

## Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych

Anna Bahyrycz

### Definicja 1

Przestrzeń wektorową  $\mathbb{R}^n$  z iloczynem skalarnym  $x \circ y$  i normą  $\|x\| = \sqrt{x \circ x}$  nazywamy *n-wymiarową przestrzenią euklidesową*.

### Uwaga 1

Norma euklidesowa  $\|\cdot\|$ , jak każda norma, zadaje *metrykę*

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

czyli funkcję  $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  spełniającą warunki:

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Zatem przestrzeń euklidesowa jest *przestrzenią metryczną*.

## Przestrzeń euklidesowa

Dla każdej liczby naturalnej  $n$  oznaczmy przez  $\mathbb{R}^n$  zbiór wszystkich uporządkowanych ciągów składających się z  $n$  liczb rzeczywistych  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Liczby  $x_1, \dots, x_n$  nazywamy *współrzędnymi elementu  $x$* .

Elementy zbioru  $\mathbb{R}^n$  nazywamy *wektorami (lub punktami)*.

Dla  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$  określamy działania:

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{ i } \quad \alpha \cdot x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Zbiór  $\mathbb{R}^n$  z takimi działaniami jest *przestrzenią wektorową nad  $\mathbb{R}$* .

W przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  wprowadzamy *iloczyn skalarny wektorów*  $x, y \in \mathbb{R}^n$ :

$$x \circ y := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

oraz odwzorowanie  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$  zdefiniowane następująco

$$\|x\| := \sqrt{x \circ x} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

nazywane *normą euklidesową*.

## Zbiory w przestrzeni euklidesowej

### Definicja 2

*Kulą (otwartą) o środku  $a$  ( $a \in \mathbb{R}^n$ ) i promieniu  $r$  ( $r > 0$ ) nazywamy zbiór*

$$K(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}.$$

### Definicja 3

*Otoczeniem punktu  $a \in \mathbb{R}^n$  nazywamy każdą kulę o środku  $a$  i dowolnym promieniu  $r$  i oznaczamy  $U(a, r)$ .*

### Definicja 4

*Sąsiedztwem punktu  $a \in \mathbb{R}^n$  nazywamy każdą kulę o środku  $a$  i dowolnym promieniu  $r$  bez środka i oznaczamy  $S(a, r)$ .*

## Definicja 5

Mówimy, że punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  jest **punktem wewnętrznym zbioru  $A$** , jeśli istnieje takie otoczenie punktu  $a$ , które jest zawarte w zbiorze  $A$ .

Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru nazywamy **wnętrzem zbioru**.

## Definicja 6

Zbiór nazywamy **zbiorem otwartym**, jeżeli każdy punkt tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym.

## Definicja 7

Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  (należący lub nie należący do zbioru  $A$ ) nazywamy **punktem skupienia zbioru  $A$** , jeżeli każde otoczenie punktu  $x$  zawiera co najmniej jeden element zbioru  $A$  różny od  $x$ .

## Definicja 8

Zbiór nazywamy **zbiorem domkniętym**, jeżeli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia.

## Definicja 13

Mówimy, że ciąg  $(x_k)$ ,  $x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$ , jest **zbieżny do**  $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$ , co oznaczamy

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_0,$$

jeśli

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_k, x_0) = 0.$$

## Twierdzenie 1

Jeśli  $x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^n$  i  $x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$ , to

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \lim_{k \rightarrow +\infty} x_i^{(k)} = x_i^{(0)} \text{ dla } i = 1, \dots, n$$

(czyli ciąg  $x_k$  jest zbieżny do  $x_0$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny po wszystkich swoich współrzędnych).

## Definicja 9

**Brzegiem zbioru  $A$**  nazywamy te wszystkie punkty przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  (należące lub nie należące do zbioru  $A$  zwane **punktami brzegowymi**), w których każdym otoczeniu znajduje się zarówno punkt należący jak i nie należący do zbioru  $A$ .

## Definicja 10

Zbiór nazywamy **zbiorem ograniczonym**, jeżeli zawiera się w pewnej kuli.

## Definicja 11

Zbiór otwarty nazywamy **obszarem**, jeżeli nie da się przedstawić jako suma mnogościowa dwóch zbiorów otwartych, niepustych i rozłącznych.

