} f(x) \varphi_{k}(x) dx - \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \, \Big| = \Big| \int_{K} f(x) \big(\varphi_{k}(x) - \varphi(x) \big) dx \, \Big| \leq \\ &\leq \int_{K} |f(x)| \, |\varphi_{k}(x) - \varphi(x)| \, dx. \end{split}$$

Ponieważ przy $k \to \infty$ prawa strona ostatniej nieówności dąży do zera, funkcjonał określony wzorem (236) jest ciągły, czyli jest elementem przestrzeni $D^*(\Omega)$. Zatem dla dowolnej funkcji lokalnie całkowalnej f, wzór (236) określa dystrybucje. Dystrybucje takie nazywany **regularnymi**. Przykładem dystrybucji regularnej jest dystrybucja generowana przez funkcje Heaviside'a

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x < 0, \\ 1, & \text{jeśli } x \ge 0, \end{cases}$$
 (237)

czyli dystrybucja $\,T_{\!H}\,$ dana wzorem

$$\langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x) dx,$$

Zwykle dystrybucje T_f generowaną przez funkcje f wzorem (236) oznacza się krótko również symbolem f. Oznaczenie takie upraszcza zapis, a na ogół nie prowadzi do nieporozumień. W zależności od sytuacji symbol f będzie oznaczać funkcje lokalnie całkowalną albo odpowiadającą jej dystrybucje.

W niniejszym tekście będziemy używać obu oznaczeń. Kiedy wymagać tego będzie przejrzystość wykładu, dystrybucje generowaną przez funkcje f będziemy oznaczać symbolem T_f .

Ciągłe funkcjonały liniowe na przestrzeni $D(\Omega)$, które nie mają reprezentacji całkowej postaci (236) (tzn. nie są generowane przez funkcje lokalnie całkowalne) nazywamy dystrybucjami **nieregularnymi**. Przykładem dystrybucji nieregularnej jest wspomniana wyżej δ -Diraca.

Dystrybucja regularna $T_f = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy f = 0 prawie wszędzie (względem miary Lebesgue'a). Poniżej pokażemy ten fakt przy dodatkowym założeniu, że f jest rozwijalna w szereg Fouriera.

Twierdzenie 14:

ZAŁOŻENIA:

Niech $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, będzie funkcją lokalnie całkowalną, rozwijalną w szereg Fouriera.

TEZA:

Wówczas dystrybucja T_f zeruje się na Ω wtedy i tylko wtedy, gdy f=0 prawie wszędzie w Ω .

DOWÓD:

Jeśli f=0 prawie wszędzie w Ω to dla dowolnego $\varphi\in D(\Omega)$

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0,$$

co oznacza, że $T_f = 0$.

Przypuśćmy teraz, że $T_f = 0$. Niech $x_0 \in \Omega$ i niech $\epsilon > 0$. Połóżmy

$$\omega_{\epsilon}(x) = \begin{cases} C_{\epsilon}e^{-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - \|x\|^2}}, & \text{jeśli} \ \|x\| < \epsilon; \\ 0, & \text{jeśli} \ \|x\| \ge \epsilon, \end{cases}$$

gdzie $\ C_{\epsilon}$ jest tak dobrane aby

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_{\epsilon}(x) dx = 1.$$

Dla dowolnego wielowskaźnika $k=(k_1,\ldots,k_n)$ połóżmy

$$\psi_k(x) = e^{ik \cdot x/\epsilon} \omega_\epsilon(x - x_0),$$

gdzie i oznacza jednostkę urojoną, a $k \cdot x = \stackrel{i=1}{i=1} k_i x_i$.

Załóżmy, że $K(x_0, \epsilon) \subset \Omega$. Oczywiście $\psi_k \in D(\Omega)$. Stąd i z faktu, że $T_f = 0$, mamy

$$\int_{\Omega} f(x)\omega_{\epsilon}(x-x_0)e^{ik\cdot x/\epsilon}dx = \langle T_f, \psi_k \rangle = 0.$$

Z ostatniego wzoru wynika, że wszystkie współczynniki rozwinięcia Fouriera funkcji $f(x)\omega_{\epsilon}(x-x_0)$ względem układu funkcji $\{e^{ik\cdot x/\epsilon}:k\in \mathbb{N}_0^n\}\ (\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\})\ \text{ w kuli }\ \mathit{K}(x_0,\epsilon)\ \text{ są równe zeru.}$

Zatem f = 0 w $K(x_0, ε)$. Ponieważ x_0 jest punktem dowolnym w Ω, dowód jest zakończony.

Zbieżność w sensie dystrybucyjnym

→· DEFINICJA

Definicja 7:

Ciąg dystrybucji $\,\{T_k\}\subset D^*(\Omega)\,$ nazywa się zbieżnym do dystrybucji $\,T\in D^*(\Omega)\,$, jeśli

$$\lim_{k\to\infty}\langle T_k,\varphi\rangle=\langle T,\varphi\rangle. \tag{238}$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Zauważmy, że jest to klasyczna zbieżność punktowa na $D(\Omega)$.



PRZYKŁAD

Przykład 45:

Ciąg $\{\psi_k\}$, gdzie $\psi_k=(k/2)\mathbf{1}_{\left[\begin{array}{cc}-1/k,\,1/k\end{array}\right]}$ jest zbieżny w powyższym sensie do dystrybucji δ -Diraca.

Istotnie dla dowolnej funkcji $\ \varphi \in D(\Omega)$

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{R\psi_k(x)\varphi(x)dx = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2} \int_{-1/k}^{1/k} \varphi(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

→· DEFINICJA

Definicja 8:

Ciąg lokalnie całkowalnych funkcji $\{f_k\}$ nazywa się zbieżnym dystrybucyjnie do lokalnie całkowalnej funkcji f_k jeśli

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx.$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(hy

TWIERDZENIE

Twierdzenie 15:

ZAŁOŻENIA:

Niech $\{f_k\}$ będzie ciągiem funkcji lokalnie całkowalnych, który jest zbieżny do funkcji f w przestrzeni $L^1_{loc}(\Omega)$.

TEZA:

Wtedy odpowiadający mu ciąg dystrybucji $\{f_k\}$ jest zbieżny do dystrybucji f.

DOWÓD:

Istotnie, dla dowolnej funkcji $\varphi \in D(\Omega)$ mamy

$$\Big| \int_{\Omega} f_k(x) \varphi(x) dx - \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \, \Big| \leq \int_{\Omega} |f_k(x) - f(x)| \, |\varphi(x)| \, dx \leq \ \| \varphi \|_{\infty} \int_{K} |f_k(x) - f(x)| \, dx,$$

gdzie $K = \operatorname{supp} \varphi$.

Zgodnie z przyjętymi założeniami, całka po prawej stronie dąży do zera gdy $k \to \infty$, czyli $\langle f_k, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$. Ponieważ funkcja $\varphi \in D(\Omega)$ jest dowolna, oznacza to, że ciąg dystrybucji $\{f_k\}$ jest zbieżny do dystrybucji f.



TWIERDZENIE

Twierdzenie 16:

ZAŁOŻENIA:

Zakładamy, że ciąg $\{f_k\} \subset L^1_{loc}(\Omega)$ jest punktowo zbieżny do funkcji f i ponadto $|f_k(x)| \leq g(x), x \in \Omega, k \in \mathbb{N},$ gdzie g jest funkcją lokalnie całkowalną.

TEZA:

Wtedy ciąg $\{f_k\}$ jest zbieżny dystrybucyjnie do f i ponadto, funkcja f jest również lokalnie całkowalna.

DOWÓD:

Twierdzenie to jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia Lebesgue'a o przejściu granicznym pod całką.



UWAGA

Uwaga 17:

Warto podkreślić, że zbieżność punktowa i zbieżność dystrybucyjna nie są w wyrażny sposób od siebie zależne. Jedna z nich może zachodzić, a druga nie mieć miejsca, a nawet gdy obie mają miejsce, to granice mogą być różne. Pokazują to poniższe przykłady.

PRZYKŁAD

Przykład 46:

Rozważmy ciąg funkcji $\{f_k\}$, gdzie $f_k(x)=\sin(kx)$. Oczywiście ciąg ten nie jest punktowo zbieżny, natomiast w sensie dystrybucyjnym jest zbieżny do zera.

Istotnie, po scałkowaniu przez części mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(kx) \, \varphi(x) dx = \frac{1}{k} \cos(kx) \, \varphi(x) \, \big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx) \, \varphi'(x) dx = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx) \, \varphi'(x) dx.$$

Zauważmy, że przy $k \to \infty$ prawa strona dąży do zera, bowiem

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx) \, \varphi'(x) dx \, \right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \varphi'(x) \right| dx < + \infty$$

(ostatnia nierówność wynika z faktu, że $\varphi^{'}$ jest funkcją ciągłą a jej nośnik jest zbiorem zwartym). Nietrudno też sprawdzić, że dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \to \infty} k^m \sin(kx) = 0$$

w sensie dystrybucyjnym. Wystarczy zastosować m+1 razy wzór na całkowanie przez części a następnie wykorzystać powyższe oszacowanie z $\varphi^{(n+1)}$ w miejsce $\varphi^{'}$.



PRZYKŁAD

Przykład 47:

Ciąg funkcji

$$\psi_k(x) = \begin{cases} k^2, & \text{jeśli } |x| \le 1/k, \\ 0, & \text{jeśli } |x| > 1/k \end{cases}$$
 (239)

jest punktowo zbieżny dla $x \neq 0$ ($\psi_k(x) \to 0$ dla $x \neq 0$, $\psi_k(0) \to +\infty$), natomiast nie jest dystrybucyjnie zbieżny (ciąg $\{\langle \psi_k, \varphi \rangle\}$ jest rozbieżny, jeśli $\varphi(0) \neq 0$).

PRZYKŁAD

Przykład 48:

Dla $k \in \mathbb{N}$ połóżmy $\psi_k = k \, \mathbf{1}_{[0,1/k]}$. Nietrudno sprawdzić, że ciąg $\{\psi_k\}$ jest dystrybucyjnie zbieżny do δ . Rozważmy teraz ciąg $\{\psi_k^2\}$. Dla dowolnego $\varphi \in D(\Omega)$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_k^2(x) \varphi(x) \, dx = k^2 \int_0^k \varphi(x) \, dx = k \varphi(\xi_k),$$

gdzie wartość $\xi_k \in [0,1/k]$ jest wybrana zgodnie z twierdzeniem o wartości średniej dla całek. Jeśli $\varphi(0) \neq 0$, to rozważany ciąg jest rozbieżny, zatem ciąg $\{\psi_k^2\}$ jest rozbieżny w sensie dystrybucyjnym.

Podobnie ciąg $\{\chi_k\}$, gdzie $\chi_k(x) = \psi_k(x^2)$, czyli

$$\chi_k(x) = k \, \mathbb{1}_{[0, 1/\sqrt{k}]}$$

nie jest zbieżny w sensie dystrybucyjnym.

Ostatni przykład sugeruje, że definicja iloczynu i złożenia dystrybucji winna napotkać na trudności. Istotnie zobaczymy poniżej, że operacje takie udaje się zdefiniować tylko dla szczególnych przypadków.

Zachodzi następujące ważne twierdzenie, które przytaczamy bez dowodu.



TWIERDZENIE

Twierdzenie 17:

ZAŁOŻENIA:

Niech $T \in D^*(\Omega)$.

TEZA:

Istnieje ciąg $\{\varphi_k\}\subset D(\Omega)$ taki, że

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega}\varphi_k(x)\varphi(x)\,dx=\left\langle T,\varphi\right\rangle\qquad\text{dla}\quad\varphi\in D(\Omega).$$

Podstawowe działania na dystrybucjach

→· DEFINICJA

Definicja 9: sumy dystrybucji.

Sumę dystrybucji L i T określamy następująco

$$\langle L+T,\varphi\rangle = \langle L,\varphi\rangle + \langle T,\varphi\rangle, \quad \varphi\in D(\Omega).$$

Definicja 10: iloczynu dystrybucji przez liczbę.

Iloczyn dystrybucji T przez liczbę α określamy wzorem

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle, \quad \varphi \in D(\Omega).$$

Jezeli dystrybucja jest regularna, to definicje te pokrywają się ze zwykłymi definicjami sumy funkcji i iloczynu funkcji przez liczbę. Nietrudno sprawdzić, że przy tak określonych działaniach, przestrzeń dystrybucji jest przestrzenią liniową.

Z zasady przy określaniu działań na dystrybucjach żąda się, aby w przypadku dystrybucji regularnych, pokrywały się one z odpowiednimi działaniami na funkcjach.

Kolejną powszechnie używaną operacją na funkcjach jest mnożenie funkcji przez funkcje. Niestety, operacji takiej nie możemy określić dla dowolnych dystrybucji. Wyjaśnia to poniższy przykład.



PRZYKŁAD

Przykład 49:

Rozważmy funkcje $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ daną wzorem $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ dla $x \neq 0$, $f(0) = +\infty$.

Oczywiście funkcja ta określa dystrybucje regularną

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{|x|}} dx.$$

Natomiast wyrażenie

$$\langle f^2, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx.$$

nie jest dystrybucją. Istotnie, jeśli $\varphi(0) \neq 0$, całka po prawej stronie ostatniego wzoru nie jest zbieżna. Oznacza to, że funkcji f^2 nie odpowiada dystrybucja. Oczywiście funkcja f^2 nie jest lokalnie całkowalna na R.

Możemy natomiast określić iloczyn dystrybucji w przypadkach szczególnych. Na przykład, jeśli $f,g:\Omega\to \mathbb{R}$ są funkcjami lokalnie całkowalnymi i ich iloczyn fg jest też funkcją lokalnie całkowalną, to określa on dystrybucje

$$\langle fg, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\varphi(x)dx.$$

Zauważmy, że jeśli $\,\alpha\,$ jest funkcją klasy $\,C^{\infty}$, to $\,\alpha\varphi\in D(\Omega)\,$ dla dowolnego $\,\varphi\in D(\Omega).\,$ Ponadto, jeśli ciąg $\,\{\varphi_i\}\,$ jest zbieżny do $\,\varphi\,$ w $\,D(\Omega),\,$ to również ciąg $\,\{\alpha\varphi_i\}\,$ jest zbieżny do $\,\alpha\varphi\,$ w $\,D(\Omega).\,$ Zatem jeśli $\,f\,$ jest funkcją lokalnie całkowalną na $\,R,\,$ to z tożsamości

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(f(x) \, \alpha(x) \Big) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \Big(\alpha(x) \varphi(x) \Big) dx,$$

wynika, że iloczyn dystrybucji regularnej f przez funkcje α klasy C^{∞} można zdefiniować wzorem

$$\langle \alpha f, \varphi \rangle = \langle f, \alpha \varphi \rangle$$
 dla dowolnego $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Oczywiście wzór ten można rozszerzyć na dowolną dystrybucje $T \in D^*(\Omega)$ przyjmując

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle$$
 dla dowolnego $\varphi \in D(\Omega)$. (240)

→· DEFINICJA

Definicja 11: translacji dystrybucji.

Niech $T \in D^*(\mathbb{R}^n)$ i niech $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Translację dystrybucji T o wektor x_0 oznaczamy symbolem T_{x_0} i określamy wzorem $\langle T_{x_0}, \varphi(x) \rangle = \langle T_{x_0}, \varphi(x) \rangle, \qquad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$ (241)

Należy odnotować, że zapis ten koliduje z oznaczeniem T_f dystrybucji generowanej przez funkcje f. Ponieważ jednak z kontekstu będzie zawsze jasno wynikać o jakie oznaczenie chodzi, pozostawimy tę niezgodność notacyjną.

Przykładem translacji dystrybucji jest zdefiniowana poprzednio dystrybucja δ_{x_0} Istotnie

$$\left<\delta_{x_0}, \varphi(x)\right> = \varphi(x_0) = \left<\delta, \varphi(x+x_0)\right>, \qquad \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

→· DEFINICJA

Definicja 12: transpozycji dystrybucji.

Transpozycję dystrybucji $T \in D^*(\mathbb{R}^n)$ oznaczamy symbolem T^- i określamy wzorem $\langle T^-, \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi(-x) \rangle, \qquad \varphi \in D(\mathbb{R}^n). \tag{242}$

Podobnie, dla $\alpha > 0$ symbolem T^{α} oznaczać będziemy dystrybucje określoną wzorem

$$\langle T^{\alpha}, \varphi(x) \rangle = \left\langle T, \frac{1}{\alpha^{n}} \varphi(\alpha^{n}) \right\rangle, \qquad \varphi \in D(\mathbb{R}^{n}).$$
(243)

Zauważmy, że definicje te są całkiem naturalne. Jeśli bowiem T jest dystrybucją regularną generowaną przez funkcje lokalnie całkowalną $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, to

$$\langle T_{x_0}, \varphi(x) \rangle = \langle T_{,\varphi}(x+x_0) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x+x_0) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-x_0) \varphi(x) dx,$$

czyli T_{x_0} jest dystrybucją regularną generowną przez funkcje $f(x-x_0)$.

Analogicznie

$$\langle T^-, \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi(-x) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \varphi(-x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(-x) \, \varphi(x) dx,$$

czyli T^- jest dystrybucją regularną generowną przez funkcje f(-x).

Podobnie

$$\langle T^{\alpha}, \varphi(x) \rangle = \left\langle T, \frac{1}{\alpha^{n}} \varphi(\overline{\alpha}^{n}) \right\rangle = \frac{1}{\alpha^{n}} \int_{\mathbb{R}^{n}} f(x) \varphi(\overline{\alpha}^{n}) dx = \int_{\mathbb{R}^{n}} f(\alpha x) \varphi(x) dx,$$

czyli T^{α} jest dystrybucją regularną generowną przez funkcje $f(\alpha x)$.

Dystrybucje $T \in D^*(\mathbb{R}^n)$ nazywamy

 λ - **jednorodną**, jeśli $T^t = t^{\lambda}T$ dla dowolnego t > 0 ;

parzystą, jeśli $T^- = T$;

nieparzystą, jeśli $T^- = -T$;

okresową , jeśli $T_a = T$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}^n$. Element a nazywamy okresem dystrybucji.

Aby móc wygodnie przeprowadzać rachunki, często wprowadza się formalnie zapis T(x). Oczywiście x oznacza argument funkcji próbnej, na której działa dystrybucja T. W tej konwencji dystrybycje T_{x_0} , T^- oraz T^α , przyjmują postać $T(x-x_0)$, T(-x) oraz $T(\alpha x)$. W szczególności dystybucja δ_{x_0} ma postać $\delta(x-x_0)$.

Pochodna w sensie dystrybucyjnym

Dla uproszczenia sytuacji ograniczymy się początkowo do dystrybucji określonych na R, chociaż formalnie sytuacja jest taka sama dla dystrybucji określonych na dowolnym zbiorze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Załóżmy, że dana jest funkcja różniczkowalne $f: R \to R$. Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części oraz faktu, że $\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty) = 0$, otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx.$$

Analogicznie dla dowolnego $k \ge 1$ otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x) \varphi(x) dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi^{(k)}(x) dx.$$

Wzorując się na ostatniej równości, możemy formalnie sformułować następującą definicje.

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 13:

Pochodną dystrybucyjną rzędu k z lokalnie całkowalnej funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oznaczamy symbolem $f^{(k)}$ i określamy wzorem $\langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi^{(k)}(x) dx$.

W szczególności

$$\langle f', \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx$$

Oczywiście pochodna dystrybucyjna jest dystrybucją. Z przeprowadzonych powyżej rozważań wynika natychmiast, że jeśli funkcja f posiada pochodną w sensie klasycznym, to posiada również pochodną w sensie dystrybucyjnym i pochodna ta pokrywa się z dystrybucją generowaną przez pochodną klasyczną. Co więcej, jeśli funkcja f jest różniczkowalna prawie wszędzie, a jej pochodna jest funkcją lokalnie całkowalną (w sensie Lebesgue'a), to pochodna dystrybucyjna pokrywa się z dystrybucją generowaną przez pochodną klasyczną.

Definicje k -tej pochodnej dystrybucyjnej możemy sformułować dla dowolej dystrybucji, mamy mianowicie następującą definicje:

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 14:

Pochodną rzędu k z dystrybucji

 $T \in D^*(\mathbb{R})$ nazywamy dystrybucje $T^{(k)} \in D^*(\mathbb{R})$ określoną wzorem

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle.$$

dla $\varphi \in D(R)$.

Z własności przestrzeni D(R), wynika natychmiast, że definicja ta jest dobrze określona. Ponieważ funkcje φ są nieskończenie wiele razy różniczkowalne, każda dystrybucja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna. Widać też natychmiast, że różniczkowanie dystrybucyjne jest operacją liniową.

Zgodnie z powyższą definicją, dla dowolnej funkcji $\varphi \in D(\mathbf{R})$, mamy

$$\langle \delta^{'}, \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi^{'} \rangle = -\varphi^{'}(0)$$

i ogólnie

$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta, \varphi^{(n)} \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

Jeśli H jest funkcją Heaviside'a to

$$\langle H^{'}, \varphi \rangle = - \langle H, \varphi^{'} \rangle = - \int_{0}^{+\infty} \varphi^{'}(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Zatem $H^{'}=\delta$ oraz ogólnie $H^{'}(x-x_0)=\delta_{x_0}$. Wykorzystując indukcje matematyczną łatwo sprawdzić, że $H^{(n)}=\delta^{(n-1)}$ oraz $H^{(n)}(x-x_0)=\delta^{(n-1)}_{x_0}$ dla $n\geq 1$.

Pochodna dystrybucyjna posiada szereg naturalnych własności. Niektóre z nich podamy poniżej.



Własność 1: Leibniza

Niech f będzie funkcją lokalnie całkowalną na R, a g funkcją klasy C^{∞} na R. Wówczas

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Istotnie, dla dowolnej funkcji $\varphi \in D(R)$ mamy:

$$\begin{split} \langle (fg)^{'},\varphi\rangle &=\; -\langle fg,\varphi^{'}\rangle =\; -\int_{-\infty}^{+\infty} fg\,\varphi^{'}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f\big(g^{'}\varphi - (g\varphi)^{'}\big)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} fg^{'}\varphi\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(g\varphi)^{'}dx = \\ &=\; \langle fg^{'},\varphi\rangle - \langle f,(g\varphi)^{'}\rangle = \langle fg^{'},\varphi\rangle + \langle f^{'},g\varphi\rangle = \langle fg^{'},\varphi\rangle + \langle f^{'}g,\varphi\rangle = \langle fg^{'}+f^{'}g,\varphi\rangle, \end{split}$$

co należało wykazać.

√ WŁASNOŚĆ

Własność 2: Pochodna dystrybucyjna funkcji złożonej.

Niech f będzie funkcją lokalnie całkowalną na R a g funkcją różnowartościową klasy C^{∞} na R. Załóżmy, że f jest prawie wszędzie różniczkowalna, a jej pochodna jest funkcją lokalnie całkowalną. Wówczas

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'.$$

Istotnie, dla dowolnej funkcji $\varphi \in D(R)$ mamy:

$$\langle (f \circ g)', \varphi \rangle = \langle f \circ g, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} (f \circ g)(x) \varphi'(x) dx.$$

Podstawiając w ostatniej całce y = g(x) czyli $x = g^{-1}(y)$, J = g(R) otrzymamy

$$\begin{split} \langle (f \circ g)^{'}, \varphi \rangle &= -\int_{J} f(y) \varphi^{'} \big(g^{-1}(y) \big) \big(g^{-1} \big)^{'}(y) dy = -\int_{J} f(y) \big(\varphi \circ g^{-1} \big)^{'}(y) dy = \\ &= \int_{J} f^{'}(y) \big(\varphi \circ g^{-1} \big) (y) dy = \int_{\infty}^{+\infty} f^{'} \big(g(x) \big) g^{'}(x) \varphi(x) dx = \langle (f^{'} \circ g) g^{'}, \varphi \rangle, \end{split}$$

co kończy dowód.

√ WŁASNOŚĆ

Własność 3:

Załóżmy, że ciąg lokalnie całkowalnych na R funkcji $\{f_k\}$ jest zbieżny dystrybucyjnie do lokalnie całkowalnej funkcji f.

Wówczas ciąg pochodnych dystrybucyjnych $\{f_k^{'}\}$ jest zbieżny do pochodnej dystrybucyjnej f. Istotnie, dla dowolnej funkcji $\varphi \in D(\mathbb{R})$ mamy

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{\langle f_{k}^{'}, \varphi \rangle} \lim_{-k\to\infty} \langle f_{k}, \varphi^{'} \rangle = -\langle f, \varphi^{'} \rangle = \langle f^{'}, \varphi \rangle,$$

co należało wykazać.

Zauważmy, że własność 3 w przeciwieństwie do przypadku pochodnych klasycznych nie wymaga żadnych dodatkowych założeń (przypomnijmy, że aby granica pochodnych wyrazów ciągu była równa pochodnej granicy - w przypadku pochodnych klasycznych - ciąg funkcji oraz ciąg pochodnych muszą być jednostajnie zbieżne).

Analogicznie można wykazać następującą uwagę:



Uwaga 18:

Jeśli ciąg dystrybucji $\{T_k\}$ jest zbieżny do dystrybucji T, to ciąg pochodnych $\{T_k^{'}\}$ jest zbieżny do $T^{'}$.

∵©: UWAGA

Uwaga 19:

Z własności 3 wynika natychmiast, że pochodna dystrybucyjna szeregu zbieżnego jest równa szeregowi pochodnych dystrybucyjnych jego wyrazów, czyli

$$\sum_{\left(k=1,f_{k}\right)'}^{\infty} \sum_{k=1,f_{k}'}^{\infty}$$

Przykład 50:

Niech $f:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Załóżmy, że istnieje ciąg rosnący $\{x_k\}$ taki, że w każdym przedziale (x_k, x_{k+1}) funkcja f posiada ciągłą pochodną. Załóżmy ponadto, że w każdym z punktów x_k funkcja f jest prawostronnie ciągła, posiada granicę lewostronną $f(x_k - 0)$ i ponadto posiada co najwyżej skończony skok

$$s_k = f(x_k) - f(x_k - 0).$$

Wówczas funkcja

$$\sum_{f_0(x) = f(x) - k = 1}^{\infty} s_k H(x_k - x),$$

gdzie H jest funkcją Heaviside'a, jest ciągła i w każdym z przedziałów (x_k, x_{k+1}) posiada ciągła pochodną klasyczną. Różniczkując w sensie dystrybucyjnym funkcje

$$\sum_{f(x) = f_0(x) + k = 1}^{\infty} s_k H(x_k - x)$$

otrzymamy

$$f' = f_0' + \sum_{k=1}^{\infty} s_k \delta_{x_k'}.$$

W szczególności, jeśli pochodna klasyczna $f_0^{'}$ jest funkcją lokalnie całkowalną, to dla dowolnego $\varphi \in D(\Omega)$ otrzymamy

$$\langle f^{'}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_{0}^{'}(x) \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} s_{k} \varphi(x_{k}).$$

Oczywiście pochodna klasyczna jest określona poza punktami ciągu $\{x_k\}$, a rozważana całka jest całką Lebesgue'a.

Zdefiniujemy teraz pochodną dystrybucyjną funkcji lokalnie całkowalnej na dowolnym zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

→· DEFINICJA

Definicja 15:

Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i rozważmy funkcje $f: \Omega \to \mathbb{R}$ lokalnie całkowalną na Ω . Pochodną dystrybucyjną $D^k = \overline{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$, gdzie $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, z funkcji f określamy wzorem

$$\langle D^k f, \varphi \rangle = (-1)^{\lceil k \rceil} \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) D^k \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in D(\Omega)$. .

Podobnie, jeśli $T \in D^*(\Omega)$, to pochodną dystrybucyjną D^k z dystrybucji T określamy wzorem

$$\left\langle D^kT,\varphi\right\rangle = (\,-\,1)^{\,|\,k\,|}\,\left\langle T,D^k\varphi\right\rangle \quad {\rm d} la\; dowolnej\; funkcji \quad \varphi\in D(\Omega).$$

Z własności przestrzeni $D(\Omega)$ oraz liniowości i ciągłości T wynika wynika natychmiast, że pochodna dystrybucyjna

$$D^kT=rac{\partial T}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}$$
 jest funkcjonałem liniowym i ciągłym na $D(\Omega)$, czyli dystrybucją na Ω .

√ WŁASNOŚĆ

Własność 4:

Niech f będzie funkcją lokalnie całkowalną na \mathbb{R}^2 . Wówczas dla pochodnych dystrybucyjnych mieszanych zachodzi równość

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Istotnie

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \varphi \right\rangle = \left\langle f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy.$$

Podobnie

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \varphi \right\rangle = \left\langle f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y) dx dy.$$

Ponieważ na mocy twierdzenia Schwarza $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$, prawe strony ostanich równości są sobie równe, skąd własność 4 wynika natychmiast.

Rozumując analogicznie nietrudno sprawdzić, że mieszane pochodne dystrybucyjne - jak zauważyliśmy poprzednio - nie zależą od kolejności różniczkowania. W zastosowaniach teorii dystrybucji własność ta jest istotna. Wyjaśnia to poniższy przykład.



PRZYKŁAD

Przykład 51:

Rozważmy równania różniczkowe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$$

Zauważmy, że dowolna funkcja (niekoniecznie różniczkowalna) u=f(x) jest rozwiązaniem w sensie klasycznym pierwszego równania a dowolna funkcja u=g(y) jest rozwiązaniem drugiego równania. Wynika stąd, że rodziny rozwiązań tych równań są różne w sensie klasycznym. Jeśli dodatkowo zażądamy aby szukane rozwiązania były klasy C^2 , zgodnie z twierdzeniem Schwarza pochodne mieszane są sobie równe a rodziny rozwiązań pokrywają się. W zakresie rozwiązań dystrybucyjnych zgodnie z własnością 4 - rodziny rozwiązań powyższych równań pokrywają się bez dodatkowych założeń.

Dystrybucje skończonego rzędu

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 16:

Dystrybucje $T \in D^*(R)$ nazywamym dystrybucją skończonego rzędu jeśli istnieją funkcja ciągła $g: R \to R$ oraz liczba naturalna k takie, że $T = g^{(k)}$, gdzie $g^{(k)}$ oznacza pochodną dystrybucyjną rzędu k z funkcji g.



PRZYKŁAD

Przykład 52:

Niech

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } t < 0, \\ 1, & \text{jeśli } t > 0. \end{cases}$$

Połóżmy

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } t < 0, \\ t, & \text{jeśli } t > 0. \end{cases}$$

Oczywiście pochodna w sensie klasycznym $h^{'}(t) = H(t)$ dla $t \neq 0$. Korzystając z definicji pochodnej dystrybucyjnej oraz wzoru na całkowanie przez części otrzymamy

$$\langle h^{'}, \varphi \rangle = - \langle h, \varphi^{'} \rangle = - \int_{0}^{+\infty} t \varphi^{'}(t) dt = - t \varphi(t) \Big|_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \varphi(t) dt = \langle H, \varphi \rangle.$$

Zatem $T_H = T_{h^{'}}$, co oznacza, że T_H jst dystrybucją pierwszego rzędu.

Ponieważ, jak zauważyliśmy poprzednio, $\delta = H^{'} = h^{''}$, zatem δ jest dystrybucją 2-go rzędu. Ogólnie, $\delta^{(n)}$ jest dystrybucją rzędu n+2.



UWAGA

Uwaga 20:

Niech $f: R \to R$ będzie funkcją lokalnie całkowalną. Połóżmy

$$g(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

Wówczas $g^{'} = f$ w sensie dystrybucyjnym.

Istotnie, z teorii całki Lebesgue'a g jest funkcją różniczkowalną prawie wszędzie i ponadto g'=f prawie wszędzie w R. Stąd, definicji pochodnej dystrybucyjnej oraz wzoru na całkowanie przez części mamy

$$\begin{split} \langle g^{'}, \varphi \rangle = & - \langle g, \varphi^{'} \rangle = & - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \varphi^{'}(t) dt = - g(t) \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} g^{'}(t) \varphi(t) dt = \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} g^{'}(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt = \langle f, \varphi \rangle, \end{split}$$

co kończy dowód.

Ponieważ g jest funkcją ciągłą, T_f jest dystrybucją skończonego rzędu, dokładniej rzędu 0, jeśli f jest funkcją ciągłą oraz rzędu 1 jeśli f jest funkcją nieciągłą.

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 17:

Dystrybucje $T \in D^*(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, nazywamy dystrybucją skończonego rzędu, jeśli istnieje funkcja ciągła $g: \Omega \to \mathbb{R}$ oraz wielowskaźnik $k = (k_1, ..., k_n)$ takie, że

$$T = \frac{\partial^{|k|} g}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}},$$

gdzie $|k| = k_1 + \dots + k_n$.

Dystrybucje wolno rosnące

Szereg zastosowń wymaga specjalnych klas dystrybucji. Szczególnie ważne są tzw. **dystrybucje wolno rosnące** zwane też **dystrybucjami temperowanymi**. Na tej klasie dystrybucji można stosunkowo prosto zdefiniować transformate Fouriera. W celu określenia dystrybucji temperowanych wprowadzimy najpierw tzw. przestrzeń funkcji szybko malejących.

