

MATEMATYKA DLA STUDENTÓW POLITECHNIK

**Teresa Jurlewicz
Zbigniew Skoczylas**

**Algebra
liniowa 1**

Przykłady i zadania

Wydanie siódme



Semestr pierwszy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1.
Definicje, twierdzenia, wzory

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1.
Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1.
Laboratorium komputerowe

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1.
Definicje, twierdzenia, wzory

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1.
Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1.
Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1.
Laboratorium komputerowe

Semestr drugi

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2.
Definicje, twierdzenia, wzory

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2.
Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2.
Laboratorium komputerowe

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2.
Definicje, twierdzenia, wzory

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2.
Przykłady i zadania

Teresa Jurlewicz, Algebra liniowa 2. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2.
Laboratorium komputerowe

ISBN 83-85941-80-0



9 788385 941804 >

www.gis.wroc.pl



ALGEBRA LINIOWA 1

Teresa Jurlewicz Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA LINIOWA 1

Przykłady i zadania

Wydanie siódme poprawione



Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2001

Teresa Jurlewicz, Instytut Matematyki, Politechnika Wrocławskiego
e-mail: tjurlew@im.pwr.wroc.pl

Zbigniew Skoczylas, Instytut Matematyki, Politechnika Wrocławskiego
e-mail: skoczyla@im.pwr.wroc.pl

Copyright © 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001
by Oficyna Wydawnicza **GiS**

All rights reserved. No part of this book may be translated or reproduced in any
form without written permission from the copyright owner.

Printed in Poland

Skład skryptu wykonano w systemie **LATEX**.

ISBN 83-85941-80-0

Wydanie VII poprawione, Wrocław 2001
Oficyna Wydawnicza **GiS**, s.c.
Druk: TINTA Sp. z o.o.

Spis treści

WSTĘP	7
LICZBY ZESPOŁONE	9
Pierwszy tydzień	9
Przykłady	9
Zadania	16
Odpowiedzi i wskazówki	17
Drugi tydzień	18
Przykłady	18
Zadania	29
Odpowiedzi i wskazówki	30
Trzeci tydzień	34
Przykłady	34
Zadania	41
Odpowiedzi i wskazówki	42
WIELOMIANY	43
Czwarty tydzień	43
Przykłady	43
Zadania	48
Odpowiedzi i wskazówki	49
Piąty tydzień	50
Przykłady	50
Zadania	60
Odpowiedzi i wskazówki	61
MACIERZE I WYZNACZNIKI	63
Szósty tydzień	63
Przykłady	63
Zadania	73
Odpowiedzi i wskazówki	76
Siódmy tydzień	79
Przykłady	79

Zadania	87
Odpowiedzi i wskazówki	88
Ósmy tydzień	89
Przykłady	89
Zadania	97
Odpowiedzi i wskazówki	99
UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH	101
Dziewiąty tydzień	101
Przykłady	101
Zadania	108
Odpowiedzi i wskazówki	110
Dziesiąty tydzień	110
Przykłady	110
Zadania	117
Odpowiedzi i wskazówki	118
GEOMETRIA ANALITYCZNA W PRZESTRZENI	120
Jedenasty tydzień	120
Przykłady	120
Zadania	126
Odpowiedzi i wskazówki	127
Dwunasty tydzień	128
Przykłady	128
Zadania	140
Odpowiedzi i wskazówki	142
Trzynasty tydzień	143
Przykłady	143
Zadania	156
Odpowiedzi i wskazówki	157
Czternasty tydzień	158
Przykłady	158
Zadania	164
Odpowiedzi i wskazówki	166
ZBIORY ZADAŃ	167

Wstęp

Książka „*Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania*” jest drugą częścią zestawu podręczników do **Algebry liniowej 1**, przeznaczonego dla studentów Politechnik. Pozostałymi częściami zestawu są „*Definicje, twierdzenia, wzory*” oraz „*Kolokwia i egzaminy*”. Opracowanie obejmuje liczby zespolone, wielomiany, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych oraz geometrię analityczną w przestrzeni. Skrypt zawiera przykłady z pełnymi rozwiązaniami oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania. Do tych zadań podane są odpowiedzi lub wskazówki. Nierozwiążane zadania tworzą tzw. standardową listę zadań, która powinna być przerabiana przez studentów równolegle do materiału prezentowanego na wykładach. Aby to ułatwić listę zadań podzielono na 14 jednostek, przeznaczonych do realizacji w kolejnych tygodniach semestru. Lista zadań, program kursu oraz zasady jego zaliczania są umieszczone na stronach internetowych Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej pod adresem

www.im.pwr.wroc.pl

Przykłady i zadania z tego skryptu są podobnych typów oraz mają zbliżony stopień trudności do zadań, które studenci zwykle rozwiązują na kolokwiach i egzaminach. Zestawy zadań z kolokwiów i egzaminów z poprzednich lat można znaleźć w trzeciej części podręcznika pt. „*Kolokwia i egzaminy*”. Natomiast w drugiej części podręcznika pt. „*Definicje, twierdzenia, wzory*” zawarto materiał teoretyczny omawiany na wykładach.

Do siódmego wydania skryptu dodano kilka nowych przykładów i zadań. Ponadto poprawiono zauważone błędy i usterki. Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o poprzednich wydaniach skryptu.

Teresa Jurlewicz

Zbigniew Skoczylas

Liczby zespolone

Pierwszy tydzień

Podstawowe definicje i własności (1.1)[#]. Postać algebraiczna i sprzężenie liczby zespolonej (1.2).

Przykłady

● Przykład 1.1

Wykonać podane działania:

- $(-2 + 3i) + (7 - 8i)$;
- $(4i - 3) - (1 + 10i)$;
- $(\sqrt{2} + i) \cdot (3 - \sqrt{3}i)$;
- $\frac{2 - 3i}{5 + 4i}$.

Rozwiążanie

Działania na liczbach zespolonych w postaci algebraicznej wykonujemy tak, jak na wielomianach zmiennej i , pamiętając o warunku $i^2 = -1$.

- Mamy $(-2 + 3i) + (7 - 8i) = (-2 + 7) + (3 - 8)i = 5 - 5i$.
- Mamy $(4i - 3) - (1 + 10i) = (-3 - 1) + (4 - 10)i = -4 - 6i$.
- Mamy

$$(\sqrt{2} + i) \cdot (3 - \sqrt{3}i) = \sqrt{2} \cdot 3 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}i + 3i - \sqrt{3}i^2 = (3\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{6})i.$$

- Mamy

$$\frac{2 - 3i}{5 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(5 - 4i)}{(5 + 4i)(5 - 4i)} = \frac{10 - 8i - 15i + 12i^2}{25 - 16i^2} = \frac{-2 - 23i}{41} = -\frac{2}{41} - \frac{23}{41}i.$$

● Przykład 1.2

Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające podane równania:

Liczby w nawiasach oznaczają numery paragrafów w skrypcie autorów pt. „Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory”.

- a) $x(2+3i) + y(4-5i) = 6 - 2i$;
 b) $(x-i) \cdot (2-iy) = 11 - 23i$;
 c) $\frac{x}{2-3i} + \frac{y}{3+2i} = 1$.

Rozwiązanie

W rozwiązyaniu wykorzystamy fakt mówiący, że dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są równe ich części rzeczywiste i urojone, tzn.

$$z_1 = z_2 \iff \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

a) Mamy

$$x(2+3i) + y(4-5i) = (2x+4y) + (3x-5y)i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $x(2+3i) + y(4-5i) = 6 - 2i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ 3x - 5y = -2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 1$, $y = 1$.

b) Mamy

$$(x-i) \cdot (2-iy) = (2x-y) + (-2-xy)i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $(x-i)(2-iy) = 11 - 23i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x - y = 11, \\ -2 - xy = -23. \end{cases}$$

Układ ten jest kolejno równoważny układom równań:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 2x - 11, \\ -2 - x(2x - 11) = -23 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = 2x - 11, \\ 2x^2 - 11x - 21 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x - 11, \\ x = 7 \text{ lub } x = -\frac{3}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 7, \\ y = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -\frac{3}{2}, \\ y = -14. \end{cases} \end{aligned}$$

c) Mamy

$$\begin{aligned} \frac{x}{2-3i} + \frac{y}{3+2i} &= \frac{x(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} + \frac{y(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} \\ &= \frac{2x+3xi}{13} + \frac{3y-2yi}{13} = \frac{2x+3y}{13} + \frac{3x-2y}{13}i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $\frac{x}{2-3i} + \frac{y}{3+2i} = 1$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} \frac{2x+3y}{13} = 1, \\ \frac{3x-2y}{13} = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 2$, $y = 3$.

● **Przykład 1.3**

W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania:

a) $z^2 + 3\bar{z} = 0$; b) $2z + (1+i)\bar{z} = 1 - 3i$;

c) $z^2 - z + 1 = 0$; d) $\frac{z+1}{\bar{z}-1} = -1$;

e*) $z^4 - 4iz^3 - 6z^2 + 4iz + 1 = 0$; f) $(z+\bar{z}) + i(z-\bar{z}) = 2i - 6$;

g) $(i-3)z = 5 + i - z$; h) $\frac{1-3i}{3z+2i} = \frac{2i-3}{5-2iz}$.

Rozwiązań

a) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} z^2 + 3\bar{z} &= (x+iy)^2 + 3\overline{(x+iy)} = x^2 - y^2 + 2xyi + 3x - 3yi \\ &= x^2 - y^2 + 3x + (2xy - 3y)i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $z^2 + 3\bar{z} = 0$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 3x = 0, \\ 2xy - 3y = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny kolejno układom

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - y^2 + 3x = 0 \\ y(2x - 3) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 3x = 0 \\ y = 0 \text{ lub } x = \frac{3}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \text{ lub } \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Równanie $z^2 + 3\bar{z} = 0$ ma zatem cztery rozwiązania:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -3, \quad z_3 = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i), \quad z_4 = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{3}i).$$

b) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} 2z + (1+i)\bar{z} &= 2(x+iy) + (1+i)(x-iy) = 2x + 2iy + x - iy + ix + y \\ &= (3x+y) + (x+y)i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $2z + (1+i)\bar{z} = 1 - 3i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x + y = -3. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 2$, $y = -5$. Zatem $z = 2 - 5i$.

c) I sposób. W rozwiązaniu wykorzystamy wzory na pierwiastki równania kwadratowego $az^2 + bz + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$ oraz $a \neq 0$:

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

W tych wzorach δ jest jedną z liczb zespolonych spełniających warunek $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$. Dla równania kwadratowego $z^2 - z + 1 = 0$ mamy $\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$. Zatem

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

II sposób. Wyrażenie $z^2 - z + 1$ przekształcamy do postaci kanonicznej, a następnie zapisujemy jako różnicę kwadratów otrzymując

$$z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0.$$

$$\text{Stąd } z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

d) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy dla $\bar{z} \neq 1$ mamy

$$\frac{z+1}{\bar{z}-1} = -1 \iff z+1 = -\bar{z}+1 \iff (x+1)+iy = (-x+1)+iy.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron tego równania, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x+1 = -x+1, \\ y = y. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są pary $x = 0, y \in \mathbb{R}$. Zatem rozwiązaniem równania $\frac{z+1}{\bar{z}-1} = -1$ są liczby zespolone postaci $z = iy$, gdzie $y \in \mathbb{R}$. Oczywiście liczby te spełniają warunek $\bar{z} \neq 1$.

e) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{C}$. Równanie $z^4 - 4iz^3 - 6z^2 + 4iz + 1 = 0$ jest zatem równowiązne równaniu $(iz+1)^4 = 0$. Stąd $iz+1 = 0$, czyli $z = i$.

f) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} (z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) &= [(x + iy) + (x - iy)] + i[(x + iy) - (x - iy)] \\ &= 2x + i \cdot 2iy = 2(x - y). \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 6$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2(x - y) = -6, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Jest to układ sprzeczny, zatem rozważane równanie nie ma rozwiązań.

g) Przekształcamy rozważane równanie do postaci

$$(i - 3 + 1)z = 5 + i.$$

Stąd wynika, że

$$z = \frac{5+i}{-2+i} = \frac{(5+i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-9-7i}{5}.$$

h) Dla $z \neq -\frac{2}{3}i$ oraz $z \neq -\frac{5}{2}i$ rozważane równanie jest równoważne równaniu

$$(1-3i)(5-2iz) = (3z+2i)(2i-3).$$

Stąd wynika, że

$$5-2iz-15i-6z=6iz-9z-4-6i,$$

a więc

$$z(-2i-6-6i+9)=(-5+15i-4-6i).$$

Zatem

$$z = \frac{-9+9i}{3-8i} = \frac{(-9+9i)(3+8i)}{(3-8i)(3+8i)} = \frac{-99-45i}{73} = -\frac{99}{73} - \frac{45}{73}i.$$

● Przykład 1.4

Zbadać, dla jakich wartości parametrów rzeczywistych a, b równanie $3\bar{z}-2z=a+bi$ ma rozwiązanie.

Rozwiązańe

Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie rozwiązaniem rozważanego równania. Wówczas

$$3\bar{z}-2z=a+bi \iff 3(x-iy)-2(x+iy)=a+bi \iff x-i(5y)=a+bi.$$

Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x = a, \\ -5y = b. \end{cases}$$

Układ ten ma rozwiązanie dla dowolnych wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$.

● Przykład 1.5

Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających podane warunki:

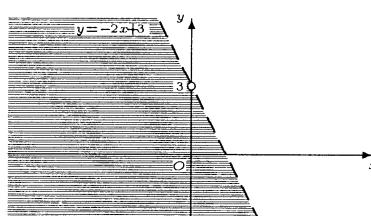
- a) $\operatorname{Im}[(1+2i)z-3i] < 0$;
- b) $\operatorname{Re}(z-i)^2 \geq 0$;
- c) $z^2 = 2\operatorname{Re}(iz)$;
- d) $\operatorname{Re}(z^3) \geq \operatorname{Im}(z^3)$.

Rozwiązańe

a) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie dowolną liczbą zespoloną. Wówczas

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[(1+2i)z-3i] &< 0 \iff \operatorname{Im}[(1+2i)(x+iy)-3i] < 0 \\ &\iff \operatorname{Im}[(x-2y)+(2x+y-3)i] < 0 \\ &\iff 2x+y-3 < 0 \\ &\iff y < -2x+3. \end{aligned}$$

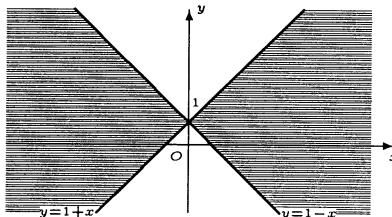
Poszukiwany zbiór jest półpłaszczyzną otwartą, bez prostej $y = -2x+3$ (zobacz rysunek).



b) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie dowolną liczbą zespoloną. Wówczas

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z-i)^2 \geq 0 &\iff \operatorname{Re}[(x+iy-i)^2] \geq 0 \iff \operatorname{Re}[x+i(y-1)]^2 \geq 0 \\ &\iff \operatorname{Re}[x^2 - (y-1)^2 + 2x(y-1)i] \geq 0 \iff x^2 - (y-1)^2 \geq 0 \\ &\iff x^2 \geq (y-1)^2 \iff |x| \geq |y-1|. \end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór jest sumą dwóch obszarów kątowych ograniczonych prostymi $y = 1-x$, $y = 1+x$, łącznie z tymi prostymi (zobacz rysunek).



c) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie dowolną liczbą zespoloną. Wówczas

$$\begin{aligned} z^2 = 2 \operatorname{Re}(iz) &\iff (x+iy)^2 = 2 \operatorname{Re}[i(x+iy)] \\ &\iff x^2 - y^2 + i2xy = 2 \operatorname{Re}[-y+ix] \\ &\iff x^2 - y^2 + i2xy = -2y \end{aligned}$$

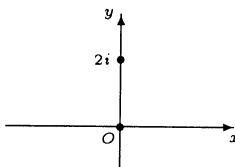
Ostatnia równość jest równoważna układowi równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2y, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest kolejno równoważny układom równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ x = 0 \text{ lub } y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Poszukiwany zbiór składa się zatem z dwóch punktów $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$ (zobacz rysunek).



d) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie dowolną liczbą zespoloną. Wówczas

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

Zatem

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z^3) \geq \operatorname{Im}(z^3) &\iff x^3 - 3xy^2 \geq 3x^2y - y^3 \iff x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y \geq 0 \\ &\iff (x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy(x+y) \geq 0 \\ &\iff (x+y)(x^2 - 4xy + y^2) \geq 0 \\ &\iff (x+y)[(y-2x)^2 - 3x^2] \geq 0 \\ &\iff (y+x)[y - (2 + \sqrt{3})x][y - (2 - \sqrt{3})x] \geq 0. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest równoważna alternatywie warunków:

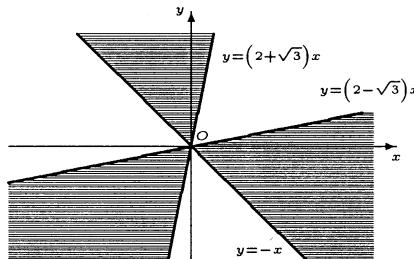
$$y + x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \geq 0 \\ \text{lub}$$

$$y + x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \leq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \leq 0 \\ \text{lub}$$

$$y + x < 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \geq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \leq 0 \\ \text{lub}$$

$$y + x < 0 \text{ oraz } y - (2 + \sqrt{3})x \leq 0 \text{ oraz } y - (2 - \sqrt{3})x \geq 0.$$

Rozwiązań tej nierówności przedstawiono na rysunku.



Uwaga. W dalszej części skryptu przedstawimy krótszy sposób rozwiązania przykładu d) (patrz **Przykład 2.8**).

● Przykład 1.6

Naszkicować zbiór wszystkich liczb zespolonych z , dla których liczba $w = \frac{z}{z+i}$ jest

a) rzeczywista; b) czysto urojona.

Rozwiązanie

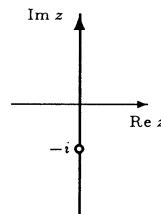
Zauważmy najpierw, że $z \neq -i$. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Przedstawiamy liczbę w w postaci

$$w = \frac{x+iy}{x+i(y+1)} = \frac{(x+iy)(x-i(y+1))}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x^2+y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} + i \frac{-x}{x^2+(y+1)^2}.$$

a) Liczba w jest rzeczywista wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Im} w = 0$. Warunek ten oznacza, że

$$\operatorname{Im} w = \frac{-x}{x^2+(y+1)^2} = 0,$$

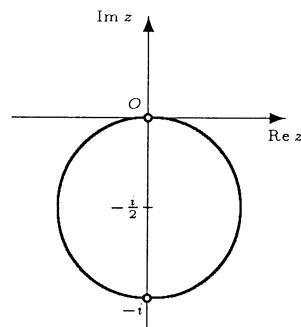
tzn. $x = 0$. Szukany zbiór jest osią urojoną bez punktu $-i$ (rysunek obok).



b) Liczba w jest czysto urojona wtedy i tylko wtedy, gdy $w \neq 0$ oraz $\operatorname{Re} w = 0$. Stąd $z \neq 0$ oraz

$$\operatorname{Re} w = \frac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + (y+1)^2} = 0.$$

Mamy zatem $x^2 + y^2 + y = 0$, czyli $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $z_0 = -\frac{i}{2}$ i promieniu $r = \frac{1}{2}$. Z poprzednich rozważań wynika, że z okręgu tego należy wykluczyć punkty 0 oraz $-i$. Szukany zbiór przedstawiono na rysunku obok.

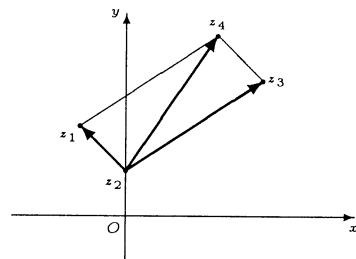


● Przykład 1.7

Punkty $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = i$ oraz $z_4 = 2 + 4i$ są wierzchołkami równoległoboku. Wyznaczyć położenie wierzchołka z_3 tego równoległoboku.

Rozwiązanie

W rozwiążaniu wykorzystamy interpretację geometryczną sumy liczb zespolonych. Wektor reprezentujący sumę $w_1 + w_3$ jest przekątną równoległoboku zbudowanego na wektorach reprezentujących liczby zespolone w_1 i w_3 . Zatem szukanym wierzchołkiem tego równoległoboku spełnia warunek $z_4 - z_2 = (z_1 - z_2) + (z_3 - z_2)$. Stąd $z_3 = z_4 - z_1 + z_2 = (2+4i) - (-1+2i) + i = 3+3i$.



Zadania

○ Zadanie 1.1

Wykonać podane działania:

- a) $(1 - 3i) + (4 - 5i)$;
- b) $(1 + \sqrt{2}i) - (\sqrt{3} - 6i)$;
- c) $(\sqrt{7} - \sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3}i)$;
- d) $\frac{2+3i}{1+i}$;
- e) $z \cdot \overline{w}$, $\frac{z^2}{w}$, $\frac{z-w}{\overline{z}+\overline{w}}$, $\frac{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} w}{z+w}$ dla $z = 5 - 2i$, $w = 3 + 4i$.

○ Zadanie 1.2

Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające podane równania:

- a) $x(2+3i) + y(5-2i) = -8+7i$;
- b) $(2+yi) \cdot (x-3i) = 7-i$;
- c) $\frac{1+yi}{x-2i} = 3i-1$;
- d) $\frac{x+yi}{x-yi} = \frac{9-2i}{9+2i}$.

○ **Zadanie 1.3**

W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania:

- a) $z^2 = 4\bar{z}$; b) $\frac{1+i}{z} = \frac{2-3i}{\bar{z}}$; c) $z^2 - 4z + 13 = 0$;
 d) $(z+2)^2 = (\bar{z}+2)^2$; e) $2z + \bar{z} = 6 - 5i$; f*) $z^3 - 6iz^2 - 12z + 8i = 0$;
 g) $(1+i)z + 3(z-i) = 0$; h) $\frac{2+i}{z-1+4i} = \frac{1-i}{2z+i}$.

○ **Zadanie 1.4**

Zbadać, dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbf{R}$ równanie $\bar{z} - i \operatorname{Im} z = a + bi$ ma rozwiązanie.

○ **Zadanie 1.5**

Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających podane warunki:

- a) $\operatorname{Re}(iz + 2) \geq 0$; b) $\operatorname{Im} z^2 < 0$; c) $\overline{z-i} = z-1$;
 d) $\frac{4}{z} = \bar{z}$; e) $z\bar{z} + (5+i)z + (5-i)\bar{z} + 1 = 0$; f) $\operatorname{Im} \frac{1+iz}{1-iz} = 1$.

○ **Zadanie 1.6**

Niech $u = \frac{z+4}{z-2i}$, $v = \frac{z}{iz+4}$, gdzie $z \in \mathbf{C}$. Naszkicować zbiór wszystkich liczb zespolonych z , dla których:

- a) liczba u jest rzeczywista; b) liczba u jest czysto urojona;
 c) liczba v jest rzeczywista; d) liczba v jest czysto urojona.

○ **Zadanie 1.7**

Punkty z_1, z_2, z_3 płaszczyzny zespolonej są wierzchołkami trójkąta. Wyznaczyć położenie punktu przecięcia środkowych tego trójkąta.

Wskazówka. Wykorzystać fakt, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w stosunku $2 : 1$ licząc od wierzchołka.

○ **Zadanie* 1.8**

Uzasadnić, że pole trójkąta, którego jeden wierzchołek jest w początku układu, a pozostałe dwa są w punktach $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, wyraża się wzorem $\frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{z}_1 \cdot z_2)|$.

Odpowiedzi i wskazówki

1.1 a) $5 - 8i$; b) $1 - \sqrt{3} + (6 + \sqrt{2})i$; c) 10 ; d) $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$; e) $7 - 26i, -\frac{17 + 144i}{25}, \frac{7 - 11i}{17}, \frac{24 + 11i}{34}$.

1.2 a) $x = 1, y = -2$; b) nie istnieją takie liczby; c) $x = 5, y = 17$;

d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, y = -\frac{2}{9}x$.

1.3 a) $0, 4, -2 + 2i\sqrt{3}, -2 - 2i\sqrt{3}$; b) brak rozwiązań; c) $2 - 3i, 2 + 3i$; d) $\operatorname{Re} z = -2$ lub $\operatorname{Im} z = 0$; e) $2 - 5i$; f*) $2i$; g) $\frac{3+12i}{17}$; h) $\frac{7-i}{6}$.

1.4 $a, b \in \mathbf{R}$.

1.5 a) półpłaszczyzna $\operatorname{Im} z \leq 2$; b) druga i czwarta ćwiartka układu współrzędnych bez obu osi; c) zbiór pusty; d) okrąg o środku 0 i promieniu 2 ; e) okrąg o środku $-5 + i$ i promieniu 5 ; f) okrąg o środku $1 - i$ i promieniu 1 bez punktu $-i$.

1.6 a) prosta przechodząca przez punkty $-4, 2i$ bez punktu $2i$; b) okrąg o środku $-2 + i$ i promieniu $\sqrt{5}$ bez punktów -4 oraz $2i$; c) okrąg o środku $2i$ i promieniu 2 bez punktu $4i$; d) oś urojona bez punktów 0 oraz $4i$.

1.7 $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$.

Drugi tydzień

Moduł i argument liczby zespolonej (1.3). Postać trygonometryczna liczby zespolonej (1.4).

Przykłady

● **Przykład 2.1**

Obliczyć moduły podanych liczb zespolonych:

a) $4i$; b) $12i - 5$; c) $\sqrt{7} + \sqrt{29}i$;

d) $(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} + \sqrt{3})i$;

e) $\sin \alpha + i \cos \alpha$, gdzie $\alpha \in \mathbf{R}$.

Rozwiązanie

Moduł liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$, jest określony wzorem $|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$. Zatem

a) $|4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$;

b) $|12i - 5| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$;

c) $|\sqrt{7} + \sqrt{29}i| = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{29})^2} = \sqrt{36} = 6$;

d) $|(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} + \sqrt{3})i| = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$;

e) $|\sin \alpha + i \cos \alpha| = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sqrt{1} = 1$.

● **Przykład 2.2**

Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

- a) $|z + 1 - 2i| = 3$;
 b) $2 \leq |z + i| < 4$;
 c) $|(1+i)z - 2| \geq 4$;
 d) $\left| \frac{z+3}{z-2i} \right| \geq 1$;
 e) $\operatorname{Re}(z+1) < 0$ oraz $|i-z| \leq 3$;
 f) $|z^2 + 4| \leq |z - 2i|$.

Rozwiązanie

Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1, z_2 płaszczyzny zespolonej (zobacz rysunek).

a) Mamy

$$|z + 1 - 2i| = 3 \iff |z - (-1 + 2i)| = 3.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości $r = 3$ od punktu $z_0 = -1 + 2i$. Jest to zatem okrąg o środku w punkcie $z_0 = -1 + 2i$ i promieniu $r = 3$ (zobacz rysunek).

b) Mamy

$$2 \leq |z + i| < 4 \iff 2 \leq |z - (-i)| < 4.$$

Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości nie mniejszej niż $r_1 = 2$ od punktu $z_0 = -i$ oraz w odległości mniejszej niż $r_2 = 4$ od tego punktu. Jest to zatem pierścień kołowy o środku w punkcie $z_0 = -i$ promieniu wewnętrznym $r_1 = 2$ i promieniu zewnętrznym $r_2 = 4$. Okrąg o promieniu $r_1 = 2$ należy do tego pierścienia, a okrąg o promieniu $r_2 = 4$ nie należy do niego (zobacz rysunek).

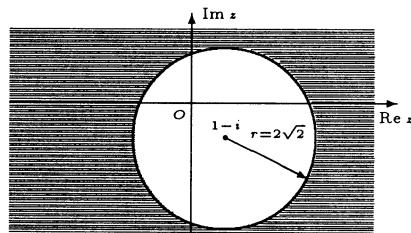
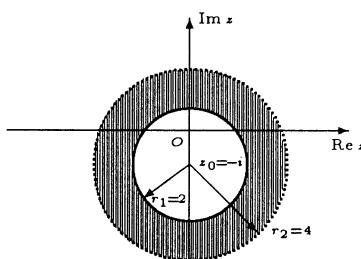
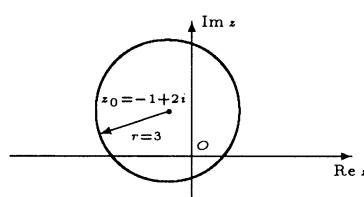
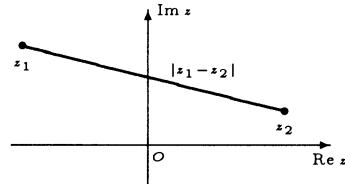
c) Mamy

$$\begin{aligned} |(1+i)z - 2| \geq 4 &\iff \left| (1+i) \cdot \left(z - \frac{2}{1+i} \right) \right| \geq 4 \iff |1+i| \cdot |z - (1-i)| \geq 4 \\ &\iff \sqrt{2} |z - (1-i)| \geq 4 \iff |z - (1-i)| \geq 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

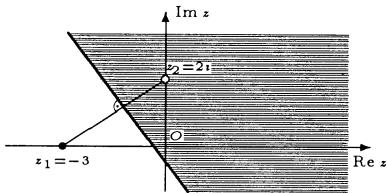
Szukany zbiór składa się z punktów z położonych w odległości nie mniejszej niż $r = 2\sqrt{2}$ od punktu $z_0 = 1 - i$. Jest to zatem zewnętrze koła o środku w punkcie $z_0 = 1 - i$ i promieniu $r = 2\sqrt{2}$. Okrąg o promieniu $r = 2\sqrt{2}$ należy do tego zbioru (zobacz rysunek).

d) Dla $z \neq 2i$ mamy

$$\left| \frac{z+3}{z-2i} \right| \geq 1 \iff |z+3| \geq |z-2i| \iff |z - (-3)| \geq |z - 2i|.$$



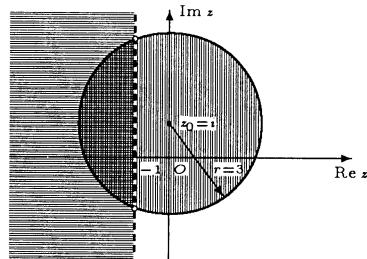
Szukany zbiór składa się z punktów z , których odległość od punktu $z_1 = -3$ jest nie mniejsza niż odległość od punktu $z_2 = 2i$. Jest to zatem półpłaszczyzna ograniczona symetralną odcinkiem o końcach z_1, z_2 , bez punktu $z_2 = 2i$. Symetralna ta należy do szukanego zbioru (zobacz rysunek).



e) Poszukiwany zbiór jest wspólną częścią zbiorów określonych przez warunki:

$$\operatorname{Re}(z+1) < 0, \quad |i-z| \leqslant 3.$$

Pierwszy warunek określa lewą półpłaszczyznę otwartą ograniczoną prostą $x+1=0$. Drugi warunek określa koło domknięte o środku w punkcie $z_0 = i$ i promieniu $r = 3$. Wspólną część tych zbiorów przedstawiono na rysunku.



f) Mamy

$$\begin{aligned} |z^2 + 4| \leqslant |z - 2i| &\iff |(z+2i) \cdot (z-2i)| \leqslant |z-2i| \\ &\iff |z+2i| \cdot |z-2i| \leqslant |z-2i| \\ &\iff |z+2i| = 0 \\ &\text{albo } |z-2i| > 0 \\ &\text{oraz } |z+2i| \leqslant 1. \end{aligned}$$

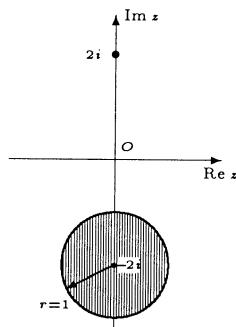
Warunek

$$|z-2i|=0$$

wyznacza zbiór $\{2i\}$, a warunki

$$|z+2i| \leqslant 1 \text{ oraz } |z-2i| > 0$$

określają koło domknięte o środku w punkcie $z_0 = -2i$ i promieniu $r = 1$. Sumę tych zbiorów przedstawiono na rysunku.



