

Zadanie 1

Oblicz iloraz oraz resztę z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q , jeżeli:

- (a) $P(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 6$, $Q(x) = x - 5$;
- (b) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x^2 - 3x + 1$;
- (c) $P(x) = 3x^5 - 12x^4 + 7x^3 - 2x + 5$, $Q(x) = x^2 + 2x - 13$;
- (d) $P(x) = x^3 + 3x - 2i$, $Q(x) = x + 2i$.

Zadanie 2

Znajdź niektóre pierwiastki podanych wielomianów, znajdź pozostałe pierwiastki:

- (a) $W(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 7x - 3\sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2} + i$;
- (b) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 6x - 30$, $x_1 = 1 - 3i$;
- (c) $W(x) = x^6 + 2x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 22x^2 + 4x - 16$, $x_1 = i$, $x_2 = -\sqrt{2}i$.

Zadanie 3

Określ krotności pierwiastków. Ile jest różnych pierwiastków rzeczywistych? Ile zespolonych?

- (a) $W(x) = x^{19} + x^{14} - x^9 - x^4$;
- (b) $W(x) = x^{13} + 3x^{10} + 3x^7 + x^4$.

Zadanie 4

Znajdź pierwiastki wielomianu $W(x)$ a następnie rozłóż wielomian na czynniki nierozkładalne nad ciałem \mathbb{R} oraz nad ciałem \mathbb{C} .

- (a) $W(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$;
- (b) $W(x) = 4x^3 - 6x^2 - 8x + 15$;
- (c) $W(x) = x^3 + 7x^2 + 9x$;
- (d) $W(x) = x^5 - x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 12x - 12$;
- (e) $W(x) = x^6 - 64$;
- (f) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 27x^2 - 2x + 26$.

Zadanie 5

Znajdź pierwiastki rzeczywiste $W(x)$. Następnie za ich pomocą znajdź wszystkie pierwiastki.

- (a) $W(x) = x^3 + 63x - 316$;
- (b) $W(x) = x^3 - 63x - 162$;
- (c) $W(x) = x^3 - 6x - 4$.

Zadanie 6

Niech x_1 , x_2 , x_3 będą pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Nie obliczając x_1 , x_2 , x_3 :

- (a) Znajdź wielomian którego pierwiastkami są $x_1 + 3$, $x_2 + 3$, $x_3 + 3$;
- (b) Znajdź wielomian którego pierwiastkami są $\frac{1}{x_1+3}$, $\frac{1}{x_2+3}$, $\frac{1}{x_3+3}$;
- (c) Oblicz $\frac{1}{x_1+3} + \frac{1}{x_2+3} + \frac{1}{x_3+3}$;
- (d) * Znajdź wielomian którego pierwiastkami są x_1^2 , x_2^2 , x_3^2 ;

Zadanie 7

Wielomian $W(x) = x^3 - Ax + 15$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Suma dwóch z nich wynosi 5. Ile wynosi $|A|$?

Zadanie 8

Niech $W(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 7$ posiada pierwiastki x_1, x_2, x_3 . Oblicz $x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2$.

Odpowiedzi:

Zad.1. a) $(3x^2 + 14x + 63) \times (x - 5) + 321$, b) $(2x^2 + 3x + 11) \times (x^2 - 3x + 1) + 25x - 5$, c) $(3x^3 - 18x^2 + 82x - 398) \times (x^2 + 2x - 13) + 1860x - 5169$, d) $(x - i)^2(x + 2i)$.

Zad.2. a) $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2} - i, x_3 = \sqrt{2} + i$, b) $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = 1 - 3i, x_4 = 1 + 3i$, c) $x_1 = i, x_2 = -\sqrt{2}i, x_3 = -i, x_4 = \sqrt{2}i, x_5 = -4, x_6 = 2$.

Zad.3. a) $x = 0$ (4), -1 (2), 1 (1), $e^{i\frac{\pi}{5}}$ (2), $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ (1), $e^{i\frac{3\pi}{5}}$ (2), $e^{i\frac{4\pi}{5}}$ (1), $e^{i\frac{6\pi}{5}}$ (1), $e^{i\frac{7\pi}{5}}$ (2), $e^{i\frac{8\pi}{5}}$ (1), $e^{i\frac{9\pi}{5}}$ (2),

b) $x = -1$ (3), $x = 0$ (4), $x = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3), $x = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3).

Zad.4. a) $x_1 = -3, x_2 = -2i, x_3 = 2i$, b) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}, x_3 = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$, c) $x_1 = 0, x_2 = -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, x_3 = -\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$, d) $x_1 = 1, x_2 = -2i, x_3 = 2i, x_4 = -i\sqrt{3}, x_5 = i\sqrt{3}$, e) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = -1 - i\sqrt{3}, x_4 = -1 + i\sqrt{3}, x_5 = 1 - i\sqrt{3}, x_6 = 1 + i\sqrt{3}$, f) $x_1 = -i, x_2 = i, x_3 = 1 - 5i, x_4 = 1 + 5i$.

Zad.5. a) $x_1 = 4, x_2 = -2 - 5i\sqrt{3}, x_3 = -2 + 5i\sqrt{3}$, b) $x_1 = -6, x_2 = -3, x_3 = 9$, c) $x_1 = -2, x_2 = 1 - \sqrt{3}, x_3 = 1 + \sqrt{3}$.

Zad.6. a) $x^3 - 12x^2 + 45x - 53$, b) $1 - 12x + 45x^2 - 53x^3$, c) $\frac{45}{53}$, d) $x^3 - 9x^2 + 6x - 1$.

Zad.7. 22.

Zad.8. 35.