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 18:

Oznaczmy przez $\mathit{S}(\mathbf{R}^n)$ przestrzeń funkcji $\varphi \in \mathit{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ takich, że

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|x\|^m D^k \varphi(x) = 0$$

dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ oraz dowolnego wielowskażnika $k = (k_1, ..., k_n)$.

Elementy przestrzeni $S(\mathbb{R}^n)$ nazywamy **funkcjami szybko malejącymi**. Przykładem funkcji szybko malejącej jest funkcja $x\mapsto e^{-\parallel x\parallel^2},\ x\in\mathbb{R}^n$. Zauważmy też, że $D(\mathbb{R}^n)\subset S(\mathbb{R}^n)$, bowiem $D^k\varphi(x)=0$ dla $\|x\|$ dostatecznie dużych.



Uwaga 21:

Funkcja $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, jeśli dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ oraz dowolnego wielowskażnika $k = (k_1, \dots, k_n)$ funkcja $x \mapsto ||x||^m D^k \varphi(x)$ jest ograniczona.

Istotnie, dla $m \in \mathbb{N}, \ k = (k_1, ..., k_n)$ i $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ połóżmy

$$\varphi^{m,k}(x) = \| x \|^m D^k \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Przypuśćmy, że $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Dla ustalonych m i k dobierzmy r tak, aby

$$|\varphi^{m,k}(x)| \le 1$$
 dla $||x|| \ge r$

Ponieważ jako funkcja ciągła $\varphi^{m,k}$ jest ograniczona w kuli B(0,r), zatem $\varphi^{m,k}$ jest ograniczona w \mathbb{R}^n . Przypuśćmy teraz, że funkcje $\varphi^{m,k}$ są ograniczone w \mathbb{R}^n dla dowolnego m i k. Stąd i równości

$$\varphi^{m+1,k}(x) = \| x \| \varphi^{m,k}(x)$$

oraz faktu, że funkcja $\varphi^{m+1,k}(x)$ jest ograniczona, wnosimy natychmiast, że

$$\varphi^{m,k}(x) \to 0 \text{ gdy } ||x|| \to \infty.$$

Przestrzeń $S(R^n)$ posiada szereg interesujących własności. Niektóre z nich zostały przedstawione w poniższych uwagach.



֩∹ UWAGA

Uwaga 22:

Niech $S(\mathbb{R}^n)$ oznacza przestrzeń funkcji szybko malejących.

(i). Funkcja $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i ponadto dla dowolnego wielomianu P oraz dowolnego wielowskażnika $k=(k_1,...,k_n)$ funkcja $P \circ D^k \varphi$ jest ograniczona.

(ii). Jeśli $\,\varphi\in\mathit{S}(\mathbf{R}^n),\,\,$ to $\,D^k\varphi\in\mathit{S}(\mathbf{R}^n)\,\,$ dla dowolnego wielowskażnika $\,k=(k_1,...,k_n)\,$.

(iii). Jeśli $\varphi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$, to $\varphi \psi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Istotnie, własności (i) i (ii) są oczywiste, a własność (iii) wynika natychmiast ze wzoru

$$D^k(\varphi\psi) = \sum c_{pq} D^p \varphi D^q \psi,$$

gdzie $p=(p_1,...,p_n), \quad q=(q_1,...,q_n), \quad p+q=k, \quad \text{a} \quad c_{pq} \quad \text{są stosownie dobranymi stałymi. Ponieważ każda z funkcji}$ $x\mapsto \|x\|^mD^p\varphi$ oraz $x\mapsto \|x\|^mD^q\psi(x)$ jest ograniczona, również funkcja $x\mapsto \|x\|^mD^k(\varphi\psi)(x)$ jest ograniczona. Na mocy uwagi 21 wnioskujemy, że $\varphi \psi \in S(\mathbb{R}^n)$.



Uwaga 23:

Prawdziwa jest następująca inkluzja: $S(\mathbf{R}^n) \subset L^p(\mathbf{R}^n)$ dla $p \ge 1$.

Istotnie, niech $\,\varphi\in\mathit{S}(\mathbf{R}^n)\,$. Zgodnie z uwagą 21 istnieje stała $\,M>0\,$ taka, że

$$(1+x_1^2)\cdots(1+x_n^2)|\varphi(x_1,...,x_n)|\leq M \qquad \text{dla}\quad x_1,...,x_n\in \mathbf{R}.$$

Zatem

$$|\varphi(x_1,...,x_n)| \le \frac{M}{(1+x_1^2)\cdots(1+x_n^2)}.$$

W konsekwencji, dla $p \ge 1$ mamy

$$\begin{split} \int_{\mathbb{R}^{n}} |\varphi(x)|^{p} dx &\leq M^{p} \int_{\mathbb{R}^{n}} \frac{1}{(1+x_{1}^{2})^{p} \cdots (1+x_{n}^{2})^{p}} dx_{1} ... dx_{n} = \\ &\frac{1}{(1+x_{1}^{2})^{p}} \frac{1}{dx_{1} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x_{n}^{2})^{p}} dx_{n} \leq \\ &\frac{1}{1+x_{1}^{2}} dx_{1} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x_{n}^{2}} dx_{n} \leq M^{p} \pi^{n}, \end{split}$$

co oznacza, że $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 19:

Mówimy, że ciąg funkcji $\{\varphi_i\}$ należących do $S(\mathbb{R}^n)$ jest zbieżny do funkcji $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, jeśli dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ oraz dowolnego wielowskażnika $k = (k_1, ..., k_n)$, ciąg $\{x \mapsto \|x\|^m D^k \varphi_i(x)\}$ jest jednostajnie zbieżny w \mathbb{R}^n do funkcji $x \mapsto \|x\|^m D^k \varphi(x)$.

Zauważmy, że ciąg $\{\varphi_i\}$ jest zbieżny do funkcji φ w $S(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $\{\varphi_i - \varphi\}$ jest zbieżny do zera w przestrzeni $S(\mathbb{R}^n)$.

Zauważmy też, że ciąg $\{\varphi_i\}\subset D(\mathbb{R}^n)$ jest zbieżny do funkcji φ w przestrzeni $D(\mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg ten jest również zbieżny do funkcji φ w sensie zbieżności przestrzeni $S(\mathbb{R}^n)$. Wynika to z faktu, że wszystkie funkcje φ_i oraz ich pochodne są równe zeru poza pewnym zbiorem zwartym, a na tym zbiorze mamy zbieżność jednostajną na mocy definicji zbieżności w $D(\mathbb{R}^n)$.



Lemat 4:

Dla dowolnej funkcji $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ istnieje ciąg funkcji $\{\varphi_i\} \subset D(\mathbb{R}^n)$ taki, że $\varphi_i \to \varphi$ w sensie zbieżności w przestrzeni $S(\mathbb{R}^n)$ (tzn. zbiór $D(\mathbb{R}^n)$ jest gesty w zbiorze $S(\mathbb{R}^n)$.)

Dowód. Dla uproszczenia zapisu rozważmy przypadek n=1 (dla $n\geq 2$ idea dowodu jest analogiczna). Ustalmy funkcje $\psi\in D(\mathbf{R})$ taką, że $|\psi(x)|\leq 1$ dla $x\in\mathbf{R}$ oraz $\psi(x)=1$ dla $|x|\leq 1$. Niech $\varphi\in S(\mathbf{R}^n)$. Dla $i\in\mathbf{N}$ połóżmy

$$\varphi_i = \varphi \psi_i$$

gdzie $\psi_i(x) = \psi(x/i)$. Zauważmy, że

$$\|\varphi_i - \varphi\|_{\infty} = \|\varphi(\psi - 1)\|_{\infty} \le \frac{\sup}{|x| \ge i} |\varphi(x)|.$$

Ponieważ $\varphi(x) \to 0$ gdy $|x| \to \infty$, z ostatniej nierówności wynika, że $\varphi_i \to \varphi$ jednostajnie w R.

Dla $m \in \mathbb{N}$ rozważmy teraz funkcje: $x \mapsto x^m \varphi(x), \quad x \mapsto x^m \varphi_i(x), \quad i \in \mathbb{N}$. Oczywiście funkcje te należą do $D(\mathbb{R}^n)$. Powtarzając powyższe argumenty łatwo sprawdzić, że $x^m (\varphi_i(x) - \varphi(x)) \to 0$ jednostajnie w \mathbb{R} .

Dla zakończenia dowodu pozostaje sprawdzić, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ oraz $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ciąg $x^m (\varphi_i - \varphi)^{(k)}(x) \to 0$ jednostajnie w R.

Ponieważ $\varphi_i-\varphi=\varphi(\psi_i-1), \quad k$ -ta pochodna z funkcji $\varphi_i-\varphi$ jest kombinacją pochodnych $\varphi_i^{(k)}(\psi_i-1)$ oraz $\varphi_i^{(k-j)}\psi_i^{(j)}, \quad j=1,...,k$. Ponieważ każda z tych funkcji jest elementem przestrzeni $D(\mathbf{R})$ i dąży do zera przy $|x|\to\infty$, rozumując jak poprzednio możemy pokazać, że $\varphi_i^{(k)}(\psi_i-1)\to 0$ oraz $\varphi_i^{(k-j)}\psi_i^{(j)}\to 0, \quad j=1,...,k$, jednostajnie w \mathbf{R} . W konsekwencji $(\varphi_i-\varphi)^{(k)}\to 0$ jednostajnie w \mathbf{R} . Analogicznie możemy pokazać, że dla dowolnego $m,k\in\mathbb{N},\quad x^m(\varphi_i-\varphi)^{(k)}(x)\to 0$ jednostajnie w \mathbf{R} , co kończy dowód.

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 20: Dystrybucja wolno rosnąca.

Dystrybucją **wolno rosnącą** (albo **temperowaną**) nazywamy dowolny ciągły funkcjonał liniowy T określony na $S(\mathbb{R}^n)$, tzn. odwzorowanie liniowe $T: S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ takie, że jeśli $\varphi_i, \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_i \to \varphi$ w $S(\mathbb{R}^n)$, to $\langle T, \varphi_i \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$. Zbiór wszystkich dystrybucji temperowanych bedziemy oznaczać symbolem $S^*(\mathbb{R}^n)$.

Zauważmy, że każda dystrybucja temperowana jest oczywiście dystrybucją, tzn. $S^*(\mathbb{R}^n) \subset D^*(\mathbb{R}^n)$. Przestrzeń $S^*(\mathbb{R}^n)$ jest podprzestrzenią właściwą przestrzeni $D^*(\mathbb{R}^n)$, co oznacza, że istnieją dystrybucje które nie są dystrybucjami temperowanymi. Na przykład

$$\sum_{T=k=1}^{\infty} e^{k^2} \delta_{L}$$

jest dystrybucją w $D^*(\mathbf{R})$ ale nie jest dystrybucją temperowaną. Istotnie, funkcja $\varphi(x)=e^{-x^2}$ jest elementem przestrzeni $S(\mathbf{R})$, a szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{k^2} \varphi(k)$$

jest rozbieżny. Zatem T nie jest określona na φ , czyli $T \notin S^*(R)$.

Warto odnotować, że znajomość wartości dystrybucji temperowanej na zbiorze $D(\mathbb{R}^n)$ wystarczy do wyznaczenia jej wartości na $S(\mathbb{R}^n)$. Istotnie, dla dowolnego $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{\langle T, \varphi \rangle = i \to \infty \langle T, \varphi_i \rangle,}$$

gdzie ciąg $\{\varphi_i\}$ jest dany przez lemat 4.

Z ostatniej obserwacji oraz liniowości dystrybucji wynika natychmiast nastepująca uwaga:



∵©: UWAGA

Uwaga 24:

Dystrybucja $T \in D^*(\mathbb{R}^n)$ jest dystrybucją temperowaną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{i \to \infty} \langle T, \varphi_i \rangle = 0,$$

dla dowolnego ciągu $\{\varphi_i\}\subset D(\mathbb{R}^n)$ takiego, że $\varphi_i o 0$ w sensie zbieżności w przestrzeni $\mathit{S}(\mathbb{R}^n)$.



PRZYKŁAD

Przykład 53:

Delta Diraca jest dystrybucją temperowaną.

Istotnie, niech $\{\varphi_i\}\subset D(\mathbb{R}^n),\ \ \varphi_i\to 0\ \ \text{w sensie zbieżności w przestrzeni}\ \ S(\mathbb{R}^n).$

Ponieważ $\varphi_i(0) \to 0$, zatem $\langle \delta, \varphi_i \rangle = \varphi_i(0) \to 0$, co wobec uwagi 24 oznacza, że δ jest dystrybucją temperowaną.



UWAGA

Uwaga 25:

Każdy wielomian generuje dystrybucje temperowaną.

Istotnie, mając zadany wielomian q dobierzmy wielomian w tak aby $q/w \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (Jeśli q jest wielomianem stopnia mwystarczy wziąć wielomian $w(x)=1+\parallel x\parallel^{2m+4}$). Rozważmy ciąg $\{\varphi_i\}\subset D(\mathbb{R}^n)$ taki, że $\varphi_i\to 0$ w sensie zbieżności w przestrzeni $S(\mathbb{R}^n)$. Oczywiście

$$|\langle T_q, \varphi_i \rangle| = |\int_{\mathbb{R}^n} q \varphi_i dx| = |\int_{\mathbb{R}^n} \frac{q}{w} w \varphi_i dx| \le ||w \varphi_i||_{\infty} ||\frac{q}{w}||_{L^1}.$$

Z definicji zbieżności w $\mathit{S}(\mathsf{R}^n)$ wynika, że $\|w\varphi_i\|_{\infty} \to 0$ gdy $i \to \infty$. W konsekwencji

 $\langle T_q, \varphi_i \rangle o 0 \;\; {
m gdy} \;\; i o \infty. \;\; {
m Na \, mocy \, uwagi \, 24 \, wnioskujemy, } {
m ze} \;\; T_q \;\; {
m jest \, dystrybucją \, temperowaną}.$

Pierwotna z dystrybucji określonej na R

W analizie klasycznej funkcją pierwotną (albo całką nieoznaczoną) z funkcji f nazywamy funkcje F taką, że $F^{'}=f$. Funkcje dla których istnieje funkcja pierwotna nazywamy funkcjami całkowalnymi. Należą do nich na przykład wszystkie funkcje ciągłe. Okazuje się, że pojęcie funkcji pierwotnej może być rozszerzone na dystrybucje. Mianowicie pokażemy, że każda dystrybucja na R posiada pierwotną, która jest również dystrybucją na R. Dystrybucja pierwotna, podobnie jak całka nieoznaczona, jest określona z dokładnością do stałej, tzn. dowolne dwie pierwotne tej samej dystrybucji różnią się o stałą i jeśli dwie dystrybucje różnią się o stałą to są pierwotnymi tej samej dystrybucji.

Ponieważ pierwotna jest typem operacji odwrotnej do różniczkowania, nasuwa się natychmiast pomysł aby dystrybucje pierwotną F z dystrybucji f określić następująco:

$$\langle F, \varphi' \rangle = -\langle f, \varphi \rangle$$
 dla dowolnej funkcji $\varphi \in D(\mathbb{R})$. (244)

Niestety, wzór (244) określa funkcjonał F tylko na podzbiorze $D_1(R)$ przestrzeni $D^*(R)$, gdzie

$$D_1(\mathsf{R}) = \Big\{ \varphi \in D(\mathsf{R}) : \varphi = \psi^{'}, \psi \in D(\mathsf{R}) \, \Big\}.$$

Nietrudno sprawdzić, że $D_1(R)$ jest podprzestrzenią właściwą przestrzeni D(R), tzn. istnieją $\varphi \in D(R)$ takie, że $\varphi \notin D_1(R)$. Na przykład funkcja φ dana wzorem

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 1}, & \text{jeśli } |x| < 1, \\ 0, & \text{jeśli } |x| \ge 1 \end{cases}$$

nie należy do $D_1(R)$. Warunek (1) możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\langle F, \varphi \rangle = -\langle f, \psi_{\varphi} \rangle$$
 dla dowolnej funkcji $\varphi \in D_1(\mathbb{R})$. (245)

gdzie

$$\psi_{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(s) ds.$$

Zauważmy, że jeśli $\ \varphi \in D_1(\mathbf{R}), \ \ \mathrm{to} \ \ \psi_{\varphi} \in D(\mathbf{R}).$

Z postaci wzoru (244) wynika natychmiast, że F jest funkcjonałem liniowym i ciągłym na $D_1(R)$.

Aby otrzymać rozsądną definicje pierwotnej, należy tak określony funkcjonał F na $D_1(R)$ rozszerzyć na calą przestrzeń D(R). Okazuje się, że nie ma jednoznacznego sposobu rozszerzenia, co wynika z faktu, że jest wiele pierwotnych dla danej dystrybucji. Aby uzyskać przedłużenie funkcjonału (245) posłużymy się następującym lematem.

♠ LEMAT

Lemat 5:

Niech $\varphi_0 \in D(\mathbf{R})$ będzie ustaloną funkcją taką, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) dx = 1. \tag{246}$$

Wówczas każda funkcja $\varphi \in D(R)$ może być (jednoznacznie) przedstawiona w postaci sumy

$$\varphi = \lambda \varphi_0 + \chi,\tag{247}$$

gdzie $\chi \in D_1(R)$, a stała λ jest dana wzorem

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx. \tag{248}$$

Istotnie, zauważmy najpierw, że φ_0 nie należy do $D_1(R)$ (w przeciwnym razie całka z φ_0 po R byłaby równa zeru). Niech $\varphi \in D(R)$. Wówczas funkcja

$$\chi = \varphi - \lambda \varphi_0,$$

gdzie λ jest dane wzorem (248), jest jednoznacznie określona i oczywiście należy do D(R). Twierdzimy, że funkcja χ należy do $D_1(R)$. W tym celu wystarczy sprawdzić, że funkcja

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \chi(s)ds \tag{249}$$

należy do D(R).

Istotnie, w oczywisty sposób ψ jest funkcją klasy C^{∞} . Ponadto, po lewej stronie nosników funkcji φ i φ_0 funkcja χ , a zatem i funkcja ψ jest identycznie równa zeru, zaś po prawej stronie jest równa stałej, przy czym stała ta też jest równa zeru, bowiem

$$\psi(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bigl[\varphi(s) - \lambda \varphi_0(s)\bigr] ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) \, ds - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(s) \, ds = \lambda - \lambda = 0.$$

Oznacza to, że ψ ma nośnik zwarty, a zatem jest elementem przestrzeni D(R). Oczywiście $\chi = \psi'$, co oznacza, że $\chi \in D_1(R)$.



Uwaga 26:

Zauważmy, że lemat 1 można sformułować dla $\ \varphi \in D(a,b)$. Niech $\ \varphi_0 \in D(a,b)$ będzie ustaloną funkcją taką, że

$$\int_{a}^{b} \varphi_0(x)dx = 1. \tag{250}$$

Wówczas każda funkcja $\varphi \in D(a,b)$ może być (jednoznacznie) przedstawiona w postaci sumy (247), gdzie

$$\lambda = \int_{a}^{b} \varphi(x)dx, \quad \chi \in D_{1}(a,b), \quad \psi(x) = \int_{a}^{x} \chi(s)ds. \tag{251}$$

Definicja 21:

Pierwotną z dystrybucji $f \in D^*(\mathbf{R})$ nazywamy dystrybucje $F \in D^*(\mathbf{R})$ określoną wzorem

$$\langle F, \varphi \rangle = \lambda \langle F, \varphi_0 \rangle - \langle f, \psi \rangle \quad \text{dla} \quad \varphi \in D(\mathbb{R}),$$
 (252)

gdzie funkcja $\varphi_0 \in D(\mathbb{R})$ jest ustalona, λ i χ są wzięte zgodnie z lematem 1, zaś funkcja ψ jest dana wzorem (249).

Zauważmy najpierw, że $\langle F, \varphi_0 \rangle$ nie zależy od φ , czyli jest stałą, która zależy od wyboru φ_0 i może przyjmować dowolnie wartości. Jeśli $\varphi \in D_1(R)$, to $\lambda = 0$, $\varphi = \chi$, czyli $\psi' = \varphi$ i w konsekwencji równość (252) przyjmie postać

$$\langle F, \psi' \rangle = - \langle f, \psi \rangle,$$

a zatem pokrywa się z równością (244).

Należy sprawdzić, że definicja 1 jest poprawna, tzn. że F jest dystrybucją na R, a pochodna z F jest równa f.

Pokażemy najpierw, że F jest funkcjonałem liniowym na D(R). Niech $\varphi_1, \ \varphi_2 \in D(R), \ \alpha_1, \ \alpha_2 \in R$. Zgodnie z lematem 1

$$\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_0 + \chi_1, \quad \varphi_2 = \lambda_2 \varphi_0 + \chi_2,$$

gdzie funkcja $\varphi_0 \in D(R)$ jest ustalona, a λ_1 , λ_2 , χ_1 , χ_2 są dobrane zgodnie z lematem 1. Ponadto niech ψ_1 i ψ_2 odpowiadają funkcjom χ_1 i χ_2 zgodnie z wzorem (249).

Niech $\varphi=\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2$, a $\lambda,\ \chi$ i ψ są dobrane do φ zgodnie z lematem 1. Nietrudno sprawdzić, że

$$\lambda = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2, \quad \chi = \chi_1 + \chi_2, \quad \psi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2.$$

Zgodnie z (252), mamy

$$\begin{split} \left\langle F,\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2\right\rangle &= (\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2)\left\langle F,\varphi_0\right\rangle - \left\langle f,\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2\right\rangle = \\ &\quad \alpha_1\left(\lambda_1\langle F,\varphi_0\rangle - \left\langle f,\psi_1\right\rangle\right) + \alpha_2\left(\lambda_2\langle F,\varphi_0\rangle - \left\langle f,\psi_2\right\rangle\right) = \\ &\quad \alpha_1\left\langle F,\varphi_1\right\rangle + \alpha_2\left\langle F,\varphi_2\right\rangle, \end{split}$$

co oznacza, że funkcjonał $\,F\,$ jest liniowy.

Z kolei pokażemy, że F jest funkcjonałem ciągłym na D(R). Niech $\{\varphi_i\}\subset D(R),\ \varphi_i\to 0\ \text{w}\ D(R)$. Zgodnie z lematem 1

$$\varphi_i = \lambda_i \varphi_0 + \chi_i, \quad i \in \mathbb{N},$$

gdzie

$$\lambda_i = \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(s) ds, \qquad \chi_i = \varphi_i - \lambda_i \varphi_0.$$

Ponieważ ciąg liczb $\{\lambda_i\}$ jest zbieżny do zera, również ciąg funkcji $\{\chi_i\}$ jest zbieżny do zera w D(R). W konsekwencji ciąg $\{\psi_i\}$, gdzie

$$\psi_i(x) = \int_{-\infty}^x \chi_i(s) ds$$

jest zbieżny do zera w D(R).

Z równości

$$\langle F, \varphi_i \rangle = \lambda_i \langle F, \varphi_0 \rangle - \langle f, \psi_i \rangle$$

wynika, że ciąg $\{\langle F, \varphi_i \rangle\}$ jest zbieżny do zera. Na mocy uwagi 2 z modułu "Wprowadzenie do teorii dystrybucji" wnosimy, że F jest funkcjonałem ciągłym, co należało wykazać.

Pozostaje sprawdzić, że $F^{'}=f$. Niech $\varphi\in D(\mathbb{R})$. Na mocy definicji 2 z modułu "Pochodna w sensie dystrybucyjnym" oraz

$$\langle F', \varphi \rangle = -\langle F, \varphi' \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

co kończy dowód.



PRZYKŁAD

Przykład 54:

Znaleźć pierwotne z dystrybucji δ .

Oznaczmy pierwotną z dystrybucji δ przez Δ . Ustalmy funkcje $\varphi_0 \in D(R)$, spełniającą warunek (1). Przyjmijmy $a = \langle \Delta, \varphi_0 \rangle$. Zgodnie z wzorami (252), (251), (249), (247) i (248), dla dowolnego $\varphi \in D(R)$ mamy

$$\begin{split} \langle \Delta, \varphi \rangle &= \lambda \langle \Delta, \varphi_0 \rangle - \langle \delta, \psi \rangle = \lambda a - \psi(0) = a\lambda - \int_{-\infty}^{0} \chi(s) ds = \\ \lambda a - \int_{-\infty}^{0} (\varphi(s) - \lambda \varphi_0(s)) \, ds &= \lambda \left(a + \int_{-\infty}^{0} \varphi_0(s) ds \right) - \int_{-\infty}^{0} \varphi(s) \, ds = \\ \lambda \left(a + \int_{-\infty}^{0} \varphi_0(s) ds \right) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) \, ds + \int_{0}^{+\infty} \varphi(s) ds = \\ \lambda \left(a + \int_{-\infty}^{0} \varphi_0(s) ds - 1 \right) + \int_{-\infty}^{+\infty} H(s) \varphi(s) ds = \\ C \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) \, ds + \int_{-\infty}^{+\infty} H(s) \varphi(s) \, ds = \langle C + H, \varphi \rangle, \end{split}$$

gdzie H jest funkcją Heviside'a, a stała

$$C = a - 1 + \int_{-\infty}^{9} \varphi_0(s) ds.$$

Zatem $\Delta = H + C$. Jeśli φ_0 dobierzemy tak, aby a = 1 i $\operatorname{supp} \varphi_0 \subset (0, +\infty)$, to C = 0, a stosowna pierwotna jest dokładnie funkcją Heviside'a.

Rozwiązania uogólnione równań różniczkowych

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zadanym zbiorem otwartym, a m liczbą naturalną. Dla $1 \leq p < \infty$ oznaczmy przez $W^{m,p}(\Omega)$ przestrzeń wszystkich funkcji $u: \Omega \to \mathbb{R}$ lokalnie całkowalnych i takich, że dla dowolnego wielowkaźnika $k = (k_1, \ldots, k_n)$ takiego, że $|k| = k_1 + \ldots + k_n \leq m$, pochodna $D^k u$ istnieje (w sensie dystrybucyjnym) i należy do przestrzeni $L^p(\Omega)$. Dla $u \in W^{m,p}(\Omega)$ połóżmy

$$\|u\|_{m,p}=\sum_{\left(|k|\leq m\int_{\Omega}|D^ku|^pdx\right)^{1/p}}.$$

Okazuje się, że tak określona wielkość $\|\cdot\|_{m,p}$ jest normą, a przestrzeń $W^{m,p}(\Omega)$ wyposażona w tę normę jest przestrzenią Banacha. Szczególnie interesujący jest przypadek p=2. Przestrzeń

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

jest przestrzenią Hilberta.

Zauważmy, że $H^0\supset H^1\supset H^2\supset \dots$ Przestrzenie te odgrywają w teorii równań różniczkowych szczególną rolę. Zauważmy jeszcze, że zbieżność ciągu $\{u_i\}$ do funkcji u w H^1 oznacza, że:

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} & \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ u_i \to u & \text{oraz} \end{array} \xrightarrow{\partial u} \begin{array}{cccc} \frac{\partial u}{\partial x_j} & \text{w } L^2 & dla & j=1,\dots,n. \end{array}$$

Zbieżność w H^2 oznacza, że funkcje oraz ich pierwsze i drugie pochodne są zbieżne w normie przestrzeni L^2 .



PRZYKŁAD

Przykład 55:

- a) Funkcja $x \mapsto |x|$ należy do $H^1(-1,1)$. Istotnie, zarówno funkcja jak i jej pochodna $x \mapsto \operatorname{sign} x$ należą do przestrzeni $L^2(-1,1)$.
- **b)** Funkcja $x\mapsto \mathrm{sign}x$ nie należy do $H^1(-1,1)$. Istotnie, jej pochodna, która wynosi 2δ , nie jest elementem przestrzeni $L^2(-1,1)$.
- c) Funkcja $x\mapsto x^{\alpha}$ należy do $H^1(0,1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha>1/2$. Istotnie, jej pochodna $x\mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ jest elementem przestrzeni $L^2(0,1)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha>1/2$.

Rozważmy równanie Poissona

$$\Delta u = f. \tag{253}$$

Przyjmując, że f jest dystrybucją, możemy rozwiązania tego równania szukać w zbiorze dystrybucji. Otrzymamy wówczas tzw. **rozwiązania dystrybucyjne**. Możemy też podejść do tego problemu nieco delikatniej, wprowadzając tzw. **rozwiązania uogólnione** (**słabe**).

Niech $f \in C(\Omega)$. Załóżmy, że $u \in C^2(\Omega)$ jest rozwiązaniem klasycznym równania (253), a v oznacza unormowany wektor normalny do $\partial\Omega$. Dla dowolnej funkcji $\varphi \in D(\Omega)$ zgodnie z wzorem 6 z modułu "Twierdzenie Gaussa-Greena i wzory Greena" mamy

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta u \, dx = \int_{\partial \Omega} \varphi^{\frac{\partial u}{\partial v}} \, dS - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla u \, dx = -\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i}} \frac{\partial u}{\partial x_{i}} \, dx$$

(skorzystaliśmy tutaj z faktu, że $\varphi(x) = 0$ dla $x \in \partial\Omega$.) Stąd i (253) otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i}} \frac{\partial u}{\partial x_{i}} dx + \int_{\Omega} \varphi f dx = 0.$$
 (254)

Równość (254) zachodzi dla każdego rozwiązania u równania (1). Co więcej, ma ona również sens nawet wówczas, gdy u nie jest rozwiązaniem klasycznym, np. nie posiada pochodnych drugiego rzędu w sensie klasycznym. Równość ta sugeruje następującą definicje:

→· DEFINICJA

Definicja 22:

Niech $u \in H^1(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Jeśli dla każdej funkcji $\varphi \in D(\Omega)$ zachodzi równość (254), to mówimy, że u jest rozwiązaniem **uogólnionym** (lub **słabym**) równania (253).

Jeśli $u \in C^2(\Omega)$ jest rozwiązaniem słabym, przy czym $f \in C(\Omega)$, to można pokazać - wykorzystując wzory Greena - że u jest także rozwiązaniem równania (253) w sensie klasycznym. Na zakończenie chcemy zwrócić uwagę, że naszkicowana powyżej idea rozwiązań słabych we współczesnej teorii równań różniczkowych cząstkowych została szeroko wykorzystana i rozbudowana.

Dalsze przykłady i własności dystrybucji

Moduł ten rozpoczniemy od następującego lematu technicznego, który wykorzystamy w następnym przykładzie.



LEMAT

Lemat 6:

Niech $I=(\,-\,1,1)$. Ustalmy $\varphi_0\in D(I)$ takie, że $\varphi_0(0)=1$. Dla $\varphi\in D(I)$ połóżmy

$$\psi_{\varphi}(x) = \left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\varphi_0(x)}{x}, & \text{jeśli } x \in I \smallsetminus \{0\}, \\ \varphi'(0) - \varphi(0)\varphi_0'(0), & \text{jeśli } x = 0. \end{aligned} \right.$$

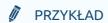
Wówczas $\psi_{\varphi} \in D(I)$ oraz

$$\varphi(x) = x\psi_{\varphi}(x) + \varphi(0)\varphi_{0}(x), \qquad x \in I.$$
 (255)

Dowód. Oczywiście nośnik ψ_{φ} jest zbiorem zwartym. Pozostaje pokazać, że ψ_{φ} jest funkcją klasy C^{∞} na I. Jeśli $x \in I \setminus \{0\}$ to

$$\begin{split} \psi_{\varphi}(x) &= \frac{\frac{1}{x}}{\left(\left(\varphi(x) - \varphi(0) \right) - \varphi(0) \left(\varphi_0(x) - \varphi_0(0) \right) \right)} = \\ &= \frac{\frac{1}{x}}{\int_0^x \left(\varphi'(s) - \varphi(0) \varphi_0'(s) \right) ds} = \int_0^1 \left(\varphi'(tx) - \varphi(0) \varphi_0'(tx) \right) dt. \end{split}$$

Zauważmy, że ostatni wzór jest również prawdziwy dla x=0. Różniczkowanie dowolnego rzędu funkcji ψ_{φ} względem x wynika natychmiast z wzorów na różniczkowanie całki względem parametru oraz regularności funkcji φ oraz φ_0 . Zatem $\psi_{\varphi} \in D(I)$. Ponieważ dla x=0 wzór (255) jest oczywisty, a dla $x \in I \setminus \{0\}$ wynika natychmiast z definicji funkcji ψ_{φ} , dowód lematu 1 jest kompletny.



Przykład 56:

Niech I = (-1, 1). Pokazać, że każde rozwiązanie w sensie dystrybucyjnym równania

$$xu = 0$$

jest postaci

$$u = c\delta$$
,

gdzie $\,c\,$ jest stałą.