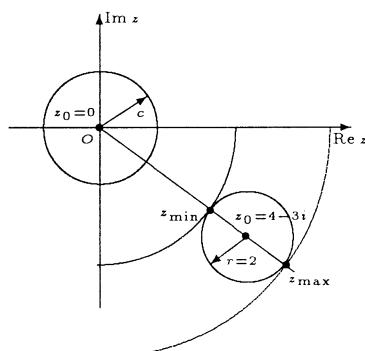
● Przykład 2.3

Znaleźć najmniejszą i największą wartość modułu liczby zespolonej z , jeżeli

$$|z - 4 + 3i| \leqslant 2.$$

Rozwiązańie

Zbiór liczb zespolonych z spełniających nierówność $|z - 4 + 3i| \leq 2$ jest kołem domkniętym o środku w punkcie $z_0 = 4 - 3i$ i promieniu $r = 2$. Zbiór liczb zespolonych spełniających równanie $|z| = c$, gdzie $c > 0$, jest okręgiem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu c . Promień c będzie najmniejszy, największy, gdy okrąg $|z| = c$ będzie styczny odpowiednio zewnętrznie, wewnętrznie z okręgiem $|z - 4 + 3i| = 2$. Zatem najmniejsza, największa wartość $|z|$ jest równa



$$|z_{\min}| = |z_0| - r = |4 - 3i| - 2 = 3,$$

$$|z_{\max}| = |z_0| + r = |4 - 3i| + 2 = 7.$$

Przykład 2.4

Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

- a) $-\sqrt{5}$; b) $-6 + 6i$; c) $-2i$; d) $\sqrt{3} + i$;
e) $\sin \alpha - i \cos \alpha$; f*) $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$; g) $1 - i \operatorname{ctg} \alpha$.

Uwaga. W ćwiczeniach e), f*), g) kąt α spełnia nierówności $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Rozwiązańie

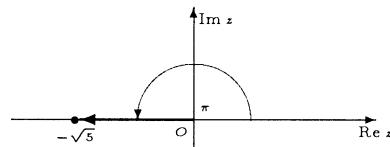
Każda liczba zespolona z można zapisać w postaci trygonometrycznej:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie r jest modułem, a φ argumentem liczby z .

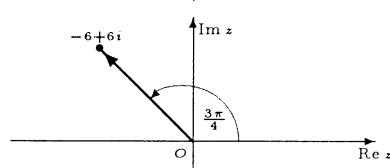
- a) Dla $z = -\sqrt{5}$ mamy $r = \sqrt{5}$ oraz $\varphi = \pi$. Zatem

$$-\sqrt{5} = \sqrt{5}(\cos \pi + i \sin \pi).$$



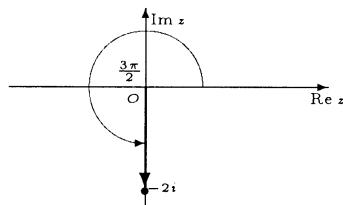
- b) Dla $z = -6 + 6i$ mamy $r = 6\sqrt{2}$ oraz $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Zatem

$$-6+6i = 6\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$



- c) Dla $z = -2i$ mamy $r = 2$ oraz $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Zatem

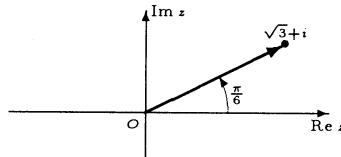
$$-2i = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$



d) Dla $z = \sqrt{3} + i$ mamy $r = 2$.

Stąd $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, więc $\arg z = \varphi = \frac{\pi}{6}$. Zatem

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$



e) Dla $z = \sin \alpha - i \cos \alpha$ mamy $r = 1$. Stąd $\cos \varphi = \sin \alpha$, $\sin \varphi = -\cos \alpha$. Więc $\arg z = \varphi = \frac{3\pi}{2} + \alpha$. Zatem

$$\sin \alpha - i \cos \alpha = 1 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) \right].$$

f*) Dla $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ mamy

$$r = \sqrt{(1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2(1 + \cos \alpha)} = 2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

oraz

$$z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Zatem $\arg z = \varphi = \frac{\alpha}{2}$, stąd $z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$. g) Dla $z = 1 - i \operatorname{ctg} \alpha$ mamy

$$r = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{1}{|\sin \alpha|} = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \text{oraz} \quad z = \frac{1}{\sin \alpha} (\sin \alpha - i \cos \alpha).$$

Zatem $\varphi = \frac{3\pi}{2} + \alpha$, stąd $z = \frac{1}{\sin \alpha} \left[\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) \right]$.

Przykład 2.5

Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

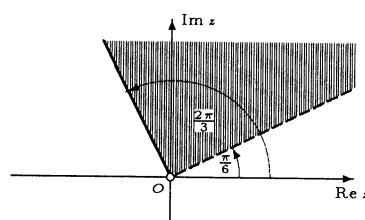
a) $\frac{\pi}{6} < \arg z \leqslant \frac{2\pi}{3}$; b) $\arg(z + 2 - i) = \pi$; c) $\pi \leqslant \arg [(-1 + i)z] \leqslant \frac{3\pi}{2}$;

d) $\frac{\pi}{2} < \arg(z^3) < \pi$; e) $\arg\left(\frac{i}{z}\right) = \frac{3\pi}{4}$; f) $\frac{2\pi}{3} \leqslant \arg(3i - z) \leqslant \frac{5\pi}{6}$.

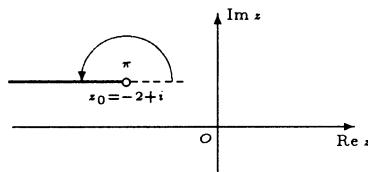
Rozwiązanie

Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy miarę φ kąta zorientowanego, utworzonego przez dodatnią część osi rzeczywistej $\operatorname{Re} z$ oraz promień wodzący liczbę z , przy czym $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ albo $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Ponadto $\arg 0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

a) Zbiór składa się z liczb zespolonych, których argumenty główne zawarte są w przedziale $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Jest to obszar kątowy ograniczony półprzestymi wychodzącymi z początku układu i tworzącymi kąty $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{2\pi}{3}$ z dodatnią częścią osi $\operatorname{Re} z$. Pierwsza z tych półprzestkich nie należy do tego zbioru.



b) Zbiór składa się z liczb zespolonych $w = z - (-2 + i)$, których argumenty główne są równe π . Jest to półprosta wychodząca z początku układu (zmienna w) i tworząca kąt π z dodatnią częścią osi $\text{Re } w$. W układzie współrzędnych ze zmienną z jest to ta sama półprosta (bez początku) przesunięta o wektor $z_0 = -2 + i$.



c) W rozwiążaniu wykorzystamy wzór $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ponieważ $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$, więc nierówność

$$\pi \leq \arg[(-1 + i)z] \leq \frac{3\pi}{2}$$

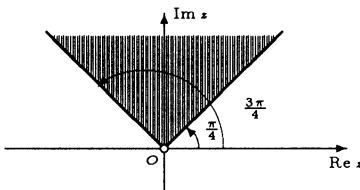
jest równoważna nierówności

$$\pi \leq \frac{3\pi}{4} + \arg z + 2k\pi \leq \frac{3\pi}{2}$$

dla pewnych $k \in \mathbb{Z}$. Ale $0 \leq \arg z < 2\pi$, więc $k = 0$. Stąd otrzymamy

$$\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Szukany zbiór jest domkniętym obszarem kątowym ograniczonym półprostymi wychodzącymi z punktu O (bez tego punktu) i tworzącymi kąty $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}$ z dodatnią częścią osi $\text{Re } z$.



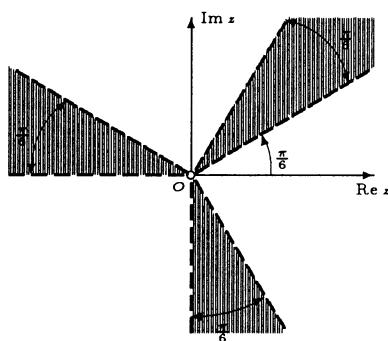
d) W rozwiążaniu wykorzystamy wzór $\arg(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $z \in \mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Nierówność $\frac{\pi}{2} < \arg(z^3) < \pi$ jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{\pi}{2} < 3 \cdot \arg z + 2k\pi < \pi$$

dla pewnych $k \in \mathbb{Z}$. Stąd

$$\frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3} - \frac{2k\pi}{3}.$$

Ale $0 \leq \arg z < 2\pi$, więc powyższa nierówność ma sens tylko dla $k = 0$, $k = -1$ lub $k = -2$. Wtedy przyjmuje ona postać $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ lub $\frac{5}{6}\pi < \arg z < \pi$ lub $\frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{5}{3}\pi$. Szukany zbiór składa się z trzech otwartych obszarów kątowych (bez początku układu).



e) W rozwiązyaniu wykorzystamy wzór $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$, gdzie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ oraz $z_2 \neq 0$. Ponieważ $\arg i = \frac{\pi}{2}$, więc równość $\arg\left(\frac{i}{z}\right) = \frac{3\pi}{4}$ jest równoważna równości

$$\frac{\pi}{2} - \arg z + 2k\pi = \frac{3\pi}{4}$$

dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$. Ale $0 \leq \arg z < 2\pi$, więc $k = 1$. Stąd $\arg z = \frac{7\pi}{4}$. Szukanym zbiorem jest półprosta (bez początku) wychodząca z punktu z i tworząca kąt $\frac{7\pi}{4}$ z dodatnią częścią osi $\operatorname{Re} z$.

f) W rozwiązyaniu wykorzystamy wzór $\arg(-z) = \arg z + \pi + 2k\pi$, dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$, gdzie $z \in \mathbf{C}$. Nierówność

$$\frac{2\pi}{3} \leq \arg(3i - z) \leq \frac{5\pi}{6}$$

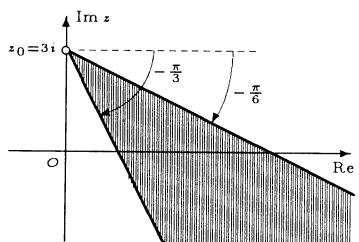
jest więc równoważna nierówności

$$\frac{2\pi}{3} \leq \arg(z - 3i) + \pi + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{6} \text{ dla pewnych } k \in \mathbf{Z}.$$

Ale $0 \leq \arg(z - 3i) < 2\pi$, więc powyższa nierówność ma sens tylko dla $k = -1$, stąd otrzymujemy zależność

$$\frac{5\pi}{3} \leq \arg(z - 3i) \leq \frac{11\pi}{6}.$$

Otrzymana nierówność określa domknięty obszar kątowy o wierzchołku w punkcie $z_0 = 3i$ (bez tego wierzchołka), ograniczony pół prostymi tworzącymi kąty $-\frac{\pi}{3}$ oraz $-\frac{\pi}{6}$ z dodatnią częścią osi $\operatorname{Re} z$.



● Przykład 2.6

Obliczyć wartości podanych wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

a) $(1+i)^7$; b) $(\sqrt{3}-i)^{32}$; c) $(-2+2i)^8$;

d) $(\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)^{10}$; e) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$; f) $\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^{14}$.

Rozwiążanie

W rozwiążaniu wykorzystamy wzór de Moivre'a

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

gdzie $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ oraz $n \in N$.

- a) Dla $z = 1 + i$ mamy $|z| = \sqrt{2}$ oraz $\arg z = \frac{\pi}{4}$. Zatem

$$\begin{aligned} (1+i)^7 &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^7 = (\sqrt{2})^7 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \\ &= 8\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 8\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 8 - 8i. \end{aligned}$$

- b) Dla $z = \sqrt{3} - i$ mamy $|z| = 2$ oraz $\arg z = \frac{11\pi}{6}$. Zatem

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}-i)^{32} &= \left[2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) \right]^{32} = 2^{32} \left(\cos \frac{176\pi}{3} + i \sin \frac{176\pi}{3} \right) \\ &= 2^{32} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2^{32} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2^{32} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^{31} (i\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

- c) Dla $z = -2 + 2i$ mamy $|z| = 2\sqrt{2}$ oraz $\arg z = \frac{3\pi}{4}$. Zatem

$$(-2+2i)^8 = \left[2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^8 = 2^{12} (\cos 6\pi + i \sin 6\pi) = 2^{12} (\cos 0 + i \sin 0) = 2^{12}.$$

- d) Dla $z = \cos 33^\circ + i \sin 33^\circ$ mamy $|z| = 1$ oraz $\arg z = 33^\circ$. Zatem

$$(\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)^{10} = 1^{10} (\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = \cos 30^\circ - i \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

- e) Dla $z_1 = 1 - i$ mamy $|z_1| = \sqrt{2}$ oraz $\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$, a dla $z_2 = \sqrt{3} + i$ mamy $|z_2| = 2$ oraz $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$. Zatem

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \right)^6 &= \frac{(1-i)^6}{(\sqrt{3}+i)^6} = \frac{\left[\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \right]^6}{\left[2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^6} \\ &= \frac{2^3 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) \right)}{2^6 (\cos \pi + i \sin \pi)} = \frac{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}}{-2^3} = -\frac{i}{8}. \end{aligned}$$

- f) Dla $z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ mamy $|z| = 1$ oraz $\arg z = \pi - \frac{\pi}{7}$. Zatem

$$\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)^{14} = \left[1 \left(\cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7} \right) \right]^{14} = 1^{14} (\cos 12\pi + i \sin 12\pi) = 1.$$

● **Przykład 2.7**

Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

- a) $\cos 3x$ przez funkcję $\cos x$;
- b) $\sin 6x$ przez funkcje $\sin x$ i $\cos x$;
- c*) $\operatorname{ctg} 4x$ przez funkcję $\operatorname{ctg} x$.

Rozwiążanie

a) Obliczymy wartość wyrażenia $(\cos x + i \sin x)^3$ wykorzystując dwa wzory: wzór de Moivre'a oraz wzór dwumianowy Newtona. Stosując wzór de Moivre'a otrzymamy równość

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x.$$

Z kolei ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^3 &= (\cos x)^3 + \binom{3}{1}(\cos x)^2(i \sin x) + \binom{3}{2}(\cos x)(i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x \\ &= (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x). \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste prawych stron obu równości otrzymamy

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) \\ &= \cos x (\cos^2 x - 3 + 3 \cos^2 x) = \cos x (4 \cos^2 x - 3). \end{aligned}$$

b) Obliczymy wartość wyrażenia $(\cos x + i \sin x)^6$ wykorzystując dwa wzory: wzór de Moivre'a oraz wzór dwumianowy Newtona. Stosując wzór de Moivre'a otrzymamy równość

$$(\cos x + i \sin x)^6 = \cos 6x + i \sin 6x.$$

Z kolei ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^6 &= (\cos x)^6 + \binom{6}{1}(\cos x)^5(i \sin x) + \binom{6}{2}(\cos x)^4(i \sin x)^2 + \binom{6}{3}(\cos x)^3 \\ &\quad \times (i \sin x)^3 + \binom{6}{4}(\cos x)^2(i \sin x)^4 + \binom{6}{5}(\cos x)(i \sin x)^5 + (i \sin x)^6 \\ &= \cos^6 x + 6i \cos^5 x \sin x - 15 \cos^4 x \sin^2 x - 20i \cos^3 x \sin^3 x \\ &\quad + 15 \cos^2 x \sin^4 x + 6i \cos x \sin^5 x - \sin^6 x \\ &= (\cos^6 x - 15 \cos^4 x \sin^2 x + 15 \cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x) \\ &\quad + i(6 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \sin^5 x). \end{aligned}$$

Porównując części urojone prawych stron obu równości otrzymamy

$$\sin 6x = 6 \cos^5 x \sin x - 20 \cos^3 x \sin^3 x + 6 \cos x \sin^5 x.$$

c*) Podobnie jak poprzednio wyrazimy $\sin 4x$ i $\cos 4x$ przez $\sin x$ i $\cos x$. Ze wzoru dwumianowego Newtona mamy

$$(\cos x + i \sin x)^4 = (\cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) + i(4 \cos^3 \sin x - 4 \cos x \sin^3 x).$$

Z kolei ze wzoru de Moivre'a mamy $(\cos x + i \sin x)^4 = \cos 4x + i \sin 4x$. Zatem
 $\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$ oraz $\sin 4x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x$.
Stąd dla $x \neq \frac{k\pi}{4}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} 4x &= \frac{\cos 4x}{\sin 4x} = \frac{\cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x}{4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x} = \frac{\frac{\cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^4 x}}{\frac{4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x}{\sin^4 x}} \\ &= \frac{\operatorname{ctg}^4 x - 6 \operatorname{ctg}^2 x + 1}{4 \operatorname{ctg}^3 x - 4 \operatorname{ctg} x}.\end{aligned}$$

● Przykład 2.8

Narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:

- a) $\operatorname{Re}(z^2) \geq 0$; b) $\operatorname{Im}(z^6) < 0$.

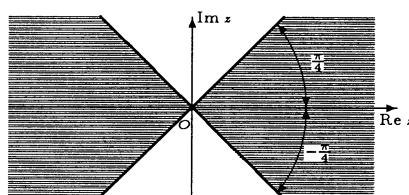
Rozwiążanie

W rozwiążaniu wykorzystamy postać trygonometryczną liczby zespolonej oraz wzór de Moivre'a.

- a) Dla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r \geq 0$ oraz $0 \leq \varphi < 2\pi$ mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z^2) \geq 0 &\iff \operatorname{Re}\{[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^2\} \geq 0 \\ &\iff \operatorname{Re}[r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)] \geq 0 \\ &\iff r^2 \cos 2\varphi \geq 0 \\ &\iff r = 0 \text{ lub } r > 0 \text{ i } \cos 2\varphi \geq 0 \\ &\iff r = 0 \text{ lub } r > 0 \text{ i } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right].\end{aligned}$$

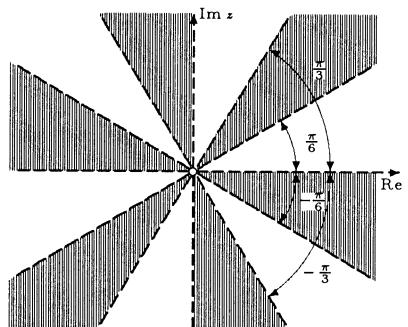
Poszukiwany zbiór składa się z dwóch domkniętych obszarów kątowych (zobacz rysunek).



- b) Dla $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r \geq 0$ oraz $0 \leq \varphi < 2\pi$, mamy

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(z^6) < 0 &\iff \operatorname{Im}\{[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^6\} < 0 \\ &\iff \operatorname{Im}[r^6(\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi)] < 0 \iff r^6 \sin 6\varphi < 0 \\ &\iff r > 0 \text{ i } \sin 6\varphi < 0 \\ &\iff r > 0 \text{ i } \varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right) \\ &\quad \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right).\end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór składa się z sześciu otwartych obszarów kątowych (rysunek).



● Przykład* 2.9

Wykorzystując wzór na sumę wyrazów zespolonego ciągu geometrycznego obliczyć

$$1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx, \text{ gdzie } n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}.$$

Rozwiązanie

Niech $z = \cos x + i \sin x$. Wtedy $z^k = \cos kx + i \sin kx$, zatem $\cos kx = \operatorname{Re} z^k$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Stąd mamy

$$\begin{aligned} 1 + \cos x + \dots + \cos nx &= \operatorname{Re} (1 + z + \dots + z^n) = \operatorname{Re} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1 - \cos(n+1)x - i \sin(n+1)x}{1 - \cos x - i \sin x} \\ &= \operatorname{Re} \frac{\frac{2 \sin^2 \frac{(n+1)x}{2}}{2} - 2i \sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2i \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \operatorname{Re} \frac{\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - i \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - i \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Re} \left(\sin \frac{(n+1)x}{2} - i \cos \frac{(n+1)x}{2} \right) \left(\sin \frac{x}{2} + i \cos \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{nx}{2}. \end{aligned}$$

Ostatni rachunek jest prawdziwy dla $z \neq 1$, to znaczy dla $x \neq 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Dla $x = 2k\pi$ mamy $1 + \cos 2k\pi + \dots + \cos n2k\pi = n + 1$.

Zadania

○ Zadanie 2.1

Obliczyć moduły podanych liczb zespolonych:

a) $-\sqrt{3}i$; b) $6 - 8i$; c) $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}i$; d) $1 + i \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; e) $\frac{1+3i}{3-4i}$.

○ Zadanie 2.2

Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:

a) $|z - 3 + 4i| = 1$; b) $\left| \frac{z - 2i}{z + 1} \right| = 1$; c) $2 \leq |iz - 5| < 3$;
 d) $|z + 1 - 2i| \geq 3$ oraz $|z - 3| < 4$; e) $\left| \frac{z + i}{z^2 + 1} \right| \geq 1$; f) $\sin(\pi|z + 2i|) > 0$;
 g*) $3|z + i| \leq |z^2 + 1| < 5|z - i|$.

○ Zadanie 2.3

Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu liczby zespolonej obliczyć, dla jakich liczb zespolonych spełniających warunek $|z| \leq 1$ wyrażenie $|2i - 3 - z|$ jest najmniejsze, największe.

○ Zadanie 2.4

Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

a) $7 + 7i$; b) $\sqrt{3} - i$; c) $-5 + 5\sqrt{3}i$;
 d) $\sin \alpha + i \cos \alpha$; e) $-\cos \alpha + i \sin \alpha$; f) $1 + i \operatorname{tg} \alpha$.

Uwaga. W ćwiczeniach d), e), f) kąt α spełnia nierówności $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

○ Zadanie 2.5

Narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:

a) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{6} < \arg(z + 3i) < \frac{\pi}{3}$; c) $\pi \leq \arg(iz) < 2\pi$;
 d) $\arg(z^6) = \pi$; e) $\frac{\pi}{3} \leq \arg(-z) \leq \frac{\pi}{2}$; f*) $\arg(\bar{z} - 1 - 2i) = \frac{3\pi}{2}$.

○ Zadanie 2.6

Obliczyć wartości podanych wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

a) $(1 - i)^{12}$; b) $(1 + \sqrt{3}i)^8$; c) $(2\sqrt{3} - 2i)^{30}$;
 d) $\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{10}$; e) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-i\sqrt{3})^6}$; f) $\left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}\right)^{24}$.

○ Zadanie 2.7

Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

a) $\sin 3x$ przez funkcję $\sin x$; b) $\cos 4x$ przez funkcje $\sin x$ i $\cos x$;
 c*) $\operatorname{tg} 6x$ przez funkcję $\operatorname{tg} x$; d*) $\operatorname{ctg} 5x$ przez funkcję $\operatorname{ctg} x$.

○ **Zadanie 2.8**

Narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

a) $\operatorname{Im}(z^3) < 0$; b) $\operatorname{Re}(z^4) \geq 0$; c) $\operatorname{Im}(z^2) \geq \operatorname{Re}[(\bar{z})^2]$; d) $\operatorname{Im}\frac{(1+i)z}{(1-i)\bar{z}} \geq 0$.

○ **Zadanie* 2.9**

Wykorzystując wzór na sumę wyrazów zespolonego ciągu geometrycznego obliczyć:

- a) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$; b) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$;
 c) $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$; d) $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x$;
 e) $1 + (1-i) + (1-i)^2 + \dots + (1-i)^n$;
 f) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots + (-1)^n \binom{n}{2m}$, $m = E\left(\frac{n}{2}\right)$, gdzie $n \in N$.

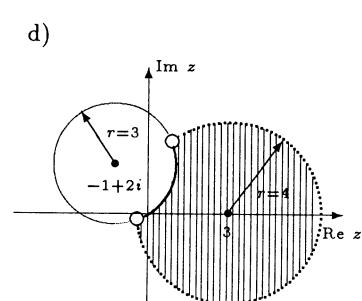
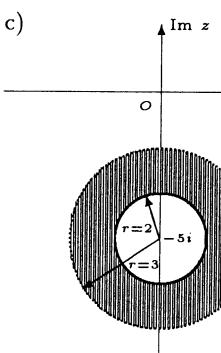
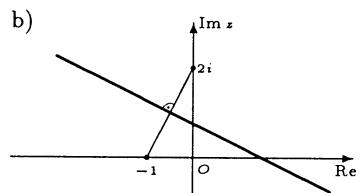
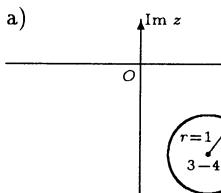
○ **Zadanie* 2.10**

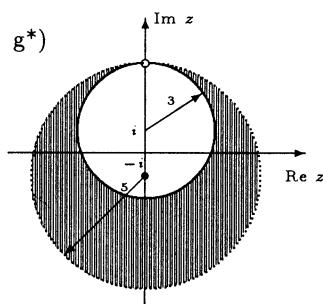
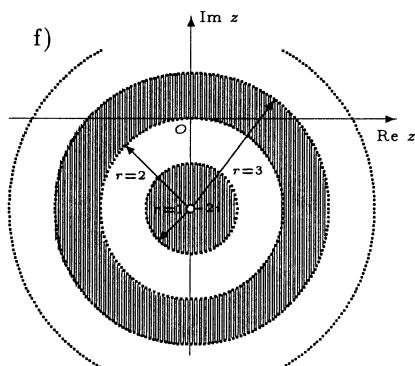
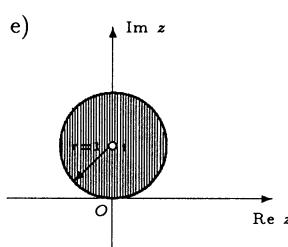
Uzasadnić, że funkcja $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ określona wzorem $f(t) = \frac{1+ti}{1-ti}$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, przekształca prostą \mathbf{R} na okrąg bez punktu.

Odpowiedzi i wskazówki

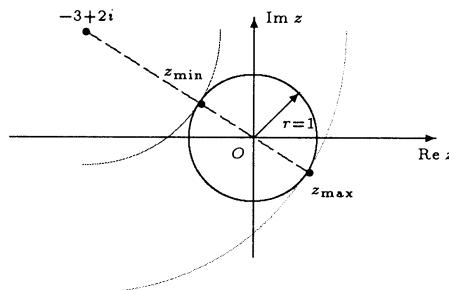
2.1 a) $\sqrt{3}$; b) 10; c) $\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$; d) $\frac{1}{\cos \alpha}$; e) $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

2.2 Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej:



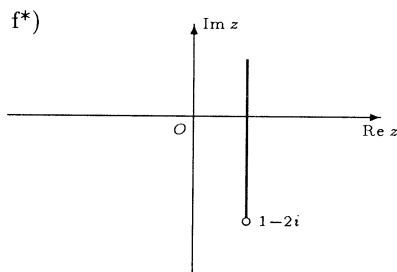
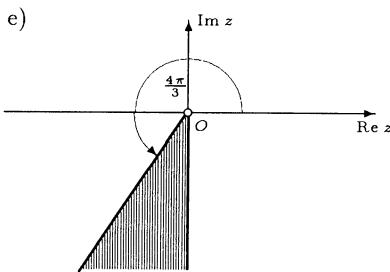
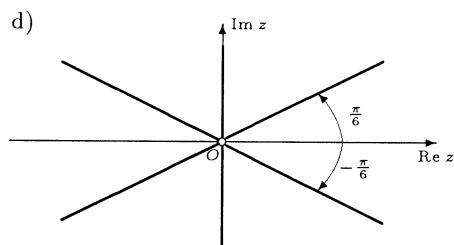
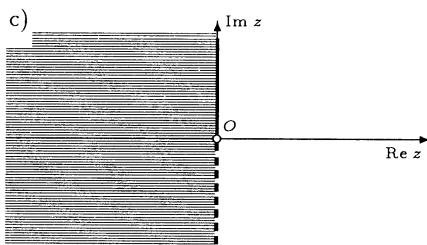
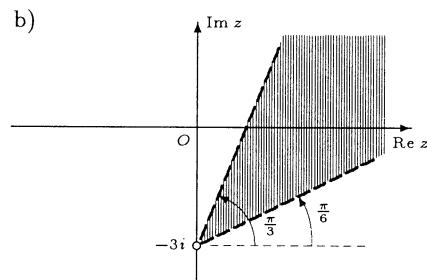
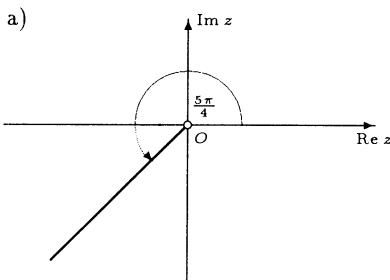


2.3 $z_{\min} = \frac{-3}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}}i$, $z_{\max} = \frac{3}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}}i$. Zobacz rysunek.



- 2.4 a) $7\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$; b) $2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$; c) $10 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$;
 d) $1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right)$; e) $1 (\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha))$;
 f) $\frac{1}{\cos \alpha} (\cos \alpha + i \sin \alpha)$.

2.5 Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej.

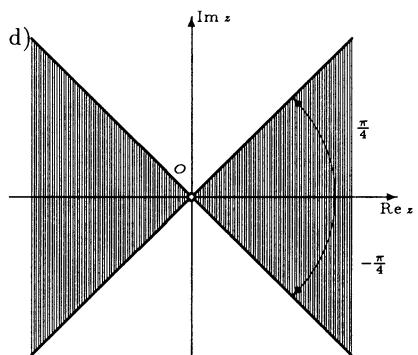
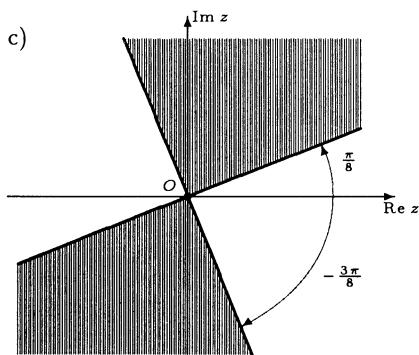
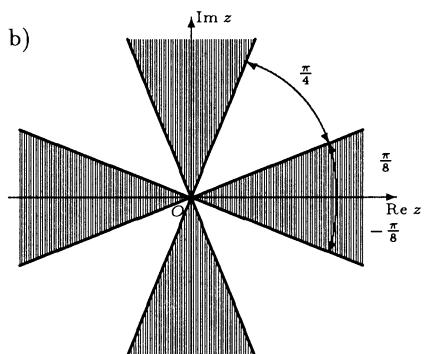
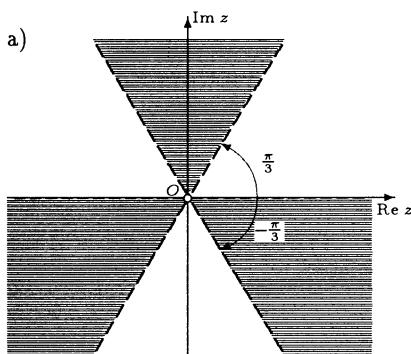


2.6 a) -2^6 ; b) $2^7 (-1 + \sqrt{3}i)$; c) -4^{30} ; d) $-i$; e) $-32i$; f) 1.