## Definicja 12

**Obszarem domkniętym** nazywamy sumę mnogościową obszaru oraz jego brzegu.

## Przykład 1

Zbadać czy podane ciągi są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wyznaczyć granicę)

$$\begin{aligned} 1. & \left( \sqrt[n]{n}, \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n, \frac{2n}{n-1}, \frac{\sin n}{n} \right) \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}} \right)^5 = e^5, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n-1} = 2, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n = 0, \end{aligned}$$

$$\text{Zatem ciąg jest zbieżny i } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{n}, \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n, \frac{2n}{n-1}, \frac{\sin n}{n} \right) = (1, e^5, 2, 0).$$

$$\begin{aligned} 2. & \left( 2, (-1)^n, n \sin \frac{1}{n} \right) \\ & \text{Ponieważ ciąg } (-1)^n \text{ nie ma granicy,} \\ & \text{więc ciąg } \left( 2, (-1)^n, n \sin \frac{1}{n} \right) \text{ nie jest zbieżny.} \end{aligned}$$

### Definicja 14 (Granica w sensie Cauchy'ego)

Niech  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  i  $x_0$  będzie punktem skupienia zbioru  $D$ .

Mówimy, że  $f$  ma **granice** w  $x_0$  równą  $g \in \mathbb{R}$ , co oznaczamy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g,$$

jeśli dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że dla każdego  $x \in D$  zachodzi implikacja

$$x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in K(g, \varepsilon),$$

czyli równoważnie

$$0 < d(x_0, x) < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon.$$

### Definicja 15 (Granica w sensie Heinego)

Niech  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  i  $x_0$  będzie punktem skupienia zbioru  $D$ .

Mówimy, że  $f$  ma **granice** w  $x_0$  równą  $g \in \mathbb{R}$ , co oznaczamy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g,$$

jeśli dla każdego ciągu  $(x_k)$  zachodzi implikacja

$$(x_k \in D \wedge x_k \neq x_0 \text{ dla } k \in \mathbb{N} \wedge \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x_0) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = g.$$

### Uwaga 2

Definicje granicy funkcji w sensie Cauchy'ego i w sensie Heinego są równoważne.

## Funkcje dwóch zmiennych

### Definicja 16

Niech  $D \subset \mathbb{R}^n$  i  $x_0 \in D$  będzie punktem skupienia zbioru  $D$  oraz  $A \subset D$ .

Mówimy, że funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest **ciągła w punkcie**  $x_0$  jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

(tzn. funkcja  $f$  ma w punkcie  $x_0$  granicę równą wartości).

Mówimy, że funkcja  $f$  jest **ciągła w zbiorze**  $A$  jeżeli jest ciągła w każdym punkcie zbioru  $A$ .

### Uwaga 3

Z Twierdzenia 1 dla  $n = 2$  otrzymujemy, że ciąg  $(a_k, b_k)$  jest zbieżny w  $\mathbb{R}^2$  do punktu  $(a_0, b_0)$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = a_0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = b_0.$$

Funkcję  $f(x, y)$  dwóch zmiennych określamy najczęściej za pomocą jednego lub kilku wzorów.

Wykresem funkcji dwóch zmiennych  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  nazywamy zbiór

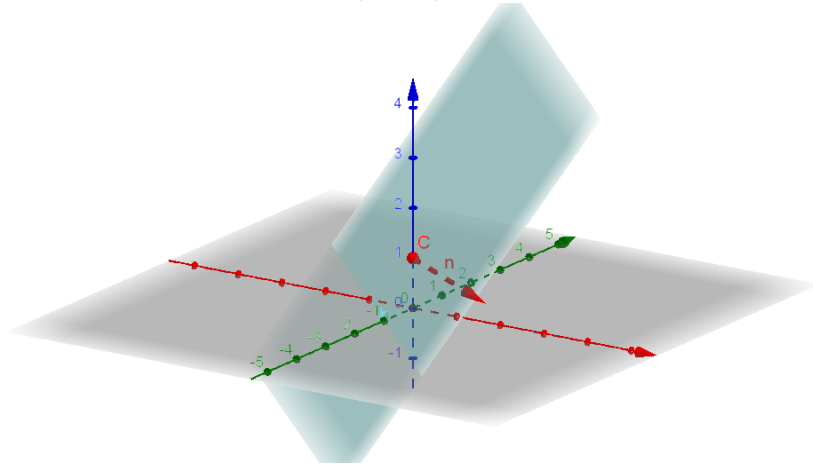
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}.$$

## Płaszczyzna

Wykresem funkcji

$$z = Ax + By + C$$

jest płaszczyzna o wektorze normalnym  $n = (A, B, -1)$  przechodzą przez  $(0, 0, C)$ .