Istotnie, przypuśćmy, że u jest rozwiązaniem równania xu=0. Załóżmy, że φ_0 jest dobrane zgodnie z lematem 1 z modułu "Pierwotna z dystrybucji określonej na R". Niech $c=\langle u,\varphi_0\rangle$. Korzystając z lematu 1, liniowości dystrybucji oraz relacji 1 z modułu "Podstawowe działania na dystrybucjach", dla dowolnego $\varphi\in D(I)$ mamy

$$\begin{split} \langle u,\varphi\rangle &= \left\langle u,x\psi_{\varphi}(x) + \varphi(0)\varphi_0(x)\right\rangle = \left\langle u,x\psi_{\varphi}(x)\right\rangle + \left\langle u,\varphi(0)\varphi_0(x)\right\rangle = \\ &= \left\langle xu,\psi_{\varphi}(x)\right\rangle + \varphi(0)\left\langle u,\varphi_0(x)\right\rangle = c\varphi(0) = c\langle\delta,\varphi\rangle = \langle c\delta,\varphi\rangle, \end{split}$$

co należało wykazać.

Przykład 57:

Niech $I=(\,-\,1,1),\ m\in {\bf N}.$ Pokazać, że każde rozwiązanie w sensie dystrybucyjnym równania

$$x^m u = 0$$

jest postaci

$$\sum_{u=i=0}^{m-1} c_i \delta^{(i)},$$

gdzie c_i są stałymi.

Przypadek m=1 był rozpatrzony w poprzednim przykładzie. Dla dowodu indukcyjnego przypuśćmy, że teza jest prawdziwa dla $m\geq 1$. Rozważmy równanie $x^{m+1}u=0$, które możemy zapisać w postaci równoważnej $x^mxu=0$. Na mocy założenia indukcyjnego

$$\sum_{i=0}^{m-1} c_i \delta^{(i)}.$$

Korzystając z równości $\,\delta^{(i)} = \,-\, \frac{x}{i+1} \delta^{(i+1)}\,$ otrzymamy

$$\sum_{xu=-x}^{m-1} \frac{c_i}{i+1} \delta^{(i+1)}.$$

lub w postaci równoważnej

$$\sum_{x\left(u+\sum_{i=1}^{m}\frac{c_{i-1}}{i}\delta^{(i)}\right)=0.$$

Ponowne wykorzystanie poprzedniego przykładu kończy dowód.

Przykład 58:

Pokazać, że szereg

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{ka}$$

jest zbieżny do dystrybucji okresowej o okresie $\,a.\,$ Istotnie, dla $\,\varphi\in D(\mathbf{R})\,$ mamy

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\delta_{ka}, \varphi}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(ka).$$

Ponieważ funkcja φ ma nośnik zwarty, szereg po prawej stronie zawiera tylko skończoną ilość wyrazów, a zatem jest zbieżny. Oczywiście jego granica jest dystrybucją. Połóżmy

$$\sum_{T=k=-\infty}^{+\infty} \delta_{ka}$$

Dla dowolnego $\varphi \in D(R)$, wykorzystując wzór 2 z modułu "Podstawowe działania na dystrybucjach" na dystrybucje przesuniętą, mamy

$$\begin{split} \langle T_a, \varphi(x) \rangle &= \langle T, \varphi(x+a) \rangle = \left\langle k = -\infty \delta_{ka}, \varphi(x+a) \right\rangle = k = -\infty \varphi \big((k+1)a \big) = \\ &\sum_{i = -\infty}^{+\infty} \sum_{j = i = -\infty}^{+\infty} \sum_{j = -\infty}^{+\infty} \sum_{j = i = -\infty}^{+\infty} \sum_{j = -$$

co oznacza, że $T_a = T$.

Przykład 59:

Niech $f \in D^*(I)$, gdzie I = (a, b). Znaleźć dystrybucje u taką, że

$$u' = f$$

Oczywiście pochodną rozumiemy w sensie dystrybucyjnym, a ewentualne rozwiązanie tego problemu będziemy nazywać rozwiązaniem dystrybucyjnym.

Pokażemy, że problem ten posiada rozwiązanie i ponadto każde rozwiazanie jest postaci $u = u_0 + C$, gdzie u_0 jest rozwiązaniem szczególnym tego równania, a C dowolną stałą.

Istotnie, na mocy twierdzenia 3 z modułu "Zbieżność w sensie dystrybucyjnym" istnieje ciąg $\{\varphi_k\} \subset D((a,b))$ zbieżny dystrybucyjnie do f. Ustalmy $\varphi_0 \in D((a,b))$ tak, aby zachodził warunek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) dx = 1.$$

Dla $k \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$\psi_k(x) = c_k + \int_a^x \varphi_k(s) ds,$$

gdzie c_k jest stałą tak dobraną, aby

$$\int_{a}^{b} \psi_{k}(x)\varphi_{0}(x)dx = 0.$$
 (256)

Niech $\varphi \in D((a,b))$. Zgodnie z uwagą 1 z modułu "Pierwotna z dystrybucji określonej na R" mamy $\varphi = \lambda \varphi_0 + \psi^{'}$, gdzie λ i ψ są dane wzorami 8 z modułu "Pierwotna z dystrybucji określonej na R". Zauważmy, że $\psi(a) = \psi(b) = 0$. Korzystając z tych uwag, związku (256) oraz równości $\psi_k^{'} = \varphi_k$, otrzymamy

$$\int_{a}^{b} \psi_{k} \varphi \, dx = \int_{a}^{b} \psi_{k} (\lambda \varphi_{0} + \psi') dx = \lambda \int_{a}^{b} \psi_{k} \varphi_{0} dx + \int_{a}^{b} \psi_{k} \psi' dx =$$

$$= \psi_{k} \psi \Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} \psi'_{k} \psi dx = - \int_{a}^{b} \varphi_{k} \psi dx.$$

Ponieważ ciąg $\{\varphi_k\}$ jest dystrybucyjnie zbieżny, a dla dowolnej $\varphi\in D(a,b)$ również odpowiadająca jej, zgodnie z wzorami 8 z modułu "Pierwotna z dystrybucji określonej na R", funkcja ψ jest elementem przestrzeni D(a,b), zatem ciąg $\{\psi_k\}$ jest dystrybucyjnie zbieżny, powiedzmy do dystrybucji u_0 . Oczywiście

$$\lim_{u_{0}^{'}=k\rightarrow\infty\psi_{k}^{'}=k\rightarrow\infty\varphi_{k}=f.}\lim_{k\rightarrow\infty}$$

Oznacza to, że u_0 jest rozwiązaniem naszego równania.

Rozważmy teraz równanie u'=0. Przypuśćmy, że dystrybucja u jest rozwiązaniem tego równania. Połóżmy

$$C = \langle u, \varphi_0 \rangle.$$

Niech $\varphi \in D(a,b)$ i niech $\varphi = \lambda \varphi_0 + \psi^{'}$, gdzie λ i ψ są dobrane zgodnie z uwagą 1 z modułu "Pierwotna z dystrybucji określonej na R". Zauważmy, że

$$\begin{split} \langle u, \varphi \rangle &= \langle u, \lambda \varphi_0 + \psi' \rangle = \lambda \langle u, \varphi_0 \rangle + \langle u, \psi' \rangle = \lambda C - \langle u', \psi \rangle = \\ &= \lambda C = \int_a^b C \varphi \, dx = \langle C, \varphi \rangle. \end{split}$$

Ponieważ $\varphi \in D(a,b)$ było dowolne, oznacza to, że u=C, czyli że rozwiązaniami równania $u^{'}=0$ są wyłącznie dystrybucje stałe. W konsekwencji rozwiązania równania $u^{'}=f$ mają postać $u=u_0+C$, co należało pokazać.



Przykład 60:

Sprawdzić, że rodzina rozwiązań dystrybucyjnych dla równania

$$u' = \lambda i$$

pokrywa się z rodziną rozwiązań klasycznych.

Istotnie, korzystając z własności 1 z modułu "Pochodna w sensie dystrybucyjnym" równanie to możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\left(e^{-\lambda x}u\right)'=0.$$

Stąd i poprzedniego przykładu wynika, że dowolne rozwiązanie dystrybucyjne ma postać

$$e^{-\lambda x}u=C$$

czyli $u=Ce^{\lambda x}$. Ponieważ dystrybucji $Ce^{\lambda x}$ odpowiada funkcja $Ce^{\lambda x}$ i na odwrót, pokazaliśmy że rozwiązania dystrybucyjne pokrywają się z rozwiązaniami klasycznymi.

Rozdział 8. Metoda funkcji Greena

Funkcja Greena dla równania ciepła

W module "Równanie Poissona" rozwiązanie równania Poissona wyraziliśmy w postaci całki z iloczynu rozwiązania podstawowego równania Laplace'a przez prawą stronę równania Poissona, a rozwiązanie problemu początkowego dla równania ciepła jako całkę z iloczynu rozwiązania podstawowego równania ciepła przez funkcje określającą rozkład początkowy temperatury. Innymi słowami, rozwiązanie rozważanego problemu wyraziliśmy za pomocą rozwiązania podstawowego oraz prawej strony równania lub warunków początkowych.

W niniejszym module rozwiniemy te idee, wykorzystując w miejsce rozwiązania podstawowego, tzw. funkcje Greena. Trudność tej metody wynika z faktu, że dla każdego typu problemu należy indywidualnie wyznaczyć funkcje Greena. Natomiast korzyść polega na tym, że po znalezieniu funkcji Greena otrzymamy formułę, która podaje wartości rozwiązania w zależności od zadanych wartości początkowych czy brzegowych.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zadanym obszarem o gładkim brzegu. Rozważmy problem:

$$\Delta u + f = 0 \qquad \text{w} \quad \Omega, \tag{257}$$

$$u = g$$
 na $\partial\Omega$, (258)

gdzie f i g są zadanymi funkcjami odpowiednio na zbiorze Ω i $\partial\Omega$. Załóżmy, że funkcja u jest rozwiązaniem tego problemu. Niech Φ będzie rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a, danym wzorem

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln \|x\|, & \text{dla } n = 2; \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, & \text{dla } n \ge 3. \end{cases}$$

gdzie $\alpha(n)$ oznacza objętość kuli jednostkowej w \mathbb{R}^n .

Niech $x \in \Omega$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie tak dobraną liczbą, aby $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$. Połóżmy $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(x,\varepsilon)$. Stosując wzór 7 z modułu "Twierdzenie Gaussa-Greena i wzory Greena" na zbiorze Ω_ε do funkcji $y \mapsto u(y)$ i $y \mapsto \Phi(y-x)$ otrzymamy

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} \Big(u(y) \Delta \Phi(y-x) - \Phi(y-x) \Delta u(y) \Big) dy = \int_{\partial \Omega_{\varepsilon}} \Big(u(y)^{\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}} (y-x) - \Phi(y-x)^{\frac{\partial u}{\partial \nu}} (y) \Big) dS,$$

gdzie y oznacza punkt bieżący, symbol Δ - laplasjan względem zmiennej $y,\ dS$ - element powierzchniowy względem zmie

Ponieważ $\Delta\Phi(y-x)=0$ dla $y\in\Omega_{\varepsilon}$, ostatni wzór możemy zapisać w postaci

$$-\int_{\Omega_{\varepsilon}} \Phi(y-x) \Delta u(y) dy = \int_{\partial \Omega} \left(u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} (y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu} (y) \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} (y-x) dS - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu} (y) dS.$$
(259)

Zauważmy, że wektor normalny do powierzchni $\partial\Omega_{\varepsilon}$ w punkcie $y\in\partial B(x,\varepsilon)$ wyraża się wzorem

$$\nu = -\frac{y - x}{\|y - x\|} = -\frac{y - x}{\varepsilon}.$$

Rozważmy przypadek $n \ge 3$ (analogiczny rachunek dla n=2 pozostawiamy Czytelnikowi). Różniczkując funkcje $\Phi(y-x)$ względem ν w punkcie $y \in \partial B(x, \varepsilon)$ otrzymamy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \sum_{(y-x)=i=1}^{n} \frac{\partial \Phi(y-x)}{\partial y_i} \left(-\frac{y_i - x_i}{\varepsilon} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - x_i)^2}{n\alpha(n) \parallel y - x \parallel^n \varepsilon} = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}.$$

Korzystając z ostatniej równości a następnie z faktu, że wartość $n\alpha(n)e^{n-1}$ jest równa powierzchni sfery $\partial B(x, \varepsilon)$ oraz z własności wartości średniej, otrzymamy

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)^{\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}} (y-x) dS = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) dS = u(x).$$

Nietrudno też sprawdzić, że

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS = 0$$

огах

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_{\varepsilon}} \Phi(y - x) \Delta u(y) dy = \int_{\Omega} \Phi(y - x) \Delta u(y) dy.$$

W konsekwencji, przechodząc z $\,arepsilon\,$ do zera we wzorze (259) otrzymamy

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(y - x)^{\frac{\partial u}{\partial \nu}} (y) - u(y)^{\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}} (y - x) \right) dS - \int_{\Omega} \Phi(y - x) \Delta u(y) dy$$
 (260)

Zauważmy, że wzór (260) pozwala wyznaczyć szukaną funkcje u jeśli znamy wartości Δu na zbiorze Ω oraz wartości u i $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ na brzegu $\partial \Omega$ zbioru Ω . Niestety, w rozważanym przypadku wartości pochodnej $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ na zbiorze $\partial \Omega$ nie znamy.

Wprowadzimy teraz pewną korektę tak, aby wyeliminować nieznaną wartość $\frac{\overline{\partial \nu}}{\partial \nu}$. W tym celu rozważamy problem pomocniczy

$$\Delta \Psi = 0 \qquad \text{w} \quad \Omega, \tag{261}$$

$$\Psi(y) = \Phi(y - x)$$
 dla $y \in \partial\Omega$. (262)

Stosując ponownie wzór 7 z modułu "Twierdzenie Gaussa-Greena i wzory Greena" do funkcji u i Ψ w obszarze Ω , gdzie u jest rozwiązaniem problemu (257), (258), a Ψ rozwiązaniem problemu pomocniczego (261), (262). Otrzymamy

$$-\int_{\Omega} \Psi(y) \Delta u(y) dy = \int_{\partial \Omega} \left(u(y) \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(y) - \Psi(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right) dS.$$
 (263)

Połóżmy

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Psi(y).$$

Tak zdefiniowaną funkcje G będziemy nazywać **funkcją Green**a dla problemu (257), (258). Sumując równości (260), (263) i uwzględniając zależność (262), dostajemy

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy.$$

Zauważmy, że po wyznaczeniu funkcji G wartości wszystkich funkcji występujących po prawej stronie ostatniego wzoru są znane, a szukane rozwiązanie możemy zapisać w postaci

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y)G(x,y)dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS.$$
 (264)

Oczywiście w obu całkach zmienną całkowania jest y. Wzór ten określa rozwiązanie problemu (257), (258) w zależności od zadanych funkcji f i g.

Warto podkreślić, że funkcja Greena jest określona dla operatora Laplace'a oraz zbioru Ω , nie zależy natomiast od funkcji f i g.



Uwaga 27:

Zdefiniowana powyżej funkcja Greena $\,G\,$ spełnia następujące warunki:

(i). Funkcja G jest harmoniczna względem y w obszarze $\Omega \setminus \{x\}$, jak również jest harmoniczna względem x w obszarze $\Omega \setminus \{y\}$;

(ii). Jeśli $x \in \partial \Omega$ lub $y \in \partial \Omega$ to G(x,y) = 0, a jeśli zbiór Ω jest nieograniczony, to $G(x,y) \to 0$ gdy $||x|| + ||y|| \to \infty$.

Warto odnotować, że funkcje Greena można po prostu zdefiniować jako funkcje która spełnia warunki (i) i (ii). Tak więc warunki (i) i (ii) możemy uznać za kryterium funkcji Greena.

Przykład 61: Funkcja Greena dla półprzestrzeni.

Rozważmy problem:

$$\Delta u = 0 \qquad \text{w} \quad \text{R}_+^n, \tag{265}$$

$$u = g$$
 na $\partial \mathbb{R}^n$, (266)

 $\text{gdzie } \mathbf{R}^n_+ = \big\{ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n \colon x_n > 0 \big\}.$

Dla $x \in \mathbb{R}^n_+$ połóżmy $\tilde{x} = (x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)$. (Punkt \tilde{x} jest odbiciem symetrycznym punktu x względem płaszczyzny $x_n = 0$). Rozważmy funkcje Ψ daną wzorem

$$\Psi(y) = \Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(y_1 - x_1, ..., y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n).$$

Zauważmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n_+$ tak określona funkcja Ψ jest rozwiązaniem problemu:

$$\Delta \Psi = 0 \qquad \text{w} \quad R_+^n,$$

$$\Psi(y) = \Phi(y - x)$$
 dla $y \in \partial \mathbb{R}^n_+$,

czyli problemu pomocniczego (261), (262) dla obszaru $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Zgodnie z powyższymi uwagami funkcja

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x}), \quad x,y \in \mathbb{R}^n_+, \ x \neq y$$

jest funkcja Greena dla operatora Laplace'a oraz półprzestrzeni R_+^n .

Ponieważ wektor normalny do ∂R_{+}^{n} , skierowany na zewnątrz, ma postać $\nu = (0,...,0,-1)$, zatem

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y-x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y-\tilde{x})\right)(-1) = \frac{1}{n\alpha(n)} \left[\frac{y_n - x_n}{\|y - x\|^n} - \frac{y_n + x_n}{\|y - \tilde{x}\|^n}\right].$$

Jeśli $y \in \partial R_+^n$, wówczas $y_n = 0$ i w konsekwencji

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}_{(x, y) = -} \frac{2x_n}{n\alpha(n) \parallel y - x \parallel^n}.$$

Korzystając ze wzoru (264), rozwiązanie problemu (265), (266) możemy zapisać w postaci

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{\|y - x\|^n} dy.$$

Jeśli przyjmiemy

$$K(x,y) = \frac{2x_n}{n\alpha(n) \parallel y - x \parallel^n} \quad \text{dla} \quad x \in R_+^n, \ y \in \partial R_+^n$$

to

$$u(x) = \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} K(x, y) g(y) dy.$$
 (267)

Funkcje $\,K\,$ nazywamy jądrem Poissona.



Przykład 62:

Wyznaczyć w obszarze $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y > 0\}$ rozwiązanie równania Laplace'a

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

spełniające warunek brzegowy

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = g(x) = \begin{cases} c, & \text{jeśli} & |x| \le a; \\ 0, & \text{jeśli} & |x| > a. \end{cases}$$

Zgodnie z przykładem 1 oraz wzorem na rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a funkcja Greena ma postać

$$G(x, y, \xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}{\ln(\xi - x)^2 + (\eta + y)^2},$$

a rozwiązanie, zgodnie z wzorem (267), postać

$$u(x,y) = \frac{\frac{y}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi}{\int_{-\infty}^{a} \int_{-a}^{a} \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{c}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{c}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_{-a}^{a} \frac{a - x}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi} = \frac{\frac{a - x}{y}}{\int_$$



PRZYKŁAD

Przykład 63: Funkcja Greena dla kuli.

Rozważmy problem

$$\Delta u = 0 \qquad \text{w} \quad B(0, 1),$$

$$u = g$$
 na $\partial B(0, 1)$.

Zgodnie z poprzednimi uwagami funkcja Greena ma postać

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Psi(y),$$

gdzie Ψ jest rozwiązaniem problemu pomocniczego:

$$\Delta \Psi = 0 \qquad \text{w} \quad B(0, 1),$$

$$\Psi(y) = \Phi(y - x)$$
 dla $y \in \partial B(0, 1)$,

czyli problemu (261), (262) dla zbioru $\Omega = B(0, 1)$.

Dla $x \in B(0,1)$ połóżmy $\tilde{x} = x/\parallel x \parallel^2$ (punkt symetryczne do x względem sfery $\parallel x \parallel = 1$.) Rozważmy funkcje

$$\tilde{\Psi}(y) = \Phi(\parallel x \parallel (y - \tilde{x})).$$

Ponieważ dla $y \in \partial B(0,1)$ i $x \neq 0$ mamy

$$||x||^{2} ||y - \tilde{x}||^{2} = ||x||^{2} ||y - \frac{x}{||x||^{2}}||^{2} = ||x||^{2} (||y||^{2} - \frac{2x \cdot y}{||x||^{2}} + \frac{1}{||x||^{2}}) =$$

$$= ||x||^{2} (1 - \frac{2x \cdot y}{||x||^{2}} + \frac{1}{||x||^{2}}) = ||x||^{2} - 2x \cdot y + 1 = ||x||^{2} - 2x \cdot y + ||y||^{2} = ||y - x||^{2},$$

a zatem

$$||x|| ||y - \tilde{x}|| = ||y - x||$$

i w konsekwencji

$$\tilde{\Psi}(y) = \Phi(y - x), \quad \text{dla} \quad y \in \partial B(0, 1).$$

Oznacza to, że tak zdefiniowana funkcja $\tilde{\Psi}$ jest rozwiązaniem problemu pomocniczego. Funkcja Greena dla kuli jednostkowej ma zatem postać

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(\|x\| (y-\tilde{x})), \quad x,y \in B(0,1), \ x \neq y.$$

Zgodnie z wzorem (264) (gdzie f = 0,) rozwiązanie naszego problemu możemy zapisać w postaci

$$u(x) = -\int_{\partial B(0,1)} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) dS.$$

Korzystając z faktu, że $\ \nu = y/\parallel y \parallel \ = y \ \ {\rm dla} \ \ y \in \partial B(0,1) \ \ {\rm oraz} \ {\rm wzorów}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y-x) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_i - x_i}{\|y - x\|^n},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_{i}} \left(\parallel x \parallel (y - \tilde{x}) \right) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_{i} \parallel x \parallel^{2} - x_{i}}{\left(\parallel x \parallel \parallel y - \tilde{x} \parallel \right)^{n}} = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_{i} \parallel x \parallel^{2} - x_{i}}{\parallel y - x \parallel^{n}},$$

otrzymamy

$$\begin{split} \frac{\partial G}{\partial \nu} &(x,y) = \nabla_y G(x,y) \cdot \nu(y) = \sum_{i=1}^n y_i^{\frac{\partial G}{\partial y_i}} (x,y) = \\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{\|y - x\|^n} \sum_{i=1}^n \left(y_i (y_i - x_i) - y_i^2 \parallel x \parallel^2 + x_i y_i \right) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1 - \parallel x \parallel^2}{\|y - x\|^2} \,. \end{split}$$

Ostatecznie więc wzór na rozwiązanie problemu wyjściowego przyjmie postać

$$u(x) = \frac{1 - \|x\|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{\|y - x\|^n} dS(y).$$
 (268)



Uwaga 28:

Rozwiązanie problemu Dirichleta dla kuli o promieniu r można zredukować do kuli o promieniu 1 stosując podstawienie y=rz. Łatwo sprawdzić, że rozwiązanie Dirichleta w kuli B(0,r) ma postać

$$u(x) = \frac{r^2 - ||x||^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(z)}{||z - x||^n} dS(z).$$

W szczególności, dla przypadku przestrzeni dwuwymiarowej rozwiązanie problemu Dirichleta w kuli B(0,r) wyraża się wzorem

$$u(x,y) = \frac{r^2 - x^2 - y^2}{2\pi r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(\xi,\eta)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} dS,$$

a po przejściu na współrzędne biegunowe wzorem

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r\cos\phi, r\sin\phi) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\cos(\phi - \theta) + \rho^2} d\phi,$$

gdzie (ρ,θ) oznaczają współrzędne biegunowe punktu (x,y), a (r,ϕ) współrzędne biegunowe punktu (ξ,η) .

Zastosowana w powyższych przykładach metoda wyznaczania funkcji Greena nosi nazwę metody punktów symetrycznych.

Metoda funkcji Greena dla równań parabolicznych

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem ograniczonym o gładkim brzegu $\partial \Omega$ i niech $u: \Omega \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją posiadającą pochodne drugiego rzędu względem zmiennych $x_1, ..., x_n$. Rozważmy operator

$$L(u) = \operatorname{div}(k\nabla u - qu),$$

gdzie k i q są zadanymi funkcjami określonymi na zbiorze Ω , a $\nabla = (\frac{\sigma}{\partial x_1}, ..., \frac{\sigma}{\partial x_n})$ jest operatorem Nabla. Zauważmy, że w definicji operatora L występuje tylko różniczkowanie względem zmiennych przestrzennych $x_1, ..., x_n$.

Przykład 64: Równania jednorodne.

Rozważmy równanie jednorodne

$$L(u(x,t)) = \rho(x)u_t(x,t) \qquad \text{dla} \quad x \in \Omega, \ t > 0$$
 (269)

z warunkiem brzegowym

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + b(x)u(x,t) = 0 \qquad \text{dla} \quad x \in \partial\Omega, \ t > 0$$
(270)

oraz warunkiem początkowym

$$u(x,0) = \varphi(x)$$
 dla $x \in \Omega$, (271)

gdzie $a,\ b$ i φ są zadanymi funkcjami, $\, \nu\,$ unormowanym wektorem normalnym do $\,\partial\Omega$.

Jeśli k=1, q=0 i $\rho=1,$ to równanie (269) przyjmuje postać

$$\Delta u = u_t$$
 dla $x \in \Omega$, $t > 0$.

W celu znalezienia rozwiązań problemu (269) - (271), dla dowolnie ustalonego $y \in \Omega$ rozważmy problem pomocniczy

$$L(G(x,t)) = \rho(x) G_t(x,t) \qquad \text{dla} \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,t) + b(x)G(x,t) = 0 \qquad \text{dla} \quad x \in \partial \Omega, \quad t > 0$$
 (273)

$$G(x,0) = \delta(x-y)$$
 dla $x \in \Omega$, (274)

gdzie symbol δ oznacza δ -Diraca.

Załóżmy, że problem pomocniczy (272) - (274) posiada rozwiązanie ciągłe G określone w zbiorze $(\Omega \times (0, +\infty)) \setminus \{(y,0)\}$. Ponieważ rozwiązanie to zależy od y, połóżmy G = G(x,t;y). Okazuje się, że rozwiązanie problemu (269) - (271) możemy wówczas zapisać w postaci

$$u(x,t) = \int_{\partial\Omega} G(x,t;y)\varphi(y)dS,$$
(275)

gdzie zmienną całkowania jest y.

Istotnie, obkładając operatorem L (działającym względem zmiennej x) obie strony równości (275) i wykorzystując kolejno (272) i ponownie (275) otrzymamy

$$\begin{split} L(u(x,t)) &= \int_{\partial\Omega} L\Big(G(x,t;y)\varphi(y)dS = \int_{\partial\Omega} \rho(x)G_t(x,t;y)\varphi(y)dS = \\ &= \rho(x)\int_{\partial\Omega} G_t(x,t;y)\varphi(y)dS = \rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\int_{\partial\Omega} G(x,t;y)\varphi(y)dS = \rho(x)u_t(x,t). \end{split}$$

Uwzględniając teraz równość (275) i (273) mamy

$$\begin{split} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + b(x)u(x,t) &= a(x)^{\dfrac{\partial u}{\partial \nu}} \int_{\partial \Omega} G(x,t;y) \varphi(y) dS + b(x) \int_{\partial \Omega} G(x,t;y) \varphi(y) dS = \\ &= \int_{\partial \Omega} \left(a(x)^{\dfrac{\partial G}{\partial \nu}}(x,y,t) + b(x) G(x,t;y) \right) \varphi(y) dS = 0, \end{split}$$

dla $x \in \partial\Omega$, t > 0. Wykorzystując z kolei (275) i (276), dla $x \in \partial\Omega$ mamy

$$u(x,0) = \int_{\partial\Omega} G(x,0;y) \varphi(y) dS = \int_{\partial\Omega} \delta(x-y) \varphi(y) dS = \varphi(x).$$

Ostatnia równość kończy dowód stwierdzenia, że funkcja u dana wzorem (275) jest rozwiązaniem problemu (269) - (271). Rozwiązanie $G(\cdot, \cdot; y)$ problemu (272) - (274) nazywa się **funkcją Greena** dla problemu (269) - (271).

Przykład 65: Równanie niejednorodne z warunkami jednorodnymi.

Rozważmy teraz równanie niejednorodne

$$L(u(x,t)) + f(x,t) = \rho(x)u_t(x,t) \qquad \text{dla} \quad x \in \Omega, \ t > 0,$$

z warunkiem brzegowym (270) oraz warunkiem początkowym (271), gdzie a, b, f i φ są zadanymi funkcjami.

Rozwiązanie problemu niejednorodnego (276), (270), (271) możemy wyrazić jako sumę rozwiązań problemu jednorodngo (269) - (271) danego wzorem (275) oraz problemu:

$$L(v(x,t)) + f(x,t) = \rho(x)v_t(x,t) \qquad \text{dla} \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$a(x) \frac{\partial v}{\partial \nu}(x,t) + b(x)v(x,t) = 0 \qquad \text{dla} \quad x \in \partial\Omega, \ t > 0$$
(278)

$$v(x,0) = 0 \qquad \text{dla} \quad x \in \Omega, \tag{279}$$

W celu znalezienia rozwiązania problemu (277) - (279) zastosujemy metodę wielokrotnie używaną wcześniej. Mianowicie, dla dowolnie ustalonego $\tau > 0$ rozważamy problem pomocniczy:

$$L(w(x,t)) = \rho(x)w_t(x,t) \qquad \text{dla} \quad x \in \Omega, \ t \ge \tau,$$
 (280)

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x,t) + b(x)w(x,t) = 0 \qquad \text{dla} \quad x \in \partial \Omega, \ t \ge \tau,$$
 (281)

$$w(x,\tau) = \frac{f(x,\tau)}{\rho(x)}$$
 dla $x \in \Omega$. (282)

Niech $w=w(x,t;\tau), \ x\in\Omega$, pct>0, będzie rozwiązaniem problemu (280) - (282). Rozwiązanie to jest dane wzorem (275), gdzie w miejsce funkcji φ należy wstawić $f(\cdot,\tau)/\rho(\cdot)$,) a zmienną t w funkcji Greena należy zastąpić zmienną $t-\tau$, czyli

$$w(x,t;\tau) = \int_{\partial\Omega} G(x,t-\tau;y) \frac{f(y,\tau)}{\rho(y)} dS.$$

Pokażemy, że funkcja

$$v(x,t) = \int_0^t w(x,t;\tau)d\tau \qquad \text{dla} \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$
 (283)

jest szukanym rozwiązaniem problemu (277) - (279).

Istotnie, różniczkując równość (283) względem t i uwzględniając warunek (282) mamy

$$v_t(x,t) = w(x,t;t) + \int_0^t w_t(x,t;\tau) d\tau = \frac{f(x,t)}{\rho(x)} + \int_0^t w_t(x,t;\tau) d\tau.$$

Wykorzystując teraz ostatnią równość, następnie relacje (280) oraz (283), otrzymamy

$$\begin{split} \rho(x)\,v_t(x,t) &= f(x,t) + \int_0^t \rho(x)w_t(x,t;\tau)d\tau = f(x,t) + \int_0^t L\Big(w(x,t;\tau)\Big)d\tau = \\ &= f(x,t) + L\Big(\int_0^t w(x,t;\tau)d\tau\Big) = f(x,t) + L\Big(v(x,t)\Big), \end{split}$$

co oznacza, że funkcja v jest rozwiązaniem równania (277). Zgodnie z warunkiem (281) dla dowolnego $\tau > 0$ mamy

$$a(x) \frac{\partial w}{\partial \nu}(x,t;\tau) + b(x)w(x,t;\tau) = 0 \qquad \text{dla} \quad x \in \partial \Omega, \ t \ge \tau.$$

Całkując ostatni związek względem τ w przedziale (0,t) i uwzględniając równość (283) otrzymamy warunek (278). Ponieważ w oczywisty sposób v(x,0)=0 pokazaliśmy, że v jest szukanym rozwiązaniem problemu (277) - (280).



Przykład 66: Równanie niejednorodne z warunkami niejednorodnymi.

Rozważmy teraz równanie niejednorodne (276) z niejednorodnym warunkiem brzegowym

$$\frac{\partial u}{a(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + b(x)u(x,t) = \psi(x) \qquad \text{dla} \quad x \in \partial\Omega, \ t > 0$$

oraz warunkiem początkowym (271), gdzie $\,a\,$, $\,b,\,$ $\,\varphi\,$ i $\,\psi\,$ są zadanymi funkcjami.

Rozwiązanie tego problemu możemy wyrazić w postaci sumy $u=u_1+u_2$, gdzie u_1 jest funkcją spełniającą warunek (284), różniczkowalną względem t i taką, że $L(u_1)$ jest dobrze określone, a u_2 jest rozwiązaniem problemu:

$$L(u(x,t)) + F(x,t) = \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega,$$

$$a(x)^{\frac{\partial u}{\partial \nu}}(x,t) + b(x)u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x) - u_1(x,0), \qquad x \in \Omega,$$

gdzie

$$F(x,t) = f(x,t) - L \Big(u_1(x,t) \Big) + \rho^{\dfrac{\partial u_1}{\partial t}}(x,t).$$

Rozwiązanie ostatniego problemu zostało podane w przykładzie Równania jednorodne. .



Przykład 67: Problem Cauchy'ego.