2.7 a) $\sin x (3 - 4 \sin^2 x)$; b) $\cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$;

c*) $\frac{2(3 \operatorname{tg} x - 10 \operatorname{tg}^3 x + 3 \operatorname{tg}^5 x)}{1 - 15 \operatorname{tg}^2 x + 15 \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^6 x}$; d*) $\frac{5 \operatorname{ctg} x - 10 \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^5 x}{1 - 10 \operatorname{ctg}^2 x + 5 \operatorname{ctg}^4 x}$.

2.8 Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione na rysunkach poniżej.



2.9* a) $\frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ dla $x \neq 2k\pi$ oraz 0 dla $x = 2k\pi$; b) $\frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$
 dla $x \neq 2k\pi$ oraz n dla $x = 2k\pi$; c) $\frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$ dla $x \neq 2k\pi$ oraz $n + \frac{1}{2}$ dla $x = 2k\pi$;
 d) $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$ dla $x \neq k\pi$ oraz 0 dla $x = k\pi$; e) $\sqrt{2^{n+1}} \left(\sin \frac{(n+1)\pi}{4} + i \cos \frac{(n+1)\pi}{4} \right) - i$;
 f) $(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}$.

2.10* Obrazem prostej R jest okrąg o środku $z_0 = 0$ i promieniu $r = 1$ bez punktu -1 .

Trzeci tydzień

Postać wykładnicza liczby zespolonej (1.5). Pierwiastkowanie liczb zespolonych (1.6).

Przykłady

● Przykład 3.1

Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej z rozwiązać podane równania:

a) $(\bar{z})^6 = 4|z^2|$; b) $\frac{|z|^2 z}{(\bar{z})^3} = -1$.

Rozwiązanie

Zastępując symbolem $e^{i\varphi}$ wyrażenie $\cos \varphi + i \sin \varphi$ występujące w postaci trygonometrycznej liczby zespolonej $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ otrzymamy postać wykładniczą tej liczby, tzn. wzór $z = re^{i\varphi}$. Przy rozwiązywaniu równań będziemy korzystać z tego, że dwie niezerowe liczby zespolone są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich moduły są równe, a ich argumenty różnią się o wielokrotność 2π , tzn. dla $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $r_1, r_2 > 0$, mamy

$$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2 \text{ oraz } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

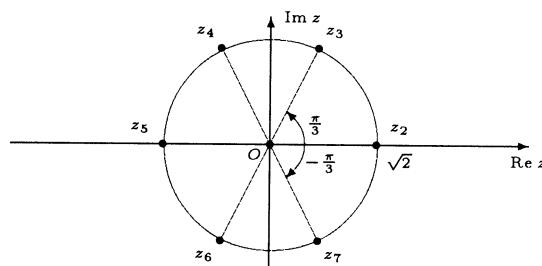
a) Liczba $z = 0$ spełnia równanie $(\bar{z})^6 = 4|z^2|$. Niech teraz $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Wówczas $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ oraz, ze wzoru de Moivre'a, $(\bar{z})^6 = r^6 e^{-6i\varphi}$. Dalej $|z^2| = r^2$, a więc

$$\begin{aligned} (\bar{z})^6 = 4|z^2| &\iff r^6 e^{-6i\varphi} = 4r^2 \iff r^6 e^{-6i\varphi} = 4r^2 e^{i\cdot 0} \\ &\iff \begin{cases} r^6 = 4r^2 \\ -6\varphi = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r = 0 \text{ lub } r = \sqrt{2} \\ \varphi = \frac{l\pi}{3}, \quad l = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Rozwiązaniami równania są zatem liczby

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{2}, \quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, \quad z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, \quad z_5 = -z_2, \quad z_6 = -z_3, \quad z_7 = -z_4.$$

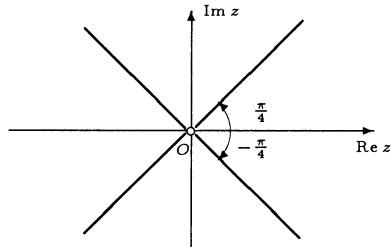
Są one przedstawione na rysunku poniżej.



b) Równoważnie możemy napisać, że $|z|^2 \cdot z = (-1) \cdot (\bar{z})^3$ dla $z \neq 0$. Niech $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Wówczas

$$\begin{aligned} |z|^2 \cdot z = (-1) \cdot (\bar{z})^3 &\iff r^2 \cdot (re^{i\varphi}) = e^{i\pi} \cdot (r^3 e^{-3i\varphi}) \\ &\iff r^3 e^{i\varphi} = r^3 e^{i(\pi-3\varphi)} \\ &\iff \begin{cases} r^3 = r^3 \\ \varphi = \pi - 3\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r \in (0, \infty), \\ \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Rozwiązań równania tworzą więc dwie proste nachylone do osi rzeczywistej pod kątami $\frac{\pi}{4}$ oraz $-\frac{\pi}{4}$ i przechodzące przez punkt O , ale bez tego punktu (rysunek).



● Przykład 3.2

Stosując wzory Eulera przedstawić $\cos^5 x$ w postaci sumy sinusów i cosinusów wielokrotności kąta x .

Rozwiązanie

Mamy $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. Stosując teraz wzór dwumianowy Newtona otrzymamy

$$\begin{aligned} \cos^5 x &= \frac{1}{2^5} (e^{ix} + e^{-ix})^5 \\ &= \frac{1}{2^5} \left[\binom{5}{0} (e^{ix})^5 (e^{-ix})^0 + \binom{5}{1} (e^{ix})^4 (e^{-ix})^1 + \binom{5}{2} (e^{ix})^3 (e^{-ix})^2 \right. \\ &\quad \left. + \binom{5}{3} (e^{ix})^2 (e^{-ix})^3 + \binom{5}{4} (e^{ix})^1 (e^{-ix})^4 + \binom{5}{5} (e^{ix})^0 (e^{-ix})^5 \right] \\ &= \frac{1}{2^5} (e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{2^4} \left(\frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} + 5 \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 10 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{16} (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x). \end{aligned}$$

● Przykład 3.3

Korzystając z definicji obliczyć podane pierwiastki:

- a) $\sqrt{4i-3}$; b) $\sqrt[3]{8}$.

Rozwiązańe

a) Niech $x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie szukanym pierwiastkiem. Wtedy $(x + iy)^2 = 4i - 3$. Stąd $x^2 + 2ixy - y^2 = 4i - 3$. Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

Rozwiązańem tego układu równań są pary liczb: $x = 1, y = 2$; $x = -1, y = -2$. Zatem $\sqrt{4i - 3} = \{1 + 2i, -1 - 2i\}$.

b) Niech $x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, będzie szukanym pierwiastkiem. Wtedy $(x + iy)^3 = 8$. Stąd $x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = 8$. Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 8, \\ 3x^2y - y^3 = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania tego układu wynika, że $y = 0$ lub $3x^2 = y^2$. Wykorzystując te zależności w pierwszym równaniu układu otrzymamy $x^3 = 8$ lub $-8x^3 = 8$. Stąd $x = 2$ lub $x = -1$. Ostatecznie rozwiązaniem układu równań są pary liczb: $x = 2, y = 0$; $x = -1, y = \sqrt{3}$; $x = -1, y = -\sqrt{3}$. Zatem $\sqrt[3]{8} = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$.

Przykład 3.4

Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

- a) $\sqrt{-2i}$; b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$; c) $\sqrt[6]{1}$.

Rozwiązańe

W rozwiązańu wykorzystamy wzór na pierwiastki stopnia n z liczby zespolonej $z \neq 0$ o argumentem φ . Wzór ten ma postać: $\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$, gdzie

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

- a) Dla $z = -2i$ mamy $|z| = 2$ oraz $\arg z = \frac{3\pi}{2}$. Zatem

$$\sqrt{-2i} = \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} \right) : k = 0, 1 \right\}.$$

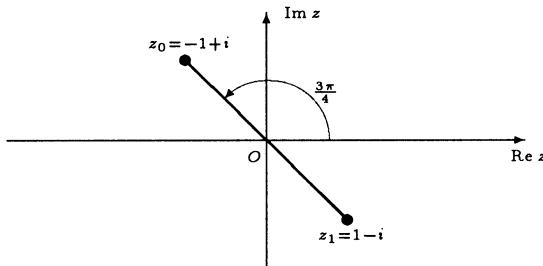
Dla $k = 0$ mamy

$$z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + i.$$

Dla $k = 1$ otrzymujemy

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i.$$

Zatem $\sqrt{-2i} = \{-1 + i, 1 - i\}$.



b) Dla $z = -8 + 8\sqrt{3}i$ mamy $|z| = 16$ oraz $\arg z = \frac{2\pi}{3}$. Zatem

$$\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \left\{ \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right) : k = 0, 1, 2, 3 \right\}.$$

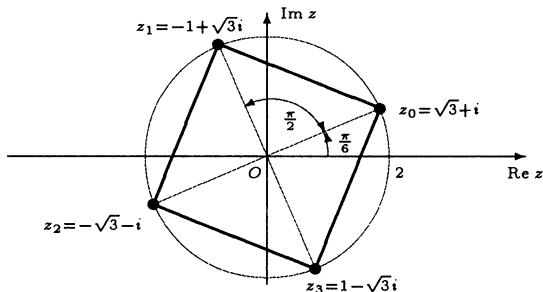
Tak więc dla $k = 0, 1, 2, 3$ mamy odpowiednio

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i,$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 + \sqrt{3}i,$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 - \sqrt{3}i.$$



Stąd $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \{\sqrt{3} + i, -1 + \sqrt{3}i, -\sqrt{3} - i, 1 - \sqrt{3}i\}$.

c) Dla $z = 1$ mamy $|z| = 1$ oraz $\arg z = 0$. Zatem

$$\sqrt[6]{1} = \left\{ \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{6} \right) : k = 0, 1, \dots, 5 \right\}.$$

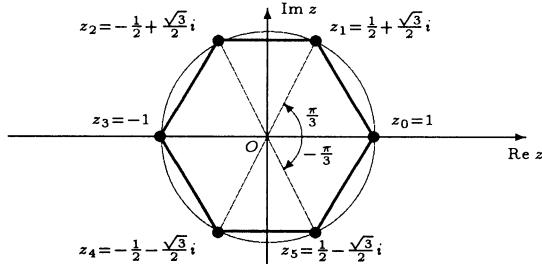
Tak więc dla $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ mamy odpowiednio

$$z_0 = 1 (\cos 0 + i \sin 0) = 1, \quad z_1 = 1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_2 = 1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = 1 (\cos \pi + i \sin \pi) = -1,$$

$$z_4 = 1 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_5 = 1 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ostatecznie $\sqrt[6]{1} = \left\{ 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$.



● Przykład 3.5

Odgadując jeden z elementów podanych pierwiastków obliczyć pozostałe elementy tych pierwiastków:

$$\text{a) } \sqrt{(3-5i)^2}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{(1+i)^6}; \quad \text{c) } \sqrt[4]{(\sqrt{3}-i)^{12}}.$$

Rozwiązanie

W rozwiązyaniu wykorzystamy wzór wyrażający elementy zbioru pierwiastków

$$\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$$

w zależności od wybranego pierwiastka z_0 , przy czym argument główny z_0 niekoniecznie jest najmniejszy:

$$z_k = z_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right), \text{ gdzie } 1 \leq k \leq n-1.$$

a) Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt{(3-5i)^2}$ jest liczba $z_0 = 3-5i$. Drugi element tego zbioru wyraża się zatem wzorem

$$z_1 = z_0 (\cos \pi + i \sin \pi) = (3-5i) \cdot (-1) = -3+5i.$$

b) Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt[3]{(1+i)^6}$ jest liczba $z_0 = (1+i)^2 = 2i$. Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem

$$z_k = z_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right), \text{ gdzie } k = 1, 2.$$

Zatem

$$\begin{aligned} z_1 &= 2i \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2i \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i, \\ z_2 &= 2i \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2i \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

c) Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-i)^{12}}$ jest liczba

$$z_0 = (\sqrt{3}-i)^3 = \left[2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) \right]^3 = 8 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = -8i.$$

Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem

$$z_k = z_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4} \right), \text{ gdzie } k = 1, 2, 3.$$

Zatem

$$z_1 = -8i \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = -8i \cdot i = 8,$$

$$z_2 = -8i (\cos \pi + i \sin \pi) = -8i \cdot (-1) = 8i,$$

$$z_3 = -8i \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -8i \cdot (-i) = -8.$$

● Przykład 3.6

Jednym z wierzchołków trójkąta równobocznego jest punkt $z_0 = 1+2i$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego trójkąta, jeżeli jego środkiem jest:

- a) początek układu współrzędnych;
- b) punkt $u = 6 - i$.

Rozwiążanie

a) W rozwiążaniu wykorzystamy fakt mówiący, że zbiór pierwiastków stopnia $n \geq 3$ z liczby zespolonej $z \neq 0$ pokrywa się z wierzchołkami pewnego n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w początku układu i promieniu $r = \sqrt[n]{|z|}$. Zatem znalezienie wierzchołków z_1, z_2 trójkąta równobocznego rozważanego w zadaniu, sprowadza się do wyznaczenia zbioru pierwiastków stopnia 3 z pewnej liczby zespolonej, gdy znana jest wartość jednego z tych pierwiastków, tzn. $z_0 = 1 + 2i$. Mamy

$$z_k = z_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right) \text{ dla } k = 1, 2.$$

Zatem

$$z_1 = (1 + 2i) \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = (1 + 2i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)i,$$

$$z_2 = (1 + 2i) \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = (1 + 2i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3} \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right)i.$$

b) Przesuwamy oba punkty tak, aby środek trójkąta znalazł się w początku układu współrzędnych. Wierzchołek z_0 znajdzie się wówczas w punkcie $z'_0 = z_0 - u = -5 + 3i$. Pozostałe wierzchołki przesuniętego trójkąta można otrzymać teraz w taki sam sposób jak to pokazano w przykładzie a), tzn. z zależności:

$$z'_1 = (-5 + 3i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{5\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z'_2 = (-5 + 3i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{5\sqrt{3}}{2}i.$$

Wracamy do położenia początkowego i znajdujemy wierzchołki naszego trójkąta ze wzorów:

$$z_1 = z'_1 + u = \frac{17}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i - \frac{5\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = z'_2 + u = \frac{17}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i + \frac{5\sqrt{3}}{2}i.$$

● **Przykład 3.7**

Znaleźć rozwiązania podanych równań:

a) $z^6 = (2 + 4i)^6$; b) $(z - i)^4 = (z + i)^4$; c) $z^3 + 3z^2 + 3z = i - 1$.

Rozwiązanie

a) Zauważmy, że rozwiązanie równania $z^6 = (2 + 4i)^6$ sprowadza się do znalezienia zbioru pierwiastków 6-tego stopnia z liczby $(2 + 4i)^6$. Jednym z elementów tego zbioru jest oczywiście liczba $z_0 = 2 + 4i$. Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem:

$$z_k = z_0 \left(\cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6} \right), \text{ gdzie } 1 \leq k \leq 5.$$

Zatem

$$z_1 = (2 + 4i) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = (2 + 4i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 - 2\sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i,$$

$$z_2 = (2 + 4i) \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = (2 + 4i) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 - 2\sqrt{3} + (-2 + \sqrt{3})i,$$

$$z_3 = (2 + 4i)(\cos \pi + i \sin \pi) = (2 + 4i)(-1) = -2 - 4i,$$

$$z_4 = (2 + 4i) \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = (2 + 4i) \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 + 2\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})i,$$

$$z_5 = (2 + 4i) \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = (2 + 4i) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + 2\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})i.$$

b) Oczywiście $z \neq -i$. Zatem nasze równanie ma równoważną postać $\left(\frac{z - i}{z + i} \right)^4 = 1$, która jest z kolei równoważna alternatywie równań

$$\frac{z - i}{z + i} = \omega_k,$$

gdzie $0 \leq k \leq 3$ oraz $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \sqrt[4]{1} = \{1, -1, i, -i\}$, zatem równania te przyjmują postać $z - i = z + i$ lub $z - i = -(z + i)$ lub $z - i = i(z + i)$ lub $z - i = -i(z + i)$. Pierwsze z tych równań jest sprzeczne, a pozostałe mają odpowiednio rozwiązania $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$.

c) Równanie $z^3 + 3z^2 + 3z = i - 1$ można zapisać w postaci $(z + 1)^3 = i$. Liczba $z + 1$ jest zatem dowolnym elementem pierwiastka trzeciego stopnia z liczby i . Ponieważ

$$\sqrt[3]{i} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i \right\},$$

więc

$$z + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ lub } z + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ lub } z + 1 = -i.$$

Rozwiązaniami tych równań, a zatem i wyjściowego równania, są liczby

$$z_1 = -1 - i, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{1}{2}i, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{1}{2}i.$$

Zadania

○ Zadanie 3.1

Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej rozwiązać podane równania:

$$\text{a) } z^7 = \bar{z}; \quad \text{b) } \overline{(z^4)} = z^2 |z^2|; \quad \text{c) } (\bar{z})^2 |z^2| = \frac{4}{z^2};$$

$$\text{d) } |z|^3 = iz^3; \quad \text{e) } z^6 = (\bar{z})^6; \quad \text{f) } |z^8| = z^4.$$

o Zadanie 3.2

Stosując wzory Eulera wyrazić podane funkcje w postaci sum sinusów i cosinusów wielokrotności kąta x :

$$a) \sin^3 x; \quad b) \cos^2 x; \quad c) \sin^5 x; \quad d) \sin^4 x + \cos^4 x.$$

○ Zadanie 3.3

Korzystając z definicji obliczyć podane pierwiastki:

$$\text{a) } \sqrt{5 - 12i}; \quad \text{b) } \sqrt{-11 + 60i}; \quad \text{c) } \sqrt[3]{i}; \quad \text{d) } \sqrt[4]{16}.$$

○ Zadanie 3.4

Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

a) $\sqrt{-1 + \sqrt{3}i}$; b) $\sqrt[3]{-27i}$; c) $\sqrt[4]{-4}$; d) $\sqrt[6]{-64}$;

e) $\sqrt[5]{32i}$; f) $\sqrt[3]{-1+i}$; g*) $\sqrt[4]{i}$; h*) $\sqrt[3]{2+2i}$.

○ Zadanie 3.5

Odgadując jeden z elementów podanych pierwiastków obliczyć ich pozostałe elementy:

$$\text{a) } \sqrt{(5 - 4i)^4}; \quad \text{b) } \sqrt[4]{(-2 + 3i)^4}; \quad \text{c) } \sqrt[3]{(2 - i)^6}; \quad \text{d) } \sqrt[3]{(2 - 2i)^9}.$$

○ Zadanie 3.6

Jednym z wierzchołków kwadratu jest punkt $z_1 = 4 - i$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego kwadratu, jeżeli jego środkiem jest:

a) początek układu współrzędnych; b) punkt $u = 1$;

c) punkt $u = 3 + i$; d) punkt $u = 7 + \sqrt{2}i$.

o Zadanie 3.7

Znaleźć rozwiązania podanych równań:

$$\text{a) } z^4 = (1-i)^4; \quad \text{b) } (z-1)^6 = (i-z)^6; \quad \text{c) } z^3 = (iz+1)^3.$$

o Zadanie 3.8

Punkty $z_1 = 1 - 3i$, $z_3 = -1 + 5i$ są przeciwnymi wierzchołkami kwadratu. Wyznaczyć położenia pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

Odpowiedzi i wskazówki

3.1 a) $0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, i, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, -i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; **b)** suma trzech prostych: osi rzeczywistej oraz prostych nachylonych do tej osi pod kątem $\frac{\pi}{3}$ i przechodzących przez punkt O ; **c)** okrąg o środku w punkcie O i promieniu $\sqrt[3]{2}$; **d)** suma trzech półprostych o początku w punkcie O : nieujemnej części osi urojonej oraz półprostych nachylonych do niej pod kątem $\frac{2\pi}{3}$; **e)** suma sześciu prostych przecinających się w punkcie O : obu osi oraz prostych nachylonych do tych osi pod kątem $\frac{\pi}{6}$; **f)** $0, 1, i, -1, -i$.

3.2 a) $\frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x)$; **b)** $\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$; **c)** $\frac{1}{16}(\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x)$; **d)** $\frac{1}{4}(\cos 4x + 3)$.

3.3 a) $\{3 - 2i, -3 + 2i\}$; **b)** $\{5 + 6i, -5 - 6i\}$; **c)** $\left\{-i, \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \frac{-\sqrt{3} + i}{2}\right\}$; **d)** $\{2, 2i, -2, -2i\}$.

3.4 a) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right\}$; **b)** $\left\{3i, \frac{-3\sqrt{3} - 3i}{2}, \frac{3\sqrt{3} - 3i}{2}\right\}$; **c)** $\{1+i, -1+i, -1-i, 1-i\}$; **d)** $\{\sqrt{3}+i, 2i, -\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i, -2i, \sqrt{3}-i\}$; **e)** $\left\{2\left(\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}\right), 2i, 2\left(\cos \frac{9\pi}{10} + i \sin \frac{9\pi}{10}\right), 2\left(\cos \frac{13\pi}{10} + i \sin \frac{13\pi}{10}\right), 2\left(\cos \frac{17\pi}{10} + i \sin \frac{17\pi}{10}\right)\right\}$; **f)** $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i), \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} [(-1-\sqrt{3})+i(-1+\sqrt{3})], \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} [(-1+\sqrt{3})+i(-1-\sqrt{3})]\right\}$;

g*) $\{\pm(a+bi), \pm(b-ai)\}$, gdzie $b = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$, $a = (1+\sqrt{2})b$;

h*) $\left\{\frac{a+i}{\sqrt{2a}}, \frac{1-a+(a-1)i}{\sqrt{2a}}, \frac{-1-ai}{\sqrt{2a}}\right\}$, gdzie $a = 2 + \sqrt{3}$.

3.5 a) $\{9 - 40i, -9 + 40i\}$; **b)** $\{-2 + 3i, -3 - 2i, 2 - 3i, 3 + 2i\}$;

c) $\left\{3 - 4i, -\frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + 2i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} + 2i - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$;

d) $\{-16(1+i), 8(1+\sqrt{3}+i-i\sqrt{3}), 8(1-\sqrt{3}+i+i\sqrt{3})\}$;

3.6 a) $\{1+4i, -4+i, -1-4i\}$; **b)** $\{2+3i, -2+i, -3i\}$; **c)** $\{5+2i, 2+3i, 1\}$; **d)** $\{8+\sqrt{2}+(\sqrt{2}-3)i, 10+(1+2\sqrt{2})i, 6-\sqrt{2}+(3+\sqrt{2})i\}$.

3.7 a) $1-i, 1+i, -1-i, -1+i$; **b)** $\frac{1+i}{2}, \frac{2-\sqrt{3}+i}{3+i\sqrt{3}}, \frac{2+\sqrt{3}+i}{3-i\sqrt{3}}, \frac{2-\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}, \frac{2+\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}$;

c) $\frac{1}{1-i}, \frac{-2}{1+i(2-\sqrt{3})}, \frac{-2}{1+i(2+\sqrt{3})}$.

3.8 $z_2 = 4 + 2i$, $z_4 = -4$.

Wielomiany

Czwarty tydzień

Podstawowe definicje i własności (2.1). Pierwiastki wielomianów (2.2).

Przykłady

● Przykład 4.1

Obliczyć iloczyny podanych par wielomianów rzeczywistych lub zespolonych:

- $P(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 3, Q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$, gdzie $x \in \mathbb{R}$;
- $W(z) = z^2 + 3iz + 1 - i, V(z) = -iz^2 + 4z - 6i$, gdzie $z \in \mathbb{C}$.

Rozwiązanie

a) Mamy

$$\begin{aligned}(P \cdot Q)(x) &= P(x) \cdot Q(x) \\&= (x^2 - \sqrt{2}x + 3) \cdot (x^3 - 2x^2 + 5x - 1) \\&= x^5 - 2x^4 + 5x^3 - x^2 - \sqrt{2}x^4 + 2\sqrt{2}x^3 - 5\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + 3x^3 - 6x^2 + 15x - 3 \\&= x^5 - (2 + \sqrt{2})x^4 + 2(4 + \sqrt{2})x^3 - (7 + 5\sqrt{2})x^2 + (15 + \sqrt{2})x - 3,\end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$.

b) Mamy

$$\begin{aligned}(W \cdot V)(z) &= W(z) \cdot V(z) \\&= (z^2 + 3iz + 1 - i) \cdot (-iz^2 + 4z - 6i) \\&= -iz^4 + 4z^3 - 6iz^2 + 3z^3 + 12iz^2 + 18z - (1 + i)z^2 + 4(1 - i)z - 6i - 6 \\&= -iz^4 + 7z^3 + (5i - 1)z^2 + (22 - 4i)z - 6(1 + i),\end{aligned}$$

$z \in \mathbb{C}$.

● Przykład 4.2

Obliczyć ilorazy oraz reszty z dzielenia wielomianów P przez wielomiany Q , jeżeli:

- $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x, Q(x) = x^2 - 1$;
- $P(x) = x^{15} - 1, Q(x) = x^5 + 1$;
- $P(z) = z^5 + 3z^2 + 7iz - 1, Q(z) = z - i$.

Rozwiązańie

W rozwiążaniu wykorzystamy algorytm dzielenia wielomianów.

a) Mamy

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrr}
 2x^2 & - & 5x & + & 2 \\
 \hline
 (2x^4 & - & 5x^3 & + & 2x) \\
 - 2x^4 & & + 2x^2 & & \\
 \hline
 = - 5x^3 & + 2x^2 & + 2x & & \\
 + 5x^3 & & - 5x & & \\
 \hline
 = 2x^2 & - 3x & & & \\
 - 2x^2 & & + 2 & & \\
 \hline
 = - 3x & + 2 & & &
 \end{array} : (x^2 - 1)
 \end{array}$$

Iloraz $2x^2 - 5x + 2$, reszta z dzielenia $-3x + 2$.

b) Mamy

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrr}
 x^{10} & - & x^5 & + & 1 \\
 \hline
 (x^{15} & & & - & 1) \\
 - x^{15} & - & x^{10} & & \\
 \hline
 = - x^{10} & & - 1 \\
 + x^{10} & + & x^5 & & \\
 \hline
 = x^5 & - 1 \\
 - x^5 & - & 1 \\
 \hline
 = - 2
 \end{array} : (x^5 + 1)
 \end{array}$$

Iloraz $x^{10} - x^5 + 1$, reszta z dzielenia -2 .

c) Mamy

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrr}
 z^4 + iz^3 - z^2 + (3-i)z + 1 + 10i \\
 \hline
 (z^5 & & & + 3z^2 + 7iz - 1) : (z - i) \\
 - z^5 + iz^4 & & & \\
 \hline
 = iz^4 & + 3z^2 & + 7iz & - 1 \\
 - iz^4 - z^3 & & & \\
 \hline
 = - z^3 & + 3z^2 & + 7iz & - 1 \\
 + z^3 - iz^2 & & & \\
 \hline
 = (3-i)z^2 & + 7iz & - 1 \\
 - (3-i)z^2 + (1+3i)z & & \\
 \hline
 = (1+10i)z & - 1 \\
 - (1+10i)z - (10-i) & & \\
 \hline
 = - (11-i)
 \end{array}
 \end{array}$$

Iloraz $z^4 + iz^3 - z^2 + (3-i)z + 1 + 10i$, reszta z dzielenia $-11 + i$.

Przykład 4.3

Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite podanych wielomianów:

- a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; b) $2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$; c) $x^5 + 5x^3 + 3x^2 - x + 15$.

Rozwiążanie

W rozwiązyaniu wykorzystamy twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

o współczynnikach całkowitych: każdy całkowity pierwiastek tego wielomianu jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

- a) Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 6$ są liczby: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. Obliczając wartości tego wielomianu kolejno dla tych dzielników widzimy, że pierwiastkami całkowitymi są $1, -2, 3$. Ponieważ jest to wielomian stopnia 3, więc są to jego jedyne pierwiastki.
- b) Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = -3$ są liczby: $1, -1, 3, -3$. Obliczając wartości tego wielomianu kolejno dla tych dzielników widzimy, że jedynym pierwiastkiem całkowitym jest 3 .
- c) Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 15$ są liczby: $1, -1, 3, -3, 5, -5, 15, -15$. Obliczając wartości tego wielomianu kolejno dla tych dzielników wnioskujemy, że nie ma on pierwiastków całkowitych.

Uwaga. W wielu przypadkach obliczenia można znacznie uprościć np. badając parzystość wartości wielomianu dla dzielników wyrazu wolnego. W przykładzie c) dla każdej wartości całkowitej x wartość wielomianu jest liczbą nieparzystą (jako suma algebraiczna czterech liczb jednakowej parzystości oraz 15), zatem nie może być równa 0.

● Przykład 4.4

Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:

a) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$; b) $x^3 + \frac{x^2}{6} - x + \frac{1}{3}$; c) $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x - 9$.

Rozwiążanie

W rozwiązyaniu wykorzystamy twierdzenie o postaci pierwiastków wymiernych wielomianu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych: jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny, jest pierwiastkiem tego wielomianu, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , natomiast q jest dzielnikiem współczynnika a_n .

- a) Dla wielomianu $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$ mamy $a_4 = 4$ oraz $a_0 = -1$. Dzielnikami wyrazu wolnego a_0 są liczby $1, -1$. Dzielnikami współczynnika a_4 są: $1, -1, 2, -2, 4, -4$. Zatem pierwiastkami wymiernymi tego wielomianu mogą być tylko liczby: $\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}$. Obliczając wartości wielomianu kolejno dla tych liczb wnioskujemy, że tylko $\frac{-1}{2}$ jest jego pierwiastkiem wymiernym.

- b) Ponieważ $x^3 + \frac{x^2}{6} - x + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(6x^3 + x^2 - 6x + 2)$, więc pierwiastki wielomianu $x^3 + \frac{x^2}{6} - x + \frac{1}{3}$ pokrywają się z pierwiastkami wielomianu $6x^3 + x^2 - 6x + 2$. Dla wielomianu $6x^3 + x^2 - 6x + 2$ mamy $a_3 = 6$ oraz $a_0 = 2$. Dzielnikami wyrazu wolnego a_0 są liczby: $1, -1, 2, -2$. Dzielnikami współczynnika a_3 są natomiast liczby: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. Zatem pierwiastkami wymiernymi rozważanego wielomianu mogą być tylko liczby: $\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{6}$. Po sprawdzeniu okazuje się, że jedynym

pierwiastkiem wymiernym jest $\frac{1}{2}$.

c) Dla wielomianu $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x - 9$ mamy $a_6 = 3$ oraz $a_0 = -9$. Dzielnikami wyrazu wolnego a_0 są liczby: $1, -1, 3, -3, 9, -9$. Dzielnikami współczynnika a_6 są natomiast liczby: $1, -1, 3, -3$. Zatem pierwiastkami wymiernymi tego wielomianu mogą być tylko liczby $\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{9}{1}, \frac{-9}{1}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}$. Po sprawdzeniu okazuje się, że żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem wielomianu.

Uwaga. Obliczenia w przykładzie c) można znacznie uprościć, jeżeli zauważymy, że dla każdego ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami nieparzystymi, wartość wyrażenia $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x$ jest ułamkiem nieskracalnym o parzystym liczniku i nieparzystym mianowniku. Stąd wynika, że wartość wielomianu $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x - 9$ dla takiego ułamka jest ułamkiem o nieparzystym liczniku. A zatem wielomian ten nie może być równy 0 dla tych liczb wymiernych.