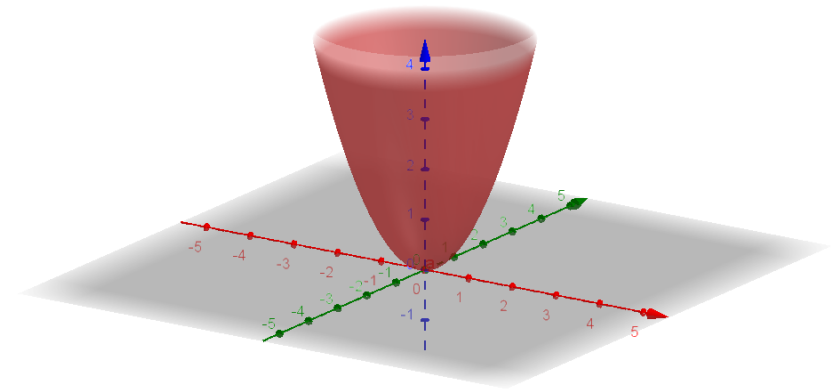


## Paraboloida obrotowa

Wykresem funkcji

$$z = a(x^2 + y^2), \quad a \neq 0$$

jest paraboloida obrotowa tj. powierzchnia powstała z obrotu paraboli  $z = ax^2$  wokół osi Oz.

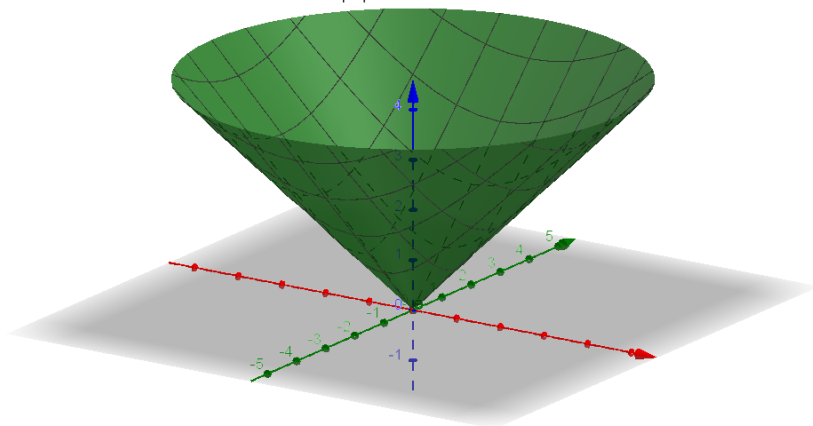


## Stożek obrotowy

Wykresem funkcji

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2}, \quad k \neq 0$$

jest stożek obrotowy tj. powierzchnia powstała z obrotu krzywej  $z = k|x|$  wokół osi Oz.

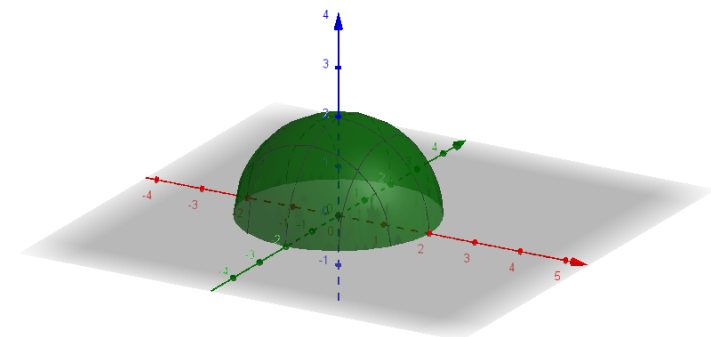


## Półsfera

Wykresem funkcji

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

jest górna (+) lub dolna (-) półsfera o środku w punkcie  $(0, 0, 0)$  i promieniu  $R$ .