Rozważmy teraz problem Cauchy'ego dla równania parabolicznego:

$$L(u(x,t)) + f(x,t) = \rho(x)u_t(x,t)$$
 dla $x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$ (285)

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{286}$$

Funkcją Greena dla problemu (285), (286) nazywamy rozwiązanie problemu:

$$L(G(x,t)) = \rho(x)G_t(x,t) \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0,$$

$$G(x,0) = \delta(x-y) \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

W przypadku, gdy $f(x,t) \equiv 0$, rozwiązanie problemu (285), (286) dane jest wzorem (274), gdzie G jest rozwiązaniem problemu (287), (288). Jeśli $f \neq 0$, rozwiązanie problemu (285), (286) szukamy w postaci sumy u = v + w, gdzie v jest rozwiązaniem problemu:

$$L(v(x,t)) = \rho(x)v_t(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0,$$

$$v(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

a w jest rozwiązaniem problemu:

$$L(w(x,t)) + f(x,t) = \rho(x)w(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0,$$

$$w(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Rozwiązanie ostatniego problemu - co łatwo sprawdzić - możemy wyrazić wzorem

$$w(x,t) = \int_0^t \tilde{w}(x,t;\tau)d\tau,$$

gdzie \tilde{w} jest rozwiązaniem problemu pomocniczego:

$$L(\tilde{w}(x,t)) = \rho(x)\tilde{w}_t(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ t > \tau,$$

$$\tilde{w}(x,\tau) = \frac{f(x,\tau)}{\rho(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Wyznaczanie funkcji Greena przy pomocy odwzorowań konforemnych

Przypomnijmy, że punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ możemy identyfikować z liczbą zespoloną z=x+iy i na odwrót. W konsekwencji zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ możemy utożsamiać z odpowiadającym mu zbiorem liczb zespolonych. Ponieważ nie prowadzi to do nieporozumień, w dalszym ciągu zbiory te będziemy oznaczać tym samym symbolem.

→· DEFINICJA

Definicja 23:

Funkcje $f: \Omega \to C$, $\Omega \subset C$, nazywamy **odwzorowaniem konforemnym**, jeśli odwzorowanie to zachowuje kąty, tzn. jeśli $t \mapsto w_1(t), \ t \mapsto w_2(t), \ t \in [t_0, t_1], \$ są dwoma krzywymi regularnymi wychodzącymi z punktu $z \in \Omega$, to kąt między tymi krzywymi w punkcie z pokrywa się z kątem między krzywymi $t \mapsto f(w_1(t)), \ t \mapsto f(w_2(t))$ w punkcie f(z).



Uwaga 29:

Każda funkcja analityczna $f: \Omega \to \mathbb{C}$ taka, że $f'(z) \neq 0$ dla $z \in \Omega$ jest odwzorowaniem konforemnym.

Niech $\Omega \subset C$ będzie ograniczonym obszarem o gładkim brzegu $\partial \Omega$. Niech w będzie konforemnym odwzorowaniem obszaru Ω w kulę |z| < 1. Dla $z_0 \in \Omega$ połóżmy

$$\frac{w(z) - w(z_0)}{z}$$

$$f(z; z_0) = \frac{1 - w(z_0)}{z} w(z).$$
(289)

Nietrudno sprawdzić, że funkcja $f(\cdot;z_0)$ odwzorowuje konforemnie obszar Ω w kulę |z|<1, przy czym $f(z_0;z_0)=0$. Ponieważ $f^{'}(z;z_0)\neq 0$ dla $z\in \Omega$, zatem

$$f(z;z_0) = (z - z_0)\varphi(z;z_0), \tag{290}$$

gdzie $\varphi(\,\cdot\,;z_0)$ jet funkcją analityczną w Ω , $\varphi(z_0;z_0)=0$, $\varphi^{'}(z;z_0)\neq 0$ dla $z\in\Omega$.

Korzystając z wymienionych własności odwzorowań konforemnych pokażemy, że funkcje Greena dla operatora Laplace'a w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ można wyrazić wzorem

$$G(x, y, x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln|f(z; z_0)| = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Reln} f(z; z_0).$$
(291)

W tym celu wystarczy sprawdzić, że funkcja ta spełnia warunki (i) i (ii) uwagi 1 z modułu "Funkcja Greena dla równania ciepła". Istotnie, zgodnie z wzorem (290)

$$G(x,y,x_0,y_0) = -\frac{\frac{1}{2\pi}}{\ln|z-z_0|} - \frac{\frac{1}{2\pi}}{\ln|\varphi(z;z_0)|}.$$

Oczywiście pierwsza z funkcji po prawej stronie ostatniego wzoru jest harmoniczna dla $(x,y) \neq (x_0,y_0)$. Ponieważ $\ln|\varphi(z;z_0)| = \operatorname{Reln}\varphi(z;z_0)$, również funkcja $\ln|\varphi(\cdot;z_0)|$ jest harmoniczna, jako część rzeczywista funkcji analitycznej $\ln\varphi(\cdot;z_0)$. Z tych samych powodów funkcja ta jest harmoniczna względem zmiennych (x_0,y_0) dla $(x_0,y_0) \neq (x,y)$. Oznacza to, że warunek (i) jest spełniony. Ponieważ dla $z \in \partial\Omega$, $|f(z;z_0)| = 1$, zachodzi również warunek (ii).



Przykład 68:

Znaleźć funkcje Greena dla operatora Laplace'a i kuli B(0,R).

Zauważmy, że funkcja

$$\frac{R(z-z_0)}{z}$$

$$f(z;z_0) = \frac{R^2-z_0^2z}{z}$$

odzorowuje w sposób konforemny kulę |z| < R na kulę |z| < 1, przy czym punkt z_0 przechodzi w punkt 0. Zgodnie ze wzorem (291) mamy

$$G(x, y, x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - z_0 z} \right| = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{R^2 - (x_0 - iy_0)(x + iy)}{R(x + iy - x_0 - iy_0)} \right| = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(R^2 - xx_0 - yy_0)^2 + (x_0y - xy_0)^2}{R^2 \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right)}.$$



Przykład 69:

Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

w obszarze $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\},$ spełniające warunki:

$$u(x,0) = A$$
 dla $0 < x < +\infty$, $u(0,y) = B$ dla $0 < y < +\infty$.

Funkcje Greena dla powyższego problemu wyznaczymy metodą odwzorowań konforemnych. W tym celu zauważmy, że funkcja $h(z)=z^2$ odwzorowuje konforemnie obszar Ω na półpłaszczyznę Im z=y>0, natomiast funkcja

 $g(z) = (z - z_0)/(z - z_0)$, gdzie Im $z_0 > 0$, odwzorowuje konforemnie półpłaszczyznę Im z > 0 na kulę |z| < 1. Zatem funkcja złożona

$$\frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - z_0}$$

$$f(z; z_0) = (g \circ h)(z) = z^2 - z_0$$

odwzorowuje konforemnie obszar $\,\Omega\,$ na kulę $\,|z|<1.$

Zgodnie z wzorem (291) funkcja Greena dla obszaru $\,\Omega\,$ ma postać

$$G(x, y, x_0, y_0) = -\frac{\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z^2 - z_0^2}{z^2 - z_0} \right|}{\left| \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2}{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2) + 2i(xy + x_0 y_0)} \right|}{\left| \frac{x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2}{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + 2i(xy - x_0 y_0)} \right|} = \frac{\frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + 4(xy + x_0 y_0)^2}{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + 4(xy - x_0 y_0)^2}}{\left| \frac{x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2}{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + 4(xy - x_0 y_0)^2}}{\left| \frac{x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2}{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + 4(xy - x_0 y_0)^2}}{\left| \frac{x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2}{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + 4(xy - x_0 y_0)^2}}{\left| \frac{x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2}{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + 4(xy - x_0 y_0)^2}}{\left| \frac{x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2}{(x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2)^2 + 4(xy - x_0 y_0)^2}}}$$

Wstawmy (ξ, η) w miejsce (x_0, y_0) i obliczmy pochodne czątkowe:

$$\frac{\partial G}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} = \frac{2xy}{\pi((x^2 - y^2 + \eta^2) + 4x^2y^2)}, \qquad \frac{\partial G}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0} = \frac{2xy}{\pi((x^2 - y^2 + \xi^2) + 4x^2y^2)}.$$

 $\text{Poniewa\'z} \quad \frac{\partial G}{\partial v}(0,\eta) = \frac{\partial G}{\partial \xi}(0,\eta) \quad \text{dla} \quad \eta > 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial G}{\partial v}(\xi,0) = \frac{\partial G}{\partial \eta}(\xi,0) \quad \text{dla} \quad \xi > 0 \text{ , wykorzystując wzór (9.8) otrzymamy }$

$$u(x,y) = \frac{\frac{2A}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \xi^{\frac{\partial G}{\partial \eta}}(x,y,\xi,0) d\xi + \frac{\frac{2B}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \eta^{\frac{\partial G}{\partial \xi}}(x,y,0,\eta) d\eta}{\int_{0}^{+\infty} \frac{xy\xi}{(x^{2} - y^{2} - \xi^{2}) + 4x^{2}y^{2}} d\xi} + \frac{\frac{2A}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{xy\eta}{(x^{2} - y^{2} - \eta^{2}) + 4x^{2}y^{2}} d\eta = \frac{\frac{2A}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{2} - y^{2}}{(\pi + 2\operatorname{arctg})^{\frac{2B}{\pi}} (\pi - 2\operatorname{arctg})} \frac{x^{2} - y^{2}}{2xy} \right).$$

Dalsze przykłady wyznaczania funkcji Greena

Aby lepiej wyjaśnić idee rozwiązywania równań metodą funkcji Greena omówimy jeszcze kilka przykładów.

Przykład 70:

Wyznaczyć funkcje Greena dla równania

$$a^2 u_{xx} = u_t, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0.$$
 (292)

Funkcją Greena równania (292) - nazywamy rozwiązanie problemu

$$a^2u_{xx} = u_t, \quad u(x,0) = \delta(x - x_0),$$
 (293)

które jest ciągłe w obszarze $\Omega \setminus \{(x_0,0)\}$, gdzie $\Omega = \{(x,t): x \in \mathbb{R}, t > 0\}$. Aby znaleźć rozwiązanie problemu (293) rozważmy najpierw problem

$$a^2v_{xx} = v_t, \quad v(x,0) = H(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0,$$
 (294)

gdzie $\,H\,$ jest funkcją Heaviside'a daną wzorem

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x < 0, \\ 1, & \text{jeśli } x \ge 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie problemu (294) będziemy szukać w postaci

$$v(x,t) = w(x/\sqrt{t}).$$

Podstawiając do równania (294) w miejsce v funkcje w otrzymamy

$$\frac{a^2}{t} w''(\sqrt[X]{t}) = -\frac{x}{2t\sqrt{t}} w'(\sqrt[X]{t}).$$

Kładąc $s = x / \sqrt{t}$ otrzymamy równanie

$$w''(s) + \frac{s}{2a^2}w'(s) = 0. ag{295}$$

natomiast warunek początkowy $v(x,0) = H(x-x_0)$ implikuje warunki:

$$\lim_{s \to -\infty_W(s)} \lim_{s \to +\infty_W(s)} = 0, \qquad (296)$$

łatwo sprawdzić, że rozwiązaniem równania (295) jest funkcja

$$w(s) = C_1 \int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{\tau^2}{4a^2}} d\tau + C_2.$$

Z pierwszego z warunków (296) wynika, że $C_2 = 0$, natomiast z drugiego, po uwzględnieniu równości

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4a^2}} d\tau = 2a\sqrt{\pi},$$

otrzymamy $C_1 = 1/(2a\sqrt{\pi})$. Wynika stąd, że funkcja

$$v(x,t) = w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{t}}}^{x} e^{-\frac{\theta^2}{4a^2}} d\theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{t}}}^{x} e^{-\tau^2} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\tau^2} d\tau + \int_{0}^{\frac{x}{2a}\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right),$$

gdzie

$$\Phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-\tau^2} d\tau,$$

jest rozwiązaniem równania $a^2v_{xx} = v_t$.

n 1

Łatwo zauważyć, że $t \to 0^+ v(x,t) = 1$ dla x > 0 oraz $t \to 0^+ v(x,t) = 0$ dla x < 0. Możemy zatem przyjąć, że v(x,0) = H(x). Zauważmy, że funkcja v ma w obszarze Ω ciągłe pochodne v_{xxx} i v_{xt} . Różniczkując względem x równanie $av_{xx} = v_t$ otrzymamy

$$a(v_x)_{xx} = (v_x)_t.$$

Oznacza to, że funkcja

$$G(x,t) = v_x(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

jest również rozwiązaniem równania (292). Ponieważ $G(x,0)=v_\chi(x,0)=H^{'}(x)=\delta, \text{ więc } G(x-x_0,0)=\delta(x-x_0).$ Pokazaliśmy więc, że funkcja

$$G(x-x_0,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$$

jest rozwiązaniem problemu (293), czyli jest ona szukaną funkcją Greena dla problemu (292). Standartowy rachunek pokazuje, że funkcja

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} ds$$

jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \varphi(x), \quad x\in \mathbb{R}$$



PRZYKŁAD

Przykład 71:

Wyznaczyć funkcje Greena dla problemu początkowo - brzegowego:

$$a^2 u_{xx} = u_t$$
 dla $0 < x < l, t > 0,$ (297)

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$
 dla $t > 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$ dla $0 < x < l$. (298)

Funkcją Greena dla problemu (297), (298) nazywamy funkcje ciągłą w obszarze $\{(x,t): 0 \le x \le l, \ t \ge 0\}$ za wyjątkiem punktu $(x_0,0)$, spełniającą następujący problem początkowo-brzegowy:

$$a^2 u_{xx} = u_t$$
 dla $0 < x < l, t > 0,$ (299)

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$
 dla $t > 0$, $u(x,0) = \delta(x - x_0)$ dla $0 < x < l$. (300)

Rozwiązanie problemu (299), (300) możemy znaleźć metodą rozdzielania zmiennych. Szukamy zatem rozwiązania w postaci u(x,t) = X(x)T(t). Postępując analogicznie jak w module: "Rozwiązanie równania struny ograniczonej metodą rozdzielania zmiennych" otrzymamy rozwiązanie równania (299) wyrażone wzorem

$$u(x,t) = \left(A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\right)e^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

Uwzględniając warunki brzegowe dostajemy rozwiązania niezerowe dla wielkości $\lambda_n=n\pi/l, \quad n\in \mathbb{N}, \quad które mają postać$

$$u_n(x,t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Funkcje Greena możemy teraz wyrazić w postaci

$$G(x,t;x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{u_n(x,t)=n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

gdzie współczynniki A_n wyznaczymy wykorzystując warunek początkowy. W tym celu zapiszmy funkcje $\delta(x-x_0)$ w postaci szeregu sinusów, czyli

$$\delta(x - x_0) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x_0\right)}.$$

Ponieważ $G(x,0;x_0) = \delta(x-x_0)$, więc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{n} \frac{1}{x} = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{n} \frac{n\pi}{n} \sin(\frac{n\pi}{l}x) \sin(\frac{n\pi}{l}x_0),$$

skąd wynika, że

$$A_n = \frac{\frac{2}{l}}{\sin(\frac{n\pi}{l}x_0)}.$$

Zatem

$$G(x,t;x_0) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x_0\right).$$

Mając funkcje Greena, rozwiązanie problemu (299), (300) zgodnie z wzorem 7 w module "Metoda funkcji Greena dla równań parabolicznych" możemy wyrazić wzorem

$$u(x,t) = \int_0^t \varphi(s)G(x,t;s)ds.$$



Przykład 72:

Stosując metodę funkcji Greena znaleźć rozwiązanie problemu:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$
 dla $(x, y) \in \Omega$, (301)

$$u(x, y) = \varphi(x, y)$$
 dla $(x, y) \in \partial\Omega$, (302)

gdzie $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x, x^2 + y^2 < R^2\}.$

Funkcje Greena dla rozważanego problemu możemy wyznaczyć stosując metodę punktów symetrycznych. Niech $(\xi,\eta)\in\Omega$. Dla zwięzłości zapisu posłużmy się liczbami zespolonymi. W tym celu przyjmijmy $z_0=\xi+i\eta=re^{i\varphi}$. Rozważmy teraz punkty: $z_1=re^{i(\pi/2-\varphi)}, \quad z_2=re^{i(\pi/2+\varphi)}, \quad z_3=re^{i(\pi-\varphi)}, \quad z_4=re^{i(\pi+\varphi)}, \quad z_5=re^{i(3\pi/2-\varphi)}, \quad z_6=re^{i(3\pi/2+\varphi)}, \quad z_7=re^{i(2\pi-\varphi)}.$ Połóżmy $\xi_k=\operatorname{Re} z_k, \quad \eta_k=\operatorname{Im} z_k$ dla $k=1,\dots,7, \quad \xi_0=\operatorname{Re} z_0=\xi, \quad \eta_0=\operatorname{Im} z_0=\eta$ (czyli $z_k=\xi_k+i\eta_k, \quad k=0,\dots,7$.) Zauważmy, że punkty $(\xi_0,\eta_0), (\xi_1,\eta_1),\dots(\xi_7,\eta_7)$ stanowią ciąg punktów symetrycznych odpowiednio względem prostych $y=x, \quad y=-x \quad \text{oraz osi układu współrzędnych.}$ W szczególności punkt (ξ_1,η_1) jest symetryczny do punktu (ξ_0,η_0) względem prostej y=x, a punkt (ξ_7,η_7) do punktu (ξ_0,η_0) względem prostej y=0.

Niech G_0 bedzie funkcją Greena dla operatora Laplace'a $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ w kole $x^2 + y^2 < R^2$. Nietrudno sprawdzić, że funkcja

$$\sum_{G(x, y, \xi, \eta) = k = 0}^{7} (-1)^{k} G_{0}(x, y, \xi_{k}, \eta_{k})$$

spełnia warunki (i) i (ii) uwagi 1 z modułu "Funkcja Greena dla równania ciepła", a zatem jest szukaną funkcją Greena. Rozwiązanie problemu wyjściowego znajdziemy teraz wykorzystując wzór 8 z modułu "Funkcja Greena dla równania ciepła".

Rozdział 9. Przekształcenie Laplace'a Definicja przekształcenia Laplace'a

→· DEFINICJA

Definicja 24: Transformaty Laplace'a.

Przekształceniem lub transformatą Laplace'a funkcji $f:(0,+\infty)\to R$ nazywamy funkcje zmiennej zespolonej $F:C\to C$ określoną wzorem

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt.$$
 (303)

Symbol C oznacza zbiór liczb zespolonych, tzn. $C = \{z : z = x + iy, x, y \in R\}$, gdzie *i* oznacza jednostkę urojoną.

Przyjmujemy oznaczenie $F = \mathcal{L}(f)$. Aby móc zapisać operacje na argumencie funkcji f, będziemy też stosować zapis $\mathcal{L}(f(t))$. Funkcje f nazywamy **oryginałem**, a funkcje F **transformatą** funkcji f.



Uwaga 30:

Jeśli

$$|f(t)| \le Me^{\alpha t}$$
 dla $t \in [0, +\infty)$,

gdzie M i lpha są ustalonymi stałymi, to transformata Laplace'a istnieje dla dowolnej liczby zespolonej z takiej, że $\operatorname{Re} z > \alpha$, czyli dla z = x + iy, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, $x > \alpha$. Istotnie, niech z = x + iy. Wykorzystując nierówność

$$\left| e^{-(x+iy)t}f(t) \right| \le e^{-xt}e^{\alpha t}M = e^{-(x-\alpha)t}M,$$

nietrudno sprawdzić, że dla $x > \alpha$

$$|\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)| \le \int_0^{+\infty} |e^{-zt} f(t)| dt \le M \int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)t} dt = \frac{M}{x-\alpha},$$

co oznacza, że całka po prawej stronie wzoru (303) jest zbieżna.



֩: UWAGA

Uwaga 31:

Przypuśćmy, że

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} |f(t)| dt < + \infty.$$

Wówczas transformata Laplace'a $\mathcal{L}(f)$ istnieje w zbiorze $\{z \in \mathbb{C}: \text{Re}z > \alpha\}$ Istotnie, załóżmy, że Re $z = x > \alpha$. Wówczas

$$\big|\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt \,\big| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} |f(t)| dt < +\infty.$$



UWAGA

Uwaga 32:

Przypuśćmy, że transformata $F = \mathcal{L}(f)$ jest dobrze określona w pewnym zbiorze $\{z \in \mathbb{C} : Rez > \alpha\}$. Wówczas

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to \infty} F(z) = 0.$$

Istotnie, teza wynika natychmiast z nierówności

$$|F(z)| = \int_0^{+\infty} e^{-(x+iy)t} f(t)dt \le \int_0^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt,$$

bowiem przy $x \to \infty$ całka po prawej stronie dąży do zera (wynika to z twierdzenia Lebesque'a o zbieżności ograniczonej).

Połóżmy

$$\alpha_0 = \inf \left\{ \operatorname{Re} z : \int_0^{+\infty} |e^{-zt} f(t)| dt \text{ jest zbieżna} \right\}.$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt$$

jest zbieżna, a dla $x < \alpha_0$ rozbieżna.

Oznacza to, że transformata Laplace'a z funkcji f jest określona w zbiorze $\{z \in \mathbb{C}: \text{Re } z > \alpha_0\}$.

W poniższych przykładach 1 i 3 transformatę Laplace'a rozpatrujemy w zbiorze $\{z \in C: \text{Re}\, z > 0\}$, a w przykładzie 2 w zbiorze $\{z \in C: \text{Re}\, z > \alpha\}$.



PRZYKŁAD

Przykład 73:

Niech f(t) = 1 . Wówczas

$$\mathcal{L}(1)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = -\frac{1}{z} e^{-zt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{z}.$$



PRZYKŁAD

Przykład 74:

Niech $f(t) = e^{ct}$ ($c \in \mathbb{R}$). Wówczas dla $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > c$, mamy

$$\mathcal{L}(e^{ct})(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{ct} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-c)t} dt = \frac{1}{z-c}.$$

W szczególności

$$\mathcal{L}(e^t)(z) = \frac{1}{z-1}, \qquad \mathcal{L}(e^{-t})(z) = \frac{1}{z+1}.$$



PRZYKŁAD

Przykład 75:

Znaleźć transformatę Laplace'a z funkcji $f(t) = t^n$, $n \ge 1$.

Dla n = 1 otrzymamy

$$\mathcal{L}(t)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} t \, dt = \left(-\frac{\frac{1}{z}}{e^{-zt}}t\right)\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \frac{\frac{1}{z^2}}{z}.$$

Wykorzystując zasadę indukcji nietrudno pokazać, że

$$\mathcal{L}(t^n)(z) = \frac{\frac{n!}{z^{n+1}}}$$



Przykład 76:

Znaleźć transformatę Laplace'a z funkcji $f(t) = \sin t$.

$$\mathcal{L}(\sin t)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \sin t \, dt = -e^{-zt} \cos t \Big|_0^{+\infty} - z \int_0^{+\infty} e^{-zt} \cos t \, dt =$$

$$= 1 - z \Big(e^{-zt} \sin t \Big|_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-zt} \sin t \, dt \Big) = 1 - z^2 \mathcal{L}(\sin t)(z).$$

Stąd

$$\mathcal{L}(\sin t)(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

Podobnie możemy pokazać, że

$$\mathcal{L}(\cos t)(z) = \frac{z}{1+z^2}$$



PRZYKŁAD

Przykład 77:

Znaleźć transformatę Laplace'a z funkcji

$$sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$
oraz $cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

Korzystając z liniowości transformaty \mathcal{L} oraz przykładu 2 mamy:

$$\mathcal{L}(\sinh t)(z) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad \mathcal{L}(\cosh t)(z) = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right) = \frac{z}{z^2 - 1}.$$

Podstawowe własności transformaty Laplace'a



TWIERDZENIE

Twierdzenie 18:

ZAŁOŻENIA:

Załóżmy, że transformata Laplace'a z rozważanych poniżej funkcji istnieje. Zgodnie z przyjętą konwencją niech F oznacza transfomatę Laplace'a funkcji f.

TEZA:

$$\mathcal{L}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))(z) = c_1 \mathcal{L}(f_1(t))(z) + c_2 \mathcal{L}(f_2(t))(z);$$
(304)

$$\mathcal{L}(f(\alpha t))(z) = \frac{1}{\alpha} \frac{z}{F(\alpha)};$$
(305)

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}f(t))(z) = F(z - \lambda); \tag{306}$$

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(z) = (-1)^n F^{(n)}(z); \tag{307}$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z) = z^n F(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - z f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0);$$
(308)

$$\mathcal{L}\left(\int_{0}^{z} f(\tau)d\tau\right)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z).$$
(309)

Jeśli ponadto istnieje granica $t \to 0$ $\left(\frac{f(t)}{t}\right)$, to

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(z) = \int_{z}^{\infty} F(s)ds.$$
(310)

DOWÓD:

Ad.(1). Wynika z liniowości całki.

Ad.(2). Przyjmując $\tau = \alpha t$ otrzymamy

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z}{\alpha}} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} F(\frac{z}{\alpha}).$$

Ad.(3).

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} e^{-zt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-\lambda)t} f(t) dt = F(z-\lambda).$$

Ad.(4). Różniczkując transformatę F względem zmiennej z otrzymamy

$$F'(z) = -\int_0^{+\infty} te^{-zt} f(t)dt = -\mathcal{L}(tf(t))(z)$$

i ogólnie

$$F^{(n)}(z) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-zt} f(t) dt = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t))(z).$$

Ad.(5). Całkując przez części otrzymamy

$$\mathcal{L}(f'(t))(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f'(t) dt = e^{-zt} f(t) \Big|_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = -f(0) + zF(z).$$

Podobnie dla n=2

$$\mathcal{L}(f'(t))(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f'(t) dt = e^{-zt} f'(t) \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-zt} f'(t) dt =$$

$$= -f'(0) + z (-f(0) + zF(z)) = -f'(0) - zf(0) + z^2 F(z).$$

Korzystając z zasady indukcji matematycznej nietrudno pokazać, że formuła (308) jest prawdziwa dla dowolnego n.

Ad.(6). Połóżmy

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Z teorii funkcji rzeczywistych wiadomo, że $g^{'}(t) = f(t)$ prawie wszędzie (względem miary Lebesgue'a). Oczywiście g(0) = 0. Stąd i własności (308) mamy

$$\mathcal{L}(f(t))(z) = \mathcal{L}(g'(t))(z) = z\mathcal{L}(g(t))(z),$$

skąd (6) wynika natychmiat.

Ad.(7). Połóżmy

$$g(t) = \frac{f(t)}{t}, \qquad t > 0.$$

Niech G będzie transformatą Laplace'a z funkcji g. Wykorzystując własność (307) otrzymamy

$$F(z) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)(z) = \mathcal{L}\big(tg(t)\big)(z) = -G^{'}(z).$$

Całkując ostatnią równość na przedziale [a,z] otrzymamy

$$G(z) = -\int_{a}^{z} F(s)ds + G(a).$$

Z uwagi 3 w module "Definicja przekształcenia Laplace'a" wynika, że

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to \infty} G(z) = 0.$$

zatem

$$G(a) = \int_{a}^{+\infty} F(s)ds.$$

Stąd

$$G(z) = -\int_{a}^{\pi} F(s)ds + \int_{a}^{+\infty} F(s)ds = \int_{z}^{+\infty} F(s)ds.$$



PRZYKŁAD

Przykład 78:

 $\label{eq:linear_constraint} {\sf Znale\acute{s}\acute{c}}\ {\sf transformat\^{q}}\ {\sf Laplace'a}\ {\sf funkcji}\ \ f(t) = \frac{\dfrac{{\sf sin}t}{t}}{t}\ , \quad t>0.$

Zgodnie z własnością (310) mamy

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)(z) = \int_{z}^{+\infty} \frac{1}{1+s^{2}} ds = \operatorname{arctg} s \Big|_{z}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} z.$$

Przykład 79:

Wyznaczyć transformatą Laplace'a funkcji $f(t) = t^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Podstawiając $\tau = zt$ otrzymamy

$$\mathcal{L}\big(t^{\alpha}\big)(z) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-zt} dt = \frac{\frac{1}{z}}{\int_0^{+\infty} \left(\frac{z}{z}\right)^{\alpha} e^{-\tau} d\tau} = \frac{\frac{1}{z^{\alpha+1}}}{\int_0^{+\infty} \tau^{\alpha} e^{-\tau} d\tau} = \frac{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}}{z^{\alpha+1}}.$$

gdzie symbol $\ \Gamma$ oznacza tzw. funkcje Gamma daną wzorem

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt.$$

Zauważmy, że dla $\alpha=n$, zgodnie z przykładem 3 w module "Definicja przekształcenia Laplace'a" mamy

$$\mathcal{L}(t^n)(z) = \frac{\frac{n!}{z^{n+1}}}$$

Zatem

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

→· DEFINICJA

Definicja 25:

Dla danych funkcji $f,g:[0,+\infty)\to \mathbb{R}$ całkowalnych, spłot funkcji f*g określony jest wzorem

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds = \int_0^t f(s)g(t-s)ds.$$

TWIERDZENIE 🖔

Twierdzenie 19:

ZAŁOŻENIA:

Niech $f,g{:}[0,+\infty) \to \mathbb{R}~$ będą funkcjami dla których istnieją transformaty Laplace'a.

TEZA:

Wtedy transformata Laplace'a splotu tych funkcji wyraźa się wzorem

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z) \cdot \mathcal{L}(g)(z). \tag{311}$$

DOWÓD:

Ponieważ

$$\mathcal{L}\big(f\big)(z)\cdot\mathcal{L}\big(g\big)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt \cdot \int_0^{+\infty} e^{-zs} g(s) ds = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-z(s+t)} g(s) f(t) ds dt,$$

więc podstawiając $\theta=s+t, \quad \tau=s, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leq \theta < +\infty, \quad 0 \leq \tau \leq \theta, \quad \text{otrzymamy}$

$$\mathcal{L}(f)(z) \cdot \mathcal{L}(g)(z) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{\theta} e^{-z\theta} f(\theta - \tau) g(\tau) d\tau \right) d\theta = \int_0^{+\infty} e^{-z\theta} \left(\int_0^{\theta} f(\theta - \tau) g(\tau) d\tau \right) d\theta = \int_0^{+\infty} e^{-z\theta} \left(\int_0^{\theta} f(\theta - \tau) g(\tau) d\tau \right) d\theta = \int_0^{+\infty} e^{-z\theta} \left(\int_0^{\theta} f(\theta - \tau) g(\tau) d\tau \right) d\theta = \mathcal{L}(f * g)(z).$$



Uwaga 33:

Zauważmy, że zależność (311) pozostaje prawdziwy, jeśli splot funkcji określimy wzorem

$$(f * g)(t) = \int_0^{+\infty} f(t - s)g(s)ds = \int_0^{+\infty} f(s)g(t - s)ds,$$

przy czym zakładamy, że funkcje f i g na zbiorze $(-\infty,0)$ przyjmują wartość 0.



Przykład 80:

Rozważmy funkcję Heaviside'a

$$H(t-t_0) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } t < t_0; \\ 1, & \text{jeśli } t \ge t_0. \end{cases}$$

Prosty rachunek daje

$$\mathcal{L}(H(t-t_0))(z) = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-z(\tau+t_0)} d\tau = e^{-zt_0} \int_0^{+\infty} e^{-z\tau} d\tau = \frac{e^{-zt_0}}{z},$$

gdzie $\tau = t + t_0$. W szczególności

$$\mathcal{L}\big(H(t)\big)(z) = \frac{1}{z}$$



TWIERDZENIE

Twierdzenie 20:

ZAŁOŻENIA:

Niech $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją posiadającą transformatę Laplace'a . Niech $\alpha \in \mathbb{R}$.

TEZA:

Wówczas transformata Laplace'a **przesunięcie argumentu oryginału** wyraźa się wzorem

$$\mathcal{L}(H(t-\alpha)f(t-\alpha))(z) = e^{-z\alpha}\mathcal{L}(f(t))(z).$$
(312)

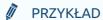
DOWÓD:

Istotnie,

$$\mathcal{L}(H(t-\alpha)f(t-\alpha))(z) = \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-zt} f(t-\alpha) dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-z(\tau+\alpha)} f(\tau) d\tau =$$

$$= e^{-z\alpha} \int_{0}^{+\infty} e^{-z\tau} f(\tau) d\tau = e^{-z\alpha} \mathcal{L}(f)(z),$$

gdzie $\tau = t - \alpha$.



Przykład 81:

Niech $f(t) = e^{-2t}$. Zgodnie z regułą przesunięcia argumentu mamy

$$\mathcal{L}(H(t-1)f(t-1))(z) = \mathcal{L}(H(t-1)e^{-2(t-1)})(z) = e^{-z}\mathcal{L}(e^{-2t})(z) = \frac{e^{-z}}{z+2}.$$



PRZYKŁAD

Przykład 82:

Znaleźć transformatę funkcji $f(t) = t^2H(t-2)$.