● Przykład 4.5

Znaleźć pierwiastki podanych równań kwadratowych i dwukwadratowych:

- a) $z^2 + 2iz + 3 = 0$;
- b) $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$;
- c) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$;
- d) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

Rozwiązańe

Do wyznaczenia pierwiastków równania kwadratowego $az^2 + bz + c = 0$ o współczynnikach zespolonych wykorzystamy wzory

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a},$$

gdzie δ oznacza jeden z pierwiastków kwadratowych z liczby zespolonej $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) Dla równania kwadratowego $z^2 + 2iz + 3 = 0$ mamy $\Delta = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -16$. Przyjmując $\delta = 4i$ otrzymamy

$$z_1 = \frac{-2i - 4i}{2} = -3i, \quad z_2 = \frac{-2i + 4i}{2} = i.$$

b) Dla równania kwadratowego $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$, mamy $\Delta = (2+i)^2 - 4(-1+7i) = 7 - 24i = (4 - 3i)^2$. Przyjmując teraz $\delta = 4 - 3i$ we wzorze na pierwiastki równania kwadratowego otrzymamy

$$z_1 = \frac{(2+i) - (4 - 3i)}{2} = -1 + 2i, \quad z_2 = \frac{(2+i) + (4 - 3i)}{2} = 3 - i.$$

c) Podstawiając w rozważanym równaniu $w = z^2$ otrzymamy równanie kwadratowe $w^2 + 5w + 4 = 0$. Rozwiązaniami tego równania są $w_1 = -1$ oraz $w_2 = -4$. Pierwiastki wyjściowego równania są zatem rozwiązaniami równań $z^2 = -1$, $z^2 = -4$. Stąd $z_1 = -i$, $z_2 = i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2i$.

d) Podstawiając w rozważanym równaniu $w = z^2$ otrzymamy równanie kwadratowe $w^2 - 30w + 289 = 0$. Rozowaniami tego równania są $w_1 = \frac{30 - 16i}{2} = 15 - 8i$ oraz $w_2 = \frac{30 + 16i}{2} = 15 + 8i$. Pierwiastki wyjściowego równania są zatem rozowaniami równań $z^2 = 15 - 8i$, $z^2 = 15 + 8i$. Stąd $z_1 = 4 - i$, $z_2 = -4 + i$, $z_3 = 4 + i$, $z_4 = -4 - i$.

● **Przykład 4.6**

Znając niektóre pierwiastki podanych wielomianów znaleźć ich pozostałe pierwiastki:

a) $W(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6, x_1 = -1 + i;$

b) $W(x) = x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13, x_1 = 2 - 3i, x_2 = i.$

Rozwiążanie

W rozwiązyaniu wykorzystamy twierdzenie: jeżeli liczba zespolona x_0 jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to \bar{x}_0 także jest pierwiastkiem tego wielomianu.

a) Z twierdzenia tego wynika, że skoro $x_1 = -1 + i$ jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6$, to także liczba $x_2 = \bar{x}_1 = -1 - i$ jest pierwiastkiem tego wielomianu. Z twierdzenia Bezout wynika, że rozważany wielomian jest podzielny przez wielomian

$$(x - x_1)(x - x_2) = [x - (-1 + i)][x - (-1 - i)] = x^2 + 2x + 2.$$

Iloraz z dzielenia wielomianów

$$(x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6) : (x^2 + 2x + 2)$$

jest wielomianem $x^2 + 3$. Pierwiastkami tego wielomianu są liczby $x_3 = \sqrt{3}i, x_4 = -\sqrt{3}i$.

b) Skoro liczby $x_1 = 2 - 3i$ oraz $x_2 = i$ są pierwiastkami wielomianu rzeczywistego, to także liczby $x_3 = \bar{x}_1 = 2 + 3i$ oraz $x_4 = \bar{x}_2 = -i$ są jego pierwiastkami. Z twierdzenia Bezout wynika, że wielomian $x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13$ jest podzielny przez wielomian

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_3)(x - x_2)(x - x_4) &= [x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)](x - i)(x + i) \\ &= (x^2 - 4x + 13)(x^2 + 1) \\ &= x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 4x + 13. \end{aligned}$$

Ilorazem z dzielenia wielomianów

$$(x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13) : (x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 4x + 13)$$

jest wielomian $x - 1$. Pierwiastkiem wielomianu $x - 1$ jest oczywiście $x_5 = 1$.

Uwaga. Dla tego wielomianu końcowe obliczenia można uprościć próbując znaleźć pierwiastki całkowite wśród podzielników wyrazu wolnego $a_0 = -13$, tj. wśród liczb: 1, -1, 13, -13.

● **Przykład 4.7**

Nie wykonując dzieliń znaleźć reszty z dzieliń wielomianów P przez wielomiany Q , jeżeli:

a) $P(x) = x^{10} + x^2 - 2, Q(x) = x^3 - 4x;$

b) $P(x) = x^8 + 5x^3 + 1, Q(x) = x^2 - 2x + 2.$

Rozwiążanie

a) Reszta z dzielenia dowolnego wielomianu przez wielomian stopnia 3 jest wielomianem

stopnia ≤ 2 . Niech poszukiwana reszta ma postać $R(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wtedy $P(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie I jest ilorazem z dzielenia tych wielomianów. Zatem

$$x^{10} + x^2 - 2 = I(x) \cdot (x^3 - 4x) + ax^2 + bx + c$$

dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Podstawiając w tej tożsamości pierwiastki wielomianu $x^3 - 4x$, tj. liczby $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} -2 = c, \\ 1026 = 4a - 2b + c, \\ 1026 = 4a + 2b + c. \end{cases}$$

Rozwiązańem tego układu równań jest trójką $a = 257$, $b = 0$, $c = -2$. Zatem reszta z dzielenia tych wielomianów ma postać $257x^2 - 2$.

b) Reszta z dzielenia dowolnego wielomianu przez wielomian stopnia 2 jest wielomianem stopnia ≤ 1 . Niech poszukiwana reszta ma postać $R(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Wtedy $P(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie I jest ilorazem z dzielenia tych wielomianów. Zatem

$$x^8 + 5x^3 + 1 = I(x)(x^2 - 2x + 2) + ax + b$$

dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Ponieważ pierwiastki wielomianu $x^2 - 2x + 2$, tj. liczby $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$, nie są liczbami rzeczywistymi, więc w ostatniej tożsamości wystarczy podstawić tylko jeden z tych pierwiastków np. x_1 . Wtedy otrzymamy równość

$$(1+i)^8 + 5(1+i)^3 + 1 = a(1+i) + b.$$

Stąd $7 + 10i = (a+b) + ai$. Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron tej równości otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a + b = 7, \\ a = 10. \end{cases}$$

Rozwiązańem tego układu równań jest para $a = 10$, $b = -3$. Zatem reszta z dzielenia tych wielomianów ma postać $10x - 3$.

Zadania

○ Zadanie 4.1

Obliczyć iloczyny podanych par wielomianów rzeczywistych lub zespolonych:

- a) $P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$, $Q(x) = x^2 - x + 4$;
- b) $W(z) = z^3 + 5z^2 - iz + 3$, $V(z) = (1+i)z - 2$.

○ Zadanie 4.2

Obliczyć ilorazy oraz reszty z dzielen wielomianów P przez wielomiany Q , jeżeli:

- a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x^2 - 3x + 1$;
- b) $P(x) = x^{16} - 16$, $Q(x) = x^4 + 2$;
- c) $P(z) = z^5 - z^3 + 1$, $Q(z) = (z - i)^3$.

○ Zadanie 4.3

Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite podanych wielomianów:

- a) $x^3 + x^2 - 4x - 4$;
- b) $3x^3 - 7x^2 + 4x - 4$;
- c) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;
- d) $x^4 + 3x^3 - x^2 + 17x + 99$.

○ **Zadanie 4.4**

Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:

- a) $x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$; b) $4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1$;
 c) $4x^3 + x - 1$; d) $x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

○ **Zadanie 4.5**

Znaleźć pierwiastki podanych równań kwadratowych i dwukwadratowych:

- a) $z^2 - 4z + 13 = 0$; b) $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$;
 c) $z^4 + 8z^2 + 15 = 0$; d) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$.

○ **Zadanie 4.6**

Znając niektóre pierwiastki podanych wielomianów rzeczywistych, znaleźć ich pozostałe pierwiastki:

- a) $W(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 7x - 3\sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2} + i$;
 b) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 6x - 30$, $x_1 = 1 - 3i$;
 c) $W(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$, $x_1 = 2 + i$;
 d) $W(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 4x + 4$, $x_1 = i$, $x_2 = -\sqrt{2}i$;
 e) $W(x) = x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 28x^3 + 31x^2 - 22x + 14$, $x_1 = 1 - i$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}i$.

○ **Zadanie 4.7**

Nie wykonując dzielenia znaleźć reszty z dzielenia wielomianów P przez wielomiany Q , jeżeli:

- | | |
|--|-------------------------|
| a) $P(x) = x^8 - 3x^3 + 5x$, | $Q(x) = x^2 - x - 2$; |
| b) $P(x) = x^{14} - 4x^{10} + x^2 + \sqrt{2}x$, | $Q(x) = x^2 + 2$; |
| c) $P(x) = x^{30} + 3x^{14} + 2$, | $Q(x) = x^3 + 1$; |
| d) $P(x) = x^{100} + 2x^{51} - 3x^2 + 1$, | $Q(x) = x^2 - 1$; |
| e) $P(x) = x^5 + x - 2$, | $Q(x) = x^2 - 2x + 5$; |
| f) $P(x) = x^6 + x - 50$, | $Q(x) = x^3 + 8$. |

○ **Zadanie* 4.8**

Liczby zespolone z , z^2 , z^3 są pierwiastkami wielomianu stopnia 3 o współczynnikach rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości liczby z .

Odpowiedzi i wskazówki

4.1 a) $P(x) \cdot Q(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 5x - 4$; b) $W(z) \cdot V(z) = (1+i)z^4 + (3+5i)z^3 - (9+i)z^2 + (3+5i)z - 6$.

4.2 a) Iloraz $2x^2 + 3x + 11$, reszta z dzielenia $25x - 5$; b) Iloraz $x^{12} - 2x^8 + 4x^4 - 8$, reszta z dzielenia 0; c) Iloraz $z^2 + 3iz - 7$, reszta z dzielenia $-13iz^2 - 18z + 1 + 7i$.

4.3 a) $-1, 2, -2$; **b)** $2, c)$ $1, -2, 3$; **d)** wielomian nie ma pierwiastków całkowitych. Wskaźówka. Wykorzystać uwagę z przykładu **4.3 c)**.

4.4 a) $2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** wielomian nie ma pierwiastków wymiernych.

4.5 a) $2 - 3i, 2 + 3i$; **b)** $1 - 3i, 2 + i$; **c)** $i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, i\sqrt{5}, -i\sqrt{5}$; **d)** $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}(1+i), -\sqrt{2}(1+i)$.

4.6 a) $\sqrt{2} - i, \sqrt{2}$; **b)** $1 + 3i, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$; **c)** $2 - i, 1 + 2i, 1 - 2i$; **d)** $-i, \sqrt{2}i, 1 + i, 1 - i$; **e)** $1 + i, 2 + \sqrt{3}i, i$.

4.7 a) $81x + 80$; **b)** $\sqrt{2}x - 2$; **c)** $3x^2 + 3$; **d)** $2x - 1$; **e)** $-18x + 58$; **f)** $x + 14$.

4.8* z może być dowolną liczbą rzeczywistą lub $i, -i, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Piąty tydzień

Zasadnicze twierdzenie algebry (2.3). Ułamki proste (2.4).

Przykłady

● Przykład 5.1

Podać przykłady wielomianów zespolonych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

- liczba 1 jest pierwiastkiem podwójnym, a liczby $2, 3, 1 + i$ są pierwiastkami pojedynczymi tego wielomianu;
- liczba $2 - 3i$ jest pierwiastkiem podwójnym, a liczba $2 + 3i$ jest pierwiastkiem poczwórnym tego wielomianu.

Rozwiązanie

W rozwiążaniu wykorzystamy twierdzenie o przedstawianiu wielomianu zespolonego w postaci iloczynu dwumianów. Jeżeli liczby zespolone z_1, z_2, \dots, z_m są pierwiastkami wielomianu W o krotnościach odpowiednio k_1, k_2, \dots, k_m , to

$$W(z) = c(z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_m)^{k_m},$$

gdzie $c \in C \setminus \{0\}$ jest współczynnikiem tego wielomianu przy najwyższej potędze.

a) Przykładem wielomianu spełniającego podany warunek jest wielomian postaci:

$$W(z) = c(z - 1)^2 \cdot (z - 2) \cdot (z - 3) \cdot [z - (1 + i)],$$

gdzie $c \in C \setminus \{0\}$. Wielomiany tej postaci są jedynymi wielomianami najniższego stopnia, które spełniają ten warunek.

b) Przykładem wielomianu spełniającego podany warunek jest wielomian postaci:

$$W(z) = c[z - (2 - 3i)]^2 \cdot [z - (2 + 3i)]^4,$$

gdzie $c \in C \setminus \{0\}$. Wielomiany tej postaci są jedynymi wielomianami najniższego stopnia, które spełniają ten warunek.

● **Przykład 5.2**

Podać przykłady wielomianów rzeczywistych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

- liczby 0, 3 oraz $-i$ są pierwiastkami pojedynczymi tego wielomianu;
- liczby $1 + 2i$, -5 są pierwiastkami pojedynczymi, liczba 0 jest pierwiastkiem podwójnym, a liczba $-3i$ jest pierwiastkiem potrójnym tego wielomianu.

Rozwiążanie

W rozwiążaniu wykorzystamy twierdzenie o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego. Jeżeli liczba zespolona x_0 jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu rzeczywistego, to liczba \bar{x}_0 także jest pierwiastkiem k -krotnym tego wielomianu. Wykorzystamy także twierdzenie o przedstawianiu wielomianu rzeczywistego w postaci iloczynu dwumianów lub trójmianów rzeczywistych. Jeżeli liczby x_1, x_2, \dots, x_r są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu rzeczywistego W o krotnościach odpowiednio k_1, k_2, \dots, k_r oraz liczby zespolone z_1, z_2, \dots, z_s , gdzie $\operatorname{Im} z_j > 0$ dla $1 \leq j \leq s$, są pierwiastkami istotnie zespolonymi tego wielomianu o krotnościach odpowiednio l_1, l_2, \dots, l_s , to

$$W(x) = a(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_r)^{k_r} \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s},$$

gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest współczynnikiem wielomianu W przy najwyższej potędze, a liczby $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_s, q_s$ są określone przez równości

$$p_j = -2 \operatorname{Re} z_j, \quad q_j = |z_j|^2 \quad \text{dla } 1 \leq j \leq s.$$

- a) Ponieważ liczba $-i$ jest pojedynczym pierwiastkiem zespolonym szukanego wielomianu rzeczywistego, więc także liczba $\bar{-i} = i$ jest jego pierwiastkiem pojedynczym. Przykładem wielomianu rzeczywistego najniższego stopnia, którego pierwiastkami jednokrotnymi są liczby: 0, 3, i , $-i$ jest wielomian

$$W(x) = ax(x - 3)(x - i)(x + i) = ax(x - 3)(x^2 + 1),$$

gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wielomiany tej postaci są jedynymi wielomianami rzeczywistymi stopnia 4, których pierwiastkami są liczby 0, 3, i , $-i$.

- b) Ponieważ liczba $1 + 2i$ jest pojedynczym pierwiastkiem zespolonym szukanego wielomianu rzeczywistego, więc także liczba $\bar{1+2i} = 1 - 2i$ jest jego pierwiastkiem pojedynczym. Podobnie, skoro liczba $-3i$ jest potrójnym pierwiastkiem zespolonym tego wielomianu, więc także liczba $\bar{-3i} = 3i$ jest jego pierwiastkiem potrójnym. Przykładem wielomianu rzeczywistego najniższego stopnia, którego pierwiastkami pojedynczymi są liczby: -5 , $1 + 2i$, $1 - 2i$, pierwiastkiem podwójnym jest 0, a pierwiastkiem potrójnym są liczby $3i$ oraz $-3i$ jest wielomian

$$W(x) = ax^2(x + 5)[x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)] \cdot (x - 3i)^3 \cdot (x + 3i)^3 \\ = ax^2(x + 5)(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 9)^3,$$

gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wielomiany tej postaci są jedynymi wielomianami rzeczywistymi stopnia 11, które mają wymienione wyżej pierwiastki wielokrotne.

● **Przykład 5.3**

Podane wielomiany zespolone przedstawić w postaci iloczynu dwumianów:

- $iz^2 - 4$;
- $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 8i$;
- $z^4 - (1 - i)^4$.

Rozwiązańe

Wykorzystamy twierdzenie sformułowane w rozwiązańiu **Przykładu 5.1**.

a) Szukamy pierwiastków wielomianu $iz^2 - 4 = i(z^2 + 4i)$. Pierwiastkami tego wielomianu są liczby $z_1 = \sqrt{2}(1-i)$, $z_2 = -\sqrt{2}(1-i)$. Zatem

$$iz^2 - 4 = i[z - \sqrt{2}(1-i)][z + \sqrt{2}(1-i)].$$

b) Szukamy pierwiastków wielomianu $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 8i = (z-1)^3 + 8i$. Zbiór pierwiastków tego wielomianu pokrywa się ze zbiorem $1 + \sqrt[3]{-8i}$. Korzystając ze wzoru na pierwiastki z liczb zespolonych otrzymamy

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 1 - (\sqrt{3} + i) \quad \text{oraz} \quad z_3 = 1 + (\sqrt{3} - i).$$

Zatem

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 8i = [z - (1 + 2i)][z - (1 - \sqrt{3} - i)][z - (1 + \sqrt{3} - i)].$$

c) Szukamy pierwiastków wielomianu $z^4 - (1-i)^4$. Korzystając dwukrotnie ze wzoru $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} z^4 - (1-i)^4 &= [z^2 + (1-i)^2][z^2 - (1-i)^2] \\ &= [z^2 + (1-i)^2][z + (1-i)][z - (1-i)]. \end{aligned}$$

Pozostały jeszcze do znalezienia pierwiastki wielomianu $z^2 + (1-i)^2$. Zbiór tych pierwiastków pokrywa się ze zbiorem $\sqrt{-(1-i)^2}$. Jednym z elementów tego zbioru jest $i(1-i) = 1+i$, a drugim $-(1+i) = -1-i$. Zatem poszukiwany rozkład ma postać

$$[z - (1+i)][z - (-1-i)][z - (1-i)][z - (-1+i)].$$

Przykład 5.4

Podane wielomiany rzeczywiste przedstawić w postaci iloczynu nieroziędalnych czynników rzeczywistych:

- a) $x^4 + 81$; b) $x^7 - x$; c) $x^4 + x^2 + 1$.

Rozwiązańe

Wykorzystamy twierdzenie sformułowane w rozwiązańiu **Przykładu 5.2**.

a) Szukamy pierwiastków zespolonych wielomianu $x^4 + 81$. Zbiór tych pierwiastków pokrywa się ze zbiorem $\sqrt[4]{-81}$. Korzystając teraz ze wzoru na pierwiastki z liczb zespolonych otrzymamy

$$\sqrt[4]{-81} = \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i), -\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i) \right\}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} x^4 + 81 &= \left[\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i) \right) \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i) \right) \right] \left[\left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i) \right) \left(x + \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i) \right) \right] \\ &= [x^2 - 3\sqrt{2}x + 9][x^2 + 3\sqrt{2}x + 9]. \end{aligned}$$

Uwaga. Ten sam wynik można uzyskać zapisując $x^4 + 81$ w postaci różnicę kwadratów pewnych wyrażeń. Mamy

$$\begin{aligned}x^4 + 81 &= (x^4 + 18x^2 + 81) - 18x^2 = (x^2 + 9)^2 - (3\sqrt{2}x)^2 \\&= [(x^2 + 9) - 3\sqrt{2}x] \cdot [(x^2 + 9) + 3\sqrt{2}x].\end{aligned}$$

b) Szukamy pierwiastków zespolonych wielomianu $x^7 - x = x(x^6 - 1)$. Zbiór tych pierwiastków jest sumą $\{0\}$ oraz zbioru pierwiastków stopnia 6 z liczby zespolonej 1. Ponieważ

$$\sqrt[6]{1} = \left\{ 1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}x^7 - x &= (x - 0) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot \left[\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \cdot \left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \right] \\&\quad \times \left[\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \right] \\&= x(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).\end{aligned}$$

Uwaga. Ten sam rozkład można uzyskać korzystając ze wzoru $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ oraz ze wzoru $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$. Mamy

$$\begin{aligned}x^7 - x &= x(x^6 - 1) = x(x^3 - 1)(x^3 + 1) \\&= x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1).\end{aligned}$$

c) Ponieważ wielomian $x^4 + x^2 + 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc jego rozkład na rzeczywiste czynniki nierozikładalne ma postać

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d),$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Współczynniki a, b, c, d znajdziemy rozwiązując odpowiedni układ równań. Mamy

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + (a + c)x^3 + (b + ac + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$$

dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Zatem

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ b + ac + d = 1, \\ ad + bc = 0, \\ bd = 1. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są czwórki liczb $a = -1, b = 1, c = 1, d = 1$ lub $a = 1, b = 1, c = -1, d = 1$. Poszukiwany rozkład ma więc postać

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Uwaga. Ten sam rozkład można uzyskać korzystając z faktu, że pierwiastkami równania dwukwadratowego $x^4 + x^2 + 1 = 0$ są liczby

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = \bar{z}_1, \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = \bar{z}_3.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 + 1 &= \left[\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \cdot \left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \right] \\&\quad \times \left[\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \right] \\&= [x^2 - x + 1] [x^2 + x + 1].\end{aligned}$$

● Przykład 5.5

Podane funkcje wymierne (rzeczywiste lub zespolone) rozłożyć na sumy wielomianów oraz funkcji wymiernych właściwych:

a) $\frac{z^6}{2z^3 + z - 3}$; b) $\frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x}$.

Rozwiązanie

a) Po podzieleniu wielomianów $z^6 : (2z^3 + z - 3)$ jak w **Przykładzie 4.2** otrzymujemy iloraz $\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z + \frac{3}{4}$ i resztę $\frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{4}$. Zatem

$$\frac{z^6}{2z^3 + z - 3} = \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z + \frac{3}{4} + \frac{z^2 - 6z + 9}{4(2z^3 + z - 3)}.$$

b) Mamy

$$\frac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x} = \frac{3(x^4 + x^3 - x) - 3x^3 + 3x + 2x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x} = 3 + \frac{-3x^3 + 2x^2 + 3x - 1}{x^4 + x^3 - x}.$$

● Przykład 5.6

Zaproponować rozkłady podanych zespolonych funkcji wymiernych właściwych na zespolone ułamki proste (nie obliczać nieznanych współczynników):

a) $\frac{3iz}{(z+1)^3(z^2+1)^2}$; b) $\frac{(1-i)z^4 + iz^3 + z - 5i}{z^4[z+(1-2i)]^2(z-5)}$.

Rozwiązanie

Zespolone ułamki proste mają postać: $\frac{A}{(z+a)^n}$, gdzie $a, A \in C$ oraz $n \in N$. a) Wielomian w mianowniku funkcji wymiernej rozważanej w tym przykładzie ma następujący rozkład na zespolone czynniki nieroziądalne

$$(z+1)^3(z^2+1)^2 = (z+1)^3(z+i)^2(z-i)^2.$$

Zatem szukany rozkład zespolonej funkcji wymiernej ma postać

$$\frac{3iz}{(z+1)^3(z+i)^2(z-i)^2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{C}{(z+1)^3} + \frac{D}{z+i} + \frac{E}{(z+i)^2} + \frac{F}{z-i} + \frac{G}{(z-i)^2},$$

gdzie $A, B, \dots, G \in C$. Postać tego rozkładu wynika z twierdzenia o rozkładzie zespolonej funkcji wymiernej właściwej na zespolone ułamki proste. Współczynniki zespolone A, B, \dots, G tego rozkładu są wyznaczone jednoznacznie.

b) Rozkład zespolonej funkcji wymiernej rozważanej w przykładzie na zespolone ułamki proste ma postać

$$\frac{(1-i)z^4 + iz^3 + z - 5i}{z^4 [z + (1-2i)]^2 (z-5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{z^4} + \frac{E}{z + (1-2i)} + \frac{F}{[z + (1-2i)]^2} + \frac{G}{z-5},$$

gdzie $A, B, C, D, E, F, G \in C$. Postać tego rozkładu wynika z twierdzenia o rozkładzie zespolonej funkcji wymiernej właściwej na zespolone ułamki proste. Współczynniki zespolone A, B, \dots, G tego rozkładu są wyznaczone jednoznacznie.

● Przykład 5.7

Zaproponować rozkłady podanych rzeczywistych funkcji wymiernych właściwych na rzeczywiste ułamki proste:

a) $\frac{x^5 - x^3 + 1}{x(x+1)^3(x^2+1)}$; b) $\frac{x^8 - 7x^5 + 3x^2 - 5}{(x^2-9)^2(x^2+2x+6)^3}$.

Rozwiązańe

Rzeczywiste ułamki proste pierwszego rodzaju mają postać

$$\frac{A}{(x+a)^n}, \text{ gdzie } a, A \in \mathbf{R} \text{ oraz } n \in \mathbf{N}.$$

Rzeczywiste ułamki proste drugiego rodzaju mają postać

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \text{ gdzie } p, q, A, B \in \mathbf{R} \text{ oraz } n \in \mathbf{N},$$

przy czym spełniony jest warunek $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Twierdzenie o rozkładzie rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na rzeczywiste ułamki proste orzeka, że każda taka funkcja jest sumą rzeczywistych ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju. Nieniane współczynniki określone są jednoznacznie.

a) Ponieważ wielomian w mianowniku rozważanej funkcji wymiernej jest przedstawiony w postaci iloczynu rzeczywistych czynników nieroziędalnych, więc szukany rozkład na ułamki proste ma postać

$$\frac{x^5 - x^3 + 1}{x(x+1)^3(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+1},$$

gdzie współczynniki rzeczywiste A, B, \dots, F są określone jednoznacznie.

b) Wielomian w mianowniku rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na rzeczywiste czynniki nieroziędalne

$$(x^2 - 9)^2 (x^2 + 2x + 6)^3 = (x-3)^2 (x+3)^2 (x^2 + 2x + 6)^3.$$

Zatem rozkład rozważanej funkcji wymiernej na rzeczywiste ułamki proste ma postać

$$\begin{aligned} \frac{x^8 - 7x^5 + 3x^2 - 5}{(x^2-9)^2(x^2+2x+6)^3} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{(x+3)^2} \\ &\quad + \frac{Ex+F}{x^2+2x+6} + \frac{Gx+H}{(x^2+2x+6)^2} + \frac{Ix+J}{(x^2+2x+6)^3}, \end{aligned}$$

gdzie współczynniki rzeczywiste A, B, \dots, J są określone jednoznacznie.

● **Przykład 5.8**

Podane zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na zespolone ułamki proste:

a) $\frac{iz+9}{z^2+9}$; b) $\frac{z+3}{(z-1)(z^2+1)}$; c) $\frac{2z^4+8z^2+32}{z(z^2+4)^2}$.

Rozwiązańe

a) Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na zespolone czynniki nierozkładalne

$$z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i),$$

więc szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma postać

$$\frac{iz+9}{z^2+9} = \frac{A}{z-3i} + \frac{B}{z+3i}, \text{ gdzie } A, B \in \mathbb{C}.$$

Po sprowadzeniu prawej strony równości do wspólnego mianownika otrzymamy

$$iz + 9 = A(z + 3i) + B(z - 3i),$$

stąd

$$iz + 9 = (A + B)z + 3(A - B)i.$$

Ponieważ ostatnia równość jest prawdziwa dla każdego $z \in \mathbb{C}$, więc

$$\begin{cases} A + B = i, \\ 3i(A - B) = 9. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $A = -i$, $B = 2i$. Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{iz+9}{z^2+9} = \frac{-i}{z-3i} + \frac{2i}{z+3i}.$$

b) Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład za zespolone czynniki nierozkładalne

$$(z-1)(z^2+1) = (z-1)(z-i)(z+i),$$

więc szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma postać

$$\frac{z+3}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+i},$$

gdzie $A, B, C \in \mathbb{C}$. Po sprowadzeniu prawej strony równości do wspólnego mianownika otrzymamy

$$z+3 = A(z-i)(z+i) + B(z-1)(z+i) + C(z-1)(z-i).$$

Podstawiając w otrzymanej równości kolejne pierwiastki mianownika funkcji wymiernej, tj. liczby $1, i$ oraz $-i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 4 = A(1-i)(1+i), \\ 3+i = B(i-1)2i, \\ 3-i = C(-i-1)(-2i). \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest trójka liczb $A = 2$, $B = -1 + \frac{i}{2}$, $C = -1 - \frac{i}{2}$. Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{z+3}{(z-1)(z^2+1)} = \frac{2}{z-1} + \frac{-1+\frac{i}{2}}{z-i} + \frac{-1-\frac{i}{2}}{z+i}.$$

c) Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na zespolone czynniki nieroziądalne

$$z(z^2+4)^2 = z(z-2i)^2(z+2i)^2,$$

więc szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma postać

$$\frac{2z^4+8z^2+32}{z(z^2+4)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{(z-2i)^2} + \frac{D}{z+2i} + \frac{E}{(z+2i)^2},$$

gdzie $A, B, C, D, E \in \mathbb{C}$. Po sprowadzeniu prawej strony ostatniej równości do wspólnego mianownika otrzymamy

$$\begin{aligned} 2z^4 + 8z^2 + 32 &= A(z-2i)^2(z+2i)^2 + Bz(z-2i)(z+2i)^2 + Cz(z+2i)^2 \\ &\quad + Dz(z-2i)^2(z+2i) + Ez(z-2i)^2. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} 2z^4 + 8z^2 + 32 &= (A+B+D)z^4 + (2Bi+C-2Di+E)z^3 \\ &\quad + (8A+4B+4Ci+4D-4Ei)z^2 + (8Bi-4C-8Di-4E)z + 16A \end{aligned}$$

dla każdego $z \in \mathbb{C}$. Korzystając teraz z faktu, że dwa wielomiany są równe, gdy ich stopnie są jednakowe i współczynniki stojące przy jednakowych potęgach zmiennej z są sobie równe, otrzymamy układ równań

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B + D = 2, \\ 2iB + C - 2iD + E = 0, \\ 8A + 4B + 4Ci + 4D - 4Ei = 8, \\ 8iB - 4C - 8Di - 4E = 0, \\ 16A = 32. \end{array} \right.$$

Rozwiązaniem tego układu jest piątka liczb $A = 2$, $B = 0$, $C = i$, $D = 0$, $E = -i$. Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{2z^4+8z^2+32}{z(z^2+4)^2} = \frac{2}{z} + \frac{i}{(z-2i)^2} + \frac{-i}{(z+2i)^2}.$$

● Przykład 5.9

Podane rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

- a) $\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; b) $\frac{4}{x^3-x^5}$; c) $\frac{3x^3+6}{(x^2+1)(x^2+4)}$;
- d) $\frac{2x+1}{x^2(x^2+1)^2}$; e) $\frac{x^3+3}{(x+3)^{100}}$.