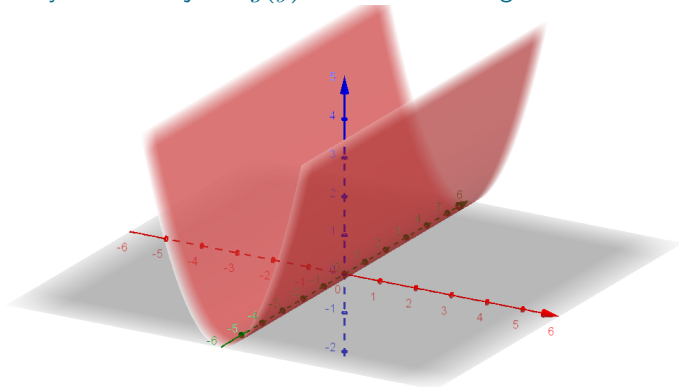


## Powierzchnia walcowa

Wykresem funkcji

$$z = g(x) \text{ lub } h = g(y)$$

jest powierzchnia walcowa powstała z przesunięcia wykresu funkcji  $z = g(x)$  dla  $y = 0$  równoległe do osi  $OY$  lub wykresu funkcji  $h = g(y)$  dla  $x = 0$  równoległe do osi  $OX$ .



## Przykład 2

Zbadać z definicji Heinego istnienie granicy funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Niech  $(x_n, y_n)$  będzie dowolnym ciągiem takim, że

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (0, 0) \text{ i } (x_n, y_n) \neq (0, 0) \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = 0.$$

Zatem

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

## Uwaga 4 (Granica i ciągłość funkcji dwóch zmiennych)

Niech  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  i  $D \subset \mathbb{R}^2$  oraz  $(x_0, y_0)$  będzie punktem skupienia zbioru  $D$ .

Z Definicji 14 (granicy w sensie Cauchy'ego) dla  $n = 2$  wynika, że funkcja  $f$  ma granicę w punkcie  $(x_0, y_0)$  równą  $g \in \mathbb{R}$ , co oznaczamy

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = g,$$

jeśli dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że dla każdego  $x \in D$  zachodzi implikacja

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - g| < \varepsilon.$$

Z Definicji 15 (granicy w sensie Heinego) dla  $n = 2$  wynika, że

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = g,$$

jeśli dla każdego ciągu  $(x_k, y_k)$  zachodzi implikacja

$$[(x_k, y_k) \in D \wedge (x_k, y_k) \neq (x_0, y_0) \text{ dla } k \in \mathbb{N} \wedge \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k, y_k) = (x_0, y_0)]$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k, y_k) = g.$$

## Przykład 3

Zbadać z definicji Heinego istnienie granicy funkcji

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ w punkcie } (0, 0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Niech  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0)$  oraz  $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ , oczywiście

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}, 0\right) = (0, 0) \text{ i } \left(\frac{1}{n}, 0\right) \neq (0, 0) \text{ dla } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0, 0) \text{ i } \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq (0, 0) \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Zatem badana granica nie istnieje.

### Twierdzenie 2 (O arytmetyce granic funkcji)

Jeżeli  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  oraz funkcje  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  mają skończone granice  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = a$  i  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = b$ , to

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f + g)(x,y) = a + b$ ,
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f - g)(x,y) = a - b$ ,
3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f \cdot g)(x,y) = a \cdot b$ ,
4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f}{g}(x,y) = \frac{a}{b}$ , o ile  $b \neq 0$ ,
5.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} cf(x,y) = ca$ , dla  $c \in \mathbb{R}$ .

### Uwaga 6

Wszystkie sposoby, które stosowaliśmy do liczenia granicy funkcji jednej zmiennej (za wyjątkiem reguły de l'Hospitala) możemy stosować do liczenia granicy funkcji dwóch zmiennych.