Korzystając z równości $t^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4$, zależności (312) oraz przykładu 3 z modułu "Definicja przekształcenia Laplace'a" otrzymamy

$$\mathcal{L}(t^2H(t-2))(z) = \mathcal{L}\left(((t-2)^2 + 4(t-2) + 4)H(t-2)\right)(z) = e^{-2z}\left(\frac{z^3}{z^3} + \frac{4}{z^2} + \frac{4}{z}\right).$$



PRZYKŁAD

Przykład 83:

Znaleźć transformatę funkcji

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } t < 0; \\ 1, & \text{jeśli } 0 \le t < 2; \\ -3, & \text{jeśli } 2 < t < 3; \\ t^2, & \text{jeśli } t \ge 3. \end{cases}$$

Korzystając z funkcji Heaviside'a oraz z równości $t^2 = (t-3)^2 + 6(t-3) + 9$, możemy funkcje f zapisać w postaci

$$f(t) = H(t) - 4H(t-2) + (3+t^2)H(t-3) =$$

$$= H(t) - 4H(t-2) + 12H(t-3) + 6(t-3)H(t-3) + (t-3)^2H(t-3).$$

Transformata Laplace'a ostatniej funkcji, zgodnie z powyższymi wzorami ma postać

$$\mathcal{L}(f(t))(z) = \frac{\frac{1}{z}}{-e^{-2z^{\frac{2}{z}}}} + e^{-3z\left(\frac{12}{z} + \frac{6}{z^{2}} + \frac{2}{z^{3}}\right)}.$$



Przykład 84: Transformata delty Diraca.

Niech δ oznacza δ -Diraca. Zgodnie z definicją δ i jej własnościami mamy

$$\mathcal{L}(\delta(t-t_0))(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \delta(t-t_0) dt = e^{-zt_0}.$$

W szczególności

$$\mathcal{L}(\delta)(z) = 1.$$

Zauważmy, że zgodnie z zależnością (308) dla n=1

$$\mathcal{L}(H'(t-t_0))(z) = z\mathcal{L}(H(t-t_0))(z) - H(0-t_0) = z = \frac{e^{-zt_0}}{z} = e^{-zt_0} = \mathcal{L}(\delta(t-t_0)).$$

Otrzymaliśmy zatem zależność

$$H'(t-t_0) = \delta(t-t_0).$$

Odwrotna transformata Laplace'a

Niech $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną taką, że $|f(x)| \le Me^{\alpha x}$. Niech a > 0. Można pokazać, że

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \to \infty} \int_{a-ib}^{a+ib} F(z)e^{zx} dz,$$

gdzie F jest transformatą Laplacea funkcji f.

→· DEFINICJA

Definicja 26: Transformaty odwrotnej.

Przekształcenie odwrotne \mathcal{L}^{-1} do \mathcal{L} dane jest wzorem

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)e^{zx}dz}{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)e^{zx}dz} = \frac{\frac{1}{2\pi i} \lim_{b \to \infty} \int_{a-ib}^{a+ib} F(z)e^{zx}dz}{\int_{a-ib}^{a+i\infty} F(z)e^{zx}dz}$$

Zauważmy, że przekształcenie odwrotne jest liniowe.



Przykład 85:

Znaleźć funkcje pierwotną, jeśli jej transformata

$$F(z) = \frac{3z+1}{z^2 + 2z + 10}.$$

Ponieważ

$$\frac{3z+1}{z^2+2z+10} = \frac{z+1}{3(z+1)^2+3^2} - \frac{2}{3} \frac{3}{(z+1)^2+3^2}.$$

korzystając z linowości transformaty odwrotnej, zależności 3 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a" i tabeli transformat Laplace'a otrzymamy

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F)(x) = 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{z+1}{(z+1)^2 + 3^2}\right) - \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{(z+1)^2 + 3^2}\right) =$$

$$= 3e^{-x}\cos 3x - \frac{2}{3}e^{-x}\sin 3x.$$



PRZYKŁAD

Przykład 86:

Znaleźć funkcje pierwotną, jeśli jej transformata

$$F(z) = \frac{1}{(z+2)^3(z+3)}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{(z+2)^3(z+3)} = \frac{1}{2!} \frac{2!}{(z+2)^3} - \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}$$

korzystając z linowości transformaty odwrotnej, zależności 3 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a" i tabeli transformat Laplace'a otrzymamy

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F)(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-2x} - xe^{-2x} + e^{-2x} - e^{-3x}.$$

Przykład 87:

Znaleźć funkcje pierwotną, jeśli jej transformata

$$F(z) = \frac{e^{-\pi z}}{z^2 + 4}.$$

Z zależności 4 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a" i tabeli transformat Laplace'a mamy

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F)(x) = \frac{\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(z^{2} + 4)(x - \pi)H(x - \pi) = \frac{\frac{1}{2}\sin(x - \pi)H(x - \pi) = -\frac{\frac{1}{2}\sin(x)H(x - \pi)}{\sin(x)H(x - \pi)}$$



Uwaga 34:

Zauważmy, że odwrotna transformacja Laplacea nie jest określona jako funkcja dla wielu nawet bardzo elemetarnych funkcji.

Jako prosty przykład rozważmy funkcje F(z) = 1.

Przypuśćmy że istnieje funkcja f taka, że $\mathcal{L}(f)(z)=1$. Na podstawie zależności 5 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a"

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z}.$$

Z drugiej strony wiadomo, że

$$\mathcal{L}(1)(z) = \frac{1}{z}$$

Ponieważ transformata Laplace'a $\,\mathcal{L}\,$ jest różnowartościowa, wynikałaby stąd równość

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = 1 \qquad \text{dla } t > 0,$$

co oczywiście jest niemożliwe. Zauważmy, że transformacja odwrotna z funkcji F(z)=1 jest dystrybucją, mianowicie jest to δ - Diraca.

Przekształcenie Laplace'a dystrybucji

Transformate Laplace'a określimy tylko dla pewnego podzbioru zbioru wszystkich dystrybucji. Mianowicie, oznaczmy przez $D_0^*(R)$ zbiór dystrybucji skończonego rzędu takich, że $T \in D_0^*(R)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja ciągła $g: R \to R$ taka, że T jest pochodną dystrybucyjną skończonego rzędu z funkcji g (tzn. $T = g^{(k)}$) a ponadto:

$$1^0$$
. $g(t) = 0$ dla $t < 0$;

 2^0 . g posiada transformatę Laplace'a.

→· DEFINICJA

Definicja 27:

Dla dystrybucji $T \in D_0^*(R)$, określamy transformatę Laplace'a wzorem

$$\mathcal{L}(T)(z) = z^k \mathcal{L}(g(t))(z),$$

gdzie g jest funkcją ciągłą taką, że $T = g^{(k)}$, a ponadto g(t) = 0 dla t < 0.

ghy)

TWIERDZENIE

Twierdzenie 21:

ZAŁOŻENIA:

Załóżmy, że funkcja $\,f\,$ posiada transformatę Laplace'a w sensie klasycznym .

TEZA:

Wtedy f posiada również transformatę Laplace'a w sensie dystrybucyjnym i transformaty te są sobie równe.

DOWÓD:

Niech $\mathit{F} = \mathcal{L}(\mathit{f})$ będzie transformatą Laplacea funkcji f w sensie klasycznym. Połóżmy

$$g(t) = \int_0^t f(s)ds.$$

Oczywiście g spełnia warunki 1^0 i 2^0 i ponadto $g^{'}=f$ prawie wszędzie. Zgodnie z zależnością 6 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a"

$$\mathcal{L}(g)(z) = \frac{\frac{1}{z}}{z}\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z}F(z).$$

Stąd $F(z) = z\mathcal{L}(g)(z)$.

Z drugiej strony, zgodnie z definicją 1, transformata z dystrybucji T_f (T_f -dystrybucja generowana przez funkcję f) wyraża się wzorem

$$\mathcal{L}(T_f)(z) = \mathcal{L}(T_{g'})(z) = z\mathcal{L}(g(t))(z) = z\mathcal{L}\left(\int_0^t f(s)ds\right)(z) = z^{\frac{1}{z}}F(z) = F(z),$$

co kończy dowód.

Wyznaczmy teraz ponownie (zob. przykład 7 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a") transformatę Laplace'a z dystrybucji δ korzystając z definicji 1.

Ponieważ δ jest dystrybucją 2-go rzędu $\delta = h^{''}$, gdzie

$$h(t) = \begin{cases} t, & t \ge 0; \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

więc zgodnie z definicją 1 mamy

$$\mathcal{L}(\delta(t))(z) = z^2 \mathcal{L}(h(t))(z) = z^2 z^{\frac{1}{2}} = 1$$

огах

$$\mathcal{L}\big(\delta(t-t_0)\big)(z) = z^2 \mathcal{L}(h(t-t_0))(z) = z^2 \frac{e^{-zt_0}}{z^2} = e^{-zt_0}.$$

Ponieważ $\delta^{(n)} = h^{(n+2)}$ zgodnie z definicją 1 mamy

$$\mathcal{L}(\delta^{(n)}(t))(z) = z^{n+2}\mathcal{L}(h(t))(z) = z^{n+2}z^{2} = z^{n},$$

огах

$$\mathcal{L}(\delta^{(n)}(t-t_0)(z) = z^{n+2}\mathcal{L}(h(t-t_0))(z) = z^{n+2} \frac{e^{-zt_0}}{z^2} = z^n e^{-zt_0}.$$

Podobnie, ponieważ $H(t-t_0) = h'(t-t_0)$, mamy

$$\mathcal{L}\big(H(t-t_0)\big)(z) = \mathcal{L}\big(h'(t-t_0)\big)(z) = z\mathcal{L}\big(h(t-t_0)\big)(z) = z \frac{e^{-zt_0}}{z^2} = \frac{e^{-zt_0}}{z}.$$

Zauważmy też, iż po sprawdzeniu, że zależność 5 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a" zachodzi dla pochodnych dystrybucyjnych, mamy następujący prosty rachunek

$$\mathcal{L}\big(H^{'}(t-t_{0})\big)(z) = z\mathcal{L}\big(H(t-t_{0})\big)(z) - H(-t_{0}) = z \frac{e^{-zt_{0}}}{z} = e^{-zt_{0}} = \mathcal{L}\big(\delta(t-t_{0})\big)(z).$$

Z ostatniej równości wynika natychmiast znana zależność

$$H'(t - t_0) = \delta(t - t_0).$$

Podobnie możemy pokazać, że

$$H^{(n)}(t-t_0) = \delta^{(n-1)}(t-t_0).$$

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a w teorii równań różniczkowych zwyczajnych

Wyprowadzenie 1:

Rozważmy nastepujący problem poczatkowy

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t),$$
(313)

$$y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1, \dots, \ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$
 (314)

gdzie a_i , i = 1,...,n i y_i , j = 0,...,n-1 są stałymi.

Niech Y(z) (odpowiednio F(z)) oznacza transformatę Laplace'a funkcji y(t) (odpowiednio f(t)).

Obkładając obustronie równanie (313) transformatą Laplace'a otrzymamy mastępyjące równanie algebraiczne

$$W(z) Y(z) + P(z) = F(z),$$
 (315)

gdzie $W(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ a P(z) -jest wielomianem którego współczynniki zależą od $y_0, ..., y_{n-1}$. Wyliczając z równania (315) Y(z) mamy

$$Y(z) = \frac{F(z) - P(z)}{W(z)}.$$

Następnie stosując transformatę odwrotną wyznaczamy rozwiązanie naszego problemu początkowego

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{F(z) - P(z)}{W(z)} \right).$$



Przykład 88:

Znaleźć rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$y'' + 4y = e^t$$
, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Połóżmy $Y = \mathcal{L}(y)$. Przy przyjętych warunkach początkowych

$$\mathcal{L}(y^{''}(t))(z) = z^2 Y(z).$$

Zatem obkładając transformacją Laplace'a obie strony równania mamy

$$z^{2}Y(z) + 4Y(z) = \frac{1}{z - 1}.$$

Stąd

$$Y(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4)} = \frac{1}{5} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{5} \frac{1}{z^2+4} - \frac{1}{5} \frac{z}{z^2+4},$$

a wracając do funkcji pierwotnej otrzymamy

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{1}{5}e^{t} - \frac{1}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\cos 2t.$$

Przykład 89:

Znaleźć rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$y' + 2y = 2H(t-2) + tH(t-3),$$
 $y(0) = 1.$

Połóżmy $Y = \mathcal{L}(y)$. Przy przyjętych warunkach początkowych

$$\mathcal{L}(y'(t))(z) = zY(z) - 1.$$

Obkładając transformacją Laplace'a obie strony równania wyjściowego i uwzględniając rowność

$$2H(t-2) + tH(t-3) = 2H(t-2) + 3H(t-3) + (t-3)H(t-3)$$

otrzymamy

$$zY(z) - 1 + 2Y(z) = \frac{2e^{-2z}}{z} + \frac{3e^{-3z}}{z} + \frac{e^{-3z}}{z^2}.$$

Stąd

$$Y(z) = \frac{1}{z+2} + e^{-2z} \frac{2}{z(z+2)} + e^{-3z} \frac{3}{z(z+2)} + e^{-3z} \frac{1}{z^2(z+2)} =$$

$$= \frac{1}{z+2} + e^{-2z} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}\right) + \frac{5}{4} e^{-3z} \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{5} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z+2}\right).$$

Ponieważ

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}\right) = 1 - e^{-2t}, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{5}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z+2}\right) = 1 + \frac{2}{5}t - e^{-2t},$$

po uwzlędnieniu własności 9 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a" otrzymamy

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-2t} + \left(1 - e^{4-2t}\right)H(t-2) + \frac{1}{4}\left(2t - 1 - 5e^{6-2t}\right)H(t-3).$$

Przykład 90:

Znaleźć rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$ty^{''} - ty^{'} + y = 2,$$
 $y(0) = 2, y'(0) = 1.$

Obkładamy transformatą Laplace'a obie strony powyższego równania

$$\mathcal{L}(ty'')(z) - \mathcal{L}(ty')(z) + \mathcal{L}(y)(z) = \mathcal{L}(2)$$

i uwzględniając, że

$$\mathcal{L}(ty')(z) = -\frac{\frac{d}{dz}}{\frac{d}{z}}\mathcal{L}(y')(z) = -\frac{\frac{d}{dz}}{\frac{d}{z}}(zY(z) - y(0)) = -zY'(z) - Y(z),$$

$$\mathcal{L}(ty'')(z) = -\frac{\frac{d}{dz}}{\frac{d}{z}}\mathcal{L}(y'')(z) = -\frac{\frac{d}{dz}}{\frac{d}{z}}(z^2Y(z) - zy(0) - y'(0)) = -z^2Y'(z) - 2zY(z) + 2$$

otrzymamy następujące równanie liniowe

$$Y'(z) + \frac{2}{z}Y(z) = \frac{2}{z^2}$$

którego rozwiązanie ma postać

$$Y(z) = \frac{\frac{2}{z}}{z} + \frac{\frac{C}{z^2}}{z^2}.$$

Stąd

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(z)) = 2\mathcal{L}^{-1}(z^{2}) + C\mathcal{L}^{-1}(z^{2}) = 2 + Ct.$$

Uwzględniając, że $y^{'}(0)=1$ otzymujemy rozwiązanie problemu początkowego y(t)=t+2.



Przykład 91:

Znaleźć rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$y'' - 2y' + 5y = 2\delta(t - 3),$$
 $y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Obkładając transformacją Laplace'a obie strony równania otrzymamy

$$(z^{2}Y(z) - 1) - 2(zY(z)) + 5Y(z) = 2e^{-3z}.$$

Stąd

$$Y(z) = \frac{1 + 2e^{-3z}}{z^2 - 2z + 5} = \frac{1 + 2e^{-3z}}{(z - 1)^2 + 4}$$

Ponieważ

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(z-1)^2+4}\right) = e^t \sin 2t, \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2e^{-3z}}{(z-1)^2+4}\right) = e^{t-3} \sin 2(t-3)H(t-3),$$

wracając do zmiennej wyjściowej mamy

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{1}{2}e^{t}\sin 2t + e^{t-3}\sin 2(t-3)H(t-3).$$



Przykład 92:

Znaleźć rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x'' + x + y = 0 \\ x' + y' = t \end{cases}$$
 (316)

spełniające warunki początkowe

$$x(0) = 0, \ x'(0) = 0, \ y(0) = 1.$$
 (317)

Połóżmy $X = \mathcal{L}(x)$ i $Y = \mathcal{L}(y)$. Obkładając transformacją Laplace'a równania (316) i uwzględniając warunki początkowe (317) otrzymamy

$$\begin{cases} z^{2}X(z) + X(z) + Y(z) = 0\\ \frac{1}{z^{2}} \end{cases}$$

$$zX(z) + zY(z) - 1 = \frac{1}{z^{2}}$$

Stąd

$$X(z) = -\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5}, \quad Y(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^5}.$$

Ponieważ

$$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{z}) = 1, \quad \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{z^3}) = \frac{1}{2}t^2, \quad \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{z^5}) = \frac{1}{24}t^4$$

więc

$$x(t) = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{24}t^4, \quad y(t) = 1 + t^2 + \frac{1}{24}t^4.$$

W poniższym przykładzie pokażemy jak postępować gdy warunek początkowy jest w punkcie $t_0 \neq 0$.



Przykład 93:

Wyznaczyć rozwiązanie problemu poczatkowego

$$y' - 2y = e^{2t - 2}, \quad y(1) = 1.$$
 (318)

Wykonujemy następujące podstawienie s = t - 1 i definiujemy nową funkcje u(s)

$$y(t) = y(s + 1) =: u(s) = u(t - 1).$$

Ponieważ y'(t) = u'(s), y(1) = u(0) = 1 więc równanie (318) w nowych zmiennych ma postać

$$u' - 2u = e^{2s}, \quad u(0) = 1.$$
 (319)

Połóżmy $U(z) = \mathcal{L}(u(s))(z)$. Obkładając transformacją Laplace'a obie strony równania (319) otrzymamy

$$zU(z) - u(0) - 2U(z) = \frac{1}{z - 2}.$$

Stąd

$$U(z) = \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z-2}.$$

Zatem

$$y(t) = u(s) = \mathcal{L}^{-1}(U(z)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(z-2)^2}) + \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{z-2}) = se^{2s} + e^{2s} = te^{2t-2}.$$



PRZYKŁAD

Przykład 94:

Wyznaczyć rozwiązanie problemu poczatkowego

$$y' + 3y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad t \ge 0,$$
 (320)

przy założeniu, że dla funkcji f(t) istnieje transformata Laplace'a.

Połóżmy $Y(z) = \mathcal{L}(y(t))(z), \ F(z) = \mathcal{L}(f(t))(z).$ Obkładając transformacją Laplace'a obie strony równania (320) otrzymamy

$$zY(z) - y(0) + 3Y(z) = F(z).$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$Y(z) = \frac{1}{z+3} + \frac{1}{z+3}F(z).$$

Biorąc po obu stronach powyższej równości odwrotne przekształcenie Laplace'a i uwzlędniając własności 8 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a" mamy

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z+3}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z+3}F(z)\right) = e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau.$$



Przykład 95:

Rozwiązać równanie różniczkowo całkowe

$$y' = \cos t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau$$
, $y(0) = 1$, $t \ge 0$. (321)

Połóżmy $Y(z) = \mathcal{L}(y(t))(z)$. Obkładając transformacją Laplace'a obie strony równania (321) i uwzględniając własności 8 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a" otrzymamy

$$zY(z) - y(0) = \frac{z}{1+z^2} + Y(z) \frac{z}{1+z^2}.$$

Rozwiązując powyższe równanie względem Y(z), otrzymujemy

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{z^3}}{z^3} + \frac{\frac{1}{z^2}}{z^2} + \frac{\frac{1}{z}}{z}.$$

Biorąc po obu stronach powyższej równości odwrotne przekształcenie Laplace'a mamy

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^{3}}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^{2}}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}t^{2} + t + 1.$$

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a w teorii równań różniczkowych cząstkowych

W module tym omówimy zastosowanie przekształcenia Laplace'a w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Niech u=u(x,t) będzie funkcją taką, że u(x,t)=0 dla t<0. Transformatę Laplace'a funkcji u względem zmiennej t określamy wzorem

$$\mathcal{L}(u(x,t))(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} u(x,t) dt.$$

Powyższa transformacja zależna jest od parametru x. Ze względów praktycznych przyjmiemy oznaczenie

$$\mathcal{L}\big(u(x,t)\big)(z)=U(x,z).$$

Zobaczymy teraz, że transformacja ta może być użyteczna przy rozwiązywaniu równań różniczkowych cząstkowych.

Przykład 96:

Rozpatrzmy równanie

$$u_t + u_x = 0, \qquad x > 0, \ t > 0$$

z warunkiem początkowym

$$u(x,0) = \sin x, \qquad x > 0$$

oraz warunkiem brzegowym

$$u(0,t) = 0. \qquad t > 0$$

Obkładając równanie transformatą Laplace'a względem zmiennej t, po uwzględnieniu warunku początkowego, otrzymamy

$$zU(x,z) - \sin x + \frac{\partial U}{\partial x}(x,z) = 0,$$

a uwzględniając warunek brzegowy mamy

$$U(0,z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} u(0,t) dt = 0.$$

Rozwiązaniem problemu początkowego

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,z) + zU(x,z) - \sin x = 0, \qquad U(0,z) = 0$$

jest funkcja

$$U(x,z) = \frac{z\sin x - \cos x + e^{-zx}}{1 + z^2}.$$

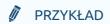
Wykorzystując tabele transformat Laplace'a oraz własność 9 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a" , otrzymamy oryginał

$$u(x,t) = \sin x \cdot \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{z}{1+z^2} \right) - \cos x \cdot \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1+z^2}{1+z^2} \right) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-zx}}{1+z^2} \right) =$$

$$= \sin x \cos t - \cos x \sin t + H(t-x)\sin(t-x) =$$

$$= \sin(x-t) + H(t-x)\sin(t-x),$$

który jest szukanym rozwiązaniem równania wyjściowego.



Przykład 97:

Rozpatrzmy równanie

$$u_t = k u_{xx}, \qquad 0 < x < +\infty, \ t > 0, \ (k > 0)$$

z warunkiem początkowym

$$u(x,0) = 0, \qquad x > 0,$$

oraz warunkiem brzegowym

$$u(0,t) = f(t), \qquad t > 0.$$

Biorąc transformate Laplace'a względem zmiennej t z obu stron równania dostajemy

$$zU(x,z) = kU_{xx}(x,z).$$

Rozwiązanie ogólne ostatniego równania ma postać

$$U(x,z) = A(z)e^{\sqrt{z/k}x} + B(z)e^{-\sqrt{z/k}x}.$$

Ponieważ - zgodnie z uwagą 3 z modułu "Definicja przekształcenia Laplace'a" - transformata Laplacea jest w nieskończoności ograniczona, więc $A(z) \equiv 0$. Zatem

$$U(x,z) = B(z)e^{-\sqrt{z/kx}}.$$

Ponieważ

$$U(0,z) = \mathcal{L}(u(0,t))(z) = \mathcal{L}(f(t))(z) = F(z),$$

zatem B(z) = F(z) i w konsekwencji

$$U(x,z) = F(z)e^{-\sqrt{z/kx}}.$$

Wykorzystując twierdzenie 2 oraz uwagę 1 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a" otrzymamy

$$u(x,t) = f(t) * \mathcal{L}^{-1}(e^{-\sqrt{z/k}x}) = f(t) * \left(\frac{x}{\sqrt{4k\pi t^3}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right) = \frac{x}{\sqrt{4k\pi}} \int_0^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}} d\tau.$$

Przykład 98:

Rozpatrzmy równanie

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$
 $0 < x < +\infty, \ t > 0, \ (a > 0)$

z warunkami początkowymi:

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \qquad x > 0,$$

warunkiem brzegowym

$$u(0,t) = f(t), \qquad t > 0$$

oraz warunkiem granicznym

$$\lim_{x \to +\infty} u(x,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Obkładając transformatą Laplace'a względem zmiennej t równanie wyjściowe oraz warunek brzegowy, po uwzględnieniu warunku początkowego, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{z^2}{a^2} U = 0,, \qquad U(0, z) = F(z),$$

gdzie $\,F\,$ jest transformatą funkcji $\,f.\,$ Natomiast obkładając transformatą Laplace'a warunek graniczny mamy

$$\lim_{x \to +\infty} U(x, z) = 0 \qquad \text{dla } \operatorname{Re} z > 0.$$

Rozwiązanie ogólne uzyskanego równania ma postać

$$U = A(z)e^{-\frac{zx}{a}} + B(z)e^{\frac{zx}{a}}.$$

Ponieważ Re z > 0 oraz a > 0, z warunku granicznego wnosimy, że B(z) = 0, a po uwzględnieniu warunku U(0,z) = F(z), otrzymamy ostatecznie

$$U(x,z) = F(z)e^{-\frac{zx}{a}}.$$

Wracając teraz do zmiennych wyjściowych mamy

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left(U(x,z)\right) = f\left(t - \frac{\frac{x}{a}}{a}\right)H\left(t - \frac{\frac{x}{a}}{a}\right)$$



Przykład 99:

Rozpatrzmy równanie

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t),$$
 $0 < x < +\infty, t > 0, (a > 0)$

z warunkami początkowymi

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x > 0$$

oraz warunkiem brzegowym

$$u(0,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Stosując transformatę Laplace'a do równania wyjściowego względem zmiennej t, po uwzględnieniu warunków początkowych, dostajemy równanie

$$-a^2U_{xx} + z^2U = F(z),$$

którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$U(x,z) = A(z)e^{-zx/a} + B(z)e^{zx/a} + F(z)/z^{2}.$$

Ponieważ transformata Laplace'a jest ograniczona w nieskończoności, a współczynnik a > 0, więc B(z) = 0. W konsekwencji

$$U(x,z) = A(z)e^{-zx/a} + F(z)/z^2.$$

Z warunku brzegowego wynika, że

$$0 = U(0, z) = A(z) + F(z)/z^{2}.$$

Zatem

$$A(z) = -F(z)/z^2.$$

Ostatecznie rozwiązanie przyjmuje postać

$$U(x,z) = (1 - e^{-zx/a})F(z)/z^2$$
.

Korzystając z twierdzenie 2 oraz uwagi 1 z modułu "Podstawowe własności transformaty Laplace'a" otrzymamy

$$u(x,t) = f(t) * \mathcal{L}^{-1}\left((1 - e^{-zx/a})z^{-2}\right) = f(t) * \left(t - (t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a})\right) = \int_{0}^{t} f(t - \tau)\left(\tau - (\tau - \frac{x}{a})H(\tau - \frac{x}{a})\right)d\tau$$

Rozdział 10. Przekształcenie Fouriera

Definicja i podstawowe własności transformaty Fouriera

Niech $f: R \to C$ będzie funkcją taką, że |f| jest całkowalna na R, tzn. $f \in L^1(R)$ (Czytelnik nieobeznany z funkcjami o wartościach zespolonych może przyjąć, że f jest funkcją o wartościach rzeczywistych, czyli $f: R \to R$).

Definicja 28:

Dla danej funkcji $f \in L^1(R)$, funkcje $\hat{f}: R \to C$ daną wzorem

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-xyi} f(x) dx$$
 (322)

nazywamy transformatą Fouriera funkcji f i oznaczamy symbolem $\mathcal{F}(f)$. Odwzorowanie \mathcal{F} przyporządkujące funkcji f jej transformatę nazywamy przekształceniem (transformacją) Fouriera.

∵©: UWAGA

Uwaga 35:

Można pokazać (dowód pomijamy), że jeśli f i \hat{f} są całkowalne, to

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{xyi\hat{f}}(y)dy$$
 (323)

prawie wszędzie. Odwzorowanie określone prawą stroną wzoru (323) oznaczamy symbolem \mathcal{F}^{-1} i nazywamy przekztałceniem odwrotnym (transformacją odwrotną) Fouriera, a funkcję $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$ nazywamy transformatą odwrotną.

Ponieważ $|e^{ixy}| = |e^{-ixy}| = 1$, przekształcenia (322) i (323) są dobrze określone dla dowolnych całkowalnych funkcji f i \hat{f} . Należy zaznaczyć, że używanie terminu **transformacja odwrotna** jest tutaj pewnym nadużyciem, bowiem nie każda tranformata funkcji z $L^1(\mathbb{R})$ jest funkcją całkowalną, nie dla każdej więc transformaty jest określone przekształcenie (323). Formalnie, aby móc mówić o przekształceniu odwrotnym, należałoby przekztałcenie $\mathcal F$ zawęzić do podzbioru na którym jest odwracalne.

Korzystając ze wzoru Eulera

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

przekształcenie (322), w przypadku gdy f jest funkcją o wartościach rzeczywistych, możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \cos(xy) f(x) dx - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sin(xy) f(x) dx$$

→·◆ DEFINICJA

Definicja 29:

Dla funkcji $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (w szczególności $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) transformatę Fouriera oraz transformatę odwrotną do transformaty Fouriera określamy wzorami:

$$\hat{f}(y_1, ..., y_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x \cdot y} f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n$$

oraz

$$f(x_1,...,x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{x \cdot y \cdot \hat{f}} (y_1,...,y_n) dy_1...dy_n,$$

gdzie $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.



Uwaga 36:

Wielu autorów transformatę Fouriera funkcji $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określa wzorem

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x \cdot y} i f(x) dx.$$

Wówczas transformata odwrotna ma postać

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{x \cdot y i \hat{f}}(y) dy.$$



∵©: UWAGA

Uwaga 37:

Niech $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wówczas $\hat{f} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Istotnie

$$\begin{split} \|\hat{f}\|_{\infty} &= \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}(y)| = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left| (\sqrt{2\pi})^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{x \cdot yi} f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left(\sqrt{2\pi} \right)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \left(\sqrt{2\pi} \right)^{-n} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \end{split}$$

Przedstawimy teraz podstawowe własności transformaty Fouriera.

Załóżmy, że transformata Fouriera z rozważanych funkcji istnieje. Zgodnie z przyjętą powyżej konwencją niech \hat{f} oznacza transformatę Fouriera funkcji f, tzn. $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$. Podobnie, jak w przypadku przekształcenia Laplace'a, aby móc zapisac operacje na argumentach funkcji f, będziemy używać zapisu $\mathcal{F}(f(x))$ w miejsce $\mathcal{F}(f)$.

Wymienimy teraz podstawowe własności przekształcenia Fouriera. Dla uproszczenia zapisu ograniczymy się do przypadku

√ WŁASNOŚĆ

Własność 5:

(i)
$$\mathcal{F}(f(ax))(y) = \frac{1}{|a|} \hat{f}(\frac{y}{a});$$

(ii) $\mathcal{F}(f(-x))(y) = \mathcal{F}(f(x))(-y) = \frac{\mathcal{F}(f(x))(y)}{z}$, (z oznacza liczbę sprzężoną do z;)

- (iii) $\mathcal{F}(f(x-a))(y) = e^{-iay\hat{f}}(y);$
- (iv) $\mathcal{F}(e^{bxi}f(x))(y) = \hat{f}(y-b);$
- **(v)** $\mathcal{F}(f^{(k)}(x))(y) = (iy)^{k\hat{f}}(y);$
- (vi) $\mathcal{F}((-ix)^k f(x))(y) = \hat{f}^{(k)}(y)$
- (vii) $\mathcal{F}((f \star g)(x))(y) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(y)\hat{g}(y).$

Ad. (i). Niech a > 0 (dla a < 0 argument jest analogiczny). Stosując podstawienie z = ax otrzymamy

$$\mathcal{F}(f(ax))(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^e} e^{-xyi} f(ax) dx = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^e} e^{-\frac{y}{z^a}} i f(z) dz = \frac{1}{a} \hat{f}(\frac{y}{a}).$$

Nietrudno sprawdzić, że jeśli $x \in \mathbb{R}^n$, to własność (i) przyjmuje postać:

(i').
$$\mathcal{F}(f(ax))(y) = \frac{1}{|a|^n} \hat{f}(\frac{y}{a})$$

Ad. (ii). Pierwsza równość wynika natychmiast z własności (i). Dalej

$$\mathcal{F}(f)(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x(-y)} if(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{xyi} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-xyi} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-xyi} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-xyi} f(x) dx = \mathcal{F}(f)(y).$$

Ad. (iii). Stosując podstawienie z = x - a otrzymamy

$$\mathcal{F}(f(x-a))(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-xyi} f(x-a) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(z+a)yi} f(z) dz =$$
$$e^{-ayi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-zyi} f(z) dz = e^{-iay} \hat{f}(y).$$

Ad. (iv). Wykorzystując wzór (322) mamy

$$\mathcal{F}(e^{bxi}f(x))(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-xyi}e^{xbi}f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y-b)xi}f(x)dx = \hat{f}(y-b).$$

Ad. (v). Sprawdźmy najpierw wzór (v) dla k = 1.

$$\mathcal{F}(f(x))(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-xyi} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(x)e^{-xyi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + iy \int_{\mathbb{R}} e^{-xyi} f(x) dx \right) = \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-xyi} f(x) dx = iy \hat{f}(y).$$

Metodą indukcji matematycznej nietrudno sprawdzić, że własność (v) zachodzi dla dowolnego k.