Rozwiążanie

a) Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej jest już rozłożony na iloczyn niesrozkładalnych czynników rzeczywistych, więc rozkład tej funkcji na rzeczywiste ułamki proste ma postać

$$\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}, \text{ gdzie } A, B, C \in \mathbf{R}.$$

Po pomnożeniu obu stron powyższej równości przez mianownik funkcji wymiernej otrzymamy tożsamość

$$2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Wstawiając do tej tożsamości kolejno pierwiastki mianownika, tj. liczby $x = 1, x = 2, x = 3$ otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2 = 2A, \\ 2 = -B, \\ 2 = 2C. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójką liczb $A = 1, B = -2, C = 1$. Szukany rozkład na ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{1}{x-3}.$$

b) Mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na rzeczywiste czynniki niesrozkładalne

$$x^3 - x^5 = x^3(1-x)(1+x).$$

Rozkład tej funkcji na rzeczywiste ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{-4}{x^5 - x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}, \text{ gdzie } A, B, C, D, E \in \mathbf{R}.$$

Po pomnożeniu obu stron tej równości przez mianownik funkcji wymiernej otrzymamy tożsamość

$$-4 = Ax^2(x^2 - 1) + Bx(x^2 - 1) + C(x^2 - 1) + Dx^3(x+1) + Ex^3(x-1)$$

dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Stąd

$$-4 = (A + D + E)x^4 + (B + D - E)x^3 + (-A + C)x^2 - Bx - C.$$

Korzystając teraz z faktu, że dwa wielomiany są równe, gdy ich stopnie są jednakowe i współczynniki stojące przy jednakowych potęgach zmiennej x są sobie równe, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} A & + D + E = 0, \\ B & + D - E = 0, \\ -A & + C = 0, \\ -B & = 0, \\ -C & = -4. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest piątka liczb $A = 4, B = 0, C = 4, D = -2, E = -2$. Szukany rozkład na ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{-4}{x^5 - x^3} = \frac{4}{x} + \frac{4}{x^3} + \frac{-2}{x-1} + \frac{-2}{x+1}.$$

c) Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej jest już rozłożony na iloczyn nieszczadalnych czynników rzeczywistych, więc rozkład tej funkcji na rzeczywiste ułamki proste ma postać

$$\frac{3x^3 + 6}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}, \text{ gdzie } A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Po pomnożeniu obu stron tej równości przez $(x^2 + 1)(x^2 + 4)$ otrzymamy równość

$$3x^3 + 6 = (Ax + B)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x^2 + 1)$$

prawdziwą dla każdego $x \in \mathbb{C}$. Podstawiając w tej równości po jednym pierwiastku zespolonym każdego z wielomianów $x^2 + 1$ oraz $x^2 + 4$, tj. liczby i oraz $2i$, otrzymamy układ równań ze współczynnikami zespolonymi i rzeczywistymi niewiadomymi

$$\begin{cases} 6 - 3i = (Ai + B) \cdot 3, \\ 6 - 24i = (2Ci + D) \cdot (-3). \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny układowi o współczynnikach rzeczywistych

$$\begin{cases} 3B = 6, \\ 3A = -3, \\ -3D = 6, \\ -6C = -24. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest czwórka liczb $A = -1$, $B = 2$, $C = 4$, $D = -2$. Szukany rozkład na ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{3x^3 + 6}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{-x + 2}{x^2 + 1} + \frac{4x - 2}{x^2 + 4}.$$

d) Rozkład na ułamki proste rozważanej funkcji wymiernej ma postać

$$\frac{2x + 1}{x^2(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2}, \text{ gdzie } A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}.$$

W tym przykładzie nieznane współczynniki A, B, \dots, F znajdziemy dokonując kilku przekształceń algebraicznych. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{2x + 1}{x^2(x^2 + 1)^2} &= (2x + 1) \cdot \frac{(1 + x^2) - x^2}{x^2(x^2 + 1)^2} = (2x + 1) \left[\frac{1}{x^2(x^2 + 1)} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \right] \\ &= (2x + 1) \left[\frac{(1 + x^2) - x^2}{x^2(x^2 + 1)} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \right] \\ &= (2x + 1) \left[\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2}}{\frac{1}{x^2}} \right] = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

e) W tym przykładzie obliczenia nieznanych współczynników rozkładu można znacznie uprościć dokonując podstawienia $y = x + 3$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 3}{(x+3)^{100}} &= \frac{(y-3)^3 + 3}{y^{100}} = \frac{y^3 - 9y^2 + 27y - 24}{y^{100}} = \frac{1}{y^{97}} + \frac{-9}{y^{98}} + \frac{27}{y^{99}} + \frac{-24}{y^{100}} \\ &= \frac{1}{(x+3)^{97}} + \frac{-9}{(x+3)^{98}} + \frac{27}{(x+3)^{99}} + \frac{-24}{(x+3)^{100}}. \end{aligned}$$

Zadania

○ **Zadanie 5.1**

Podać przykłady wielomianów zespolonych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

- liczby $0, 1 - 5i$ są pierwiastkami pojedynczymi, a liczby $-1, -3 + i$ są pierwiastkami podwójnymi tego wielomianu;
- liczba $-4i$ jest pierwiastkiem podwójnym, a liczby $3, -5$ pierwiastkami potrójnymi tego wielomianu.

○ **Zadanie 5.2**

Podać przykłady wielomianów rzeczywistych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

- liczby $1, -5, -\sqrt{2}$ oraz $1 - 3i$ są pierwiastkami pojedynczymi tego wielomianu;
- liczba $1 + i$ jest pierwiastkiem pojedynczym, liczby $-i$ oraz 3 są pierwiastkami podwójnymi, a liczba $-4 + 3i$ jest pierwiastkiem potrójnym tego wielomianu.

○ **Zadanie 5.3**

Podane wielomiany zespolone przedstawić w postaci iloczynu dwumianów:

- $z^2 - 2iz - 10$;
- $z^4 + 5z^2 + 6$;
- $z^3 - 6z - 9$.

○ **Zadanie 5.4**

Podane wielomiany rzeczywiste przedstawić w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

- $x^6 + 8$;
- $x^4 + 4$;
- $x^4 - x^2 + 1$;
- $4x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 9x - 9$.

○ **Zadanie 5.5**

Podane funkcje wymierne (rzeczywiste lub zespolone) rozłożyć na sumy wielomianów oraz funkcji wymiernych właściwych:

$$\text{a) } \frac{z^5 - 3z^2 + z}{z^3 + 4z^2 + 1}; \quad \text{b) } \frac{x^5 + 3}{x^5 + 4}; \quad \text{c) } \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}.$$

○ **Zadanie 5.6**

Zaproponować rozkłady podanych zespolonych funkcji wymiernych właściwych na zespolone ułamki proste (nie obliczać nieznanych współczynników):

$$\text{a) } \frac{z^3 + i}{z^2(z - 2i)^3}; \quad \text{b) } \frac{z^2 + z + 5}{(z + 1)(z + i)^2[z - (1 + i)]^3}; \quad \text{c) } \frac{iz + 7}{(z^4 - 4)^2}.$$

○ **Zadanie 5.7**

Zaproponować rozkłady podanych rzeczywistych funkcji wymiernych właściwych na rzeczywiste ułamki proste (nie obliczać nieznanych współczynników):

$$\text{a) } \frac{x^2 + 2x - 7}{x^3(x - 1)(x + 5)^2}; \quad \text{b) } \frac{x^3 - 8x - 4}{(x^2 + 4)(x^2 + x + 3)^3}; \quad \text{c) } \frac{x^4 + x^3}{(x + 3)^2(x^2 - 4x + 5)^2}.$$

O Zadanie 5.8

Podane zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na zespolone ułamki proste:

a) $\frac{z^2}{(z-1)(z+2)(z+3)}$; b) $\frac{z}{(z^2-1)^2}$; c) $\frac{16i}{z^4+4}$; d) $\frac{z^2+2z}{(z^2+2z+2)^2}$.

O Zadanie 5.9

Podane rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

a) $\frac{12}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$; b) $\frac{x^2}{x^4-1}$;
 c) $\frac{4x}{(x+1)(x^2+1)^2}$; d) $\frac{x^2+2x}{(x^2+2x+2)^2}$.

O Zadanie* 5.10

Niech punkty P_1, P_2, \dots, P_n , gdzie $n \geq 3$, będą wierzchołkami n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $R = 1$. Obliczyć:

a) $|P_1P_2|^2 + |P_1P_3|^2 + |P_1P_4|^2 + \dots + |P_1P_n|^2$;
 b) $|P_1P_2| \cdot |P_1P_3| \cdot |P_1P_4| \cdot \dots \cdot |P_1P_n|$.

Odpowiedzi i wskazówki

5.1 a) $W(z) = cz \cdot (z+1)^2 \cdot (z-1+5i) \cdot (z+3-i)^2$, gdzie $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; b) $W(z) = c \cdot (z-3)^3 \cdot (z+5)^3 \cdot (z+4i)^2$, gdzie $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5.2 a) $W(x) = a(x-1)(x+5)(x+\sqrt{2})(x^2-2x+10)$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $W(x) = a(x-3)^2(x^2+1)^2(x^2-2x+2)(x^2+8x+25)^3$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5.3 a) $[z-(i+3)][z-(i-3)]$; b) $(z-\sqrt{2}i)(z+\sqrt{2}i)(z-\sqrt{3}i)(z+\sqrt{3}i)$;
 c) $(z-3) \left[z + \left(\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \left[z + \left(\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$.

5.4 a) $(x^2+2)(x^2+\sqrt{6}x+2)(x^2-\sqrt{6}x+2)$; b) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$;
 c) $(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$; d) $(x-1)^2(x+1)(2x-3)(2x+3)$.

5.5 a) $z^2 - 4z + 16 + \frac{-68z^2 + 5z - 16}{z^3 + 4z^2 + 1}$; b) $1 - \frac{1}{x^5 + 4}$; c) $x + \frac{5}{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}$.

5.6 a) $\frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-2i} + \frac{D}{(z-2i)^2} + \frac{E}{(z-2i)^3}$, gdzie $A, B, C, D, E \in \mathbb{C}$; b) $\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{(z+i)^2} + \frac{D}{(z-1-i)} + \frac{E}{(z-1-i)^2} + \frac{F}{(z-1-i)^3}$, gdzie $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{C}$;
 c) $\frac{A}{z-\sqrt{2}} + \frac{B}{(z-\sqrt{2})^2} + \frac{C}{z+\sqrt{2}} + \frac{D}{(z+\sqrt{2})^2} + \frac{E}{z-i\sqrt{2}} + \frac{F}{(z-i\sqrt{2})^2} + \frac{G}{z+i\sqrt{2}} + \frac{H}{(z+i\sqrt{2})^2}$, gdzie $A, B, C, D, E, F, G, H \in \mathbb{C}$.

5.7 a) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+5} + \frac{F}{(x+5)^2}$, gdzie $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$; b) $\frac{Ax+B}{x^2+4} +$

$$\frac{Cx+D}{x^2+x+3} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+3)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+x+3)^3}, \text{ gdzie } A, B, C, D, E, F, G, H \in \mathbb{R};$$

$$\text{c) } \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-4x+5} + \frac{Ex+F}{(x^2-4x+5)^2}, \text{ gdzie } A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R};$$

$$\text{5.8 a) } \frac{\frac{1}{12}}{z-1} + \frac{-\frac{4}{3}}{z+2} + \frac{\frac{9}{4}}{z+3}; \text{ b) } \frac{\frac{1}{4}}{(z-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{(z+1)^2}; \text{ c) } \frac{1-i}{z-1-i} + \frac{-1-i}{z-1+i} + \frac{1+i}{z+1-i} + \frac{-1+i}{z+1+i}; \text{ d) } \frac{\frac{1}{2}}{(z+1+i)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(z+1-i)^2}.$$

$$\text{5.9 a) } \frac{-2}{x-1} + \frac{6}{x-2} + \frac{-6}{x-3} + \frac{2}{x-4}; \text{ b) } \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}; \text{ c) } \frac{-1}{x+1} + \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{2x+2}{(x^2+1)^2}; \text{ d) } \frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{2}{(x^2+2x+2)^2}.$$

5.10* a) $2n$; b) n .

Macierze i wyznaczniki

Szósty tydzień

Macierze – podstawowe określenia (3.1). Działania na macierzach (3.2).

Przykłady

● Przykład 6.1

- Zaproponować opis, w formie macierzy złożonej z liczb całkowitych, położenia pionków w grze w warcaby.
- Każde ze 150 państw eksportuje oraz importuje towary do oraz z pozostałych państw. Zaproponować zapis w formie jednej macierzy, wielkości eksportu i importu w mln \$ między tymi państwami. W jaki sposób, można odczytać z tej macierzy deficyt w handlu zagranicznym każdego z tych państw?
- Obraz na ekranie monitora komputerowego złożony z 1024×768 punktów można zapisać w postaci macierzy zero-jedynkowej. Przyjmując, że ekran monitora przedstawia pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych, z początkiem układu w lewym górnym rogu tego ekranu, zapisać w formie macierzy zero-jedynkowej, zbiór przedstawiający w przybliżeniu prostą $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Rozwiążanie

Położenie pionków w grze w warcaby zapiszemy w formie macierzy o 8 wierszach i 8 kolumnach. Jeżeli w i -tym wierszu i w j -tej kolumnie szachownicy, gdzie $1 \leq i \leq 8$ oraz $1 \leq j \leq 8$

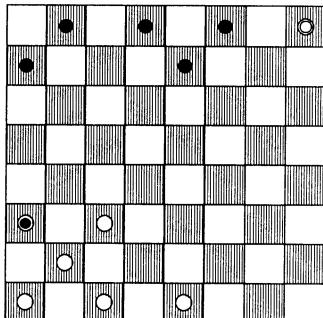
- nie stoi żaden pionek, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 0$;
- stoi biały pionek, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 1$;
- stoi czarny pionek, to przyjmujemy, że $a_{ij} = -1$;
- stoi biała damka, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 2$;
- stoi czarna damka, to przyjmujemy, że $a_{ij} = -2$.

Ponieważ w warcaby gra się tylko na czarnych polach szachownicy, więc w każdej macierzy opisującej położenie pionów mamy $a_{ij} = 0$, gdy $i + j$ jest liczbą parzystą.

Uwaga. Zastosowany przez nas zapis jest inny niż w notacji szachowej. W tej notacji

kolumny szachownicy oznacza się literami a, b, \dots, h licząc od lewej kolumny, a wiersze liczbami $1, 2, \dots, 8$ licząc od dolnego wiersza.

Niżej podajemy przykład pozycji warcabowej i jej zapis w formie macierzy.



$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Każde ze 150 państw ustawionych według alfabetu numerujemy kolejnymi liczbami naturalnymi:

$$\begin{aligned} 1 &-& \text{Afganistan}, \\ 2 &-& \text{Argentyna}, \\ 3 &-& \text{Australia}, \\ &\vdots & \vdots \\ 150 &-& \text{Zair}. \end{aligned}$$

Elementy h_{ij} macierzy H opisującej handel zagraniczny między tymi państwami są określone wzorem

$$h_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = j, \\ \text{wielkość eksportu państwa } j \text{ do państwa } i & \text{dla } i \neq j, \end{cases}$$

gdzie $1 \leq i, j \leq 150$. W macierzy H nie ma potrzeby podawania wielkości importu państwa i z państwa j , gdyż jest on równy eksportowi państwa j do państwa i . Deficyt w handlu zagranicznym państwa k , gdzie $1 \leq k \leq 150$, tj. różnica między eksportem a importem tego państwa do oraz z pozostałych państw, jest określony wzorem

$$(h_{k1} + h_{k2} + \dots + h_{k150}) - (h_{1k} + h_{2k} + \dots + h_{150k}).$$

Inaczej mówiąc, deficyt tego państwa jest równy różnicy sumy elementów k -tego wiersza i sumy elementów k -tej kolumny macierzy H .

c) Niech $C = [c_{ij}]$ oznacza macierz o 768 wierszach i 1024 kolumnach opisującą obraz na ekranie monitora komputerowego. Jeżeli punkt ekranu stojący w i -tym wierszu i w j -tej kolumnie

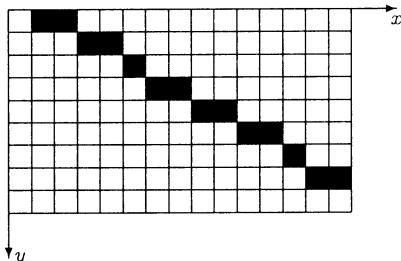
świeci się, to przyjmujemy, że $c_{ij} = 1$;
nie świeci się, to przyjmujemy, że $c_{ij} = 0$.

Elementy c_{ij} macierzy C opisującej wykres funkcji $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x \geq 0$, określone są wzorem

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } j = E\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right), \\ 0, & \text{gdy } j \neq E\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right), \end{cases}$$

gdzie symbol $E(u)$ oznacza część całkowitą liczby u oraz $1 \leq i \leq 1024$, $1 \leq j \leq 768$. Nizej przedstawiono fragment macierzy opisującej na ekranie prostą $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ oraz powiększony fragment ekranu z tą prostą.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$



● Przykład 6.2

Obliczyć:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$;

a) $3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin \beta & \cos \beta \\ -\cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

a) Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2 \cdot 2 & 3 + 2 \cdot 1 \\ -2 + 2 \cdot 0 & 1 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

b) Mamy

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 - 3 & 3 \cdot 0 - 1 & 3 \cdot 1 - 0 \\ 3 \cdot 0 - 1 & 3 \cdot 2 - 1 & 3 \cdot 1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

c) Iloczyn macierzy A wymiaru $m \times n$ oraz macierzy B wymiaru $k \times l$ jest określony tylko wtedy, gdy $n = k$. Element iloczynu AB stojący w i -tym wierszu i j -kolumnie jest równy sumie iloczynów odpowiadających sobie elementów i -tego wiersza macierzy A i elementów j -tej kolumny macierzy B . Mamy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 + 5 \cdot 0 & 3 \cdot 29 + (-4) \cdot 18 + 5 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 29 + (-3) \cdot 18 + 1 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 3 \cdot 29 + (-5) \cdot 18 + (-1) \cdot (-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

d) Mamy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin \beta & \cos \beta \\ -\cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

e) Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

● Przykład 6.3

a) Rozwiązać równanie macierzowe $3 \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & 0 \end{bmatrix} + X \right) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ i & 4 \end{bmatrix} = X$;

b) Rozwiązać układ równań macierzowych $\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$

Rozwiązanie

Dodawanie i odejmowanie macierzy oraz mnożenie macierzy przez liczbę mają te same własności jak zwykłe działania w zbiorze liczb rzeczywistych. W obu przykładach wykorzystamy te własności.

a) Mamy

$$\begin{aligned} 3 \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & 0 \end{bmatrix} + X \right) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ i & 4 \end{bmatrix} &= X \iff \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3i & 0 \end{bmatrix} + 3X + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ i & 4 \end{bmatrix} = X \\ &\iff 3X - X = - \left(\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ i & 4 \end{bmatrix} \right) \\ &\iff 2X = - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2i & 4 \end{bmatrix} \\ &\iff X = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2i & 4 \end{bmatrix} \\ &\iff X = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ i & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem równania jest macierz

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ i & -2 \end{bmatrix}.$$

b) Odejmując od drugiego równania podwojone pierwsze otrzymamy

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odejmując teraz od drugiego równania potrojone pierwsze uzyskamy

$$-X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest para macierzy

$$\begin{cases} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ Y = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

● Przykład 6.4

Obliczyć kilka początkowych potęg macierzy A , następnie wysunąć hipotezę o postaci macierzy A^n , $n \in N$, i udowodnić ją za pomocą indukcji matematycznej.

$$\text{a)} A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}; \quad \text{b)} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

a) Mamy

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & (-i)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^5 = A^2 \cdot A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = A.$$

Na podstawie zauważonych prawidłowości w macierzy A^n dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ wysuwamy hipotezę o postaci tej macierzy

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} & \text{dla } n = 4k + 1, \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \text{dla } n = 4k + 2, \\ \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{bmatrix} & \text{dla } n = 4k + 3, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{dla } n = 4k + 4, \end{cases} \quad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Przeprowadzimy teraz dowód tej hipotezy dla $n = 4k + 1$ za pomocą indukcji matematycznej. Udowodnimy więc wzór

$$A^{4k+1} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$. Dla $k = 0$ i $k = 1$ wzór jest prawdziwy. Niech k będzie dowolną liczbą naturalną. Założymy, że wzór jest prawdziwy dla k . Pokażemy, że jest on prawdziwy także dla $k + 1$. Mamy

$$A^{4(k+1)+1} = A^{4k+1} \cdot A^4 \stackrel{\substack{\text{założenie} \\ \text{indukcyjne}}}{=} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Zatem z prawdziwości hipotezy dla k wynika jego prawdziwość dla $k + 1$. Ponadto wzór jest prawdziwy dla $k = 1$, więc z zasady indukcji matematycznej wynika, że jest on prawdziwy dla każdej liczby naturalnej oraz dla $k = 0$.

Uwaga*. Wzór ogólny na n -tą potęgę macierzy A ma postać

$$A^n = \begin{bmatrix} i^n & \frac{1 - (-1)^n}{2} \cdot (-1)^{E(\frac{n}{2})} \\ 0 & (-i)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^n & \sin \frac{n\pi}{2} \\ 0 & (-i)^n \end{bmatrix},$$

gdzie $E(u)$ oznacza część całkowią liczby u .

b) Mamy

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

Na podstawie obserwacji macierzy A^n dla $n = 1, 2, 3, 4$ wysuwamy hipotezę, że

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Przeprowadzimy dowód tej hipotezy za pomocą indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ hipoteza ta jest prawdziwa. Niech teraz n będzie dowolną liczbą naturalną. Założymy, że hipoteza jest prawdziwa dla liczby n . Pokażemy, że jest ona prawdziwa dla liczby $n + 1$. Mamy

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \stackrel{\substack{\text{zalozenie} \\ \text{indukcyjne}}}{=} \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

Zatem z prawdziwości hipotezy dla liczby naturalnej n wynika, jej prawdziwość dla liczby $n + 1$. Ponieważ hipoteza jest prawdziwa dla $n = 1$, więc z zasady indukcji matematycznej wynika, że jest ona prawdziwa dla każdej liczby naturalnej.

• Przykład 6.5

Układając odpowiednie układy równań znaleźć wszystkie macierze zespolone X spełniające podane równania macierzowe:

$$\text{a) } X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } X \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiążanie

a) Niech $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in C$, będzie szukaną macierzą. Wtedy

$$X^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}.$$

Równanie $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ jest zatem równoważne układowi równań

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1, \\ b(a + d) = 0, \\ c(a + d) = 0, \\ bc + d^2 = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania wynika alternatywa warunków $b = 0$ lub $a + d = 0$. Rozważmy zatem pierwszą możliwość $b = 0$. Wtedy pierwsze równanie przyjmuje postać $a^2 = 1$, a czwarte $d^2 = 0$. Stąd $a = 1$ lub $a = -1$ oraz $d = 0$. Ponieważ $a + d = \pm 1 \neq 0$, więc z trzeciego równania wynika, że $c = 0$. Ostatecznie otrzymaliśmy w tym przypadku dwa rozwiązania $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$ lub $a = -1, b = 0, c = 0, d = 0$. Jeżeli natomiast $a + d = 0$, to drugie i trzecie równania są spełnione dla dowolnych liczb zespolonych b i c . Równanie czwarte przyjmuje wtedy postać $bc + a^2 = 0$ i jest sprzeczne z pierwszym równaniem. Uzyskana sprzeczność wyklucza tę możliwość. Rozważane równanie macierzowe ma zatem tylko dwa rozwiązania

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Z postaci równania wynika, że macierz X jest macierzą kwadratową stopnia 2. Niech zatem $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in C$. Równanie macierzowe przyjmie wtedy postać

$$\begin{bmatrix} a & a+b & 2a+b \\ c & c+d & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix},$$

która jest równoważna układowi równań

$$\begin{cases} a = 1, \\ a + b = 1, \\ 2a + b = 2, \\ c = 3, \\ c + d = 5, \\ 2c + d = 8. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest czwórka liczb $a = 1, b = 0, c = 3, d = 2$. Rozwiązaniem rozważanego równania jest zatem macierz

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

c) Niech $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in C$, będzie szukaną macierzą. Wtedy z warunku

$$X^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}, \quad \text{który jest równoważny układowi} \quad \begin{cases} a^2 - d^2 = 0 \\ ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}.$$

Możliwe są zatem dwa przypadki $a = d$ lub $a = -d$. Jeżeli $a = d$, to $ab = ac = 0$ i $bc = 1 - a^2$. Wtedy dla $a = 0$ mamy $bc = 1$. Macierz X jest więc postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gdy $a \neq 0$, to $b = c = 0$ i wtedy $a = 1$ lub $a = -1$. W tym przypadku macierz X ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Natomiast w drugim przypadku, gdy $a = -d$, otrzymamy zależność $bc = 1 - a^2$. Wtedy dla $b = 0$ mamy $a = 1$ lub $a = -1$, przy czym c jest dowolne. Jeżeli jednak $b \neq 0$, to $c = \frac{1-a^2}{b}$. Macierz X jest więc w tym przypadku odpowiednio postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}.$$

Zatem rozwiązaniem równania są tylko macierze X postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

gdzie $a, b, c \in C$, $b \neq 0$.

● Przykład 6.6

Korzystając z własności działań z macierzami oraz własności operacji transponowania macierzy uzasadnić podane tożsamości:

- a) $(A - B)^T = A^T - B^T$, gdzie A i B są macierzami tych samych wymiarów;
- b) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, gdzie A i B są przemiennymi macierzami kwadratowymi tych samych stopni.

Uwaga. Mówimy, że macierze A i B są przemienne, gdy spełniają warunek

$$AB = BA.$$

Rozwiązańie

a) W dowodzie wykorzystamy następujące własności transpozycji macierzy: $(A + B)^T = A^T + B^T$ oraz $(\alpha A)^T = \alpha (A^T)$, gdzie A i B są macierzami tych samych wymiarów, a α jest liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Mamy

$$(A - B)^T = [A + (-1)B]^T = A^T + [(-1)B]^T = A^T + (-B^T) = A^T - B^T.$$

b) W dowodzie wykorzystamy wzór $(A \pm B)C = AC \pm BC$, gdzie A, B są macierzami wymiaru $n \times m$, a C jest macierzą wymiaru $m \times k$ oraz wzór $D(A \pm B) = DA \pm DB$, gdzie D jest macierzą wymiaru $l \times n$. Dla macierzy przemiennych mamy

$$\begin{aligned} (A - B)(A + B) &= A(A + B) - B(A + B) = (A^2 + AB) - (BA + B^2) \\ &= A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2. \end{aligned}$$

● Przykład* 6.7

Zbadać, czy istnieje macierz kwadratowa X stopnia n taka, że dla każdej macierzy kwadratowej A tego samego stopnia prawdziwa jest równość $AX = A^T$.

Rozwiązańie

Gdy $n = 1$, to szukana macierz ma postać $X = [1]$. Pokażemy, że dla $n \geq 2$ nie istnieje taka uniwersalna macierz X . Niech $X = [x_{ij}]_{n \times n}$ oznacza szukaną macierz oraz niech $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ oznacza dowolną macierz. Wtedy powinna być spełniona równość

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Przyjmijmy, że macierz A ma następującą postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy w wyniku pomnożenia pierwszego wiersza macierzy A przez drugą kolumnę macierzy X otrzymamy równość

$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{n2} = 0.$$

Przyjmując teraz, że macierz A ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

w wyniku takiego samego mnożenia otrzymamy równość

$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{n2} = 1,$$

która jest sprzeczna z poprzednią. Ponieważ elementy szukanej macierzy X mają być niezależne od macierzy A , więc taka macierz nie istnieje.

● Przykład* 6.8

Niech I^* oznacza macierz, która powstała z macierzy jednostkowej stopnia n przez zastąpienie 0 stojącego w i -tym wierszu i w j -tej kolumnie przez liczbę α , gdzie $1 \leq i < j \leq n$. Sprawdzić, co stanie się z macierzą kwadratową stopnia n , jeżeli pomnożymy ją z lewej lub z prawej strony przez macierz I^* .

Rozwiązanie

Niech A będzie dowolną macierzą kwadratową stopnia n . Zbadamy efekt mnożenia macierzy A przez macierz I^* z lewej strony. Niech

$$\begin{array}{c}
 \text{i - ty wiersz} \\
 \xrightarrow{\hspace{1cm}}
 \end{array}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \boxed{\alpha} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [b_{lk}]_{n \times n}.$$

\uparrow
 j -ta kolumna

W wyniku mnożenia l -tego wiersza macierzy I^* , gdzie $l \neq i$, przez kolejne kolumny macierzy A , wiersz o numerze l iloczynu będzie taki sam, jak wiersz o tym numerze w macierzy A . Natomiast w wyniku mnożenia i -tego wiersza macierzy I^* przez k -tą kolumnę macierzy A otrzymamy element $b_{ik} = a_{ik} + \alpha a_{jk}$. Oznacza to, że w macierzy A do i -tego wiersza dodano wiersz j -ty pomnożony przez liczbę α . Podobny efekt uzyskamy przez pomnożenie macierzy A przez macierz I^* z prawej strony. W tym przypadku do i -tej kolumny macierzy A dodana zostanie jej j -ta kolumna pomnożona przez liczbę α .

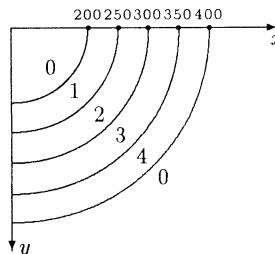
Zadania

○ Zadanie 6.1

- Zaproponować opis, w formie macierzy złożonej z liczb całkowitych, położenia figur w grze w szachy. W jaki sposób można by sprawdzić, czy dana macierz odzwierciedla pozycję możliwą do uzyskania w czasie gry?
- Zaproponować zapis, w postaci jednej macierzy, odległości drogowych i kolejowych w km między stolicami wszystkich województw w Polsce.
- Ekran monitora komputerowego jest złożony z 1024×768 punktów. Każdy punkt może świecić jednym z 20 kolorów. Kolorowe obrazy na ekranie można zapisywać w postaci macierzy złożonej z liczb całkowitych. Założyć, że ekran monitora przedstawia pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych, z początkiem układu w lewym górnym rogu ekranu. Zapisać w formie macierzy przybliżony kształt ćwiartki kolorowej tęczy złożonej z pierścieni kołowych (rysunek).

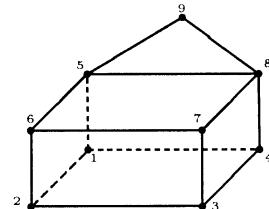
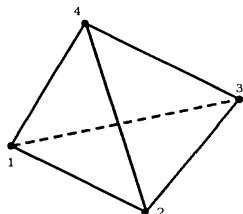
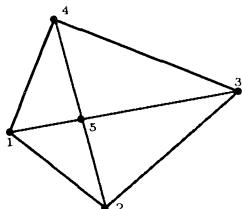
Na rysunku:

- 0 – oznacza kolor biały,
- 1 – oznacza kolor niebieski,
- 2 – oznacza kolor zielony,
- 3 – oznacza kolor żółty,
- 4 – oznacza kolor czerwony.



- Na rysunkach przedstawiono konstrukcje prętowe z ponumerowanymi węzłami:

1) płaski czworokąt z przekątnymi; 2) czworościan; 3) konstrukcja przestrzenna



Zapisać w postaci macierzy schemat bezpośrednich połączeń między węzłami.