### Twierdzenie 3 (O granicy funkcji złożonej)

Jeżeli funkcje  $p, q$  i  $f$  oraz  $p_0, q_0, g \in \mathbb{R}$  spełniają warunki:

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} p(x,y) = p_0$  i  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} q(x,y) = q_0$ ,
2.  $(p(x,y), q(x,y)) \neq (p_0, q_0)$  dla każdego  $(x,y) \in S(x_0, y_0)$ ,
3.  $\lim_{(p,q) \rightarrow (p_0,q_0)} f(p,q) = g$ ,

to

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(p(x,y), q(x,y)) = g.$$

### Uwaga 5

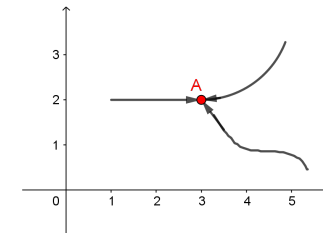
W Twierdzeniach 2 i 3 dopuszczalne są także granice niewłaściwe, o ile odpowiednie działania z takimi symbolami są oznaczone.

### Uwaga 7

Niech  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^2$  i  $(x_0, y_0)$  będzie punktem skupienia zbioru  $D_f$ .

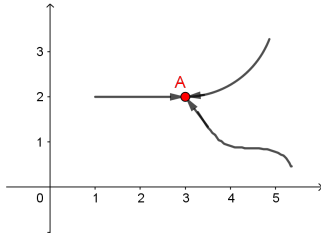
W punkcie  $(x_0, y_0)$  możemy badać granicę funkcji  $f$ .

Do punktu  $(x_0, y_0)$  można zmierzać po dowolnej krzywej kończącej się w tym punkcie.



- Jeżeli dla każdej drogi istnieje granica funkcji  $f$  i jest zawsze taka sama ( $= g$ ), to wtedy funkcja  $f$  ma granicę w punkcie  $(x_0, y_0)$ .
- Jeżeli dla dwóch różnych dróg wartości granic są różne, to funkcja  $f$  nie ma granicy w punkcie  $(x_0, y_0)$ .

## Uwaga 8



Jeżeli wprowadzimy współrzędne biegunowe

$$\begin{cases} x - x_0 &= \rho \cos \varphi \\ y - y_0 &= \rho \sin \varphi \end{cases},$$

to zauważmy, że

$$(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \Rightarrow \begin{cases} \rho \rightarrow 0 \\ \varphi - \text{dowolne, może się zmieniać} \end{cases}.$$

## Przykład 5

Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe pokazać, że nie istnieje granica funkcji

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Wówczas

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \varphi \rho \sin \varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \cos \varphi \sin \varphi = \cos \varphi \sin \varphi,$$

granica ta nie istnieje, bo jej wartość zależy od  $\varphi$ , a więc od drogi.

Wróćmy do Przykładu 2 i 3.

Jeżeli badamy granicę funkcji wymiernej (iloraz dwóch wielomianów) w punkcie  $(0, 0)$  i po wstawieniu w miejsce  $x$  i  $y$  zera otrzymujemy symbol nieoznaczony, to warto spróbować wprowadzić współrzędne biegunowe.

## Przykład 4

Korzystając z zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe pokazać, że istnieje granica funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Wówczas

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi \rho \sin \varphi}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos^2 \varphi \sin \varphi = 0.$$

Zatem

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

## Uwaga 9

Gdyby w Przykładzie 4 nie było polecenia, że mamy użyć współrzędnych biegunowych to granicę tą moglibyśmy wyznaczyć inaczej, na przykład tak

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0$$

lub

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0.$$

Ponieważ  $(|a| - |b|)^2 \geq 0$ , więc  $a^2 - 2|a||b| + b^2 \geq 0$ , a stąd  $a^2 + b^2 \geq 2|a||b|$ , czyli

$$\frac{2|a||b|}{a^2 + b^2} \leq 1 \text{ dla } a^2 + b^2 \neq 0, \quad (*)$$

co oznacza, że wyrażenie  $\frac{xy}{x^2 + y^2}$  dla  $x^2 + y^2 \neq 0$  jest ograniczone.