Ad. (vi). Różniczkując względem y równość (322) otrzymamy

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} (-ix) f(x) dx,$$

co oznacza, że

$$\mathcal{F}(-ixf(x))(y) = \hat{f}'(y).$$

Wykorzystując metodę indukcji matematycznej nietrudno sprawdzić, że własność (vi) zachodzi dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

Ad. (vii). Korzystając z definicji 28 oraz definicji splotu funkcji mamy

$$\mathcal{F}((f \star g)(x))(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[e^{-ixy} \int_{\mathbb{R}} f(x - \tau) g(\tau) d\tau \right] dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\tau} g(\tau) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iy(x - \tau)} f(x - \tau) dx \right] d\tau =$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\tau} g(\tau) \hat{f}(y) d\tau = \sqrt{2\pi} \hat{f}(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\tau} g(\tau) d\tau =$$

$$\sqrt{2\pi} \hat{f}(y) \hat{g}(y).$$

Przykłady transformaty Fouriera

Przed przystąpieniem do wyznaczenia transformacji Fouriera konkretnych funkcji, przypomnimy niektóre wzory całkowe. Zauważmy najpierw, że ze wzoru Eulera

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

wynikają natychmiast następujące przedstawienia funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \qquad \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$
(324)

Korzystając ze wzoru Cauchy'ego na obliczanie całek za pomocą rachunku reziduów

$$\sum_{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i^{\operatorname{Re} z_j > 0} \operatorname{Res}(f, z_j) + \pi i^{\operatorname{Re} z_j = 0} \operatorname{Res}(f, z_j),$$
(325)

gdzie z_j są biegunami funkcji f, a symbol Res (f, z_j) oznacza wartość reziduum funkcji f w punkcie z_j , nietrudno pokazać, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \pi i \operatorname{sgn} \alpha.$$
(326)

Istotnie, rozważmy funkcje $f(z)=e^{i\alpha z}/z$. Funkcja ta posiada dokładnie jeden biegun w punkcie z=0, a Res (f,0)=1. Przyjmijmy najpierw, że $\alpha>0$. Zgodnie ze wzorem (325)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \pi i.$$

Załóżmy teraz, że $\alpha < 0$. Stosując podstawienie t = -x otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i|\alpha|x}}{x} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i|\alpha|t}}{t} dt = -\pi i.$$

Oczywiście dla $\alpha = 0$ całka jest równa zeru (przypomnijmy, że przez całkę rozumiemy tu tzw. wartość główną całki). Zatem wzór (326) został pokazany.

Z zależności (324), (325) i (326) wynika natychmiast, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \pi \operatorname{sgn} \alpha.$$
(327)

Pokażemy jeszcze, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\alpha|}.$$
(328)

Istotnie, rozważmy funkcje $f(z)=e^{i\alpha z}/(1+z^2)$. Funkcja ta posiada dwa bieguny pierwszego rzędu w punktach z=-i oraz z=i. Łatwo sprawdzić, że $\mathrm{Res}(f,i)=e^{-\alpha}/2i$. Załóżmy najpierw, że $\alpha>0$. Zgodnie z wzorem (325)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2} dx = 2\pi i \frac{e^{-\alpha}}{2i} = \pi e^{-\alpha}.$$

Podobnie jak poprzednio można sprawdzić, że dla $\alpha < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i|\alpha|x}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|\alpha|}.$$

Ponieważ dla $\alpha=0$ równość (328) jest oczywista, dowód został zakończony.

Analogicznie można pokazać, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i\alpha x}}{1+x^2} dx = \pi i e^{-|\alpha|} \operatorname{sgn} \alpha.$$
(329)



PRZYKŁAD

Przykład 100:

Znaleźć transformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } |x| \le a \\ 0, & \text{jeśli } |x| > a. \end{cases}$$

Istotnie, wykorzystując wzór (324) otrzymamy

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ixy} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{iy} e^{-ixy} \Big|_{-a}^{a} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{iy} \left(e^{-iya} - e^{iya} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}y} \frac{e^{iya} - e^{-iya}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ay)}{y}.$$



Przykład 101:

Znaleźć transformatę Fouriera funkcji f(x) = 1/x.

Zgodnie ze wzorem (326)

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixy}}{x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\pi \operatorname{sgn}(-y) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} i\operatorname{sgn}y.$$



PRZYKŁAD

Przykład 102:

Znaleźć transformatę Fouriera funkcji $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$.

Zgodnie ze wzorem (328)

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi e^{-|y|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|y|}.$$



PRZYKŁAD

Przykład 103:

Podobnie, korzystając ze wzoru (329) można pokazać, że transformata Fouriera z funkcji

$$g(x) = x(1+x^2)^{-1}$$
 wynosi

$$\hat{g}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|y|} \operatorname{sgn} y i.$$



UWAGA

Uwaga 38:

Często bezpośrednie wyznaczenie transformaty Fouriera wymaga dość delikatnych obliczeń, natomiast wyznacznie transformaty odwrotnej jest znacznie łatwiejsze. W takich sytuacjach ograniczymy się tylko do sprawdzenie, że odwrotna transformata Fouriera z zaproponowanego obrazu daje funkcje wyjściową.

Przykład 104:

Znaleźć transformatę Fouriera funkcji Heaviside'a

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x < 0; \\ 1/2, & \text{jeśli } x = 0; \\ 1, & \text{jeśli } x > 0. \end{cases}$$

Pokażemy, że

$$\hat{H}_{(y)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{iy}.$$

Istotnie, zgodnie z wzorem na przekształcenie odwrotne oraz zbieżność (326) mamy

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{H}(y))(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{iy} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \delta dy + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixy}}{y} dy =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \pi i \operatorname{sgn} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x = H(x),$$

gdzie

$$sgn(x) = \begin{cases} -1, & \text{jeśli } x < 0; \\ 0, & \text{jeśli } x = 0; \\ 1, & \text{jeśli } x > 0. \end{cases}$$

PRZYKŁAD

Przykład 105:

Znaleźć transformatę Fouriera funkcji f(x) = 1.

Korzystając z równości 1 = H(x) + H(-x), liniowości transformacji Fouriera, poprzedniego przykładu oraz własności (i) z modułu 5 otrzymamy

$$\begin{split} \mathcal{F}(1)(y) &= \mathcal{F}\big(H(x)\big)(y) + \mathcal{F}\big(H(-x)\big)(y) = \\ &= \Big(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\delta + \sqrt{2\pi}} \frac{1}{iy}\Big) + \Big(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\delta - \sqrt{2\pi}} \frac{1}{iy}\Big) = \sqrt{2\pi} \delta. \end{split}$$

Przykład 106:

Znaleźć transformatę Fouriera funkcji $f(x) = e^{axi}$.

Korzystając z własności (iv) z modułu 5 oraz przykładu 105 otrzymamy

$$\mathcal{F}(e^{axi}1_X(x))(y) = \sqrt{2\pi}\,\delta(y-a).$$

W szczególności

$$\mathcal{F}(e^{ix})(y) = \sqrt{2\pi}\delta(y-1), \qquad \mathcal{F}(e^{-ix})(y) = \sqrt{2\pi}\delta(y+1).$$

Stąd i (324) otrzymamy

$$\mathcal{F}(\sin x)(y) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) = \frac{1}{2i} \left(\sqrt{2\pi}\delta(y-1) - \sqrt{2\pi}\delta(y+1)\right) =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}i\left(\delta(y+1) - \delta(y-1)\right).$$

Podobnie można sprawdzić, że

$$\mathcal{F}(\cos x)(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Big(\delta(y+1) + \delta(y-1) \Big).$$

Dalsze własności transformaty Fouriera



PRZYKŁAD

Przykład 107:

Znaleźć transformatę Fouriera gęstości rozkładu Gaussa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma}}.$$

Różniczkując funkcje $\,f\,$ mamy

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \left(-\frac{2x}{4\sigma} \right) e^{-\frac{x^2}{4\sigma}} = -\frac{1}{2\sigma} x f(x).$$

Obkładając obie strony transformacją Fouriera i wykorzystując własności (v) i (vi) transformaty Fouriera z modułu 5:

$$\mathcal{F}\big(f(x)\big)(y)=iy\hat{f}(y),\qquad \mathcal{F}\big(xf(x)\big)(y)=i\hat{f}'(y),$$

otrzymamy

$$iy\hat{f}(y) = -\frac{\frac{1}{2\sigma}}{i}\hat{f}'(y).$$

Stąd

$$\hat{f}'(y) = -2\sigma y \hat{f}(y).$$

Rozwiązując ostatnie równanie różniczkowe otrzymamy

$$\hat{f}(y) = Ce^{-\sigma y^2}.$$

Stąd i wzoru 1 z modułu (322) dostajemy

$$C = \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma}} dx.$$

Podstawiając do całki po prawej stronie $\tau = x/(2\sqrt{\sigma})$ otrzymamy

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \frac{1}{2\sqrt{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1.$$

Zatem

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma}}e^{-\frac{x^2}{4\sigma}}\right)(y) = e^{-\sigma y^2}.$$
(330)

Z (1) i własności (i) z modułu 5 uwzględniając podstawienie $t=\frac{x}{2\sigma}$ otrzymamy

$$e^{-\sigma y^2} = \sqrt{2\sigma} \mathcal{F}(e^{-\sigma t^2})(2\sigma y).$$

Stąd po podstawieniu

$$y = \frac{z}{2\sigma}$$

dostaniemy

$$\mathcal{F}(e^{-\sigma t^2})(z) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma}}.$$
(331)



TWIERDZENIE

Twierdzenie 22: Plancherel

ZAŁOŻENIA:

Niech $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

TEZA:

Wówczas $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ i ponadto

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

DOWÓD:

Zauważmy najpierw, że dla $f,g \in L^1(\mathbb{R}),$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx.$$
(332)

Istotnie, na mocy twierdzenia Tonelli i twierdzenia Fubiniego mamy

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} g(y) dy \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) g(y) dx dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) g(y) dy.$$

Dla $\varepsilon > 0$ połóżmy

$$f_{\varepsilon}(x) = e^{-\varepsilon x^2}$$
.

Zgodnie z wzorem (331)

$$\hat{f}_{\varepsilon}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon}}.$$

Podstawiając do wzoru (332) funkcje $\,f_{\varepsilon}\,$ w miejsce $\,f\,$ otrzymamy

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x^2 \hat{g}(x) dx} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} dx.$$
(333)

Połóżmy teraz

$$h(x) = f(-x)$$

oraz

$$g = f * h$$
.

Na mocy własności (vii) z modułu 5

$$\hat{g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{h},$$

a na mocy własności (i), (ii) z modułu ${f 5}$ oraz definicji funkcji ${\it h}$

$$\hat{h}(y) = \hat{f}(-y) = \hat{f}(y).$$

Stąd

$$\hat{g} = \sqrt{2\pi} \hat{f}^{\hat{f}} = \sqrt{2\pi} |\hat{f}|^2.$$
 (334)

Podstawiając $x=2\sqrt{\varepsilon}t$ do całki po prawej stronie wzoru (333) otrzymamy

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ex^2} \hat{g}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} 2\sqrt{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} g(2\sqrt{\varepsilon t}) e^{-t^2} dt = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} g(0) e^{-t^2} dt + \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \left(g(2\sqrt{\varepsilon t}) - g(0)\right) e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi} g(0) + \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \left(g(2\sqrt{\varepsilon t}) - g(0)\right) e^{-t^2} dt.$$

Ponieważ g jest funkcją ciągłą, przechodząc z ε do zera dostajemy równość

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x) dx = \sqrt{2\pi} g(0).$$

Wynika stąd, że funkcja \hat{g} jest całkowalna, a w konsekwencji wobec (334), $\hat{f} \in L^2(\mathbf{R})$.

Uwzględniając następnie w ostatniej równości relacje (334) mamy

$$\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2 dx = \sqrt{2\pi} g(0).$$

Zatem

$$\begin{split} \|\hat{f}\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2 dy = g(0) = (f*h)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(0-x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2}^2, \end{split}$$

co kończy dowód.



Uwaga 39:

Twierdzenie Plancherel jest prawdziwe jeśli w miejsce $\, \, {\bf R} \,$ wstawimy $\, {\bf R}^n \,$. Dowód biegnie analogicznie.

Rozważania o podstawowych własnościach przekształcenia Fouriera zakończymy twierdzeniem dotyczącym istnienia przekształcenia odwrotnego. W tym celu jest nam potrzebny natępujący lemat.



LEMAT

Lemat 7:

Niech $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ będzie takie, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, dx = 1.$$

Dla $\varepsilon > 0$ połóżmy

$$g_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n} g(x/\varepsilon).$$
 (335)

Wówczas dla dowolnej ciągłej i ograniczonej funkcji $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ zachodzi wzór

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{(g_{\varepsilon} * f)(x) = \varepsilon \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} g_{\varepsilon}(x - y) f(y) dy = f(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dowód. Stosując podstawienie $u=(x-y)/\varepsilon$ a następnie korzystając z twierdzenia Lebesgue'a o przejściu granicznym pod całką otrzymamy

$$\begin{split} \lim_{\varepsilon \to 0} & \lim_{R^n g_{\varepsilon}(x-y) f(y) dy} = \lim_{\varepsilon \to 0} & \lim_{R^n \varepsilon^{-n} g((x-y)/\varepsilon) f(y) dy} = \lim_{\varepsilon \to 0} & \lim_{R^n g(u) f(x-\varepsilon u) du} = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n g(u) f(x) du} = f(x). \end{split}$$

Twierdzenie 23:

ZAŁOŻENIA:

Niech $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją ograniczoną ciągłą i taką, że jej transformata $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

TEZA:

Wówczas

$$f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{x \cdot y \hat{i}} \hat{f}(y) dy$$
 (336)

DOWÓD:

Załóżmy, że funkcja $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ jest wybrane zgodnie z lematem 7, ponadto jest ciągła i spełnia warunek (336) (tzn. $\mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) = g$.) Zauważmy, że zbiór takich funkcji jest niepusty. Na przykład należy do nich funkcja

$$g(x) = e^{-(|x_1| + \dots + |x_n|)}.$$

Dla $\, arepsilon > 0 \,$ niech $\, g_{arepsilon} \,$ będzie dane wzorem (335). Korzystając z własności (i) z modułu 5 nietrudno sprawdzić, że

$$\hat{g}_{\varepsilon}(y) = \hat{g}(\varepsilon y).$$

Zauważmy ponadto, że

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\hat{g}_{\varepsilon}(y) = \varepsilon \to 0} \lim_{\hat{g}(\varepsilon y) = \hat{g}(0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(|x_1| + \dots + |x_n|)} dx_1 \dots dx_n = 1/(\sqrt{2\pi})^n.$$

Wykorzystując kolejno ostatni związek, twierdzenie Lebesgue'a o przejściu granicznym, twierdzenie Tonelliego i twierdzenie Fubiniego, definicje 2 z modułu 29 oraz lemat 7 otrzymamy

$$\begin{split} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{x \cdot y \, i} \hat{f}(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{x \cdot y \, i} \hat{g}(0) \hat{f}(y) dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{x \cdot y \, i} \hat{g}_{\varepsilon}(y) \hat{f}(y) dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{x \cdot y \, i} \hat{g}_{\varepsilon}(y) \left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y \cdot u \, i} f(u) du \right) dy = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{y \cdot (x - u) \, i} \hat{g}_{\varepsilon}(y) dy \right) du \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(u) g_{\varepsilon}(x - u) du = f(x). \end{split}$$

Przekształcenie Fouriera dystrybucji wolno rosnących

W module policzyliśmy transformacje Fouriera z δ wykorzystując własność całkową dystrybucji δ , chociaż wcześniej przekstałcenie Fouriera dla dystrybucji nie zostało zdefiniowane. Aby poprawnie sformułować uzyskane tam rezultaty, w niniejszym paragrafie podamy definicje przekształcenia Fouriera na zbiorze dystrybucji wolno rosnących. Przypomnijmy, że δ

jest dystrybucją wolno rosnącą. W celu zapoznania się z dalszymi uogólnieniami przekształcenia Fouriera dla dystrybucji, w szczególności z definicją przekształcenia Fouriera dla dowolnych dystrybucji z $D^*(\mathbb{R}^n)$, odsyłamy Czytelnika do opracowań monograficznych.

Niech $S(R^n)$ oznacza przestrzeń funkcji szybko malejących (zob. definicja 1 z modułu 18). Pokażemy, że transformacja Fouriera przeprowadza przestrzeń $S(R^n)$ w siebie, ponadto jest przekształceniem ciągłym, tzn. jeśli ciąg elementów $\{\varphi_k\}$ z przestrzeni $S(R^n)$ jest zbieżny do elementu $\varphi \in S(R^n)$ w sensie zbieżności w przestrzeni $S(R^n)$, to ciąg $\{\hat{\varphi}_k\}$ jest zbieżny do $\hat{\varphi}$ w sensie tej samej zbieżności.



TWIERDZENIE

Twierdzenie 24:

ZAŁOŻENIA:

Niech $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

TEZA:

When $\hat{\varphi} = \mathcal{F}(\varphi) \in S(\mathbb{R}^n)$.

DOWÓD:

Dla uproszczenia zapisu dowód poprowadzimy dla n=1 (dla n>1 rozumowanie jest analogiczne). Niech $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Oczywście transformata Fouriera

$$\hat{\varphi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-xyi} \varphi(x) dx$$

jest dobrze określona, ponadto posiada pochodą dowolnego rzędu k, która wyraża się wzorem

$$\hat{\varphi}^{(k)}(y) = (-i)^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-xyi} x^k \varphi(x) dx.$$

Niech $m \in \mathbb{N}$. Na mocy własności (v) i (vi) z modułu 5 mamy

$$\begin{split} (iy)^{m\hat{\varphi}^{(k)}}(y) &= (iy)^{m}\mathcal{F}\Big((-ix)^{k}\varphi(x)\Big)(y) = (-i)^{k}(iy)^{m}\mathcal{F}\Big(x^{k}\varphi(x)\Big)(y) = \\ &= (-i)^{k}\mathcal{F}\Big(\frac{d^{m}}{dx^{m}}\big(x^{k}\varphi(x)\big)\big)(y) = \\ &= \sum_{m=1}^{m} {m \choose j}\mathcal{F}\Big((x^{k})^{(j)}(\varphi)^{(m-j)}(x)\Big)(y) = \\ &= \sum_{m=1}^{m} {m \choose j}\mathcal{F}\Big(x^{k})^{(j)}(\varphi)^{(m-j)}(x)\mathcal{F}\Big(x^{k})^{(j)}(\varphi)^{(m-j)}(x)dx. \end{split}$$



Uwaga 40:

Używając podobnych argumentów można pokazać, że jeśli ciąg elementów $\{\varphi_k\}$ z przestrzeni $S(\mathbf{R}^n)$ jest zbieżny do zera w $S(\mathbf{R}^n)$, to ciąg w $\{\hat{\varphi}_k = \mathcal{F}(\varphi_k)\}$, jest również zbieżny do zera w $S(\mathbf{R}^n)$. Ponieważ przekształcenie Fouriera jest liniowe, wynika stąd natychmiast, że jest ono przekształceniem ciągłym przestrzeni $S(\mathbf{R}^n)$ w siebie.

→· DEFINICJA

Definicja 30:

Niech $T \in S^*(\mathbb{R}^n)$, tzn. T jest dystrybucją wolno rosnącą. Rozważmy funkcjonał $\hat{T}: S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle. \tag{337}$$

Na mocy twierdzenia 24 odwzorowanie \hat{T} jest dobrze określone. Oczywiście jest to funkcjonał liniowy. Z uwagi 40 wynika natychmiast, że \hat{T} jest funkcjonałem ciągłym na $S(\mathbb{R}^n)$. Jest zatem dystrybucją wolno rosnąca. Dystrybucje tę będziemy nazywać **transformatą Fouriera dystrybucji** T, a odwzorowanie które dystrybucji T przyporządkowuje dystrybucje \hat{T} zgodnie ze wzorem (337), **przekształceniem Fouriera dystrybucji wolno rosnących**.

Jeśli T jest dystrybucją regularną, tzn. $T = T_f$, gdzie f jest funkcją całkowalną, to

$$\begin{split} \langle \hat{T}_{f}, \varphi \rangle &= \langle T_{f}, \hat{\varphi} \rangle = \left\langle T_{f}, \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n}} \int_{\mathbb{R}^{n}} e^{-x \cdot y i} \varphi(x) dx \right\rangle = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n}} \int_{\mathbb{R}^{n}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^{n}} e^{-x \cdot y i} \varphi(x) dx \right) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n}} \varphi(x) \left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n}} \int_{\mathbb{R}^{n}} e^{-x \cdot y i} f(y) dy \right) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n}} \hat{f}(x) \varphi(x) dx = \langle T_{f}, \varphi \rangle. \end{split}$$

Wynika stąd, że $\hat{T}_f = T_f$, co oznacza, że przekształcenie Fouriera na zbiorze regularnych dystrybucji temperowanych pokrywa się z klasycznym przekształceniem Fouriera na przestrzeni $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Moduł ten zakończymy wyznaczeniem transformaty Fouriera dystrybucji δ . Zgodnie ze wzorem (337)

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \left\langle \delta, \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^{n}} e^{-x \cdot y i} \varphi(x) dx \right\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^{n}} \varphi(x) dx = \left\langle \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}, \varphi \right\rangle,$$

skąd wynika, że $\hat{\delta}=(\sqrt{2\pi})^{-n}$. W szczgólności, w przypadku gdy $n=1, \quad \hat{\delta}=1/\sqrt{2\pi}$.

Zastosowania przekształcenia Fouriera



Przykład 108:

Znaleźć rozwiązanie problemu

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$
 (338)

Połóżmy

$$U(y,t) = \mathcal{F}(u(x,t))(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(x,t) dx,$$

tzn. obliczamy transformatę Fouriera z funkcji $\,u\,$ ze względu na zmienną $\,x.$ Zauważmy, że

$$\mathcal{F}(u_t(x,t))(y) = U_t(y,t), \qquad \mathcal{F}(u_{xx}(x,t))(y) = -y^2 U(y,t),$$

ponadto

$$U(y,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u(x,0) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \varphi(x) dx = \hat{\varphi}(y).$$

Po zastosowaniu transformaty Fouriera względem zmiennej x, problem (338) przyjmie postać

$$U_t(y,t) = -y^2 U(y,t), \qquad U(y,0) = \hat{\varphi}(y).$$

Rozwiązując ostatni problem otrzymamy

$$U(y,t) = \hat{\varphi}(y)e^{-y^2t},$$

a wracając do zmiennych wyjściowych, wykorzystując własność (vii) transformaty Fouriera z modułu 5 : oraz wzoru (1) z modułu (330), otrzymamy

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}(y)) * \mathcal{F}^{-1}(e^{-y^2t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}^e} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} \varphi(s) ds.$$

Przykład 109:

Znaleźć rozwiązania równania

$$u_{tt} + u_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \ t > 0,$$

spełniające warunki

$$u(x,0) = f(x),$$

gdzie funkcja f jest całkowalna.

Połóżmy, podobnie jak w poprzednim przykładzie,

$$U(y,t) = \mathcal{F}(u(x,t))(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-xyi} u(x,t) dx.$$

Oczywiście

$$\mathcal{F}\big(u_{tt}(x,t)\big)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} u_{tt}(x,t) dx = U_{tt}(y,t).$$

Stosując transformatę Fouriera względem zmiennej $x\,$ do równania wyjściowego otrzymamy równanie

$$U_{tt} - y^2 U = 0,$$

którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$U(y,t) = A(y)e^{-|y|t} + B(y)e^{|y|t}.$$

Żądanie istnienia transformacj odwrotnej z funkcji U implikuje B=0. Zatem

$$U(y,t) = A(y)e^{-|y|t}.$$

Korzystając z warunku początkowego otrzymamy

$$U(y,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx = \hat{f}(y).$$

W konsekwencji

$$U(y,t) = \hat{f}(y)e^{-|y|t}.$$

Wracając do zmiennych wyjściowych dostajemy

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(e^{-|y|t}) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(y)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{(x-s)yi} e^{-|y|t} dy \right) f(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|y|t - (s-x)yi} f(s) ds dy = \frac{t}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{(s-x)^2 + t^2} ds,$$

przy czym w ostatnim przejściu wykorzystaliśmy całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|t-i(s-x)y} dy = \int_{-\infty}^{0} e^{\left(t-i(s-x)\right)y} dy + \int_{0}^{+\infty} e^{-\left(t+i(s-x)\right)y} dy = \frac{1}{t-i(s-x)} e^{\left(t-i(s-x)\right)y} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{t+i(s-x)} e^{-\left(t+i(s-x)\right)y} \Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{t-i(s-x)} \frac{1}{t+i(s-x)} \frac{2t}{t-i(s-x)}.$$

W następnym przykładzie zobaczymy, że przeksztłcenie Fouriera może być wykorzystane również do wyznaczenia funkcji Greena.



PRZYKŁAD

Przykład 110:

Jak widzieliśmy w przykładzie 3 z modułu Problem Cauchy'ego., przez funkcje Greena dla równania

$$a^2 u_{xx} = u_t, \qquad x \in \mathbb{R}, \ t > 0,$$

rozumiemy rozwiązanie problemu

$$a^2 v_{xx} = v_t$$
, $v(x, 0) = \delta_{x_0}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$,

które jest ciągłe w obszarze $\Omega \setminus \{(x_0, 0)\}$, gdzie $\Omega = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$.

Po zastosowaniu transformaty Fouriera względem zmiennej x do ostatniego problemu otrzymamy

$$V_t + a^2 v^2 V = 0$$
, $V(v, 0) = e^{-yx_0 i}$,

gdzie

$$V(y,t) = \mathcal{F}(v(x,t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-xyi} v(x,t) dx.$$

Rozwiązanie uzyskanego problemu Cauchy'ego ma postać

$$V(y,t) = e^{-yx_0i}e^{-a^2y^2t}.$$

Wracając do zmiennych wyjściowych - po wykorzystaniu własności (iii) transformaty Fouriera z modułu 5 : oraz wzoru (1) z modułu (330) - otrzymamy

$$G(x - x_0, t) = v(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{(x - x_0)^2}{4a^2t}}.$$

Rozdział 11. Elementy rachunku wariacyjnego Wprowadzenie do rachunku wariacyjnego

Początki rachunku wariacyjnego sięgają drugiej połowy XVII wieku, kiedy to J. Bernoulli sformułował tzw. problem brachistochrony: wyznaczyć tor łaczący dwa punkty tak, aby punkt materialny ześlizgujący się po nim pod wpływem siły ciężkości przebył go w najkrótszym czasie. Sformułujemy go w języku matematycznym.

Przykład 111: Problem brachistochrony.

Załóżmy, że punkt materialny o masie m znajduje się w punkcie A. Mając punkt B leżacy pod linią horyzontalną przechodząca przez punkt A, wyznaczyć linie łączącą A i B tak, aby ześlizgujący się pod wpływem siły ciężkości punkt materialny przebył ją w najkrótszym czasie. Przyjmujemy przy tym, że nie występuje siła tarcia.

Niech A=(0,0), B=(a,b), gdzie a>0, b<0. Zgodnie z prawem zachowania energii mamy

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^y mgds = mgy, \quad y \in [0, b],$$
(339)

gdzie m - oznacza masę punktu, v - prędkość, v_0 - prędkość początkową, g - przyspieszenie grawitacyjne. Przypomnijmy, że prawo zachowania energii mówi iż suma energii kinetycznej i energii potencjalnej jest stała. Wzór (339) wyraża fakt, że zmiana energii kinetycznej jest równa zmianie energii potencjalnej. Z (339) wynika, że

$$v^2 = v_0^2 + 2gy.$$

Niech x = x(t), y = y(t) będzie szukanym równaniem krzywej. Prędkość punktu wzdłuż tej krzywej określona jest zależnością v(t) = (x'(t), y'(t)). Oczywiście możemy przyjąć, że x'(t) > 0. Wówczas

$$|v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2 x'(t)} = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \frac{dx}{dt},$$

gdzie

$$y(x) = y(t(x)), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Przekształcając ostatnie wyrażenie i uwzględniając równość

$$|v(x)| = |v(t(x))| = \sqrt{v_0^2 + 2gy(t(x))} = \sqrt{v_0^2 + 2gy(x)}$$

otrzymamy

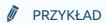
$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{|v(x)|} = \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy(x)}}.$$

Całkując ostatnie wyrażenie w przedziale [0, a] otrzymamy wzór na czas potrzebny do przebycia krzywej AB

$$T = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy(x)}} dx, \quad \text{przy czym} \quad y(0) = 0, \ y(a) = b.$$

Jak widać czas ten zależy od funkcji y. Problem polega więc na znalezieniu minimum wyrażenia

na zbiorze krzywych regularnych y = y(x), łączących punkty A i B.



Przykład 112: Problem brachistochrony z ruchomym końcem.

Po jakiej krzywej powinien ześlizgiwać się punkt materialny startujący z punktu A(0,0) aby w najkrótszym czasie osiągnąć linie x=a.

Z poprzednich rozważań wynika, że należy znaleźć minimum wyrażenia

$$\min_{\text{min } \int_{0}^{a} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^{2}}}{\sqrt{v_{0}^{2} + 2gy(x)}} dx$$

na zbiorze krzywych regularnych y=y(x), wychodzących z punktu A (tzn. y(0)=0) i przecinających prostą x=a.



PRZYKŁAD

Przykład 113: Figura o największym polu.

Wyznaczyć na płaszczyźnie figurę o największym obszarze mając zadany obwód.

Załóżmy, że brzeg obszaru opisany jest krzywą $x=x(t), y=y(t), t\in [\alpha,\beta].$ Wiadomo, że długość krzywej wyraża się wzorem

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$
 (340)

a pole powierzchni wzorem

$$S = \frac{1}{2} \int_{a}^{b} (xy' - x'y)dt.$$
 (341)

Problem polega więc na znalezieniu maksimum funkcjonału (3) na zbiorze wszystkich regularnych krzywych zamkniętych na $[\alpha, \beta]$, spełniających warunek (2).



Przykład 114: Powierzchnia o najmniejszym polu przechodząca przez daną krzywą.

Powierzchnia o najmniejszym polu przechodząca przez daną krzywą. Niech Γ będzie krzywą zmkniętą w R^3 . Znaleźć powierzchnię S o najmniejszym polu, której brzegiem jest krzywa Γ .

Załóżmy że krzywa Γ opisana jest równaniami $x=x(t), y=y(t), z=z(t), t\in [\alpha,\beta]$. Niech D będzie rzutem szukanej powierzchni na płaszczyznę Oxy, czyli obszarem ograniczonym krzywą $x=x(t), y=y(t), t\in [\alpha,\beta]$. Należy znaleźć funkcje $z=u(x,y), (x,y)\in D$, realizującą minimum funkcjonału

$$\iint_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy$$

i spełniającą warunek u(x(t), y(t)) = z(t) dla $t \in [\alpha, \beta]$.



PRZYKŁAD

Przykład 115: Krzywe geodezyjne na powierzchni.

Załóżmy, że dana jest powierzchnia regularna S oraz punkty A i B leżące na tej powierzchni. Znaleźć krzywą o najmniejszej długości łączącą punkty A i B, całkowicie leżącą na powierzchni S (tzw. **krzywą geodezyjną**).

Przyjmijmy, że powierzchnia S zadana jest równaniem

$$r = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D.$$

Ponadto przyjmijmy, że szukana krzywa ma równanie

$$r = r(u(t), v(t)), \qquad t \in [\alpha, \beta]. \tag{342}$$

Z analizy wiadomo, że długość krzywej (4) wyraża się wzorem

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2} dt,$$
(343)

gdzie

$$E = r_u \cdot r_u$$
, $F = r_u \cdot r_v$, $G = r_v \cdot r_v$

(symbol · oznacza iloczyn skalarny, $r_u = (x_u, y_u, z_u), r_v = (x_v, y_v, z_v).$)

Problem polega zatem na znalezieniu minimum funkcjonału (5) na zbiorze krzywych regularnych

$$u=u(t),\ v=v(t),\ t\in [\alpha,\beta],$$

takich że: $(u(t), v(t)) \in D$ dla $t \in [\alpha, \beta], r(u(\alpha), v(\alpha)) = A, r(u(\beta), v(\beta)) = B.$

Funkcjonaly

Niech X będzie przestrzenią Banacha. Odwzorowanie $\varphi:X\to \mathbb{R}$ nazywamy funkcjonałem.

→· DEFINICJA

Definicja 31: Minimum.

Mówimy, że funkcjonał $\varphi: X \to \mathbb{R}$ posiada w punkcie $x_0 \in X$ minimum lokalne, jeśli istnieje otoczenie V punktu x_0 takie, że

$$\varphi(x_0) \le \varphi(x), \quad \text{dla} \quad x \in V.$$

Jeśli

$$\varphi(x_0) < \varphi(x),$$
 dla $x \in V, x \neq x_0,$

mówimy, że w punkie x_0 istnieje **minimum lokalne silne**.