○ Zadanie 6.2

Obliczyć:

- $2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix};$
- $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$
- $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix};$
- $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix};$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}; \quad \text{f) } [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5] \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

○ **Zadanie 6.3**

Rozwiązać podane równania macierzowe i układ równań macierzowych:

$$\text{a) } X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right);$$

$$\text{b) } 2Y \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + Y \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} X + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

○ **Zadanie 6.4**

Obliczyć kilka początkowych potęg macierzy A , następnie wysunąć hipotezę o postaci macierzy A^n , gdzie $n \in N$ i uzasadnić ją za pomocą indukcji matematycznej, jeżeli:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha \in \mathbf{R}; \quad \text{d) } A = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{bmatrix}, \text{ gdzie } x \in \mathbf{R};$$

$$\text{e) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{f*) } A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ gdzie } a \in \mathbf{R};$$

$$\text{g*) } A = [a_{ij}], \text{ gdzie } a_{ij} = 0 \text{ dla } i \geq j, i, j = 1, 2, \dots, k.$$

○ **Zadanie 6.5**

Układając odpowiednie układy równań znaleźć wszystkie macierze zespolone X spełniające podane równania macierzowe:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } X = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } X - iX^T = \begin{bmatrix} 4i & 0 \\ 6 - 2i & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{f)} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{g)} X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{h)} X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{i)} X \cdot X^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, X \text{ jest tu macierzą stopnia } 2; \quad \text{j)} X \cdot X^T = X^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

○ Zadanie 6.6

Korzystając z własności działań z macierzami oraz własności operacji transponowania macierzy uzasadnić podane tożsamości:

- a) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, gdzie A, B, C są macierzami o wymiarach odpowiednio $n \times m, m \times k, k \times l$;
- b) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$, gdzie A i B są przemiennymi macierzami kwadratowymi tych samych stopni.

Uwaga. Mówimy, że macierze A i B są przemienne, gdy spełniają warunek $AB = BA$.

$$\text{c*) } (A + I)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} A + \binom{n}{n} I,$$

gdzie A i I są macierzami kwadratowymi tych samych stopni, przy czym I jest macierzą jednostkową.

○ Zadanie* 6.7

Zbadać, czy istnieje macierz kwadratowa X stopnia n taka, że dla każdej macierzy kwadratowej A tego samego stopnia prawdziwa jest równość

$$XA = -A^T.$$

○ Zadanie* 6.8

Niech I^* oznacza macierz jednostkową stopnia n , w której zamieniono między sobą element stojący w k -tym wierszu i k -tej kolumnie z elementem stojącym w l -tym wierszu i w l -tej kolumnie oraz element stojący w l -tym wierszu i k -tej kolumnie z elementem stojącym w l -tym wierszu i l -tej kolumnie. Sprawdzić, co stanie się z macierzą kwadratową stopnia n , jeżeli pomnożymy ją z lewej lub prawej strony przez macierz I^* .

$$I^* = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{0} & \dots & \boxed{1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & \dots & \boxed{0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

\uparrow \uparrow

k -ta kolumna l -ta kolumna

○ Zadanie* 6.9

Nadajnik emituje sygnał w postaci ciągu, którego elementami są litery S_1, S_2, S_3 ,

S_4 . Po literze S_i może nastąpić tylko taka litera S_j , że $a_{ij} = 1$, gdzie

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- a) Podać wszystkie dopuszczalne słowa 2-literowe.
- b) Uzasadnić, że jeżeli w macierzy $[a_{ij}]^n = [c_{ij}]$ element $c_{ij} = 0$, to słowo n -literowe zaczynające się od S_i i kończące na S_j nie jest dopuszczalne. Jeżeli zaś $c_{ij} \neq 0$, to takie słowo jest możliwe, przy czym dla $c_{ij} = k$ jest dokładnie k takich słów.
- c) Wskazać najmniejszą liczbę n , dla której dopuszczalne jest słowo n -literowe o dowolnej literze początkowej i końcowej.
- d) Ile jest różnych słów 2-, 3-, 4-literowych?

Odpowiedzi i wskazówki

6.1 a) Położenie figur w grze w szachy zapiszemy w postaci macierzy o 8 wierszach i 8 kolumnach. Rzędy poziome i pionowe na szachownicy ponumerowane będą tak samo jak wiersze i kolumny macierzy. Jeżeli w i -tym wierszu i j -tej kolumnie szachownicy, gdzie $1 \leq i, j \leq 8$,

- 1) nie stoi figura ani pionek, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 0$;
- 2) stoi biały (czarny) pionek, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 1(-1)$;
- 3) stoi biały (czarny) skoczek, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 2(-2)$;
- 4) stoi biały (czarny) gонiec, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 3(-3)$;
- 5) stoi biała (czarna) wieża, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 4(-4)$;
- 6) stoi biały (czarny) hetman, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 5(-5)$;
- 7) stoi biały (czarny) król, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 6(-6)$;

Poniżej podajemy zapis w formie macierzy, położenia figur na szachownicy przed rozpoczęciem gry.

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -3 & -5 & -6 & -3 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Niech $1, 2, \dots, 16$ oznaczają numery stolic województw ustawionych w porządku alfabetycznym. Niech D oznacza macierz kwadratową stopnia 16 przedstawiającą odległości drogowe i kolejowe między tymi stolicami. Elementy macierzy D określone są wzorem

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = j, \\ \text{odległość drogowa między miastami } i \text{ oraz } j & \text{dla } i < j, \\ \text{odległość kolejowa między miastami } i \text{ oraz } j & \text{dla } i > j. \end{cases}$$

Fragment takiej macierzy przedstawiono poniżej.

	1	2	3	.	.	.	16
1	0	402	381	.	.	.	629
2	465	0	174	.	.	.	261
3	441	160	0	.	.	.	410
.
.
.
16	628	291	451	.	.	.	0

Legenda:

- 1 – Białystok,
- 2 – Bydgoszcz,
- 3 – Gdańsk,
- .
- .
- 16 – Zielona Góra.

c) Niech $B = [b_{ij}]$ oznacza macierz o 768 wierszach i 1024 kolumnach opisującą kolorowy obraz na ekranie monitora. Jeżeli punkt ekranu stojący w i -tym wierszu i w j -tej kolumnie

- świeci kolorem białym, to przyjmujemy, że $b_{ij} = 0$;
- świeci kolorem niebieskim, to przyjmujemy, że $b_{ij} = 1$;
- świeci kolorem zielonym, to przyjmujemy, że $b_{ij} = 2$;
- świeci kolorem żółtym, to przyjmujemy, że $b_{ij} = 3$;
- świeci kolorem czerwonym, to przyjmujemy, że $b_{ij} = 4$;
- .
- .
- .
- nie świeci, to przyjmujemy, że $b_{ij} = 20$.

Elementy t_{ij} macierzy T przedstawiającej ćwiartkę tęczy opisane są wzorami:

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dla } i \text{ oraz } j \text{ spełniających warunek } 200 \leq \sqrt{i^2 + j^2} < 250; \\ 2 \text{ dla } i \text{ oraz } j \text{ spełniających warunek } 250 \leq \sqrt{i^2 + j^2} < 300; \\ 3 \text{ dla } i \text{ oraz } j \text{ spełniających warunek } 300 \leq \sqrt{i^2 + j^2} < 350; \\ 4 \text{ dla } i \text{ oraz } j \text{ spełniających warunek } 350 \leq \sqrt{i^2 + j^2} \leq 400; \\ 0 \text{ dla pozostałych } i \text{ oraz } j, \end{cases}$$

gdzie $1 \leq i \leq 768$ oraz $1 \leq j \leq 1024$.

$$\text{d) 1) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 2) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 3) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Element a_{ij} w podanych powyżej macierzach jest równy 1, gdy węzły o numerach i oraz j są połączone prętem oraz 0, gdy nie są połączone.

$$\text{6.2 a) } \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}; \text{ b) } \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 9 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}; \text{ c) } \begin{bmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{bmatrix}; \text{ d) } \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}; \text{ f) } [35].$$

6.3 a) $X = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$; b) $Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$;

c) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; d) $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6.4 a) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $A^n = \begin{cases} A & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ I & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$;

c) $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$; d) $A^n = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} nx & \operatorname{sh} nx \\ \operatorname{sh} nx & \operatorname{ch} nx \end{bmatrix}$;

e) $A^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + (-1)^n & 0 & 1 - (-1)^n \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 - (-1)^n & 0 & 1 + (-1)^n \end{bmatrix} = \begin{cases} A & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ I & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$;

f*) $A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$ dla $n \geq 2$; g*) Dla $n \geq k$ macierz A^n jest zerowa.

6.5 a) $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; b) $X = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & a \end{bmatrix}$, gdzie $a \in C$; c) $X = \begin{bmatrix} 2i-2 & 3i+1 \\ 3-i & -1-i \end{bmatrix}$;

d) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$; e) $X = \begin{bmatrix} a & b \\ 1+a & b-1 \\ 3-a & 2-b \end{bmatrix}$, gdzie $a, b \in C$; f) $X = \begin{bmatrix} a & b \\ a+3b & -a-3b \end{bmatrix}$,

gdzie $a, b \in C$; g) $X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} \\ 0 & i \end{bmatrix}$ lub $X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+i}{2} \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ lub $X = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1-i}{2} \\ 0 & i \end{bmatrix}$ lub

$X = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & -i \end{bmatrix}$; h) $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$ lub $X = \begin{bmatrix} a & b \\ -a^2 & -a \\ b & \end{bmatrix}$, gdzie $a \in C$ i $b \in C \setminus \{0\}$;

i) $X = \begin{bmatrix} a & ia \\ 1 & -i \\ a & -a \end{bmatrix}$ lub $X = \begin{bmatrix} a & -ia \\ 1 & i \\ a & a \end{bmatrix}$, gdzie $a \in C \setminus \{0\}$; j) $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ lub
 $X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

6.6 a) Wskazówka. Wykorzystać tożsamości: $(AB)C = A(BC)$, $(AB)^T = B^T A^T$;

b) Wskazówka. Wykorzystać tożsamości: $(A+B)C = AC + BC$, $D(A+B) = DA + DB$, $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

6.7 Wskazówka. Zobacz **Przykład 6.7**. Taka macierz nie istnieje.

6.8 Przy mnożeniu z lewej strony wiersze k -ty i l -ty zamieniają się między sobą, a przy mnożeniu z prawej zamieniają się między sobą kolumny o tych numerach.

6.9 a) $S_1 S_3$, $S_2 S_1$, $S_2 S_2$, $S_3 S_2$, $S_3 S_4$, $S_4 S_1$; c) $n = 6$; d) 9, 14, 22 słów odpowiednio 2-, 3-, 4-literowych.

Siódmy tydzień

Definicja indukcyjna wyznacznika (3.3). Inne definicje wyznacznika* (3.4).

Przykłady

● Przykład 7.1

Obliczyć podane wyznaczniki drugiego i trzeciego stopnia:

a) $\begin{vmatrix} 1 - \sqrt{2} & \sqrt{5} - 2 \\ \sqrt{5} + 2 & 1 + \sqrt{2} \end{vmatrix};$ b) $\begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix};$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix};$ d) $\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix},$ gdzie $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Rozwiązanie

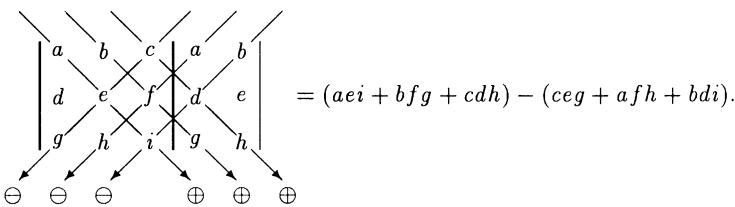
a) Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 - \sqrt{2} & \sqrt{5} - 2 \\ \sqrt{5} + 2 & 1 + \sqrt{2} \end{vmatrix} = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) - (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = -2.$$

b) Mamy

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha - i \sin \alpha) - 1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Do obliczania wyznaczników trzeciego stopnia zastosujemy regułę Sarrusa



c) Mamy

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = [(-1) \cdot (-2) \cdot 6 + 5 \cdot 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \cdot 3] - [4 \cdot (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \cdot 6] = 48 - 98 = -50.$$

d) Zauważmy najpierw, że liczba $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ jest jednym z elementów zbioru $\sqrt[3]{1}.$

Zatem $z^3 = 1$. Tak więc mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = (1 + z^3 + z^6) - (z^3 + z^3 + z^3) = z^6 - 2z^3 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

● Przykład 7.2

Napisać rozwinięcie Laplace'a podanych wyznaczników względem wskazanego wiersza lub kolumny:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$, druga kolumna; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$, czwarty wiersz.

Rozwiążanie

Rozwięcie Laplace'a wyznacznika macierzy kwadratowej A stopnia $n \geq 2$ względem i -tego wiersza ma postać

$$\det A = a_{i1} D_{i1} + a_{i2} D_{i2} + \dots + a_{in} D_{in},$$

gdzie D_{ij} oznacza dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} tej macierzy, tj. wyznacznik macierzy powstały przez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny tej macierzy, pomnożony przez $(-1)^{i+j}$. Podobnie wygląda wzór na rozwinięcie Laplace'a wyznacznika względem j -tej kolumny

$$\det A = a_{1j} D_{1j} + a_{2j} D_{2j} + \dots + a_{nj} D_{nj}.$$

a) Rozwięcie rozważanego wyznacznika względem drugiej kolumny ma postać



$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

b) Rozwięcie rozważanego wyznacznika względem czwartego wiersza ma postać



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & -4 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+2} |?|$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

W wyznaczniku występującym w drugim iloczynie nie ma potrzeby wypisywania wszystkich elementów, gdyż ten iloczyn i tak będzie równy 0.

● Przykład 7.3

Stosując rozwinięcie Laplace'a obliczyć podane wyznaczniki. Wyznaczniki rozwinąć względem wiersza lub kolumny z największą liczbą zer.

$$\text{a) } \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right|; \quad \text{b) } \left| \begin{array}{cccc} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right|.$$

Rozwiązanie

a) Pierwszy wyznacznik obliczymy stosując rozwinięcie Laplace'a względem drugiego wiersza. Mamy

$$\rightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right| = 1 \cdot (-1)^{2+2} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right| + (-3) \cdot (-1)^{2+4} \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right|.$$

Do obliczania wyznaczników trzeciego stopnia zastosujemy regułę Sarrusa. Mamy

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right| = (-2 + 16 + 0) - (0 + 4 + 6) = 4.$$

oraz

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right| = (2 + 4 + 18) - (8 - 6 - 3) = 25.$$

Poszukiwany wyznacznik jest zatem równy $1 \cdot 4 + (-3) \cdot 25 = -71$.

b) Drugi wyznacznik obliczymy stosując rozwinięcie Laplace'a względem czwartej kolumny. Mamy

$$\downarrow$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right| = 2 \cdot (-1)^{1+4} \left| \begin{array}{cccc} 2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right|.$$

Otrzymany wyznacznik czwartego stopnia obliczymy stosując rozwinięcie Laplace'a względem trzeciego wiersza. Mamy

$$\rightarrow \left| \begin{array}{cccc} 2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right| = 3 \cdot (-1)^{3+2} \left| \begin{array}{ccc} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{array} \right| + 4 \cdot (-1)^{3+3} \left| \begin{array}{ccc} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{array} \right| + 1 \cdot (-1)^{3+4} \left| \begin{array}{ccc} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \end{array} \right|.$$

Otrzymane wyznaczniki trzeciego stopnia obliczymy za pomocą reguły Sarrusa. Mamy

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (8 - 75 - 1) - (10 - 6 - 10) = -62,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4 + 45 + 0) - (5 + 0 + 6) = 38,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2 + 30 + 0) - (-25 + 0 - 3) = 56.$$

Po szukiwany wyznacznik jest zatem równy

$$(-2)[(-3) \cdot (-62) + 4 \cdot 38 + (-1) \cdot 56] = -564.$$

● Przykład* 7.4

Korzystając z zasady indukcji matematycznej uzasadnić podane tożsamości:

a) $W_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, n – stopień wyznacznika;

b) $V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix} = 1$, n – stopień wyznacznika.

Rozwiązanie

a) Obliczymy najpierw wartości wyznacznika W_n dla $n = 1$ oraz $n = 2$. Mamy

$$W_1 = |5| = 5 = 3^2 - 2^2$$

oraz

$$W_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19 = 3^3 - 2^3.$$

Zatem wzór $W_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$ jest prawdziwy dla $n = 1$ i $n = 2$. Niech $n \geq 2$ będzie dowolną liczbą naturalną. Założymy, że rozważana tożsamość jest prawdziwa dla $n-1$ oraz n . Wykażemy jej prawdziwość dla $n+1$. Rozwijając wyznaczniki stopnia $n+1$ względem pierwszego wiersza i następnie rozwijając drugi z otrzymanych wyznaczników względem pierwszej kolumny dostaniemy

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\hspace{1cm}} \left| \begin{array}{cccccc} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{array} \right| = 5 \cdot \left| \begin{array}{cccccc} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{array} \right| - 3 \cdot \left| \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{array} \right| \\
 W_{n+1} = \\
 \end{array}$$

$= 5W_n - 6 \cdot \left| \begin{array}{cccccc} 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{array} \right| = 5W_n - 6W_{n-1}.$

Korzystając teraz z założenia indukcyjnego otrzymamy dalej

$$W_{n+1} = 5W_n - 6W_{n-1} = 5(3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(3^n - 2^n) = 3^{n+2} - 2^{n+2}.$$

Z zasadów indukcji wynika, że badana tożsamość jest prawdziwa dla każdego $n \in N$.

b) Obliczamy wartość wyznacznika V_n dla $n = 1$. Mamy $V_1 = |1| = 1$. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Założymy, że rozważana tożsamość jest prawdziwa dla liczby n . Wykażemy jej prawdziwość dla liczby $n + 1$. W wyznaczniku V_{n+1} od elementów drugiego, trzeciego, ..., $n+1$ wiersza odejmujemy elementy pierwszego wiersza, a otrzymany wyznacznik rozwijamy względem pierwszej kolumny. Zatem

$$V_{n+1} = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \begin{array}{l}
 w_2 - w_1 \\
 w_3 - w_1 \\
 \vdots \\
 \hline
 \overline{w_n - w_1} \\
 w_{n+1} - w_1
 \end{array}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{array} \right|$$

$$= 1 \cdot \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{array} \right| = V_n.$$

Korzystając teraz z założenia indukcyjnego $V_n = 1$, otrzymamy równość $V_{n+1} = 1$. Z zasady indukcji wynika, że badana tożsamość jest prawdziwa dla każdego $n \in N$.

● Przykład 7.5

Nie obliczając wyznaczników znaleźć rozwiązanie podanych równań:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 & 3 \\ -1 & 1-x^2 & -9 & -3 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & x^2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwiązanie

a) Łatwo zauważyc, że wyznacznik po lewej stronie równania zeruje się dla $x = 0$ (pierwsza i trzecia kolumna są takie same); $x = 2$ (druga i trzecia kolumna są takie same); $x = 6$ (trzecia i czwarta kolumna są takie same). Ponadto z rozwinięcia Laplace'a wynika, że lewa strona równania jest wielomianem stopnia trzeciego. Ponieważ wielomian tego stopnia ma nie więcej niż trzy pierwiastki, więc 0, 2 i 6 są jedynymi pierwiastkami naszego równania.

b) Jak powyżej łatwo zauważyc, że wyznacznik po lewej stronie równania zeruje się dla $x = -1$, $x = 1$ (pierwsza i czwarta kolumna są proporcjonalne); $x = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$ (druga i czwarta kolumna są proporcjonalne); $x = -3$, $x = 3$ (trzecia i czwarta kolumna są proporcjonalne). Ponadto z rozwinięcia Laplace'a wynika, że lewa strona równania jest wielomianem stopnia szóstego. Jak wiadomo wielomian szóstego stopnia ma co najwyżej sześć pierwiastków, więc wskazane powyżej liczby są jedynymi pierwiastkami naszego równania.

● Przykład 7.6

Korzystając z własności wyznaczników zamienić wyznacznik stopnia 2 złożony z liczb zespolonych na sumę wyznaczników z pewnymi współczynnikami, których elementami są liczby rzeczywiste.

Rozwiązanie

Dla $1 \leq i, j \leq 2$ niech $z_{kj} = x_{kj} + iy_{kj}$, gdzie $x_{kj}, y_{kj} \in \mathbb{R}$, będą elementami wyznacznika. W rozwiązaniu wykorzystamy następujące własności wyznaczników macierzy: jeżeli macierze A, B, C mają, oprócz ustalonego wiersza lub ustalonej kolumny, te same elementy oraz, jeżeli ten wiersz lub ta kolumna macierzy C jest sumą odpowiadających im wierszy lub kolumn macierzy A i B , to $|C| = |A + B|$. Wykorzystamy także własność mówiącą o wyłączaniu wspólnego czynnika z ustalonej kolumny lub ustalonego wiersza przed wyznacznikiem. Stosując pierwszą własność najpierw do pierwszej kolumny i następnie w otrzymanych wyznacznikach do drugiej kolumny otrzymamy

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_{11} + iy_{11} & x_{12} + iy_{12} \\ x_{21} + iy_{21} & x_{22} + iy_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} + iy_{12} \\ x_{21} & x_{22} + iy_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} iy_{11} & x_{12} + iy_{12} \\ iy_{21} & x_{22} + iy_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & iy_{12} \\ x_{21} & iy_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} iy_{11} & x_{12} \\ iy_{21} & x_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} iy_{11} & iy_{12} \\ iy_{21} & iy_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} x_{11} & y_{12} \\ x_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} y_{11} & x_{12} \\ y_{21} & x_{22} \end{vmatrix} + i^2 \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} \right) + i \left(\begin{vmatrix} x_{11} & y_{12} \\ x_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & x_{12} \\ y_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \right).$$

• Przykład 7.7

Niech a, b, c będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Uzasadnić, że wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+t & b+t & c+t \\ (a+t)^2 & (b+t)^2 & (c+t)^2 \end{vmatrix}$$

nie zależy od parametru $t \in \mathbb{R}$. Podać interpretację geometryczną tego faktu.

Rozwiązanie

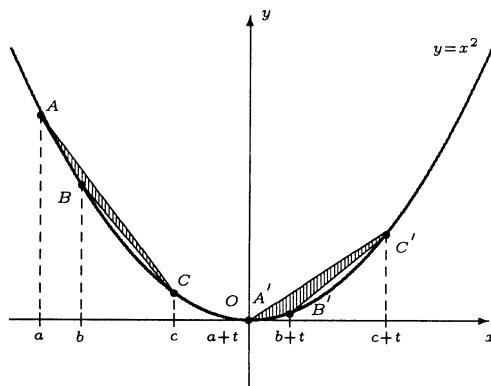
Jeżeli któreś dwie spośród liczb a, b, c są sobie równe, to wyznacznik jest oczywiście równy 0 dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Możemy zatem założyć, że $a < b < c$. Wtedy dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+t & b+t & c+t \\ (a+t)^2 & (b+t)^2 & (c+t)^2 \end{vmatrix} \stackrel{\frac{w_2 - w_1 \cdot t}{w_3 - (w_1 \cdot t^2 + w_2 \cdot 2t)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Zatem rozważany wyznacznik nie zależy od parametru t . Podamy teraz interpretację geometryczną tego faktu. Z geometrii analitycznej wiadomo, że pole trójkąta o wierzchołkach $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ wyraża się wzorem

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \right|.$$

Na wykresie funkcji $y = x^2$ wybieramy dowolne punkty $A(a, a^2), B(b, b^2), C(c, c^2)$ oraz punkty



$A'(a+t, (a+t)^2), B'(b+t, (b+t)^2), C'(c+t, (c+t)^2)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Fakt, że wyznacznik rozważany w zadaniu nie zależy od parametru x oznacza, że pole trójkąta ABC i pole trójkąta $A'B'C'$, powstałego z przesunięcia trójkąta ABC po wykresie funkcji $y = x^2$ o odcinek t (wzdłuż osi Ox), są takie same.

• Przykład* 7.8

Obliczyć liczby inwersji oraz znaki podanych permutacji:

$$\text{a)} p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie

Mówimy, że para elementów $\{p_i, p_j\}$ permutacji

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_j & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

tworzy inwersję, gdy $p_i > p_j$ oraz $i < j$. Znak permutacji p jest określony wzorem $\text{sgn}(p) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^k$, gdzie k oznacza liczbę par elementów permutacji tworzących inwersję.

a) W permutacji $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ inwersję tworzą cztery pary: $\{4, 1\}, \{4, 3\}, \{4, 2\}, \{3, 2\}$. Zatem $\text{sgn}(p) = (-1)^4 = 1$.

b) W permutacji $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ inwersję tworzy siedem par: $\{3, 2\}, \{5, 2\}, \{5, 4\}, \{7, 2\}, \{7, 6\}, \{7, 4\}, \{6, 4\}$. Zatem $\text{sgn}(q) = (-1)^7 = -1$.

● Przykład* 7.9

Korzystając z definicji permutacyjnej obliczyć podane wyznaczniki:

$$\text{a) } \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \det \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ nazywamy liczbę $\det A$ określoną wzorem

$$\det A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p \in P_n} \text{sgn}(p) \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdots \cdot a_{np_n},$$

gdzie $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$, a P_n oznacza zbiór wszystkich permutacji n -elementowych. Inaczej mówiąc, wyznacznik jest sumą algebraiczną wszystkich możliwych iloczynów n elementów macierzy, wybranych po jednym w każdym wierszu w ten sposób, aby nie wybrano dwóch elementów w tej samej kolumnie. Znaki (\pm) stojące przed tymi iloczynami równe są znakom permutacji określających te iloczyny. Oczywiście, w sumie wystarczy uwzględnić tylko te iloczyny, które są utworzone z niezerowych czynników.

a) W wyznaczniku z ćwiczenia a) jedynym niezerowym elementem w trzecim wierszu jest element stojący w pierwszej kolumnie, tj. -3 . Z kolei jedynym niezerowym elementem stojącym w drugim wierszu, ale nie stojącym w pierwszej kolumnie, jest element stojący w drugiej kolumnie, tj. 5 . W końcu jedynym elementem niezerowym w pierwszym wierszu, nie stojącym w pierwszej ani w drugiej kolumnie, jest element stojący w trzeciej kolumnie, tj. 3 . Elementy te wyznaczone są przez permutację $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, której

znak jest równy -1 . Zatem $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \cdot (-3) \cdot 5 \cdot 3 = 45$.

b) W wyznaczniku z ćwiczenia b) jedynymi niezerowymi elementami stojącymi w drugim i trzecim wierszu są odpowiednio elementy stojące w pierwszej kolumnie, tj. -2 oraz w drugiej kolumnie tj. 3 . Z kolei jedynymi niezerowymi elementami pierwszego wiersza, nie stojącymi w pierwszej ani w drugiej kolumnie, są -1 oraz 4 . Jeżeli w pierwszym wierszu wybierzemy element stojący w trzeciej kolumnie, tj. -1 , wówczas niezerowy element w czwartym wierszu musi być wybrany w czwartej kolumnie, tj. 5 . Podobnie, jeżeli w pierwszym wierszu wybierzemy element stojący w czwartej kolumnie, to niezerowy element w czwartym wierszu musi być wybrany w trzeciej kolumnie tj. 2 . Pierwsza czwórka

elementów macierzy jest wyznaczona przez permutację $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, a druga przez permutację $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Znaki tych permutacji są równe odpowiednio 1 oraz -1 . Zatem

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 2 = 78.$$

Zadania

○ Zadanie 7.1

Obliczyć podane wyznaczniki drugiego i trzeciego stopnia:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

○ Zadanie 7.2

Napisać rozwinięcia Laplace'a podanych wyznaczników względem wskazanego wiersza lub kolumny:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} i & 1+i & 2 \\ 1-2i & 3 & -i \\ -4 & 1-i & 3+i \end{vmatrix}, \text{ trzecia kolumna;} \quad \text{b)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}, \text{ drugi wiersz.}$$

○ Zadanie 7.3

Stosując rozwinięcie Laplace'a obliczyć podane wyznaczniki. Wyznaczniki rozwinąć względem wiersza lub kolumny z największą liczbą zer.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

○ Zadanie* 7.4

Korzystając z zasady indukcji matematycznej uzasadnić podane tożsamości (n oznacza stopień wyznacznika W_n):

$$\text{a)} W_n = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{4^{n+1}-1}{3}; \quad \text{b)} W_{2n} = \begin{vmatrix} a & \dots & 0 & 0 & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a & b & \dots & 0 \\ 0 & \dots & b & a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^n;$$

$$\text{c) } W_n = \begin{vmatrix} 2 \cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} = \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin x},$$

gdzie $x \neq k\pi$ oraz $k \in \mathbf{Z}$.

○ Zadanie 7.5

Nie obliczając wyznaczników znaleźć rozwiązania podanych równań:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5-x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5-x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & x & -3 & 4x \\ 1 & -2 & x & -4 \\ -1 & x & -x & x+3 \end{vmatrix} = 0.$$

○ Zadanie 7.6

Korzystając z własności wyznaczników zamienić podany wyznacznik na sumę wyznaczników, których elementy są liczbami wymiernymi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3}-\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 3\sqrt{3}+2\sqrt{5} & \sqrt{3}+\sqrt{5} \end{vmatrix}.$$

○ Zadanie 7.7

Niech $a_i, b_i, c_i \in \mathbf{R}$, gdzie $1 \leq i \leq 3$. Uzasadnić równość:

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

○ Zadanie* 7.8

Obliczyć liczby inwersji oraz znaki podanych permutacji:

$$\text{a) } p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

○ Zadanie* 7.9

Korzystając z definicji permutacyjnej obliczyć podane wyznaczniki:

$$\text{a) } \det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedzi i wskazówki

7.1 a) -1 ; b) $\sin(\alpha - \beta)$; c) 1 ; d) -2 .

$$\begin{aligned}
 7.2 \text{ a)} & 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1-2i & 3 \\ -4 & 1-i \end{vmatrix} + (-i) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} i & 1+i \\ -4 & 1-i \end{vmatrix} + (3+i) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} i & 1+i \\ 1-2i & 3 \end{vmatrix}; \\
 \text{b)} & 0 \cdot (-1)^{2+1} |?| + 5 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} + \\
 & (-7) \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

7.3 a) -289; b) 275; c) 123.

7.4* Wskazówka. Wzorować się na rozwiązyaniu podanym w **Przykładzie 7.4**.

7.5 a) $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$; b) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

$$7.6 \quad 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \sqrt{15} \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right) + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

7.7 Wskazówka. Wyznacznik rozłożyć na sumę 8 wyznaczników. Wartości sześciu spośród nich będą równe 0.

7.8* a) W permutacji p są 4 inwersje, zatem $\operatorname{sgn}(p) = 1$; b) W permutacji q jest 5 inwersji, zatem $\operatorname{sgn}(q) = -1$.

7.9* a) -30; b) -20.

Ósmy tydzień

Właściwości wyznaczników (3.5). Macierz odwrotna (3.6). Algorytm Gaussa (3.7).