## Przykład 6

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{w punkcie } (0, 0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Sposób I.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi \rho \sin \varphi}{\rho^4 \cos^4 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{\rho^2 \cos^4 \varphi + \sin^2 \varphi} =$$
$$\begin{cases} 0 & \text{dla } \sin \varphi \neq 0 \\ 0 & \text{dla } \sin \varphi = 0 \\ ? & \text{dla } \sin \varphi \rightarrow 0 \end{cases},$$

Dobierzmy krzywą, tak aby  $\sin \varphi \rightarrow 0$ , a w mianowniku zredukowała się suma  $x^4 + y^2$ . Niech  $y = x^2$ , wtedy badana granica wyniesie:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Badana granica nie istnieje ponieważ znaleźliśmy drogę (zobacz Uwaga 7), dla której wartość granicy jest różna od wartości granicy dla innych dróg.

## Przykład 7

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \quad \text{w punkcie } (0, 0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Wówczas

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3 \varphi \rho \sin \varphi}{\rho^4 \cos^4 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \sin \varphi \neq 0 \\ 0 & \text{dla } \sin \varphi = 0 \\ ? & \text{dla } \sin \varphi \rightarrow 0 \end{cases},$$

Gdy mierzymy po krzywej  $y = x^2$ , to badana granica wyniesie:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{2x^4} = 0 \quad - \text{ to nie jest kontrprzykład, więc granica badana może istnieć.}$$

Spróbujmy oszacować naszą funkcję

$$0 \leq \left| \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} \right| = \left| \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} \cdot \frac{x}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad (\text{zobacz } (*)).$$

Badana granica istnieje i wynosi 0.

## Przykład 6 c.d.

Zbadać istnienie granicy funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \text{w punkcie } (0, 0). \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Sposób II.

Niech  $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0)$  oraz  $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ , oczywiście

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n}, 0 \right) = (0, 0) \quad \text{i} \quad \left( \frac{1}{n}, 0 \right) \neq (0, 0) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right) = (0, 0) \quad \text{i} \quad \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right) \neq (0, 0) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^4}} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{2 \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}.$$

Zatem badana granica nie istnieje.

## Przykład 8

Zbadać istnienie granicy funkcji (o ile istnieje ją wyznaczyć)

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{w punkcie } (0, 0).$$

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Wyznaczenie granicy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

sprawdzimy do znalezienia granicy funkcji jednej zmiennej.

$$\text{Podstawiając } u := x^2 + y^2 \text{ mamy } (x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow u \rightarrow 0,$$

Zatem rozważana granica przyjmuje równoważną postać

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} \stackrel{\left[ \frac{0}{0} \right]}{H} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{2u} = \frac{1}{2}.$$

Badana granica istnieje i wynosi  $\frac{1}{2}$ .



### Uwaga 10

Niech  $D \subset \mathbb{R}^2$  i  $(x_0, y_0) \in D$  będzie punktem skupienia zbioru  $D$ .

Z Definicji 16 (ciągłości funkcji w punkcie) dla  $n = 2$  wynika, że funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest **ciągła w punkcie**  $(x_0, y_0)$  jeżeli

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

### Twierdzenie 4

1. Suma dwóch funkcji ciągłych w punkcie  $(a,b)$  jest funkcją ciągłą w  $(a,b)$ .
2. Iloczyn dwóch funkcji ciągłych w punkcie  $(a,b)$  jest funkcją ciągłą w  $(a,b)$ .
3. Iloraz dwóch funkcji ciągłych w punkcie  $(a,b)$ , takich, że dzielnik w tym punkcie jest funkcją różną od zera, jest funkcją ciągłą w  $(a,b)$ .
4. Jeżeli funkcja  $F(g(x,y))$  jest określona na pewnym otoczeniu punktu  $(a,b)$ , funkcja  $g(x,y)$  jest ciągła w punkcie  $(a,b)$ , a funkcja  $F(u)$  jest ciągła w punkcie  $u = g(a,b)$  to funkcja złożona  $F(g(x,y))$  jest ciągła w punkcie  $(a,b)$ .

### Twierdzenie 5 (Weierstrassa)

Niech  $D \subset \mathbb{R}^2$  będzie obszarem domkniętym i ograniczonym. Wówczas jeżeli funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w  $D$  to:

1. jest ograniczona,
2. przyjmuje co najmniej raz w zbiorze  $D$  wartość najmniejszą i wartość największą.

### Przykład 9

Wyznaczyć zbiór punktów ciągłości funkcji:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{dla } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{dla } x^2+y^2 > 1 \end{cases}.$$