Zmieniając kierunek znaku otrzymamy definicje maksimum lokalnego i silnego maksimum lokalnego.

Zauważmy, że rozwiązanie problemów sformułowanych w module wprowadzenie do rachunku wariacyjnego polega na znalezieniu ekstremum stosownych funkcjonałów.

W zależności od rozważanego problemu, a zatem postaci funkcjonału φ , należy odpowiednio dobrać przestrzeń funkcyjną X, ewentualnie jej podzbiór, na którym szukamy ekstremum. Najczęściej spotykane przestrzenie to:

(i) C([a,b],R) - przestrzeń funkcji ciągłych na [a,b] o wartościach w R z normą jednostajnej zbieżności

$$\max_{\|x\| = t \in [a,b] |x(t)|;}$$

(ii) $C^1([a,b],R)$ - przestrzeń funkcji określonych na [a,b] o wartościach w R, posiadających ciągłą pochodną, z normą

$$\max_{\|x\|_1 = t \in [a,b]} \max_{\|x(t)\|_1 + t \in [a,b]} |x'(t)| = \|x\|_1 + \|x'\|_1;$$

(iii) $C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ - przestrzeń funkcji określonych na [a,b] o wartościach w \mathbb{R}^n , posiadających ciągłą pochodną, z normą

$$\sum_{\|x\|_{1} = i=1}^{n} (\|x_{i}\| + \|x_{i}^{'}\|);$$

- (iv) $PC([a,b], \mathbb{R})$ przestrzeń funkcji kawałkami ciągłych na [a,b] o wartościach w \mathbb{R} z normą jednostajnej zbieżności. (Funkcje $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ nazywamy kawałkami ciągłą, jeśli istnieje podział $a=x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ przedziału [a,b] taki, że na każdym podprzedziale (x_{i-1},x_i) funkcja f jest ciągła).
- (v) $PC^1([a,b],\mathbb{R})$ przestrzeń funkcji kawałkami różniczkowalnych na [a,b] o wartościach w \mathbb{R} , z normą

$$||x||_1 = ||x|| + ||x'||.$$

W dalszym ciągu przestrzenie C([a,b],R) oraz $C^1([a,b],R)$ będziemy oznaczać zwykle symbolami C([a,b]) oraz $C^1([a,b])$

→· DEFINICJA

Definicja 32: Różniczki funkcjonału.

Niech $x \in X$. Odwzorowanie liniowe $L(x): X \to R$ takie, że

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)-L(x)(h)}{\|h\|}=0,$$

nazywamy **różniczką funkcjonału** φ w punkcie x i oznaczamy symbolem $d\varphi(x)$ lub $\varphi'(x)$.



Uwaga 41:

Jeśli funkcjonał $\, \varphi \,$ posiada w punkcie $\, x \,$ różniczkę, to

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + d\varphi(x)(h) + o(h),$$

gdzie o jest odwzorowaniem X w R spełniającym warunek

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0.$$

Twierdzenie 25: Warunek konieczny istnienia ekstremum.

ZAŁOŻENIA:

Zakładamy, że funkcjonał φ posiada w punkcie x_0 minimum lub maksimum lokalne i ponadto posiada w tym punkcie różniczke.

TEZA:

Wtedy różniczka tego funkcjonału w tym punkcie jest równa zero.

DOWÓD:

Przypuśćmy, że funkcjonał $\, \varphi \,$ posiada w punkcie $\, x_0 \,$ minimum lokalne, czyli

$$\varphi(x_0) \le \varphi(x)$$
 dla $x \in V$,

gdzie V jest stosownie dobranym otoczeniem punktu x_0 .

Jeśli funkcjonał $\, \varphi \,$ osiąga w punkcie $\, x_0 \,$ minimum lokalne i ponadto posiada w tym punkcie róźniczkę to

$$0 \le \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = d\varphi(x_0)(h) + o(h) \qquad \text{dla} \quad x_0 + h \in V.$$

Niech $\tilde{h} \in X$. Ustalmy $t_0 > 0$ tak aby $x_0 + t\tilde{h} \in V$ dla dowolnego $t \in [0, t_0]$. Zgodnie z definicją minimum i uwagą 41 mamy

$$d\varphi(x_0)(t^{\tilde{h}}) + o(t^{\tilde{h}}) \ge 0.$$

Stąd

$$td\varphi(x_0)(\tilde{h}) \ge -o(t\tilde{h}), \qquad t \in (0, t_0).$$

W konsekwencji

$$\frac{o(t^{\tilde{h}})}{d\varphi(x_0)(\tilde{h}) \geq -\frac{\|t^{\tilde{h}}\|}{\|t^{\tilde{h}}\|}\|\tilde{h}\|, \qquad t \in (0, t_0).$$

Przechodząc z $t \to 0$ otrzymamy

$$d\varphi(x_0)(\tilde{h}) \geq 0.$$

Ponieważ $ilde{h}$ było ustalone dowolnie, również

$$d\varphi(x_0)(-\tilde{h}) \ge 0.$$

Z ostatnich dwóch nierówności oraz faktu że $d\varphi(x_0)(-\tilde{h}) = -d\varphi(x_0)(\tilde{h})$

wynika natychmiast, że $d\varphi(x_0)(\tilde{h})=0$. Ponieważ $\tilde{h}\in X$ było dowolne, więc $d\varphi(x_0)=0$, co kończy dowód twierdzenia.

Pierwsza i druga wariacja funkcjonału

Niech $f:[a,b]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 . Rozważmy funkcjonał

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} f(x, u(x), u'(x)) dx \tag{344}$$

w zbiorze $\,\mathcal{M}\,$ funkcji dopuszczalnych $\,\mathit{u}\,$ określonych wzorem:

$$\mathcal{M} = \left\{ u \in C^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta \right\},\tag{345}$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (W dalszym ciągu w zapisie całkowym postaci (1) argument funkcji u na ogół będziemy pomijać).

Przypuśćmy, że funkcjonał $\mathcal F$ posiada w punkcie $u_0\in\mathcal M$ minimum lokalne. Dla $u\in\mathcal M$ połóżmy

$$h = u - u_0.$$

Oczywiście h(a)=h(b)=0 oraz $u_0+th\in\mathcal{M}$ dla $t\in\mathbf{R}$. Ustalmy $\varepsilon>0$ tak, aby

$$\mathcal{F}(u_0) \leq \mathcal{F}(u_0 + th) \qquad \text{dla} \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Połóżmy

$$\phi(t) = \mathcal{F}(u_0 + th) = \int_{a}^{b} f(x, u_0 + th, u_0' + th') dx.$$

Oczywiście $\phi(0) = \mathcal{F}(u_0)$, a ponieważ w punkcie u_0 funkcjonał \mathcal{F} posiada minimum, $\phi(0) \leq \phi(t)$ dla $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Stąd i różniczkowalności funkcji ϕ wynika, że $\phi^{'}(0) = 0$.

Ponieważ

$$\phi'(t) = \int_{a}^{b} (f_{u}(x, u_{0} + th, u_{0}^{'} + th^{'})h + f_{u^{'}}(x, u_{0} + th, u_{0}^{'} + th^{'})h^{'})dx,$$

warunek $\phi'(0) = 0$ jest równoważny warunkowi

$$\int_{a}^{b} \left(f_{u}(x, u_{0}(x), u_{0}^{'}(x)) h(x) + f_{u}^{'}(x, u_{0}(x), u_{0}^{'}(x)) h'(x) \right) dx = 0.$$

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 33: Pierwsza wariacja.

Połóżmy

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ h \in C([a,b]) : h(a) = h(b) = 0 \right\}. \tag{346}$$

Niech $u \in \mathcal{M}$. Odwzorowanie $\delta \mathcal{F}(u) : \mathcal{M}_0 \to \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\delta \mathcal{F}(u)(h) = \int_{a}^{b} \left(f_{u}(x, u(x), u'(x)) h(x) + f_{u'}(x, u(x), u'(x)) h'(x) \right) dx \tag{347}$$

nazywa się **pierwszą wariacją** funkcjonału \mathcal{F} .



Uwaga 42:

Jeśli w punkcie u_0 istnieje ekstremum lokalne, wówczas - zgodnie z poprzednimi obserwacjami - wariacja $\delta \mathcal{F}(u_0)(h) = 0$ dla $h \in \mathcal{M}$

Funkcje u_0 dla których pierwsza wariacja jest równa zeru nazywają się **punktami stacjonarnymi** lub **ekstremalami** . Są to funkcje na których funkcjonał może osiągać ekstremum. Aby więc znaleźć ekstrema funkcjonału, należy najpierw wyznaczyć ekstremale.

$$\mathcal{F}(u+h) - \mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} (f(x, u+h, u'+h') - f(x, u, u')) dx.$$
 (348)

Na mocy twierdzenia Taylora

$$f(x, u + h, u' + h') = f(x, u, u') + f_u(x, u, u')h + f_{u'}(x, u, u')h' + o(h, h'),$$
(349)

gdzie

$$\lim_{\parallel h\parallel_{1}\rightarrow0}\frac{o(h,h^{'})}{\parallel h\parallel_{1}}=0,\qquad \parallel h\parallel_{1}=\parallel h\parallel +\parallel h^{'}\parallel.$$

Wykorzystując (349) i (347) wzór (348) można zapisać w postaci

$$\mathcal{F}(u+h) - \mathcal{F}(u) = \delta \mathcal{F}(u)(h) + \int_{a}^{b} o(h, h') dx.$$

Stąd

$$\frac{\mathcal{F}(u+h)-\mathcal{F}(u)-\delta\mathcal{F}(u)(h)}{\|h\|_1}=\frac{1}{\|h\|_1}\int_a^b\!o(h,h')dx.$$

→ WNIOSEK

Wniosek 5:

Ponieważ wariacja jest funkcjonałem liniowym na \mathcal{M}_0 , wynika stąd, że na zbiorze \mathcal{M}_0 jest ona równa różniczce, czyli $\delta\mathcal{F}(u)(h) = d\mathcal{F}(u)(h)$ dla $h \in \mathcal{M}_0$.

Załóżmy teraz, że f jest klasy C^2 . Na mocy twierdzenia Taylora

$$f(x, u + h, u' + h') = f(x, u, u') + f_{u}(x, u, u')h + f_{u'}(x, u, u')h' + \frac{1}{2} \left(f_{uu}(x, u, u')h^{2} + 2f_{uu'}(x, u, u')hh' + f_{u'u'}(x, u, u')h'^{2} \right) + \tilde{o}(h, h')$$
(350)

gdzie

$$\lim_{\|h\|_{1} \to 0} \frac{\tilde{o}(h, h')}{\|h\|_{1}^{2}} = 0.$$

Jeśli pierwsza wariacja jest równa zeru, wówczas

$$\mathcal{F}(u+h) - \mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_{a}^{b} \left[f_{uu} h^{2} + 2f_{uu'} h' + f_{u'u'} h'^{2} \right] dx + \int_{a}^{b} \tilde{o}(h, h') dx.$$
(351)

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 34: Druga wariancja.

Wyrażenie

$$\delta^{2} \mathcal{F}(u)(h) = \int_{a}^{b} \left(f_{uu} h^{2} + 2 f_{uu'} h h' + f_{u'u'} h'^{2} \right) dx$$

nazywamy **drugą wariacją** funkcjonału \mathcal{F} .



Uwaga 43:

Nietrudno pokazać, że druga wariacja na zbiorze \mathcal{M}_0 pokrywa się z różniczką drugiego rzędu.

Jeśli u_0 jest ekstremalą a druga wariacja $\delta^2 \mathcal{F}(u_0)$ jest określona dodatnio to z zależności (350) wynika, że funkcjonał \mathcal{F} osiąga w punkcie u_0 minimum lokalne, jeśli druga wariacja jest określona ujemnie, maksimum lokalne.



PRZYKŁAD

Przykład 116:

Sprawdzić, że funkcjonał

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} u(x) dx$$

posiada różniczkę w dowolnym punkcie $u \in C([a,b])$.

Istotnie

$$\mathcal{F}(u+h) - \mathcal{F}(u) = \int_a^b (u(x) + h(x))dx - \int_a^b u(x)dx = \int_a^b h(x)dx.$$

Zatem

$$d\mathcal{F}(u)(h) = \int_{a}^{b} h(x)dx.$$

Oczywiście $d^2\mathcal{F}(u) = 0$.

Przykład 117:

Sprawdzić, że funkcjonał

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} (u(x))^{2} dx$$

posiada różniczkę w dowolnym punkcie $\ u \in C([a,b]).$ Istotnie

$$\mathcal{F}(u+h) - \mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} [u(x) + h(x)]^{2} dx - \int_{a}^{b} (u(x))^{2} dx = 2 \int_{a}^{b} u(x)h(x) dx + \int_{a}^{b} (h(x))^{2} dx.$$

Ponieważ

$$\int_a^b (h(x))^2 dx \le (b-a) \parallel h \parallel^2,$$

zatem

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{1}{\|h\|} \int_{a}^{b} (h(x))^{2} dx = 0.$$

Wynika stąd, że

$$d\mathcal{F}(u)(h) = 2 \int_{a}^{b} u(x)h(x)dx.$$

Podobnie można sprawdzić, że

$$\delta^2 \mathcal{F}(u)(h) = 2 \int_a^b h^2(x) \, dx.$$

Równanie Eulera-Lagrange'a



LEMAT

Lemat 8:

Niech $g:[a,b] \to R$ będzie funkcją ciągłą. Jeśli

$$\int_{a}^{b} g(x)h'(x)dx = 0$$

dla dowolnej funkcji $h \in C^1([a,b])$ spełniającej warunek h(a) = h(b) = 0, to g jest funkcją stałą.

Dowód. Połóżmy

$$c = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} g(s)ds, \qquad h(x) = \int_{a}^{x} (g(s) - c)ds.$$

Oczywiście $h \in C^{1}([a,b]), \quad h(a) = h(b) = 0 \text{ oraz } h^{'}(x) = g(x) - c.$ Na mocy założenia

$$0 = \int_{a}^{b} g(x)h'(x)dx = \int_{a}^{b} g(x) (g(x) - c) dx - ch(b) =$$
$$\int_{a}^{b} g(x) (g(x) - c) dx - c \int_{a}^{b} (g(x) - c) dx = \int_{a}^{b} (g(x) - c)^{2} dx.$$

Zatem g(x) = c dla $x \in [a, b]$, co kończy dowód.

<mark>የ</mark>ካ

Twierdzenie 26:

ZAŁOŻENIA:

Niech $f \in C^1([a,b] \times \mathbb{R}^2)$. Niech funkcjonał \mathcal{F} będzie dany wzorem

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} f(x, u(x), u'(x)) dx \tag{352}$$

w zbiorze \mathcal{M} funkcji dopuszczalnych danych wzorem

$$\mathcal{M} = \left\{ u \in C^{1}([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta \right\}, \tag{353}$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Załóżmy ponadto, że funkcja $f_{u^{'}}\big(\cdot, u(\,\cdot\,), u^{'}(\,\cdot\,)\big)$ jest różniczkowalna dla dowolnego $u \in \mathcal{M}$.

TEZA:

Wówczas $u_0 \in \mathcal{M}$ jest ekstremalą funkcjonału \mathcal{F} wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{d}{dx} f_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x)) - f_u(x, u_0(x), u'_0(x)) = 0 \qquad \text{dla} \quad x \in [a, b].$$
(354)

DOWÓD:

Niech $u_0 \in \mathcal{M}$, $h \in \mathcal{M}_0$, gdzie \mathcal{M}_0 jest dane wzorem

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ u \in C^1([a, b]) : h(a) = h(b) = 0. \right\}$$

Połóźmy

$$A(x) = \int_{a}^{x} f_{u}(s, u_{0}(s), u_{0}(s)) ds.$$

Korzystając z przyjętego oznaczenia oraz wzoru na całkowanie przez części mamy

$$\begin{split} \delta \mathcal{F}(u_0)(h) &= \int_a^b \Big(f_u\big(x, u_0(x), u_0^{'}(x)\big) h(x) + f_{u^{'}}\big(x, u_0(x), u_0^{'}(x)\big) h^{'}(x) \Big) dx = \\ &= \int_a^b A^{'}(x) h(x) dx + \int_a^b h^{'}(x) f_{u^{'}}\big(x, u_0(x), u_0^{'}(x)\big) dx = \\ &= h(x) A(x) \Big|_a^b - \int_a^b h^{'}(x) A(x) dx + \int_a^b h^{'}(x) f_{u^{'}}\big(x, u_0(x), u_0^{'}(x)\big) dx = \\ &= \int_a^b h^{'}(x) \Big(f_{u^{'}}\big(x, u_0(x), u_0^{'}(x)\big) - A(x) \Big) dx. \end{split}$$

Przypuśćmy, że u_0 jest punktem stacjonarnym, tzn. $\delta \mathcal{F}(u_0)(h) = 0$ dla dowolnego $h \in \mathcal{M}_0$. Na mocy lematu 1

$$f_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x)) - A(x) = C,$$

czyli

$$f_{u'}(x, u_0(x), u_0'(x)) - \int_a^x f_u(s, u_0(s), u_0'(s)) ds = C.$$

Różniczkując ostatnią równość względem x otrzymamy (354).

Przypuśćmy teraz, że dla pewnego $u_0 \in \mathcal{M}$ zachodzi równość (354). Niech $h \in \mathcal{M}_0$. Całkując w przedziale [a,b] równość

$$\left(\frac{d}{dx} f_{u'}(x, u_0(x), u'_0(x)) - f_u(x, u_0(x), u'_0(x))\right) h(x) = 0$$

i wykorzystując wzór na całkowanie przez części względem pierwszej całki, otrzymamy

$$f_{u'}(x, u_0, u'_0)h(x)\big|_a^b - \int_a^b f_{u'}(x, u_0, u'_0)h'(x)dx - \int_a^b f_u(x, u_0, u'_0)h(x)dx = 0.$$

Stąd wynika natychmiast, że

$$\int_{a}^{b} \left(f_{u}(x, u_{0}, u_{0}^{'}) h + f_{u'}(x, u_{0}, u_{0}^{'}) h' \right) dx = 0$$

 $\int_{a}^{b} \Bigl(f_{u}\bigl(x,u_{0},u_{0}^{'}\bigr)h + f_{u^{'}}\bigl(x,u_{0},u_{0}^{'}\bigr)h^{'}\Bigr)dx = 0,$ co oznacza, że $\delta\mathcal{F}(u_{0})(h) = 0$. Ponieważ $h \in \mathcal{M}_{0}$ było dowolne, dowód został zakończony.

→· DEFINICJA

Definicja 35: Równaniem Eulera-Lagrange'a.

Równanie

$$\frac{d}{dx} f_{u^{'}} \big(x, u(x), u^{'}(x) \big) - f_{u} \big(x, u(x), u^{'}(x) \big) = 0$$

nazywa się **równaniem Eulera-Lagrange'a**. Jest to podstawowe równanie w rachunku wariacyjnym.

TWIERDZENIE

Twierdzenie 27:

ZAŁOŻENIA:

Niech $f:[a,b]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 i niech funkcjonał \mathcal{F} będzie dany wzorem (352). Niech $u_0\in\mathcal{M}$ będzie ekstremalą funkcjonału \mathcal{F} .

TEZA:

- (i). Jeśli f jest funkcją wypukłą względem drugiej i trzeciej zmiennej, to funkcjonał $\mathcal F$ posiada w punkcie u_0 minimum.
- (ii). Jeśli f jest funkcją ściśle wypukłą względem drugiej i trzeciej zmiennej, to minimum to jest jedyne.

DOWÓD:

Niech $u_0 \in \mathcal{M}$ będzie ekstremalą funkcjonału \mathcal{F} . Załóżmy, że f jest funkcją wypukłą względem drugiej i trzeciej zmiennej. Na mocy twierdzenia Taylora

$$\begin{split} f(x,u_0+h,u_0^{'}+h^{'}) &= f(x,u_0,u_0^{'}) + df(x,u_0,u_0^{'}) + \frac{1}{2}d^2f(x,u_0+\theta h,u_0^{'}+\tilde{\theta}h^{'}) \\ &= f(x,u_0,u_0^{'}) + \frac{1}{2}d^2f(x,u_0+\theta h,u_0^{'}+\tilde{\theta}h^{'}), \end{split}$$

dla dowolnego $h \in \mathcal{M}_0$.

Całkując powyższą równość w przedziale [a,b] otrzymamy

$$\mathcal{F}(u_0+h) = \mathcal{F}(u_0) + \frac{1}{2} \int_a^b d^2f(x, u_0 + \theta h, u_0' + \tilde{\theta} h') dx, \quad h \in \mathcal{M}_0.$$

Na mocy założenia o wypukłości $d^2f(x, u_0 + \theta h, u_0^{'} + \tilde{\theta} h^{'}) \ge 0$, skąd wynika natychmiast, że

$$\mathcal{F}(u_0 + h) \ge \mathcal{F}(u_0), \qquad h \in \mathcal{M}_0.$$

Załóżmy teraz, że funkcja f jest ściśle wypukła wypukłą względem drugiej i trzeciej zmiennej. Przypuśćmy, dla dowodu niewprost, że funkcjonał $\mathcal F$ posiada również minimum w punkcie $\tilde u$. Połóżmy

$$\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F}(\tilde{u}) = \alpha.$$

Niech

$$u = (u_0 + \tilde{u})/2.$$

Ponieważ na mocy wupukłości

$$f(x, u, u') < \frac{1}{2} (f(x, u_0, u'_0) + f(x, \tilde{u}, \tilde{u}'))$$

więc

$$\alpha \leq \mathcal{F}(u) < \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}(u_0) + \mathcal{F}(\tilde{u}) \right) = \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha,$$

co oczywiście jest niemożliwe i kończy to dowód twierdzenia.

Przykład 118:

Sprawdzić, że funkcjonał

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} (u(x))^{2} dx,$$

nie ma ekstremów w zbiorze funkcji klasy $C^{l}([a,b])$ spełniających warunek $u(a)=0, \quad u(b)=1.$

Istotnie, ponieważ funkcja $f(x, u(x), u'(x)) = u^2(x)$, równanie Eulera-Lagrange'a ma postać

$$-2u = C$$
.

Zatem ekstremalami naszego problemu są funkcje stałe. Ponieważ $u(a) \neq u(b)$, żadna z nich nie może być rozwiązaniem rozważanego problemu.

Omówimy teraz szczególne równania Eulera-Lagrange'a.

W tej części modułu znajdziemy równania Eulera-Lagrange'a dla szczególnych postaci funkcjonału \mathcal{F} .

Przypadek 1. Przypuśćmy, że funkcja f nie zależy bezpośrednio od u, czyli

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} f(x, u'(x)) dx.$$

Wówczas równanie Eulera - Lagrange'a ma postać

$$\frac{d}{dx}f_{u'}(x, u') = 0,$$

lub

$$f_{u'}(x, u') = C,$$
 (355)

gdzie C jest dowolną stałą.

Przykład 119:

Znaleźć minimum funkcjonału

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (u')^2} dx$$

w klasie funkcji $u\in C^1([a,b])$ spełniających warunki $u(a)=\alpha, \quad u(b)=\beta.$ Zgodnie ze wzorem (355) równanie Eulera - Lagrange'a ma postać

$$\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} = C$$

a po przekształceniu

$$u' = C_1$$
, gdzie $C_1 = C/\sqrt{1 - C^2}$.

Całka ogólna ostatniego równania ma postać $u = C_1 x + C_2$.

Po uwzględnieniu warunków $u(a)=\alpha, \quad u(b)=\beta \;\;$ otrzymamy równanie szukanej ekstremali

$$u = \frac{\beta - \alpha}{b - a} x + \frac{\alpha b - \beta a}{b - a}.$$

Ponieważ funkcja podcałkowa jest wypukła względem $u^{'}$ - zgodnie z twierdzeniem 2 - na wyznaczonej ekstremali funkcjonał osiąga minimum.

Zauważmy jeszcze, że jeśli nie nałożymy warunków brzegowych, czyli rozważamy tzw. problem ze **swobodnymi końcami**, to funkcjonał osiąga minimum (równe b-a) dla dowolnej funkcji stałej u=C.

Przypadek 2. Przypuśćmy teraz, że funkcja f nie zależy bezpośrednio od x, czyli

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} f(u, u') dx.$$

Równanie Eulera - Lagrange'a ma postać

$$\frac{d}{dx} f_{u'}(u, u') - f_{u}(u, u') = 0.$$
(356)

Zauważmy, że

$$u'(\frac{d}{dx}f_{u'} - f_u) = u'(u''f_{u'u'} + u'f_{u'u} - f_u),$$

$$\frac{d}{dx}(u'f_{u'}-f) = u''f_{u'} + u'^2f_{u'u} + u'u''f_{u'u'} - u'f_u - u''f_{u'} = u'(u''f_{u'u'} + u'f_{uu'} - f_u).$$

Zatem

$$\frac{d}{dx}\left(u'f_{u'}-f\right)=u'\left(\frac{d}{dx}f_{u'}-f_{u}\right).$$

Jeśli zachodzi równanie (356) to prawa strona ostatniej równości jest równa zeru. Odwrotnie, jeśli lewa strona ostatniej równości jest równa zeru i u nie jest funkcją stałą, to zachodzi (356). Zatem równanie Eulera-Lagrange'a jest równoważne równaniu

$$\frac{d}{dx}(u'f_{u'}-f)=0,$$

$$u'f_{u'} - f = C.$$
 (357)



PRZYKŁAD

Przykład 120:

Znaleźć równanie Eulera - Lagrange'a dla funkcjonału

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} h(u) \sqrt{1 + (u')^2} dx.$$

W naszym przypadku

$$f = h(u) \sqrt{1 + (u')^2}, \qquad f_{u'} = \frac{u'h(u)}{\sqrt{1 + (u')^2}}.$$

Równanie (357) przyjmie zatem postać

$$\frac{(u')^2 h(u)}{\sqrt{1 + (u')^2}} - h(u) \sqrt{1 + (u')^2} = C,$$

a po redukcji

$$\frac{h(u)}{\sqrt{1+(u')^2}} = C.$$



PRZYKŁAD

Przykład 121: Problem brachistochrony.

Znaleźć minimum funkcjonału

$$\mathcal{F}(u) = \int_{0}^{t} \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^{2}}}{\sqrt{v_{0}^{2} + 2gu(x)}} dx,$$

w zbiorze funkcji $u \in C^1([0,a])$ spełniających warunki: u(0) = 0, u(a) = b.

Dla uproszczenia rachunków przyjmijmy $v_0 = 0$. Wówczas

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^u \frac{\sqrt{1+(u^{'}(x))^2}}{\sqrt{2gu(x)}} \, dx.$$

Zgodnie z przykładem 120 (gdzie $h(u)=1/\sqrt{2gu}$) równanie Eulera - Lagrange'a ma postać

$$\frac{1}{\sqrt{2gu}} \frac{1}{\sqrt{1 + (u')^2}} = C,$$

lub po stosownych przekształceniach

$$2gu(1+(u')^2) = K, (358)$$

gdzie $K = 1/C^2$. Po podstawieniu

$$\frac{du}{dx} = \operatorname{ctg}\varphi,$$

czyli

$$dx = \operatorname{tg} \varphi \, du,\tag{359}$$

równanie (358) przyjmie postać

$$2gu^{\frac{1}{\sin^2\varphi}} = K.$$

Stąd

$$u = \frac{K}{2g} \sin^2 \varphi, \tag{360}$$

zaś różniczka

$$du = \frac{K}{2g}\sin 2\varphi \, d\varphi$$

Podstawiając ostatnie wyrażenie do (359) otrzymamy

$$dx = \frac{K}{g}\sin^2\varphi \, d\varphi.$$

Stąd

$$x = \frac{K}{2g} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) + C. \tag{361}$$

Przyjmując

$$t = 2\varphi, \qquad r = K/(4g),$$

równości (360) i (361) przyjmą postać

$$x = r(t - \sin t) + C, \qquad u = r(1 - \cos t).$$

Warunek u(0) = 0 (czyli u = 0 dla x = 0) oznacza, że

$$r(t - \sin t) + C = 0$$
, $r(1 - \cos t) = 0$,

co daje t = 0, C = 0. Zatem

$$x = r(t - \sin t), \quad u = r(1 - \cos t).$$

Warunek u(a) = b (czyli u = b dla x = a) oznacza, że

$$r(t - \sin t) = a, \quad r(1 - \cos t) = b.$$

Stąd

$$\frac{a}{b} = \frac{t - \sin t}{1 - \cos t}$$

Połóżmy

$$p(t) = \frac{t - \sin t}{1 - \cos t}.$$

Łatwo sprawdzić, że p jest funkcją rosnącą, $\lim_{t\to 0^+} p(t) = 0$, $\lim_{t\to 2\pi^-} p(t) = +\infty$. Wynika stąd, że równanie p(t) = a/b posiada w przedziale $(0,2\pi)$ dokładnie jedno rozwiązanie, powiedzmy t_* . Zatem równanie szukanej ekstremali możemy zapisać w postaci parametrycznej:

$$x = r(t - \sin t),$$
 $u = r(1 - \cos t),$ $t \in [0, t_*].$

Otrzymana krzywa nosi nazwę **cykloidy**. Wykorzystując twierdzenie 2 można pokazać, że krzywa ta jest rozwiązaniem problemu brachistrony.

Przypadek 3. Rozważmy funkcjonał \mathcal{F} postaci

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} g(x, u) \sqrt{1 + (u')^2} dx.$$

Oczywiście

$$f = g(x, u) \sqrt{1 + (u'(x))^2}, \quad f_u = g_u(x, u) \sqrt{1 + (u'(x))^2}, \quad f_{u'} = \frac{g(x, u) u'(x)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}.$$

Ponieważ

$$\frac{d}{d^{x}}f_{u'} - f_{u} = \frac{u'g_{x}}{\sqrt{1 + (u')^{2}}} + \frac{(u')^{2}g_{u}}{\sqrt{1 + (u')^{2}}} + \frac{u''g}{\sqrt{1 + (u')^{2}}} - \frac{(u')^{2}u''g}{(\sqrt{1 + (u')^{2}})^{3}} - g_{u}\sqrt{1 + (u')^{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (u')^{2}}} \frac{u''g}{(1 + (u')^{2})^{2}} + u'g_{x} - g_{u}.$$

równanie Eulera - Lagrange'a ma postać

$$\frac{u''g}{1 + (u')^2} + u'g_x - g_u = 0.$$

Funkcjonały zależne od funkcji wektorowej

Niech $f:[a,b]\times \mathbf{R}^{2n}\to \mathbf{R}$ będzie funkcją klasy C^1 . Rozważmy funkcjonał

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} f(x, u(x), u'(x)) dx$$
 (362)

w zbiorze funkcji $u \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n), \quad u = (u_1,...,u_n).$ Rozwiązania będziemy szukać w zbiorze funkcji dopuszczalnych

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in C^{1}([a, b], \mathbb{R}^{n}) : u(a) = A, u(b) = B \right\}, \tag{363}$$

gdzie $A, B \in \mathbb{R}^n$ są dane.

h LEMAT

Lemat 9:

Niech $f:[a,b]\times \mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^2 . Wówczas funkcjonał \mathcal{F} dany wzorem (362) posiada różniczkę w dowolnym punkcie $u\in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ i ponadto

$$d\mathcal{F}(u)(h) = \sum_{a}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f_{u_{i}} - \frac{d}{dx} \int_{u_{i}'} h_{i} dx + \sum_{i=1}^{n} f_{u_{i}'} h_{i} \Big|_{a}^{b}, \quad h \in C^{1}([a,b],\mathbb{R}^{n}).$$

Dowód. Oczywiście

$$\sum_{f(x,u+h,u^{'}+h^{'})=f(x,u,u^{'})+\sum_{i=1}^{n}\left(f_{u_{i}}(x,u,u^{'})h_{i}+f_{u_{i}^{'}}(x,u,u^{'})h_{i}^{'}\right)+o(h,h^{'})}$$

gdzie

$$\lim_{(h,h^{'})\to(0,0)} \frac{o(h,h^{'})}{\|h\|+\|\|h^{'}\|} = 0.$$

Całkując powyższy wzór w przedziale [a,b] otrzymamy

$$\mathcal{F}(u+h) - \mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} \sum_{i=1}^{n} (f_{u_{i}}h_{i} + f_{u'_{i}}h'_{i})dx + \int_{a}^{b} o(h, h')dx$$

a po przecałkowaniu przez części członu zawierającego wyrażenie $\sum_{i=1}^n f_{ii} h_i'$

$$\mathcal{F}(u+h) - \mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} \sum_{i=1}^{n} \left(f_{u_{i}} - \frac{d}{dx} f_{u_{i}'} \right) h_{i} dx + \sum_{i=1}^{n} \left(h_{i} f_{u_{i}'} \right) \Big|_{a}^{b} + \int_{a}^{b} o(h, h') dx,$$

skąd teza lematu wynika natychmiast.