Przykłady

● Przykład 8.1

Obliczyć podane wyznaczniki wykorzystując występujące w nich regularności:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -4 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie

a) Odejmując pierwszy wiersz od drugiego oraz trzeci od czwartego otrzymamy wyznacznik, w którym drugi i czwarty wiersz są takie same. Zatem

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{w_2 - w_1 \\ \hline w_4 - w_3}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{w_2 = w_4 \\ \hline \hline}} 0.$$

b) Wykonując wskazane operacje elementarne na wierszach i kolumnach otrzymamy

$$\left| \begin{array}{ccccc} -5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -4 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 - w_5 \\ w_2 - w_5 \\ \hline w_3 - w_5 \\ w_4 - w_5 \end{array}} \left| \begin{array}{ccccc} -6 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \end{array} \right| \xrightarrow{k_5 + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)} \left| \begin{array}{ccccc} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \end{array} \right| = 9 \cdot (-6)^4 = 11\,664.$$

● Przykład 8.2

Obliczyć podane wyznaczniki stopnia n wykorzystując występujące w nich regularności:

$$a) \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{array} \right| ; \quad b) \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 1 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 1 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 1 \end{array} \right| .$$

Rozwiązanie

a) Dodając pierwszy wiersz kolejno do drugiego, trzeciego, ... i ostatniego wiersza otrzymamy macierz trójkątną górną. Wykorzystując następnie fakt, że wyznacznik takiej macierzy jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej otrzymamy

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} w_2 + w_1 \\ w_3 + w_1 \\ \hline \vdots \\ w_n + w_1 \end{array}} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{array} \right| = n! .$$

b) Najpierw do pierwszego wiersza dodajemy wszystkie pozostałe. Potem z pierwszego wiersza wyłączamy wspólny czynnik. Następnie pierwszy wiersz pomnożony przez 5 odejmujemy kolejno od wiersza drugiego, trzeciego, ..., i ostatniego. W wyniku tych operacji otrzymamy macierz trójkątną górną, której wyznacznik jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej. Zatem

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 1 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 1 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 1 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 + (w_2 + w_3 + \dots + w_n) \\ w_1 : (5n - 4) \end{array}} (5n - 4) \cdot \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 5 & 1 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 1 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 1 \end{array} \right| =$$

$$\begin{array}{l} w_2 - 5w_1 \\ \hline w_3 - 5w_1 \\ \vdots \\ w_n - 5w_1 \end{array} (5n-4) \cdot \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -4 \end{array} \right| = (5n-4) \cdot (-4)^{n-1}.$$

● Przykład 8.3

Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych wyznaczników (powodujące obniżenie ich stopni) obliczyć:

$$\text{a)} \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right| ; \quad \text{b)} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right| .$$

Rozwiązanie

Celem przekształceń będzie uzyskanie w wybranym wierszu lub kolumnie wyznacznika tylko jednego elementu niezerowego (najlepiej jedynki). Wtedy zastosowanie rozwinięcia Laplace'a względem tego wiersza lub tej kolumny spowoduje obniżenie o 1 stopnia obliczanego wyznacznika. Do przekształceń będziemy wybierać wiersze lub kolumny zawierające „wiele” zer i „małych” liczb całkowitych, co znacznie uprości obliczenia.

a) Wykonując wskazane operacje elementarne na wierszach otrzymamy

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right| \xrightarrow[w_2 - 2w_1]{w_4 + w_1} \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right| \end{array}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+2} \left| \begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & 0 & \\ 1 & 1 & -1 & \\ 5 & 3 & 2 & \end{array} \right| \xrightarrow[w_3 + 2w_2]{-} \left| \begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & 0 & \\ 1 & 1 & -1 & \\ 7 & 5 & 0 & \end{array} \right|$$

$$= -(-1)(-1)^{2+3} \left| \begin{array}{cc|c} -5 & 3 & \\ 7 & 5 & \end{array} \right| = 46.$$

b) Wykonując zaznaczone operacje elementarne na wierszach mamy

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right| \xrightarrow[w_4 - 2w_3]{w_5 - w_3} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right| = \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot (-1)^{3+2} \left| \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 2 & 12 & w_2 - 2w_1 & 1 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & \hline w_3 + w_1 & 0 & -1 & -3 & -20 \\ -1 & -3 & 3 & 2 & \hline w_4 + w_1 & 0 & -2 & 5 & 14 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & \hline & 0 & 1 & 3 & 15 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 3 & 20 & w_2 + 2w_1 & 1 & 3 & 20 \\ -2 & 5 & 14 & \hline w_3 - w_1 & 0 & 11 & 54 \\ 1 & 3 & 15 & \hline & 0 & 0 & -5 \end{array} \right| \\
 &\stackrel{w_2 \cdot (-1)}{=} \left| \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 3 & 20 & w_2 + 2w_1 & 1 & 3 & 20 \\ -2 & 5 & 14 & \hline w_3 - w_1 & 0 & 11 & 54 \\ 1 & 3 & 15 & \hline & 0 & 0 & -5 \end{array} \right| = -55.
 \end{aligned}$$

● Przykład* 8.4

Korzystając z algorytmu Chió obliczyć podane wyznaczniki:

$$\text{a) } \left| \begin{array}{ccc} 6 & 3 & -2 \\ 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{array} \right|; \quad \text{b) } \left| \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right|.$$

Rozwiązanie

Algorytm Chió pozwala obliczać wyznaczniki przez kolejne obniżanie ich stopni. Wyznacznik macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia $n \geq 3$, w której element a_{11} jest niezerowy, wyraża się wzorem

$$\det A = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \cdot \left| \begin{array}{cccc} a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & a'_{n3} & \dots & a'_{nn} \end{array} \right|, \quad \text{gdzie } a'_{ij} = \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{array} \right| \text{ dla } 2 \leq i, j \leq n.$$

a) Postępując zgodnie z algorytmem Chió otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{c|ccc} 6 & 3 & -2 \\ \hline 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{array} \right| &= \frac{1}{6^{3-2}} \left| \begin{array}{c|cc} 6 & 3 & 6 & -2 \\ \hline 7 & 2 & 7 & 5 \\ 6 & 3 & 6 & -2 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right| \\
 &= \frac{1}{6} \left| \begin{array}{cc|cc} -9 & 44 & \frac{1}{6} \cdot (-3) \cdot (-4) & 3 & -11 \\ -6 & -4 & & 2 & 1 \end{array} \right| = 2 \cdot 25 = 50.
 \end{aligned}$$

b) Stosując dwukrotnie algorytm Chió kolejno otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{array}{c|ccc} 1 & 3 & 5 & 2 \\ \hline 2 & 4 & 7 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right| &= \frac{1}{1^{4-2}} \cdot \left| \begin{array}{c|cc|cc} 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 7 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right| =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{c|ccc} -2 & -3 & -5 \\ \hline -8 & -4 & -1 \\ -15 & -19 & -7 \end{array} \right| = \frac{1}{(-2)^{3-2}} \left| \begin{array}{c|cc} -2 & -3 & -2 & -5 \\ \hline -8 & -4 & -8 & -1 \\ -2 & -3 & -2 & -5 \\ \hline -15 & -19 & -15 & -7 \end{array} \right| \\
 &= \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left| \begin{array}{cc} -16 & -38 \\ -7 & -61 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{cc} 8 & 19 \\ 7 & 61 \end{array} \right| = -355.
 \end{aligned}$$

● **Przykład 8.5**

Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej znaleźć macierze odwrotne do podanych:

$$\text{a)} A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}; \quad \text{b)} A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiążanie

Wzór określający macierz odwrotną do niesobliwej macierzy kwadratowej A stopnia n ma postać

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

gdzie D_{ij} oznacza dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} tej macierzy.

a) Dla macierzy z ćwiczenia a) mamy $\det A = (1+i)(1-i) - 1^2 = 1$ oraz

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= (-1)^{1+1} \det [1-i] = 1-i, & D_{12} &= (-1)^{1+2} \det [1] = -1, \\
 D_{21} &= (-1)^{2+1} \det [1] = -1, & D_{22} &= (-1)^{2+2} \det [1+i] = 1+i.
 \end{aligned}$$

Zatem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}.$$

b) Dla macierzy z ćwiczenia b) mamy

$$\det A = [2 \cdot 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 \cdot 5 + 7 \cdot 6 \cdot (-2)] - [7 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) + 6 \cdot 5 \cdot (-3)] = -1$$

oraz

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1, & D_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38, \\
 D_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27, & D_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1, \\
 D_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41, & D_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29,
 \end{aligned}$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34,$$

$$D_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

Zatem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}.$$

● Przykład 8.6

Korzystając z metody bezwyznacznikowej wyznaczyć macierze odwrotne do podanych:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

Bezwyznacznikowa metoda znajdowania macierzy odwrotnej polega na wykonywaniu tych samych operacji elementarnych na wierszach macierzy wyjściowej oraz macierzy jednostkowej. Celem tych operacji jest sprowadzenie macierzy wyjściowej do macierzy jednostkowej. Macierz jednostkowa przechodzi wtedy na macierz odwrotną do wyjściowej.

$$[A|I] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [I|A^{-1}] .$$

a) Wykonując te same operacje na wierszach rozważanej macierzy oraz macierzy jednostkowej otrzymamy kolejno

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[w_2 - 2w_1]{w_3 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[w_3 - 3w_2]{ } \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[w_1 + 2w_2]{-w_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array} \right].$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Wykonując te same operacje na wierszach rozważanej macierzy oraz macierzy jednostkowej otrzymamy kolejno

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} w_1 : 2 \\ w_3 : 2 \\ w_4 + w_1 \end{matrix}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} w_1 - 2w_2 \\ w_4 - 2w_2 \end{matrix}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} w_2 \longleftrightarrow w_3 \\ w_3 \longleftrightarrow w_4 \end{matrix}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Zatem

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

● Przykład 8.7

Rozwiązać podane równania macierzowe:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = 4X + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie

a) Mamy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X = 4X + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} &\iff \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \iff X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Mnożąc obie strony rozważanego równania prawostronnie przez macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

otrzymamy

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

więc

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

● Przykład 8.8

Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy A , jeżeli:

- a) $A^2 = A^T$;
- b) $A^T - A^{-1} = \mathbf{O}$;
- c) $A^2 + A^{-1} = \mathbf{O}$.

Rozwiążanie

W rozwiązyaniu wykorzystamy następujące własności wyznaczników:

$$\det(A^T) = \det A, \quad \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1};$$

$$\det(A^k) = (\det A)^k, \quad \text{gdzie } k \in N;$$

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A, \quad \text{gdzie } n \text{ oznacza stopień macierzy } A.$$

- a) Korzystając z tych własności kolejno otrzymamy

$$\det(A^2) = \det(A^T) \implies (\det A)^2 = \det A \iff \det A = 1 \text{ lub } \det A = 0.$$

Zatem jedynymi możliwymi wartościami wyznacznika macierzy A są 0 i 1. Przyjmując $A = [0]$ i $A = [1]$ widzimy, że obie te wartości są realizowane.

- b) Korzystając z własności podanych na początku rozwiązania otrzymamy

$$A^T - A^{-1} = \mathbf{O} \iff A^T = A^{-1} \implies \det(A^T) = \det(A^{-1})$$

$$\implies \det A = (\det A)^{-1} \iff \det A = 1 \text{ lub } \det A = -1.$$

Zatem jedynymi możliwymi wartościami wyznacznika macierzy A są liczby -1 i 1 . Przyjmując $A = [1]$ i $A = [-1]$ widzimy, że obie te wartości są realizowane.

- c) Korzystając, jak poprzednio, z przytoczonych na wstępie rozwiązania własności wyznaczników kolejno otrzymamy

$$A^2 + A^{-1} = \mathbf{O} \iff A^2 = -A^{-1} \implies \det(A^2) = \det(-A^{-1})$$

$$\implies (\det A)^2 = (-1)^n (\det A)^{-1} \iff (\det A)^3 = (-1)^n,$$

gdzie n oznacza stopień macierzy A . Zatem jedną możliwą wartością wyznacznika macierzy rzeczywistej stopnia nieparzystego jest liczba -1 , a macierzy stopnia parzystego jest 1 . Przyjmując

$$A = [-1] \quad \text{oraz} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

widzimy, że obie wartości wyznacznika są realizowane.

● Przykład 8.9

Elementy macierzy A oraz macierzy A^{-1} są liczbami całkowitymi. Jaka jest wartość wyznacznika macierzy A ?

Rozwiązanie

Ponieważ elementy macierzy A oraz A^{-1} są liczbami całkowitymi, więc ich wyznaczniki także są liczbami całkowitymi. Z równości $A \cdot A^{-1} = I$ oraz z twierdzenia Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy wynika, że

$$\det I = \det (A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det (A^{-1}) = \det A \cdot (\det A)^{-1} = 1.$$

Z otrzymanej równości wynika, że jedynymi możliwymi wartościami wyznacznika macierzy A są 1 i -1 . Przyjmując $A = [1]$ oraz $A = [-1]$ widzimy, że obie te wartości są realizowane.

Zadania**○ Zadanie 8.1**

Obliczyć podane wyznaczniki wykorzystując występujące w nich regularności:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

○ Zadanie 8.2

Obliczyć podane wyznaczniki stopnia $n \geq 2$ wykorzystując występujące w nich regularności:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}; \quad \text{c*) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

○ Zadanie 8.3

Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych wyznaczników (powodujące obniżenie ich stopni) obliczyć:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

○ Zadanie* 8.4

Korzystając z algorytmu Chió obliczyć podane wyznaczniki:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

○ **Zadanie 8.5**

Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej znaleźć macierze odwrotne do podanych:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \alpha \in \mathbf{R}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

○ **Zadanie 8.6**

Korzystając z metody bezwyznacznikowej wyznaczyć macierze odwrotne do podanych:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

○ **Zadanie 8.7**

Rozwiązać podane równania macierzowe:

$$\text{a) } X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 4 \cdot X \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } 3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot X.$$

○ **Zadanie 8.8**

Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n , jeżeli:

$$\text{a) } A^2 = 8A^{-1}; \quad \text{b) } A^3 - A = 0; \quad \text{c) } A^T = 4A^{-1}?$$

○ **Zadanie 8.9**

Macierze kwadratowe tego samego stopnia mają wyznaczniki równe 0. Jaką największą wartość może mieć wyznacznik sumy tych macierzy?

○ **Zadanie* 8.10**

Wyprowadzić wzory na podane wyznaczniki stopnia n :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a \\ -a & b & a & \dots & a \\ -a & -a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \dots & b \end{vmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{c)} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & \dots & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 5 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{array} \right| ; & \text{d)} \left| \begin{array}{ccccc} a_1 - b & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n - b \end{array} \right| ;
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{e)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 + b_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3 + b_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n + b_n \end{array} \right| ; & \text{f)} \left| \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1} & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_n & \dots & a_n & a_n \end{array} \right| .
 \end{array}$$

Odpowiedzi i wskazówki

8.1 a) 0; b) 1; c) -512 .

8.2 a) Wskazówka. Od pierwszego wiersza odjąć drugi, od drugiego trzeci, ..., od przedostatniego ostatni. Wynik $4 \cdot 3^{n-1}$; b) Wskazówka. Od pierwszego wiersza odjąć drugi, od drugiego trzeci, ..., od przedostatniego ostatni. Wynik $(-1)^{n-1}n$; c) Wskazówka. Od kolejnych kolumn począwszy od ostatniej, a na drugiej kończąc odejmować kolumny poprzedzające pomnożone przez n . Rozwinąć otrzymany wyznacznik względem ostatniego wiersza obniżając o 1 jego stopień. Z kolejnych wierszy obniżonego wyznacznika wyłączyć wspólne czynniki. Kontynuować postępowanie aż do otrzymania wyznacznika stopnia 2. Wynik $2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot (n-1)!$.

8.3 a) 50; b) -15 ; c) -13 ; d) 44; e) 12; f) -178 .

8.4* a) -45 ; b) -11 ; c) -1060 .

$$\text{8.5 a)} \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{5}{36} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}; \text{ b)} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \text{ c)} \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{8.6 a)} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}; \text{ b)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \text{ c)} \begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{8.7 a)} X = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}; \text{ b)} X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ c)} X = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{d)} X = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} -17 & -9 \\ 11 & 19 \end{bmatrix}.$$

8.8 a) $\det A = 2^n$, np. dla $A = 2I_n$; b) $\det A = 0$ lub $\det A = 1$ lub $\det A = -1$, np. dla $A = O_n$, $A = I_n$ lub $A = -I_n$ dla n nieparzystych; c) $\det A = 2^n$ lub $\det A = -2^n$, np. dla $A = 2I_n$ lub $A = [a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ oraz $a_{11} = -2$, $a_{ii} = 2$ dla $i = 2, 3, \dots, n$, przy czym $n \in \mathbb{N}$ jest liczbą parzystą.

8.9 Wyznacznik sumy macierzy może przyjmować wartości dowolnie duże.

Np. dla $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mamy $\det(A + B) = x$, analogicznie dla wyższych stopni macierzy.

8.10* a) $(a + nb - b)(a - b)^{n-1}$; b) $\frac{(a + b)^n + (b - a)^n}{2}$; c) $(-1)^{n-1} n^{n-1} \frac{n+1}{2}$;

d) $(-1)^n b^{n-1} \left(b - \sum_{k=1}^n a_k \right)$; e) $b_2 \cdot \dots \cdot b_n$; f) $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \cdot \dots \cdot (a_{n-1} - a_n) a_n$.

Układy równań liniowych

Dziewiąty tydzień

Podstawowe określenia (4.1). Układy Cramera (4.2). Metoda eliminacji Gaussa dla układów Cramera (4.3).

Przykłady

● Przykład 9.1

Dla jakich wartości parametru p podane układy równań są układami Cramera:

$$\text{a) } \begin{cases} 6p^2x - 3y = 3p \\ 2x - y = 7 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y + 3z = px \\ 3x + y + 3z = py \\ 3x + 3y + z = pz \end{cases}$$

Rozwiążanie

Liniowy układ równań postaci $AX = B$ jest układem Cramera, jeżeli macierz A tego układu jest macierzą kwadratową o wyznaczniku różnym od zera.

a) W zapisie macierzowym rozważany układ ma postać

$$\begin{bmatrix} 6p^2 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy tego układu jest równy

$$\det A = \begin{vmatrix} 6p^2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6(1 - p^2).$$

Dany układ jest zatem układem Cramera dla $p \neq -1$ oraz $p \neq 1$.

b) Zapisując rozważany układ macierzowo mamy

$$\begin{bmatrix} 1-p & 3 & 3 \\ 3 & 1-p & 3 \\ 3 & 3 & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dalej

$$\det A = \begin{vmatrix} 1-p & 3 & 3 \\ 3 & 1-p & 3 \\ 3 & 3 & 1-p \end{vmatrix} \stackrel{\frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3}}{=} \begin{vmatrix} -2-p & 0 & 2+p \\ 0 & -2-p & 2+p \\ 3 & 3 & 1-p \end{vmatrix} =$$

$$\frac{k_3 + (k_1 + k_2)}{2} \begin{vmatrix} -2-p & 0 & 0 \\ 0 & -2-p & 0 \\ 3 & 3 & 7-p \end{vmatrix} = (2+p)^2(7-p).$$

Układ ten jest więc układem Cramera dla $p \neq -2$ oraz $p \neq 7$.

● Przykład 9.2

Rozwiązać podane układy równań stosując wzór Cramera:

$$\text{a) } \begin{cases} 9x - 8y = 4 \\ 7x + 2y = 3 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \\ x - 5z = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

Jedyne rozwiązanie układu Cramera postaci $AX = B$ z niewiadomymi x_1, x_2, \dots, x_n wyraża się wzorem

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

gdzie A_k oznacza macierz powstałą z macierzy A przez zastąpienie jej k -tej kolumny przez kolumnę wyrazów wolnych B .

a) Mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 74, \quad \det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 32, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\text{zatem } x = \frac{16}{37}, \quad y = -\frac{1}{74}.$$

b) Tutaj

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 28, \quad \det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 15,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 8, \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

$$\text{Stąd wynika, że } x = \frac{15}{28}, \quad y = \frac{2}{7}, \quad z = \frac{3}{28}.$$

● Przykład 9.3

Stosując wzór Cramera obliczyć niewiadomą x spełniającą układ równań:

$$12 + x + y = 10 + y + z = 8 + z + u = 6 + u + v = 10x + v = 15.$$

Rozwiązanie

Dany układ zapisujemy w postaci

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + y & = 3 \\ y + z & = 5 \\ z + u & = 7 \\ u + v & = 9 \\ 10x & + v = 15 \end{array} \right. \text{czyli}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Liczbę x obliczamy ze wzoru $x = \frac{\det A_1}{\det A}$, gdzie

$$\begin{aligned} \det A &= \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \downarrow \\ &= 1 + 10 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| = 11, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det A_1 &= \rightarrow \left| \begin{array}{ccccc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = 3 \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccccc} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right| \leftarrow \\ &= 3 - 5 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} 7 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 1 \end{array} \right| = -2 + 13 = 11. \end{aligned}$$

Stąd $x = \frac{11}{11} = 1$.

● Przykład 9.4

Rozwiązać podane układy równań metodą macierzy odwrotnej:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 7y = 2 \\ 2x - y = 9 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y + 3z = -7 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ 2x + 5y + z = 18 \end{cases}.$$

Rozwiązanie

Rozwiązanie X układu Cramera postaci $AX = B$ będziemy wyznaczać ze wzoru

$$X = A^{-1}B.$$

a) Zapisując układ równań w postaci macierzowej otrzymamy

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 9 \end{array} \right].$$

Zatem

$$\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} 2 \\ 9 \end{array} \right] = \frac{-1}{15} \left[\begin{array}{cc} -1 & -7 \\ -2 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 9 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \frac{13}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{array} \right],$$

czyli $x = \frac{13}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

b) Podobnie jak w poprzednim przykładzie mnożymy lewostronnie układ równań w postaci macierzowej przez macierz odwrotną do macierzy układu. Otrzymamy wtedy

$$\left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} -7 \\ 5 \\ 18 \end{array} \right] = \frac{1}{10} \left[\begin{array}{ccc} -19 & 17 & -11 \\ 5 & -5 & 5 \\ 13 & -9 & 7 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} -7 \\ 5 \\ 18 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ -1 \end{array} \right],$$

czyli $x = 2, y = 3, z = -1$.

● Przykład 9.5

Rozwiązać podane układy Cramera metodą eliminacji Gaussa:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 5y = 2 \\ -3x + 6y = 15 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y + 3z = -7 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ 2x + 5y + z = 18 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 4x + 8y - 7z + t = 1 \\ x + 2y - z + t = 1 \\ -x + y + 4z + 6t = 0 \end{cases}; \quad \text{d) } \begin{cases} x + 4y + 2z - s = 3 \\ 2x + 9y + 6z - 2s - 3t = 5 \\ x + 2y - z - s + 5t = 5 \\ -2x - 7y + z + 3s - 4t = -5 \\ -x - 5y - z + 3s + 6t = 4 \end{cases}.$$

Rozwiązań

Metoda eliminacji Gaussa dla układu Cramera postaci $AX = B$ polega na rozwiązyaniu tego układu poprzez doprowadzenie jego macierzy rozszerzonej $[A|B]$ do postaci $[I|X]$, gdzie I oznacza macierz jednostkową. Przy przekształceniach stosuje się operacje elementarne na wierszach macierzy rozszerzonej, co schematycznie można przedstawić następująco

$$[A|B] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [I|X].$$

Ponieważ wszystkie wykonywane operacje przekształcają układ równań na układ mu równoważny, więc wektor X pojawiający się przy końcu postępowania jest szukanym rozwiązaniem układu. Kolejność operacji przy rozwiązywaniu naszych przykładów będzie zgodna z algorytmem Gaussa sprowadzenia macierzy nieosobliwej do macierzy jednostkowej.

a) Przekształcamy macierz rozszerzoną danego układu równań otrzymując

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 6 & 15 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + 3w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 21 & 21 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 : 21} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 5w_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Ostatni zapis oznacza, że

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y = -3 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y = 1 \end{cases},$$

zatem $x = -3, y = 1$.

b) Podobnie rozwiążujemy układ z trzema niewiadomymi

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 18 \end{array} \right] &\xrightarrow[w_2 - 3w_1]{w_3 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 7 & -5 & 26 \\ 0 & 9 & -5 & 32 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 : 7} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 9 & -5 & 32 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[w_3 - 9w_2]{w_3 : \frac{10}{7}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{10}{7} \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 : \frac{10}{7}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[w_2 + \frac{5}{7}w_3]{w_1 + 2w_2 - 3w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$.

c) W tym przykładzie mamy

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 4w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 + w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{\substack{w_2 : 3 \\ w_3 : 2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 - 5w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array} \right] \\ \xrightarrow{w_4 : (-\frac{3}{2})} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_3 - \frac{1}{2}w_4 \\ w_2 - \frac{1}{3}w_3 - 2w_4 \\ w_1 - 2w_2 + 3w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]. \end{array}$$

Stąd $x = 4$, $y = -2$, $z = 0$, $t = 1$.

d) Następny układ pięciu równań będziemy rozwiązywać ściśle według algorytmu Gaussa, dlatego nie będziemy zaznaczać wykonywanych operacji elementarnych. Dla przejrzystości będziemy otaczać ramką ten fragment macierzy, który ulegnie zmianie w następnym kroku. Mamy zatem

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 9 & 6 & -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ -2 & -7 & 1 & 3 & -4 & -5 \\ -1 & -5 & -1 & 3 & 6 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 6 & 7 \end{array} \right] \rightarrow \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 6 \end{array} \right] \\ \cdot \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Rozwiążaniem tego układu równań są liczby $x = 1, y = 0, z = 1, s = 0, t = 1$. Można przy tym zauważać, że szukanie rozwiązania ze wzoru Cramera byłoby bardzo pracochłonne. Również obliczenie macierzy odwrotnej wymagałoby większej ilości rachunków.

● Przykład 9.6

Rozwiązać podane układy Cramera „metodą kolumn jednostkowych”:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -4x - 12y + z = 2 \\ 3x + 3y + z = 3 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x - y - z - 2t = -4 \\ 2x + 3y - z - t = -6 \\ x + 2y + 3z - t = -4 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 3x + y + s + 2t = 2 \\ x - y + 3z + 2s = 1 \\ 2x + 2y + z + s + 3t = 3 \\ x + 2y - z - s + t = 1 \\ y + 2z + 2s = 3 \end{cases} & \end{array}$$

Rozwiązanie

„Metoda kolumn jednostkowych” jest praktyczną wersją metody eliminacji Gaussa. Polega ona na odpowiednim przekształceniu macierzy rozszerzonej układu. W przypadku układów Cramera celem postępowania jest doprowadzenie wszystkich kolumn macierzy układu do postaci jednostkowej (tzn. z jedną jedynką i resztą zer) tak, aby jedynki w poszczególnych kolumnach znajdowały się w różnych wierszach. Dla układu Cramera z n niewiadomymi metoda ta wymaga n kroków, gdyż w jednym kroku przekształca się ostatecznie całą kolumnę. Kolejność przekształcanych kolumn oraz położenie końcowych „jedynek” jest dowolna, przy czym praktycznie jest do przekształcania wybierać kolumnę składającą się z jedynki, „małych” liczb całkowitych i „dużej” liczby zer. W porównaniu z klasycznym algorytmem Gaussa metoda ta nie wymaga przedstawiania wierszy ani budowania macierzy trójkątnej, wymaga jednak wykonania większej liczby mnożeń.

Przekształcenie j -tej kolumny. Chcąc w miejsce niezerowego elementu a_{ij} otrzymać „jedynkę”, a na pozostałych miejscach j -tej kolumny same zera wystarczy i -ty wiersz macierzy rozszerzonej podzielić przez a_{ij} . Następnie należy od pozostałych kolejnych wierszy odejmować i -ty wiersz mnożony odpowiednio przez $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{i-1j}, a_{i+1j}, \dots, a_{nj}$. Schematycznie przedstawimy to poniżej

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \dots & a_{1j} & \dots & \dots & \cdot \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{i-1j} & \dots & \dots & \cdot \\ \dots & a_{ij} & \dots & \dots & \cdot \\ \dots & a_{i+1j} & \dots & \dots & \cdot \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{nj} & \dots & \dots & \cdot \end{array} \right] \xrightarrow{w_i : a_{ij}} \left[\begin{array}{cccc|c} \dots & a_{1j} & \dots & \dots & \cdot \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{i-1j} & \dots & \dots & \cdot \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \cdot \\ \dots & a_{i+1j} & \dots & \dots & \cdot \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{nj} & \dots & \dots & \cdot \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 - a_{1j}w_i \\ \vdots \\ w_{i-1} - a_{i-1j}w_i \\ w_{i+1} - a_{i+1j}w_i \\ \vdots \\ w_n - a_{nj}w_i \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} \dots & 0 & \dots & \dots & \cdot \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \cdot \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \cdot \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \cdot \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \cdot \end{array} \right]$$

a) Przekształcamy macierz rozszerzoną układu równań zaznaczając wyróżnione niezerowe elementy przekształconych kolumn oraz kolumny wcześniej przekształcone. Mamy

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 1 & 1 & | & 1 \\ -4 & -12 & 1 & 2 & | & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & | & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 1 & 1 & | & 1 \\ -6 & -11 & 0 & 1 & | & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & | & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 - 2w_3 \\ w_2 + 6w_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccccc} 0 & -9 & 1 & -3 & | & -3 \\ 0 & 13 & 0 & 13 & | & 13 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & | & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{w_2 : 13} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{w_1 + 9w_2}{w_3 - 4w_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right].$$

Stąd wynika, że

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 6 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z = 1 \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -2 \end{cases},$$

zatem $x = -2$, $y = 1$, $z = 6$.

b) Postępując według omówionej wyżej metody kolejno otrzymamy

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{w_2 - 3w_1}{w_3 - 2w_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{w_1 - w_4}{w_2 + 4w_4}} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{w_2 : (-3)}{w_3 : (-3)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{w_1 - w_2}{w_3 - 2w_2}} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 : (-17)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{w_1 + 2w_3}{w_2 - 9w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]. \end{array}$$

Stąd odczytujemy, że $x = -1$, $y = -1$, $z = 0$, $t = 1$.

c) Postępując analogicznie jak poprzednio otrzymamy

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{w_1 - 3w_2}{w_3 - 2w_2}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 4 & -9 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{w_1 - 4w_5}{w_2 + w_5}} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -17 & -13 & 2 & -13 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -13 & -11 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{w_1 - 2w_4}{w_3 - 3w_4}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 17 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 : 3} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{3} & 0 & -\frac{37}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{3} & 1 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 : \left(-\frac{37}{3}\right)} \end{array}$$

$$\xrightarrow{w_3 : \left(-\frac{37}{3}\right)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{3} & 1 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 - \frac{5}{3}w_3 \\ w_2 + \frac{13}{3}w_3 \\ w_4 - \frac{23}{3}w_3 \\ w_5 + \frac{4}{3}w_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Rozwiązań tego układu równań są liczby $x = 0, y = 1, z = 0, s = 1, t = 0$.

Zadania

○ Zadanie 9.1

Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbf{R}$ podane układy równań są układami Cramera:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} (p+1)x - py = 1 \\ 2x + (p-1)y = 3p \end{cases} ; & \text{b) } \begin{cases} 2px + 4y - pz = 4 \\ 2x + y + pz = 1 \\ (4+2p)x + 6y + pz = 3 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} px + 3y + pz = 0 \\ -px + 2z = 3 \\ x + 2y + pz = p \end{cases} ; & \text{d) } \begin{cases} x - y - z - t = px \\ -x + y - z - t = py \\ -x - y + z - t = pz \\ -x - y - z + t = pt \end{cases} ? \end{array}$$

○ Zadanie 9.2

Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 3x + y = 4 \end{cases} ; & \text{b) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases} . \end{array}$$

○ Zadanie 9.3

Stosując wzór Cramera obliczyć niewiadomą y z podanych układów równań:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 3x + 7y + 2z + 4t = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + 4y + z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \end{cases} ; & \text{b) } \begin{cases} x + 3y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + 3y + z + 3t = 1 \\ 3x + 3y + 3z + t = 1 \end{cases} ; \end{array}$$

$$\text{c) } x + 2y - 4 = 3y + 4z - 6 = 5z + 6s = 7s + 8t = x + y + z + s + t - 2 = 0.$$

○ Zadanie 9.4

Rozwiązać podane układy równań stosując metodą macierzy odwrotnej:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases} ; & \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases} ; \\ \text{c) } \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = -5 \\ -x + 2y - z = 2 \end{cases} ; & \text{d) } \begin{cases} y + z + t = 4 \\ x + z + t = -1 \\ x + y + t = 2 \\ x + y + z = -2 \end{cases} . \end{array}$$

○ Zadanie 9.5

Rozwiązać podane układy równań metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ x + 2z = -6 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ 6x + 4y + 3z + 2t = 2 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x - 2y + 3s + t = 1 \\ 2x - 3y + z + 8s + 2t = 3 \\ x - 2y + z + 3s - t = 1 \\ y + 3s + 5t = 0 \\ x - 2y + 5s + 8t = -1 \end{cases}$.