LEMAT

Lemat 10:

Niech $g:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją ciągłą. Jeśli

$$\int_{a}^{b} g \cdot h' dx = \int_{a}^{b} \sum_{i=1}^{n} g_{i}(x) h'_{i}(x) dx = 0$$

(" · "oznacza iloczyn skalarny) dla dowolnego $h \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ spełniającego warunek h(a) = h(b) = 0, to g jest funkcją stała.

Dowód. Dla $i = 1, \dots, n$ połóżmy

$$c_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b g_i(x) dx, \qquad h_i(x) = \int_a^x (g_i(s) - c_i) ds.$$

Oczywiście $h_i \in C^1([a,b], \mathbb{R}), \quad h_i(a) = h_i(b) = 0, \quad h_i^{'} = g_i - c_i$. Powtarzając dowód lematu 1 z modułu 8 mamy

$$0 = \int_{a}^{b} \sum_{i=1}^{n} g_{i}(x) (g_{i}(x) - c_{i}) dx = \int_{a}^{b} \sum_{i=1}^{n} (g_{i}(x) - c_{i})^{2} dx,$$

skąd wynika natychmiast, że $g_i(x)=c_i$ dla $i=1,\cdots,n,\quad x\in[a,b].$ i kończy to dowód lematu.

Korzystając z lematu 1 i powtarzając argumenty dowodu twierdzenia 1 z modułu 26 otrzymamy następujące twierdzenie.



TWIERDZENIE

Twierdzenie 28:

ZAŁOŻENIA:

Niech $f \in C^1([a,b] \times \mathbb{R}^{2n})$. Niech funkcjonał \mathcal{F} będzie dany wzorem (362), a przestrzeń \mathcal{V} wzorem (363). Załóżmy ponadto, że funkcje $f_{u_1'}(\cdot,u(\cdot),u^{'}(\cdot))$, ..., $f_{u_1'}(\cdot,u(\cdot),u^{'}(\cdot))$ są róźniczkowalne dla dowolnego $u \in \mathcal{V}$.

TEZA:

Wówczas $\tilde{u} \in \mathcal{V}$ jest ekstremalą funkcjonału \mathcal{F} wtedy i tylko wtedy gdy spełnia ona układ równań Eulera-Lagrange'a:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}f_{u_1^{'}}(x,\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_n,\tilde{u}_1^{'},...,\tilde{u}_n^{'}) - f_{u_1}(x,\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_n,\tilde{u}_1^{'},...,\tilde{u}_n^{'}) = 0,\\ \vdots\\ \frac{d}{dx}f_{u_n^{'}}(x,\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_n,\tilde{u}_1^{'},...,\tilde{u}_n^{'}) - f_{u_n}(x,\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_n,\tilde{u}_1^{'},...,\tilde{u}_n^{'}) = 0, \end{cases}$$

dla $x \in [a,b]$.

Przykład 122:

Niech S będzie powierzchnią walcową daną wzorem $r(u,v)=(R\cos u,R\sin u,v), \quad 0\leq u\leq 2\pi, \quad a\leq v\leq b.$ Znaleźć krzywą geodezyjną lączącą punty A i B leżące na S.

Zgodnie z wzorem (5) w module (343), ponieważ w naszym przypadku $E=R^2$, F=0, G=1, należy wyznaczyć minimum funkcjonału

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{R^{2}(u^{'})^{2} + (v^{'})^{2}} dt.$$

Na mocy twierdzenia 1 równania Eulera-Lagrange'a mają postać

$$\frac{d}{dt} \frac{R^2 u'}{\sqrt{R^2 (u')^2 + (v')^2}} = 0, \qquad \frac{d}{dt} \frac{v'}{\sqrt{R^2 (u')^2 + (v')^2}} = 0,$$

czyli

$$\frac{R^2u'}{\sqrt{R^2(u')^2 + (v')^2}} = C_1, \qquad \frac{v'}{\sqrt{R^2(u')^2 + (v')^2}} = C_2.$$

Stąd dostajemy równanie

$$\frac{v'}{u'} = C$$
 $(C = R^2 C_2 / C_1),$

którego całka ogólna ma postać

$$v = Cu + C_0$$

Wykorzystując ostatnią zależność oraz fakt, że szukana krzywa leży na powierzchni S oraz przechodzi przez punkty A i B możemy wyznaczyć jej równanie np. w formie parametrycznej $x = R\cos u(v)$, $y = R\sin u(v)$, z = v. Nietrudno sprawdzić, że na tak określonej ekstremali funkcjonał osiąga wartość minimalną.

Funkcjonały zależne od pochodnych wyższych rzędów

Niech $f:[a,b]\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^n . Szukamy minimum funkcjonału

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} f(x, u, u', ..., u^{(n)}) dx$$
(364)

w zbiorze funkcji $u \in C^n([a,b])$ spełniających warunki:

$$u(a) = u_0, \ u'(a) = u'_0, ..., \ u^{(n-1)}(a) = u_0^{(n-1)},$$

 $u(b) = u_1, \ u'(b) = u'_1, ..., \ u^{(n-1)}(b) = u_1^{(n-1)}.$

Można pokazać, że każda ekstremala funkcjonału (364) musi spełniać równanie Eulera-Poissona

$$f_{u} - \frac{\frac{d}{dx} \int_{u'} + \frac{d^{2}}{dx^{2}} \int_{u''} - \dots + (-1)^{n} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{u^{(n)}} = 0,$$
(365)

a wariacja określona jest wzorem

$$\delta \mathcal{F}(u)(h) = \int_{a}^{b} \left(f_{u}h + f_{u'}h' + \dots + f_{u(n)}h^{(n)} \right) dx.$$

Jeśli u_0 jest ekstremalą, a ponadto druga wariacja jest określona dodatnio, funkcjonał \mathcal{F} osiąga na u_0 minimum lokalne, jeśli jest określona ujemnie, maksimum lokalne.



PRZYKŁAD

Przykład 123:

Znaleźć ekstrema funkcjonału

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (360x^2u - (u'')^2) dx$$

w zbiorze funkcji $u \in C^2([0,1])$ spełniających warunki:

$$u(0) = 0$$
, $u'(0) = 1$, $u(1) = 0$, $u'(1) = 5/2$.

Równanie Eulera-Poissona ma postać

$$360x^2 + \frac{d^2}{dx^2}(-2u'') = 0,$$

czyli

$$u^{(4)} = 180x^2$$

Rozwiązanie ogólne tego równania jest nastepujące

$$u = \frac{1}{2}x^6 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4,$$

zaś po uwzględnieniu zadanych warunków otrzymamy równanie ekstremali

$$u = \frac{\frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 + x.}{2}$$

Ponieważ druga wariacja, która w tym przypadku wyraża się wzorem

$$\delta^2 \mathcal{F}(u)(h) = - \int_0^1 (h^{''}(x))^2 dx,$$

jest określona ujemnie, funkcjonał osiąga maksimum lokalne.



Przykład 124:

Znaleźć minimum funkcjonału

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_{a}^{b} (u^{\prime\prime})^2 dx$$

w zbiorze funkcji $u \in C^2([a,b])$ spełniających warunki:

$$u(a) = u(b) = 0. (366)$$

Oczywiście funkcja u=0 realizuje minimum rozważanego funkcjonału. Pokażemy, że jest to jedyne rozwiązanie. Istotnie, równanie Eulera-Poissona ma postać

$$u^{(4)} = 0$$

a jego całka ogólna ma postać

$$u = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

Ponieważ całka ogólna zawiera cztery stałe, zadane warunki początkowe nie wystarczają do wyznaczenia wszystkich stałych. Zauważmy, że

$$\delta \mathcal{F}(u)(h) = \int_{a}^{b} u'' h'' dx = u''(x)h'(x) \Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u'''(x)h'(x) dx = u''(x)h'(x) \Big|_{a}^{b} - \left(u'''(x)h(x) \Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u^{(4)}(x)h(x) dx\right) = u''(x)h'(x) \Big|_{a}^{b}$$

Jeśli funkcjonał \mathcal{F} osiąga w punkcie u ekstremum, wówczas wariacja jest równa zeru, czyli

$$u''(x)h'(x)\Big|_{a}^{b} = u''(b)h'(b) - u''(a)h'(a) = 0.$$

Ponieważ h jest dowolną funkcją w $C^2([a,b])$ spełniającą warunek h(a) = h(b) = 0, natomiast wartości h'(a), h'(b) mogą być dowolne, z ostatniego warunku wynika, że u''(a) = 0, u''(b) = 0. Stąd i (366) wynika, że u = 0.

Funkcjonał zależny od funkcji wielu zmiennych

Rozważmy teraz funkcjonał zależny od funkcji n-zmiennych. Ponieważ rozważania są analogiczne ograniczymy się do funkcji dwóch zmiennych. Niech Ω będzie obszarem zawartym w R^2 . Niech $f: \Omega \times R^3 \to R$ będzie funkcją klasy C^1 . Poszukujemy funkcji $z = u(x,y), \quad (x,y) \in \Omega$, o zadanych wartościach $u = \varphi$ na brzegu $\partial \Omega$ obszaru Ω , na której funkcjonał

$$\mathcal{F}(u) = \iint_{\Omega} f(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dxdy$$

osiąga wartość ekstremalną.

Zakładając, że f jest klasy C^2 i rozumując jak poprzednio, można wyprowadzić następujący wzór na wariację funkcjonału

$$\delta \mathcal{F}(u)(h) = \iint_{\Omega} \bigl(f_u h + f_{u_x} h_x + f_{u_y} h_y \bigr) dx dy.$$

Wykorzystując wzór na całkowanie przez części i zakładając, że h(x,y)=0 dla $(x,y)\in\partial\Omega$, otrzymamy

$$\delta \mathcal{F}(u)(h) = \iint_{\Omega} \Big(f_{u} - \frac{\frac{\partial}{\partial x}}{f_{u_{x}}} - \frac{\frac{\partial}{\partial y}}{f_{u_{y}}} \Big) h(x,y) dx dy.$$

Stąd i stosownego odpowiednika lematu 1 z modułu 8 otrzymamy następujące równanie Eulera-Lagrange'a

$$f_{u} - \frac{\frac{\partial}{\partial x}}{f_{u_{x}}} - \frac{\frac{\partial}{\partial y}}{f_{u_{y}}} = 0.$$

Równanie to wraz z zadanym warunkiem brzegowym $u(x,y)=\varphi(x,y)$ dla $(x,y)\in\partial\Omega$, daje warunek konieczny istnienia ekstremum.



PRZYKŁAD

Przykład 125:

Znaleźć ekstremale funkcjonału

$$\iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

w klasie funkcji $u \in C^2(\Omega)$ spełniających warunek: $u(x,y) = \varphi(x,y)$ dla $(x,y) \in \partial\Omega$, gdzie φ jest funkcją daną.

$$\Delta u = 0$$
 z warunkiem $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Szukana ekstremala u jest zatem rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a.



PRZYKŁAD

Przykład 126:

Załóżmy, że $g:\Omega\to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy $C^1,\quad \varphi:\partial\Omega\to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą, $\Omega\subset \mathbb{R}^n$ jest obszarem o regularnym brzegu. Znaleźć ekstremale funkcjonału

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 - gu \right) dx$$

w klasie funkcji $\,u\in {\it C}^2(\Omega),\,\,$ przyjmujących wartość $\,\varphi\,$ na $\,\partial\Omega.$

W tym przypadku

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 - gu,$$

równanie Eulera-Lagrange'a ma postać

$$\sum_{g-i=1}^{n} u_{x.x.} = 0$$

a ekstremala jest rozwiązaniem równania

$$\Delta u = g$$

z warunkiem brzegowym

$$u = \varphi$$
 na $\partial \Omega$.

Szukana ekstremala jest zatem rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla równania Poissona.



Przykład 127:

Możemy teraz rozwiązać postawiony na wstępie problem minimalnej powierzchni przechodzącej przez zadaną krzywą.

Niech krzywa Γ dana jest równaniami $x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad t\in [\alpha,\beta].$ Niech $\Omega\subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym krzywą $x=x(t), \quad y=y(t), \quad t\in [\alpha,\beta].$ Szukamy funkcji $z=u(x,y), \quad (x,y)\in \Omega,$ realizującej minimum funkcjonału

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy$$

i takiej, że $u(x(t), y(t)) = z(t), t \in [\alpha, \beta].$

Oczywiście $f = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$. Szukana ekstremala jest rozwiązaniem równania

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0,$$

spełniającym warunek

$$u(x(t), y(t)) = z(t)$$
 dla $t \in [\alpha, \beta]$.

Problemy izoperymetryczne

Przez problem izoperymetryczny rozumiemy zagadnienie znalezienia ekstremów funkcjonału \mathcal{F} w zbiorze funkcji dopuszczalnych \mathcal{M} , spełniających ponadto warunek $\mathcal{K}(u) = L$, gdzie \mathcal{K} jest funkcjonałem podobnej natury jak funkcjonał \mathcal{F} a L jest ustaloną stałą. Niech $f,g:[a,b]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ będą funkcjami klasy C^1 . Niech \mathcal{M} będzie następującą klasą funkcji

$$\mathcal{M} = \{ u \in C^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta \},\$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Rozważmy funkcjonały:

$$\mathcal{F}(u) = \int_{a}^{b} f(x, u, u') dx$$

огах

$$\mathcal{K}(u) = \int_{a}^{b} g(x, u, u') dx,$$

określone na zbiorze funkcji $u \in C^1([a,b])$. Szukamy ekstremów funkcjonału \mathcal{F} w zbiorze funkcji $u \in \mathcal{M}$, spełniających ponadto warunek $\mathcal{K}(u) = L$. Problem ten możemy rozwiązać adoptując znaną z klasycznej teorii ekstremów warunkowych metodę mnożników Lagrange'a (szczegóły wyprowadzenia pomijamy). W tym celu rozważamy nowy funkcjonał

$$\mathcal{J}(u) = \int_{a}^{b} (f(x, u, u') + \lambda g(x, u, u')) dx.$$

Zgodnie z poprzednimi wynikami ekstremale funkcjonału $\mathcal J$ są rozwiązaniami równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{dx}\left(f_{u'} + \lambda g_{u'}\right) - f_u - \lambda g_u = 0.$$

Jeśli ponadto spełniają one warunek $\mathcal{K}(u) = L$, to są funkcjami na których badany problem izometryczny może osiągać ekstremum.

Przykład 128:

Wyznaczyć na płaszczyżnie figurę o największym polu mając zadany obwód.

Zgodnie z wzorami (2) i (3) z modułu (340) należy znaleźć minimum funkcjonału

$$\mathcal{F}(x,y) = \frac{1}{2} \int_{a}^{b} (xy' - x'y) dt$$

w zbiorze funkcji różniczkowalnych $x=x(t), y=y(t), t\in [a,b],$ takich że x(a)=x(b), y(a)=y(b), spełniających ponadto warunek

$$\int_{a}^{b} \sqrt{x^{'2} + y^{'2}} dt = L.$$

Zgodnie z poprzednimi uwagami szukamy minimum funkcjonału

$$\int_{a}^{b} \left(\frac{1}{2}(xy' - x'y) + \lambda \sqrt{x'^{2} + y'^{2}}\right) dt.$$

Na mocy twierdzeniem 1 z modułu 28 ekstremale tego funkcjonału są rozwiązaniami układu równań

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}_{x+\lambda} \sqrt{x'^2 + y'^2} \right) + \frac{1}{2}_{x'} = 0, \qquad \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2}_{y+\lambda} \sqrt{x'^2 + y'^2} \right) - \frac{1}{2}_{y'} = 0,$$

lub

$$x' = -\lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right), \qquad y' = \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right),$$

a po scałkowaniu względem t

$$x - C_1 = -\lambda \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \qquad y - C_2 = \lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Po podniesieniu do kwadratu i zsumowniu ostatnich równań otrzymamy

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2$$
.

Zatem figurą o maksymalnym obszarze jest koło.

Dodatek

Całki pierwsze

Rozważmy równanie

$$x' = f(t, x), \qquad (t, x) \in \Omega, \tag{367}$$

gdzie $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ jest zadaną funkcją, a $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ zbiorem otwartym. Oczywiście równanie to możemy zapisać we współrzednych w postaci układu równań

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

→· ◆ DEFINICJA

Definicja 36:

Funkcje $g:\Omega\to\mathbb{R}$ klasy C^1 nazywamy całką pierwszą układu równań (368) jeśli dla dowolnego rozwiązania $x_1=x_1(t),\ldots,\ x_n=x_n(t),\ t\in I,\$ tego układu

$$g(t, x_1(t), ..., x_n(t)) = \text{const}$$
 dla $t \in I$,

tzn. funkcja $\,g\,$ jest stała wzdłuż dowolnego rozwiązania układu równań (368).

Widać natychmiast, że prawdziwa jest następująca uwaga:

∵©: UWAGA

Uwaga 44:

Niech $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 , a g całką pierwszą układu (368). Wówczas funkcja $h \circ g$ jest również całą pierwszą układu (368).

Podobnie, jeśli funkcje $g_1, ..., g_m$ są całkami pierwszymi uładu (368) a $h: R^m \to R$ jest funkcją klasy C^1 , to funkcja $h \circ (g_1, ..., g_m)$ jest również całką pierwszą układu (368).

→· DEFINICJA

Definicja 37:

Całki pierwsze $g_1, ..., g_m \in C^1(\Omega)$ ($m \le n$) nazywamy **funkcyjnie niezależnymi** w zbiorze Ω , jeśli dla dowolnego $(t, x) \in \Omega$ rząd macierzy jakobianu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & & \end{bmatrix}$$

wynosi m, tzn. w każdym punkcie $(t, x_1, ..., x_n) \in \Omega$ wiersze tej macierzy są wektorami liniowo niezależnymi. W szczególności, jeśli m = n to wyznacznik powyższej macierzy jest różny od zera.

Przypomnijmy, że punkt $(t_0, x) \in \Omega$ nazywamy **punktem równowagi układu** (368), jeśli prawe strony tego układu zerują się w tym punkcie, czyli

$$o$$
 o o $f_1(t_0, x) = 0, f_2(t_0, x) = 0, ..., f_n(t_0, x) = 0.$



TWIERDZENIE

Twierdzenie 29:

ZAŁOŻENIA:

Zakładamy, że prawe strony $f_1,...,f_n$ układu równań (368) są funkcjami klasy C^1 w obszarze $\Omega\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Załóżmy ponadto, że w pewnym otoczeniu punktu $(t_0,x)=(t_0,x_1,...,x_n)\in\Omega$ nie będącym punktem równowagi układu (368), istnieje n całek pierwszych funkcyjnie niezależnych $g_1,...,g_n$ tego układu. Niechi g będzie dowolną całką pierwszą układu (368) w tym otoczeniu.

TEZA:

Wtedy

$$g(t, x_1, ..., x_n) = F(g_1(t, x_1, ..., x_n), ..., g_n(t, x_1, ..., x_n))$$
(369)

w pewnym otoczeniu punktu $(t_0, \overset{o}{x})$, gdzie F jest funkcją klasy C^1

DOWÓD:

Dla $(t_0,x)\in\Omega$ rozwiązanie φ układu (368) spełniające warunek $\varphi(t_0)=x$ oznaczmy symbolem $\varphi(\,\cdot\,;t_0,x)$. Oczywiście $\varphi(t_0;t_0,x)=x$. Rozpisując ostatną równość we współrzędnych otrzymamy

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0;t_0,x_1,\ldots,x_n) = x_1,\\ \vdots & \vdots\\ \varphi_n(t_0;t_0,x_1,\ldots,x_n) = x_n. \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \\ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

0

Załóżmy, że $(t_0, x) \in \Omega$ nie jest punktem równowagi układu (368).

Niech $I \times U$ będzie otoczeniem punktu (t_0, X) tak dobranym, że dla każdego $(t, x) \in I \times U$ rozwiązanie $\varphi(\cdot; t, x)$ jest określone w punkcie t_0 . Ponadto, ponieważ funkcje w powyższym wyznaczniku są ciągłe, możemy otoczenie to dobrać tak, aby

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ (t_0;t,x_1,...,x_n) & ... & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} \\ (t_0;t,x_1,...,x_n) & ... & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \\ \end{bmatrix} \neq 0,$$

dla $(t,x) \in I \times U$. Onacza to, że funkcje $\varphi_1(t_0; \cdot, \cdot), ..., \varphi_n(t_0; \cdot, \cdot)$ są funkcyjnie niezależne w zbiorze $I \times U$. Przy przyjętych założeniach o funkcjach $f_1, ..., f_n$, przez każdy punkt $(t,x) \in I \times U$ przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie $\varphi(\cdot; t, x)$ układu (368).

Ponadto, jeśli $y = \varphi(s; t, x)$, to $x = \varphi(t; s, y)$, $s \in I$. Dla $(t, x) \in I \times U$ połóżmy $\tilde{x} = \varphi(t_0; t, x)$.

Zgodnie z powyższymi obserwacjami wartość \tilde{x} jest stała na każdej całce (tzn. jeśli Γ jest wykresem całki układu (368) to $\varphi(t_0;t,x)=\mathrm{const}\,$ dla dowolnego $(t,x)\in\Gamma$.)

Zatem dla dowolnego $s \in I$ mamy

$$\begin{split} \varphi_1(t_0;s,\varphi(s;t,x))) &= \varphi_1(t_0;s,y) = \varphi_1(t_0;t,x) = \tilde{x}_1,\\ &\vdots\\ \varphi_n(t_0;s,\varphi(s;t,x))) &= \varphi_n(t_0;s,y) = \varphi_n(t_0;t,x) = \tilde{x}_n. \end{split}$$

gdzie $y = \varphi(s; t, x)$.

Wynika stąd, że funkcje $\varphi_1(t_0; \cdot, \cdot), ..., \varphi_n(t_0; \cdot, \cdot)$ są funkcyjnie niezależnymi całkami pierwszymi układu (368) na zbiorze $I \times U$. Połóżmy

$$g_i(s, x_1, ..., x_n) = \varphi_i(t_0; s, x_1, ..., x_n), \quad i = 1, ..., n.$$

Oczywiście $g_1, ..., g_n$ są funkcyjnie niezależnymi całkami pierwszymi układu (368) na zbiorze $I \times U$.

Niech $g:I\times U\to \mathbb{R}$ będzie dowolną całką pierwszą układu (368). Ponieważ całka pierwsza jest stała wzdłuż dowolnego rozwiązania $x=x(s), \quad s\in I$, powtarzając rozumowanie dowodu warunku koniecznego twierdzenia otrzymamy dla $s\in I$ układ równań

$$\begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial s}(s,x(s)) + f_1(s,x(s)) & \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(s,x(s)) + \dots + f_n(s,x(s)) & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(s,x(s)) = 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial s} & \frac{\partial g_n}{\partial s} & \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(s,x(s)) + \dots + f_n(s,x(s)) & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(s,x(s)) = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial s} & \frac{\partial g}{\partial s} & \frac{\partial g}{\partial x_1}(s,x(s)) + \dots + f_n(s,x(s)) & \frac{\partial g}{\partial x_n}(s,x(s)) = 0. \end{cases}$$

Ponieważ dla dowolnego $s \in I$ powyższy układ posiada rozwiązanie niezerowe wzgledem $1, f_1, ..., f_n$, zatem wyznacznik współczynników musi być równy zeru, czyli

Z ostatniej równości wynika, że pochodne funkcji g są liniowo zależne od pochodnych funkcji $g_1,...,g_n$.

W konsekwencji

$$g(t,x) = F(g_1(t_0; t, x), ..., g_n(t_0; t, x)),$$

gdzie F jest funkcją klasy C^1 .

Rozważmy teraz układ autonomiczny

$$\begin{cases}
\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n), \\
\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n),
\end{cases}$$
(370)

Załóżmy, że $f_n(x_1,...,x_n) \neq 0$. Dla i=1,...,n-1 połóżmy

 $\tilde{f}_i(x_1,...,x_n) = \frac{f_i(x_1,...,x_n)}{f_n(x_1,...,x_n)}$

oraz $s = x_n$. Wówczas

$$\frac{\frac{dx_i}{dt}}{\frac{dx_n}{dt}} = \frac{\frac{dx_i}{dx_n}}{\frac{dx_n}{ds}} = \frac{\frac{dx_i}{ds}}{\frac{ds}{ds}}, \quad i = 1, ..., n-1.$$

Zatem układ (4) możemy zapisać w formie:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{ds} = \tilde{f}_1(x_1, ..., x_{n-1}, s), \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{ds} = \tilde{f}_n(x_1, ..., x_{n-1}, s). \end{cases}$$
(371)

Zgodnie z poprzednim twierdzeniem, w otoczeniu dowolnego punktu nie będącego punktem równowagi, układ ten posiada n-1 funkcyjnie niezależnych całek pierwszych

$$g_1 = g_1(x_1, ..., x_{n-1}, s), ..., g_{n-1} = g_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}, s).$$

Ponadto, jeśli g jest całką pierwszą w tym otoczeniu, to $g = F \circ (g_1, ..., g_{n-1})$, gdzie F jest funkcją klasy C^1 .



Uwaga 45:

Jeśli (368) jest układem autonomicznym, to znaczy niezależnym od zmiennej t i ponadto $f_1 \neq 0$, to układ ten można sprowadzić do równoważnego układu n-1 równań

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{f_n}{f_1}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 1, aby znaleźć wszystkie całki pierwsze tego układu, wystarczy znać n-1 całek pierwszych funkcyjnie niezależnych.

Twierdzenie Gaussa-Greena i wzory Greena

Niech Ω będzie otwartym ograniczonym jednospójnym podzbiorem przestrzeni R^n z gładkim brzegiem $\partial\Omega$, co oznacza że w każdym punkcie $\partial\Omega$ istnieje wektor normalny do $\partial\Omega$.



TWIERDZENIE

Twierdzenie 30: Twierdzenie Gaussa-Greena.

ZAŁOŻENIA:

Niech $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie polem wektorowym klasy C^1 .

TEZA:

Wówczas

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_{\partial \Omega} F \cdot \nu \, dS,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \Gamma} \qquad \frac{\partial F_n}{\partial \Gamma}$$
(372)

gdzie $F=(F_1,...,F_n), \quad x=(x_1,...,x_n), \quad {\rm div}\, F=\frac{1\over \partial x_1}+\cdots+\frac{1}{\partial x_n}, \quad \nu=(\nu_1,...,\nu_n)$ jest unormowanym wektorem normalnym do $\partial\Omega$, skierowanym na zewnątrz obszaru Ω , a symbol \cdot oznacza iloczyn skalarny.

Jeśli $F = (0, ..., 0, F_k, 0, ..., 0)$ wówczas wzór (372) ma postać

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_k}{\partial x_k} dx = \int_{\partial \Omega} F_k \nu_k dS.$$
(373)

W szczególności ze wzoru (373) wynika, że dla dowolnej funkcji $\,u\in C^2(\Omega)\,$ mamy

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx = \int_{\partial \Omega} u \nu_k dS, \qquad k = 1, ..., n.$$
(374)

Niech $g:\Omega \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 . Podstawiając we wzorze (374) funkcje gu w miejsce u, otrzymamy tzw. wzór na

$$\int_{\Omega} g \frac{\partial u}{\partial x_k} dx = \int_{\partial\Omega} g u \nu_k dS - \int_{\Omega} u \frac{\partial g}{\partial x_k} dx, \qquad k = 1, ..., n.$$
(375)

المل

TWIERDZENIE

Twierdzenie 31: Wzory Greena.

ZAŁOŻENIA:

Załóżmy, że Ω jest otwartym ograniczonym jednospójnym podzbiorem przestrzeni \mathbb{R}^n z brzegiem $\partial\Omega$ klasy C^1 . Niech $u,v\in C^2(\overline{\Omega})$. Niech ν będzie unormowanym wektorem normalnym do brzegu $\partial\Omega$, skierowanym na zewnątrz obszaru Ω

TF7A.

Wówczas:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS,\tag{376}$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx,$$
(377)

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS. \tag{378}$$

DOWÓD:

Zależność (376) otrzymamy natychmiast przyjmując we wzorze (372)

$$F = \operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Zależność (377) otrzymamy, kładąc we wzorze (375) w miejsce funkcji g funkcje $\frac{\partial v}{\partial x_k}$, a następnie sumując po k od 1 do n

Aby uzyskać zależność (378) wystarczy we wzorze (377) zamienić rolę u i v a następnie otrzymaną równość odjąć od (377).

Tabela transformat Laplace'a

$$F(z) = \mathcal{L}(f(t))(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt.$$

Tabela 1: Transformaty Laplace'a

f(t)	$F(z) = \mathcal{L}(f(t)(z))$	f(t)	$F(z) = \mathcal{L}(f(t)(z))$
1	$\frac{1}{z}$	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(z-\lambda)^2+\omega^2}$
t ⁿ	$\frac{n!}{z^{n+1}}$	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{z-\lambda}{(z-\lambda)^2+\omega^2}$
sin <i>t</i>	$\frac{1}{z^2+1}$	sinh <i>ωt</i>	$\frac{1}{z^2 - \omega^2}$
cost	$\frac{z}{z^2+1}$	coshωt	$\frac{z}{z^2 - \omega^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{z-\lambda}$	$e^{\lambda t}\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{(z-\lambda)^2-\omega^2}$
$e^{\lambda t}t^n$	$\frac{n!}{(z-\lambda)^{n+1}}$	$e^{\lambda t} \cosh \omega t$	$\frac{z}{(z-\lambda)^2-\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{z^2 + \omega^2}$	$\delta(t)$	1
cosωt	$\frac{z}{z^2 + \omega^2}$	$\delta(t-\alpha)$	$e^{-\alpha z}$
t^{α}	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}$	$e^{\lambda t}t^{lpha}$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(z-\lambda)^{\alpha+1}}$
$H(t-\alpha)$	$\frac{e^{-\alpha z}}{z}$	$e^{\lambda(t-\alpha)}H(t-\alpha)$	$\frac{e^{-\alpha z}}{z - \lambda}$
$\frac{\sin \omega t}{t}$	$\frac{\omega}{z}$ arctg z	$(t-\alpha)^n H(t-\alpha)$	$e^{-\alpha z} \overline{z^{n+1}}$
tsin\omega t	$\frac{2\omega z}{(z^2 + \omega^2)^2}$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{(z+\alpha)^2}$
$t\cos\omega t$	$\frac{z^2 - \omega^2}{(z^2 + \omega^2)^2}$	$\left(t - \frac{\alpha t^2}{2}\right)e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{(z+\alpha)^3}$
$\sin^2 \omega t$	$\frac{2\omega^2}{z(z^2+4\omega^2)}$	$(1 - e^{-t})^n$	$\frac{n!}{z(z+1)(z+n)}$
$\cos^2 \omega t$	$\frac{z^2 + 2\omega^2}{z(z^2 + 4\omega^2)}$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{(z+\alpha)^2}$
$\frac{1-\cos\omega t}{\omega^2}$	$\frac{1}{z(z^2 + \omega^2)}$	$\frac{\sin\omega t - \omega t \cos\omega t}{2\omega^2}$	$\frac{1}{(z^2 + \omega^2)^2}$

Tabela transformat Fouriera

$$\hat{f}(y) = \mathcal{F}(f(x))(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x) dx.$$

Tabela 2: Transformaty Fouriera

f(x)	$\hat{f}(y) = \mathcal{F}(f(x))(y)$	f(x)	$\hat{f}(y) = \mathcal{F}(f(x))(y)$
1	$\sqrt{2\pi}\delta$	$1_{[-a,a]}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin ay}{y}$
δ	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\delta(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iay}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}_{i\mathrm{sgn}y}$	H(x)	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}_{\delta} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{iy}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}_{e^{- y }}$	e ^{iax}	$\sqrt{2\pi}\delta(y-a)$
x^n	$\sqrt{2\pi}(i)^n \delta^{(n)}$	$\max\{0, 1 - x \}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos y}{y^2}$
e^{-x^2}	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{y^2}{4}}$	sinx	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}i(\delta(y+1)-\delta(y-1))$
$\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$	$e^{-\alpha y^2}$	cosx	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\delta(y+1) + \delta(y-1) \right)$
$e^{-\alpha x }$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{y^2 + \alpha^2}$	1 _[0,1]	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin y}{\left(\frac{y}{y} + i \frac{\cos y - 1}{y}\right)}$
$\delta^{(n)}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}_{(iy)^n}$	sgnx	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{iy}$

Publikacja udostępniona jest na licencji Creative Commons Uznanie Autorstwa - Na tych samych warunkach 4.0. Pewne prawa zastrzeżone na rzecz autorów i Akademii Górniczo-Hutniczej.

Zezwala się na dowolne wykorzystanie treści publikacji pod warunkiem wskazania autorów i Akademii Górniczo-Hutniczej jako autorów oraz podania informacji o licencji tak długo, jak tylko na utwory zależne będzie udzielona taka licencja. Pełny tekst licencji dostępny na stronie https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pl.



Data generacji dokumentu: 2022-06-10 11:17:27

Oryginalny dokument dostępny pod adresem: http://pre-epodreczniki.open.agh.edu.pl/openagh-podreczniki_view.php? categId=4&handbookId=67