○ Zadanie 9.6

Stosując „metodę kolumn jednostkowych” rozwiązać podane układy Cramera:

a) $\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 5 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x - 2y + z - t = -4 \\ 2x - y - z + t = 1 \\ x + y + 2z - t = 5 \\ x + y - z + t = 4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + y + z + s = 0 \\ y + z + s + t = 4 \\ x + z + t = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z - t = 3 \\ 2x + y + z + 2s + 3t = 6 \\ 3x - z + s + t = 3 \\ y + 4s + t = 1 \\ 2x + y + z - 2s + 5t = 8 \end{cases}$.

○ Zadanie* 9.7

Rozwiązać podane układy równań przekształcając ich macierze rozszerzone (nie-wiadome zaznaczono nad kolumnami):

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	
a)	$\left[\begin{array}{cccccc c} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & 1 \end{array} \right]$;	b)	$\left[\begin{array}{cccccc c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & & 0 \\ 8 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 2 & & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & & 3 \end{array} \right]$					

○ Zadanie* 9.8

Rozwiązać układy równań:

a) $\begin{cases} 21,3x + 7,1y - 2,7z = 4,317 \\ 3,2x + 11,2y + 6,2z = 16,664 \\ -5,9x + 3,6y + 4,5z = 7,765 \end{cases}$

$$\text{b) } \begin{cases} 7,8x - 2,2y + 3,3z + 6,3t = 3,219 \\ -9,4x + 4,8y - 1,1z + 1,2t = -0,214 \\ 0,7x - 3,7y + 9,8z + 2,1t = 1,153 \\ 11,2x + 12,3y - 7,3z + 1,6t = 6,010 \end{cases}$$

Odpowiedzi i wskazówki

- 9.1 a) dla $p \neq -1 - \sqrt{2}$ oraz $p \neq -1 + \sqrt{2}$; b) nie istnieje takie p ; c) dla każdego $p \in \mathbb{R}$; d) dla $p \neq -2$ oraz $p \neq 2$.

9.2 a) $x = \frac{14}{11}$, $y = \frac{2}{11}$; b) $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$; c) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

9.3 a) $y = \frac{5}{11}$; b) $y = \frac{1}{10}$; c) $y = 2$.

- 9.4 a) $x = 1$, $y = -1$; b) $x = -2$, $y = 0$, $z = 7$; c) $x = 3$, $y = 2$, $z = -1$; d) $x = -3$, $y = 2$, $z = -1$, $t = 3$.

9.5 a) $x = -\frac{1}{7}$, $y = \frac{3}{7}$; b) $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$; c) $x = 0$, $y = 2$, $z = -3$; d) $x = \frac{8}{7}$, $y = -\frac{1}{7}$, $z = -\frac{3}{7}$; e) $x = 1$, $y = -2$, $z = 0$, $t = 2$; f) $x = 10$, $y = 3$, $z = 0$, $s = -1$, $t = 0$.

9.6 a) $x = 0$, $y = 2$, $z = -\frac{1}{2}$; b) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 4$; c) $x = -1$, $y = 1$, $z = -1$, $s = 2$, $t = 2$; d) $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$, $s = 0$, $t = 1$.

- 9.7* a) $(A, B, C, D, E, F) = (4, 2, 2, -2, -2, 1)$;
b) $(A, B, C, D, E, F, G, H) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -1)$.

9.8* a) $x = 0,13$, $y = 0,72$, $z = 1,32$; b) $x = 0,22$, $y = 0,36$, $z = 0,18$, $t = 0,27$.

Dziesiąty tydzień

Metoda eliminacji Gaussa dla dowolnych układów równań (4.4).

Przykłady

● Przykład 10.1

Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać podane układy równań:

a) $\begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ y + 3z - 3t = 1 \\ x + y + z - t = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z - t = 1 \\ x + y + z + 3t = 2 \\ 3x + 5y - z + t = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ d*) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t - u = 6 \\ 3x + 6y + 5z - 2t - 9u = 1 \\ 2x + 4y + 2z - 8u = -5 \\ 2x + 4y + 7z - 5t + u = 17 \\ x + 2y + 6z - 5t - 10u = 12 \end{cases}$

Rozwiązańie

Rozwiązywanie dowolnego liniowego układu równań postaci $AX = B$ metodą eliminacji Gaussa polega na przekształcaniu macierzy rozszerzonej $[A|B]$ tego układu. Celem postępowania jest doprowadzenie macierzy $[A|B]$ do macierzy $\left[\begin{array}{c|c} A' & B' \end{array}\right]$ opisującej układ równoważny wyjściowemu i jednocześnie zawierający w lewym górnym rogu macierzy A' macierz jednostkową, a pod nią jeszcze jeden wiersz złożony z samych zer. Wówczas, zgodnie z twierdzeniem, możliwe będą trzy sytuacje:

1. układ będzie sprzeczny, jeżeli element kolumny B' wyrazów wolnych odpowiadający wierszowi zerowemu macierzy A' będzie różny od zera,
2. układ będzie miał tylko jedno rozwiązanie (i będzie równoważny układowi Cramera), jeżeli poza macierzą jednostkową w macierzy A' nie pozostanie żadna inna kolumna,
3. układ będzie miał nieskończenie wiele rozwiązań, jeżeli poza macierzą jednostkową w macierzy A' pozostanie choć jedna kolumna. Liczba tych dodatkowych kolumn będzie wówczas liczbą parametrów określających rozwiązanie układu.

Nasze przykłady rozwiązywać będziemy w oparciu o algorytm Gaussa, ale zmodyfikowany, bo wykraczający poza układy Cramera. Będziemy wykonywać następujące operacje na **wierszach** macierzy rozszerzonej:

- zamiana między sobą i -tego i j -tego wiersza (oznaczenie $w_i \longleftrightarrow w_j$),
- mnożenie i -tego wiersza przez stałą c różną od zera (oznaczenie cw_i),
- dodanie do i -tego wiersza j -tego wiersza pomnożonego przez stałą c (oznaczenie $w_i + cw_j$),

które wystarczały dla układów Cramera oraz dodatkowo:

- skreślenie i -tego wiersza złożonego z samych zer (oznaczenie $\cancel{w_i} \equiv 0$),
- skreślenie i -tego wiersza równego j -temu wierszowi (oznaczenie $\cancel{w_i} = w_j$),
- skreślenie i -tego wiersza, który jest proporcjonalny do j -tego wiersza (oznaczenie $\cancel{w_i} \sim w_j$).

Potrzebna tu jeszcze będzie operacja **przestawiania** j -tej kolumny na koniec niewiadomych (oznaczenie $k_j \longleftrightarrow$) z jednoczesnym przemianowaniem oznaczeń niewiadomych.

- a) Przekształcamy macierz rozszerzoną układu równań otrzymując

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \longleftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\cancel{w_3} \sim w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right].$$

Dany układ jest więc równoważny układowi

$$\begin{cases} x - 2z + 2t = 0 \\ y + 3z - 3t = 1 \end{cases}.$$

Układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań z dwoma parametrami. Przyjmując niewiadome z i t za parametry otrzymujemy rozwiązanie tego układu

$$\begin{cases} x = 2z - 2t \\ y = 1 - 3z + 3t, \end{cases}$$

gdzie $z, t \in \mathbb{R}$.

b) Postępując podobnie otrzymujemy kolejne równoważne postaci macierzy rozszerzonej

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 - 3w_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

Ostatni wiersz uzyskanej macierzy wskazuje na sprzeczność danego układu równań. Wiadomo to wyraźnie po rozpisaniu układu w formie rozwiniętej.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z - t = 1 \\ -y + 2z + 4t = 1 \\ 0 = -1 \end{array} \right.$$

c) Macierz rozszerzona $[A|B]$ danego układu równań po przestawieniu jego wierszy $w_1 \longleftrightarrow w_3, w_2 \longleftrightarrow w_4$ przyjmie postać

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right].$$

Dokonując na wierszach tej macierzy zaznaczonych operacji otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} [A|B] &\xrightarrow{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 - 2w_1 \\ w_4 - 3w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_3 \leftrightarrow w_3 \\ w_3 \cdot (-1) \\ w_4 \sim w_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{w_3 : 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_1 - w_2 \\ w_2 - w_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Dany układ równań jest zatem równoważny układowi Cramera posiadającemu jedyne rozwiązanie

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{array} \right..$$

d*) W tym przykładzie pojawi się konieczność przestawienia kolumn. Można to zrobić jednorazowo pod koniec postępowania opuszczając wcześniej „niewygodne” kolumny. My jednak będziemy to robić stopniowo. Każdą „niewygodną” kolumnę (tzn. nie mającą elementu niezerowego poniżej już ustalonej „jedynki” na przekątnej) będziemy od razu przestawiać wraz z jej niewiadomą na koniec macierzy układu przed kolumnę wyrazów wolnych. Od tego momentu będziemy już zaznaczać nad kolumnami macierzy odpowiadające im niewiadome. Oczywiście niewiadome przeniesione na koniec staną się parametrami. Operację przeniesienia j -tej kolumny na koniec będziemy oznaczać symbolem $k_j \longmapsto$, a przeniesione kolumny będziemy dla przejrzystości oddzielać linią przerywaną. Mamy zatem

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & -2 & -9 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -8 & -5 \\ 2 & 4 & 7 & -5 & 1 & 17 \\ 1 & 2 & 6 & -5 & -10 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 2w_1 \\ w_4 - 2w_1 \\ w_5 - w_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_2 \leftrightarrow w_4 \\ w_3 = w_4 \end{array}} \\
 \left[\begin{array}{ccccc|c} x & y & z & t & u & \\ \hline 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} k_2 \longleftrightarrow \\ w_3 + 4w_2 \\ w_4 - 3w_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccccc|c} x & z & t & u & y & \\ \hline 1 & 3 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} k_3 \longleftrightarrow \\ w_4 \sim w_3 \\ w_3 : 6 \end{array}} \\
 \left[\begin{array}{ccccc|c} x & z & u & y & t & \\ \hline 1 & 3 & -1 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_2 - 3w_3 \\ w_1 - 3w_2 + w_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccccc|c} x & z & u & y & t & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right].
 \end{array}$$

To oznacza, że

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ z \\ u \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -4 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} y \\ t \end{array} \right],$$

zatem rozwiązanie naszego układu ma w formie rozwiniętej postać

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -4 - 2y - t \\ z = \frac{7}{2} + t \\ u = \frac{1}{2} \end{array} \right.,$$

gdzie $y, t \in R$.

● Przykład 10.2

Rozwiązać podane układy równań „metodą kolumn jednostkowych”:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 4x + 3y + 5z + 7u = 2 \\ 2x - y + z + 3u = 4 \\ x + 2y + 2z + 2u = -1 \\ 3x + y + 3z + 5u = 3 \end{array} \right. ; \quad \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 9y + 6z - 2s - 3t = 5 \\ x + 2y - z - s + 5t = 5 \\ -2x - 7y + z + 3s - 4t = -5 \\ -x - 5y - z + 3s + 6t = 4 \end{array} \right. ; \\
 \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 5x + y + 2z + s - t + 6u = 2 \\ -11x - 3y - 9z - 2s + 4t - 15u = -5 \\ 14x + y + 2z + 3s + 2t + 13u = 6 \\ 3x - 2y - 7z + s + 6t - 2u = 1 \\ 2x + 3y + 9z - 7t + 8u = 1 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Rozwiązanie

Metoda kolumn jednostkowych jest praktyczną wersją metody eliminacji Gaussa. W przypadku dowolnych układów równań celem postępowania jest doprowadzenie kilku kolumn macierzy układu do postaci jednostkowej (tzn. z jedną jedynką i resztą zer) tak,

aby „jedynki” w wyróżnionych kolumnach znajdowały się w różnych wierszach. Wybór kolumn do przekształceń jest dowolny. Najlepiej jest brać kolumny zawierające „małe” liczby całkowite, „duże” zer, a wyróżniony niezerowy element powinnien znajdować się w wierszu dotąd nie wybieranym. Samo przekształcenie kolumny wykonujemy dokładnie tak, jak dla układu Cramera (patrz Przykład 9.6). W stosunku do układów Cramera w przypadku dowolnych układów równań mogą w trakcie postępowania pojawić się wiersze zerowe - wtedy je skreślamy, wiersze równe lub proporcjonalne - wtedy skreślamy jeden z nich. Może się zdarzyć, że w macierzy rozszerzonej układu pojawi się wiersz zerowy z jednym elementem niezerowym w kolumnie wyrazów wolnych. Taki układ równań jest oczywiście sprzeczny. Jeśli tak się nie zdarzy, to postępowanie kończy się wtedy, gdy liczba wyróżnionych kolumn jest równa liczbie wierszy, które pozostały w macierzy. Rozwiążanie układu odczytujemy teraz z końcowej postaci macierzy, wyróżnione „jedynki” wskazują zmienne zależne.

Uwaga. Przy wybieraniu wyróżnionych kolumn oraz ich niezerowych elementów mamy pełną dowolność. Jednoznacznie określona jest tylko liczba tych kolumn, ale pojawia się ona w naturalny sposób na końcu postępowania.

a) Przekształcamy macierz rozszerzoną układu równań otrzymując

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 - 4w_3 \\ w_2 - 2w_3 \\ w_4 - 3w_3 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w'_1 = w_4 \\ w'_2 = w_4 \\ w_4 \cdot (-1) \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & -6 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -8 & -4 & 0 & 11 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & -6 \end{array} \right].$$

W formie rozwiniętej układ równań przyjmuje postać

$$\begin{cases} x - 8y - 4z = 11 \\ 5y + 3z + u = -6 \end{cases},$$

zatem jego rozwiązanie można zapisać wzorami $x = 11 + 8y + 4z$, $u = -6 - 5y - 3z$, gdzie $y, z \in \mathbb{R}$.

b) Postępując według tej samej metody otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 9 & 6 & -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ -2 & -7 & 1 & 3 & -4 & -5 \\ -1 & -5 & -1 & 3 & 6 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 - 2w_2 \\ w_3 + 2w_2 \\ w_4 + w_2 \end{array}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 5 & 8 & 0 & -13 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 11 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_2 + w_3 \\ w_4 - 2w_3 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 5 & 8 & 0 & -13 & -5 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_4 \cdot (-1) \\ w_1 + 13w_4 \\ w_2 - 11w_4 \\ w_3 - 6w_4 \end{array}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -34 & 8 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 32 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 : 8}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{17}{4} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 32 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_2 + 2w_1 \\ w_3 + w_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{17}{4} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{47}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{43}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

zatem

$$\begin{cases} -\frac{17}{4}y + z = 1 \\ x + \frac{47}{2}y = 1 \\ \frac{43}{4}y + s = 0 \\ -3y + t = 1 \end{cases}$$

i ostatecznie $x = 1 - \frac{47}{2}y$, $z = 1 + \frac{17}{4}y$, $s = -\frac{43}{4}y$, $t = 1 + 3y$, gdzie $y \in \mathbb{R}$.

c) Rozwiązanie tego przykładu znajdziemy dość szybko, bowiem mamy

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 5 & 1 & 2 & 1 & -1 & 6 & 2 \\ -11 & -3 & -9 & -2 & 4 & -15 & -5 \\ 14 & 1 & 2 & 3 & 2 & 13 & 6 \\ 3 & -2 & -7 & 1 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 0 & -7 & 8 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_2 + 3w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 + 2w_1 \\ w_5 - 3w_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cccccc|c} 5 & 1 & 2 & 1 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 13 & 0 & -3 & 3 & 4 & 10 & 5 \\ -13 & 0 & 3 & -3 & -4 & -10 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 - w_2 \\ w_3 - 2w_2 \\ w_4 - 3w_2 \\ w_5 = -w_4 \end{array}} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} w_1 + 2w_3 \\ w_2 - w_3 \\ w_4 = w_3 \end{array}} \left[\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 17 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 0 & -9 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

To oznacza, że

$$\begin{cases} 3x + y + 17z + 5u = 5 \\ 3x - 9z + s + 2u = -1 \\ x + 6z + t + u = 2 \end{cases},$$

zatem

$$\begin{cases} y = 5 - 3x - 17z - 5u \\ s = -1 - 3x + 9z - 2u \\ t = 2 - x - 6z - u \end{cases}$$

gdzie $x, z, u \in \mathbb{R}$.

• Przykład 10.3

Dla jakich wartości parametru p podany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie, określić liczbę rozwiązań tego układu w pozostałych przypadkach:

$$\begin{cases} x + p^2y + z = -p \\ x + y - pz = p^2 \\ y + z = 1 \end{cases} ?$$

Rozwiązanie

Jeżeli dany układ jest układem Cramera, to ma dokładnie jedno rozwiązanie. Dzieje się tak, o ile

$$\begin{vmatrix} 1 & p^2 & 1 \\ 1 & 1 & -p \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+p) - (p^2 - 1) = (1+p)(2-p) \neq 0,$$

tzn. dla $p \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 2\}$. Przypadki $p = -1$ oraz $p = 2$ przeanalizujemy rozwiązyując odpowiedni układ równań metodą eliminacji Gaussa. Dla $p = -1$ mamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 = w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

zatem $x = 0$, $y = 1 - z$, $z \in \mathbf{R}$, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Dla $p = 2$ otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + 3w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

W tym przypadku układ nie posiada rozwiązań, bowiem odczytując drugi wiersz ostatniej macierzy w jawnej postaci $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 9$ uzyskaliśmy warunek sprzeczny.

● Przykład 10.4

W wytwórni montuje się cztery wyroby A , B , C , D z trzech typów detali a , b , c . Wyroby A , B , C , D ważą odpowiednio 60 g, 60 g, 70g, 90 g. Obliczyć, ile ważą poszczególne detale, jeżeli ich liczba w produkowanych wyrobach podana jest w tabeli:

	A	B	C	D
a	1	2	1	1
b	2	1	1	2
c	2	1	3	4

Rozwiązanie

Niech x, y, z oznaczają odpowiednio wagę w gramach detali a, b, c . Dane, którymi dysponujemy w tym zadaniu prowadzą do układu równań

$$\begin{cases} a + 2b + 2c = 60 \\ 2a + b + c = 60 \\ a + b + 3c = 70 \\ a + 2b + 4c = 90 \end{cases}.$$

Wyznaczenie wag poszczególnych detali będzie możliwe wtedy, gdy rozważany układ równań będzie miał jednoznaczne rozwiązanie. Stosując metodę eliminacji Gaussa otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 60 \\ 2 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & 1 & 3 & 70 \\ 1 & 2 & 4 & 90 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - w_1 \\ w_4 - w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 60 \\ 0 & -3 & -3 & -60 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 30 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 3w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 60 \\ 0 & 0 & -6 & -90 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 30 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 3w_3 \\ w_4 : 2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 60 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{w_2 + w_3 \\ w_1 - 2w_2 - 2w_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array} \right].$$

Zatem detal a waży 20 g, detal b waży 5 g, a detal c 15 g.

Zadania

○ Zadanie 10.1

Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać podane układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = 10 \\ 5x - 6y + 8z = 19 \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1 \end{cases};$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases};$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1 \end{cases}.$$

○ Zadanie 10.2

Rozwiązać podane układy równań „metodą kolumn jednostkowych”:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 2y + z - t = 0 \\ 5x - y + z + 2t = -4 \\ 7x + 8y + z - 7t = 6 \\ x - y + z + 2t = 4 \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y + z - 2s - t = 6 \\ 4x + 7y + 2z - 5s + t = 17 \\ 6x + 5y + 3z - 2s - 9t = 1 \\ 2x + 6y + z - 5s - 10t = 12 \end{cases};$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + y - 2t = 1 \\ 5x + 2y + 2z - t = 5 \\ x - y - 2t = -5 \\ 5x + y + z - 3t = 0 \\ -7x - 3y + z + 5t = -4 \\ 4x + y - 2z - 5t = -2 \end{cases};$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \\ -2x + 6y + 2z + 4s = 10 \\ -2x + 6y + 4z + 4s + t = 10 \\ -x + 3y + z + 2s = 5 \end{cases}.$$

○ Zadanie 10.3

Dla jakich wartości parametru p podane układy równań mają dokładnie jedno rozwiązanie, określić liczby rozwiązań tych układów w pozostałych przypadkach:

$$\text{a) } \begin{cases} x + py - z = 1 \\ x + 10y - 6z = p \\ 2x - y + pz = 0 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x + 4y - 2z = -p \\ 3x + 5y - pz = 3 \\ px + 3py + z = p \end{cases}.$$

○ Zadanie 10.4

Wykonanie pewnego pojemnika wymaga czterech czynności: narysowania formy, wycięcia, złożenia modelu i jego pomalowania. Liczby poszczególnych czynności w kolejnych dniach pracy pewnego pracownika podaje tabela:

	rysowanie	wycinanie	składanie	malowanie
poniedziałek	30	20	10	5
wtorek	20	15	15	10
środa	40	25	20	20
czwartek	30	20	20	20

Obliczyć czas wykonywania poszczególnych czynności, jeżeli w kolejnych dniach

łączny czas pracy wynosił odpowiednio 2 h 10 min, 2 h 15 min, 3 h 55 min, 3 h 30 min.

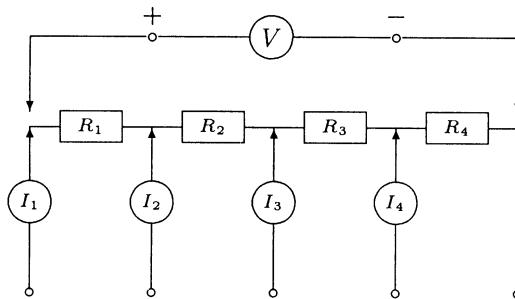
○ **Zadanie 10.5**

Rozwiążając odpowiedni układ równań znaleźć macierz A spełniającą oba podane warunki

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 6 & 23 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

○ **Zadanie 10.6**

W układzie elektrycznym podanym na rysunku zamontowano oporniki R_1, R_2, R_3, R_4 .



Przy pięciu różnych warunkach zasilania odczytano z amperomierzy i woltomierza wartości prądów I_1, I_2, I_3, I_4 [mA] i napięć [V], co ilustruje tabela.

	I_1	I_2	I_3	I_4	V
pomiar 1	2	5	4	1	33
pomiar 2	1	0	1	2	7
pomiar 3	5	-1	1	-1	20
pomiar 4	4	5	0	1	36
pomiar 5	0	1	-2	5	3

Wyznaczyć oporności R_1, R_2, R_3, R_4 .

○ **Zadanie* 10.7**

Rozwiążując odpowiednie układy równań Cramera znaleźć rozkłady na rzeczywiste ułamki proste podanych funkcji wymiernych:

$$\text{a) } \frac{2x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2)^2}; \quad \text{b) } \frac{x^5 + 5x^3 - 3x^2 + 6x - 5}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2)(x^2 + 3)}.$$

Odpowiedzi i wskazówki

10.1 a) $x = 1, y = -1, z = 1$; b) układ jest sprzeczny; c) $x = -1 - t, y = 1, z = 0$, gdzie $t \in \mathbf{R}$; d) $x = \frac{1}{7} - \frac{3}{7}z + s - t, y = \frac{1}{7} + \frac{4}{7}z - s$, gdzie $z, s, t \in \mathbf{R}$.

10.2 a) układ jest sprzeczny; b) $y = \frac{7}{2} + s, z = -4 - 2x - s, t = \frac{1}{2}$, gdzie $x, s \in \mathbf{R}$;

c) $x = -1 + t$, $y = 4 - t$, $z = 1 - t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$; d) $x = -5 + 3y + z + 2s$, $t = -2z$, gdzie $y, z, s \in \mathbf{R}$.

10.3 Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, nieskończoność wiele rozwiązań lub też nie posiada rozwiązań odpowiednio dla: a) $p \in \mathbf{R} \setminus \{-5, 3\}$, $p = 3$, $p = -5$; b) $p \in \mathbf{R} \setminus \{-1, -7\}$, $p = -1$, $p = -7$.

10.4 Czasy potrzebne na narysowanie formy, wycięcie, złożenie modelu i pomalowanie wynoszą odpowiednio 1 minutę, 3 minuty, 2 minuty i 4 minuty.

10.5
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

10.6 $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 0,5 \text{ k}\Omega$.

10.7* a) $\frac{1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{(x^2 + 2)^2}$; b) $\frac{x - 1}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{x^2 + 2} - \frac{1}{x^2 + 3}$.

Geometria analityczna w przestrzeni

Jedenasty tydzień

Wektory (5.1). Iloczyn skalarny (5.2). Iloczyn wektorowy (5.3).

Przykłady

● Przykład 11.1

Obliczyć długości podanych wektorów:

a) $\vec{a} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{5})$; b) \overrightarrow{PQ} , gdzie $P = (1, 2, 3)$, $Q = (4, 6, 15)$.

Rozwiązanie

a) Długość wektora $\vec{v} = (x, y, z)$ wyraża się wzorem $|\vec{v}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Zatem

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9} = 3.$$

b) Długość wektora \overrightarrow{AB} łączącego punkty $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ wyraża się wzorem

$$|\overrightarrow{AB}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Zatem

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2 + (15 - 3)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

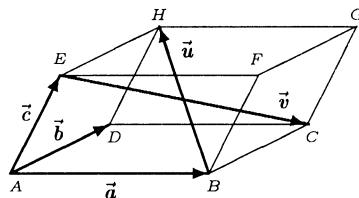
● Przykład 11.2

Równoległościan jest rozpięty na wektorach \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Wyrazić przekątne tego równoległościanu przez wektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

Rozwiązanie

Niech $\vec{u} = \overrightarrow{BH}$, $\vec{v} = \overrightarrow{EC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AG}$ i $\vec{z} = \overrightarrow{DF}$ oznaczają przekątne równoległościanu rozpiętego na wektorach \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} (rysunek). Aby nie zaciemniać rysunku zaznaczono na nim

tylko dwie przekątne \vec{u} i \vec{v} . Z faktu, że łamana $ABHEA$ jest zamknięta wynika równość $\vec{a} + \vec{u} = \vec{c} + \vec{b}$, stąd $\vec{u} = \vec{c} + \vec{b} - \vec{a}$. Podobnie z faktu, że łamana $ABCEA$ jest zamknięta wynika równość $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{v}$, stąd $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Z analogicznych rozważań wynika, że trzecia przekątna \vec{w} wyraża się wzorem $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, zaś czwarta $\vec{z} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.



● Przykład 11.3

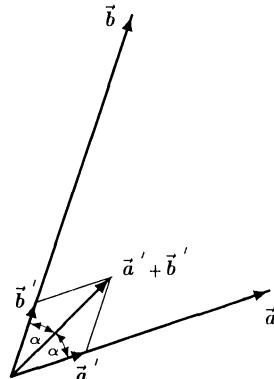
Znaleźć dowolny wektor \vec{u} , który z wektorami $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (6, -4, 2)$ tworzy jednakowe kąty i leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez te wektory.

Rozwiązańie

W rozwiązaaniu wykorzystamy fakt mówiący, że wektor, który jest sumą dwóch wektorów o jednakowych długościach, tworzy z nimi jednakowe kąty i leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez te wektory. Fakt ten wynika z elementarnych własności rombu. Niech \vec{a}' i \vec{b}' oznaczają wektory jednostkowe równoległe (z zachowaniem zwrotu) odpowiednio do wektorów \vec{a} i \vec{b} (rysunek). Wtedy

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right),$$

$$\vec{b}' = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(6, -4, 2)}{\sqrt{6^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right).$$



Wektor \vec{u} tworzący jednakowe kąty z wersorami \vec{a}' , \vec{b}' , a zatem także z wektorami \vec{a} i \vec{b} , ma postać

$$\vec{u} = \vec{a}' + \vec{b}' = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right) + \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right) = \frac{4}{\sqrt{14}}(1, 0, 1).$$

● Przykład 11.4

Obliczyć iloczyny skalарne podanych par wektorów:

a) $\vec{a} = (-1, 5, 2)$, $\vec{b} = (3, 0, 7)$; b) $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$.

Rozwiązańie

a) Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ obliczamy ze wzoru

$$\vec{a} \circ \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Zatem

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (-1, 5, 2) \circ (3, 0, 7) = (-1) \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 7 = 11.$$

b) W rozwiązyaniu wykorzystamy własności iloczynu skalarnego wektorów oraz fakt, że wersory \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} są parami prostopadłe, tzn. spełniają równości:

$$\vec{i} \circ \vec{j} = \vec{j} \circ \vec{k} = \vec{k} \circ \vec{i} = 0.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\vec{u} \circ \vec{v} &= (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \circ (3\vec{i} - 2\vec{k}) \\ &= 3(\vec{i} \circ \vec{i}) - 2(\vec{i} \circ \vec{k}) - 3(\vec{j} \circ \vec{i}) + 2(\vec{j} \circ \vec{k}) + 3(\vec{k} \circ \vec{i}) - 2(\vec{k} \circ \vec{k}) \\ &= 3 - 2 = 1.\end{aligned}$$

Uwaga. Przykład b) można oczywiście obliczyć tak jak a) zapisując $\vec{u} = (1, -1, 1)$, $\vec{v} = (3, 0, -2)$.

● Przykład 11.5

Korzystając z iloczynu skalarnego obliczyć miary kątów między:

- a) wektorami $\vec{a} = (1, \sqrt{2}, 3)$, $\vec{b} = (0, -\sqrt{2}, 1)$;
- b) wektorem $\vec{u} = (4, -12, 3)$ i płaszczyzną xOz układu współrzędnych;
- c) przekątnymi ścian prostopadłościanu o krawędziach długości $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$, wychodzącymi z jednego wierzchołka.

Rozwiązanie

Miara kąta między wektorami niezerowymi \vec{a} i \vec{b} wyraża się wzorem

$$\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

- a) Dla wektorów $\vec{a} = (1, \sqrt{2}, 3)$ i $\vec{b} = (0, -\sqrt{2}, 1)$ mamy

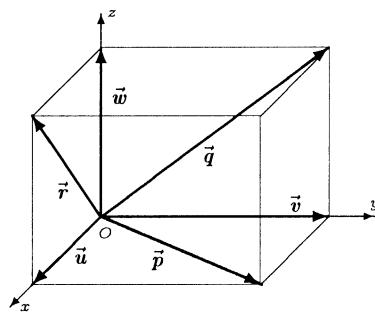
$$\begin{aligned}\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) &= \arccos \frac{(1, \sqrt{2}, 3) \circ (0, -\sqrt{2}, 1)}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2}} \\ &= \arccos \frac{1}{6} \approx 1,40 \text{ [rad]} \approx 80,4^\circ.\end{aligned}$$

- b) Zauważmy najpierw, że miara kąta między wektorem i płaszczyzną jest równa mierze kąta między tym wektorem i jego rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę. Rzut prostokątny wektora $\vec{u} = (4, -12, 3)$ na płaszczyznę xOz ma postać $\vec{u}' = (4, 0, 3)$. Zatem

$$\begin{aligned}\alpha = \measuredangle(\vec{u}, \vec{u}') &= \arccos \frac{(4, -12, 3) \circ (4, 0, 3)}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-12)^2 + 3^2}} \\ &= \arccos \frac{5}{13} \approx 1,18 \text{ [rad]} \approx 67,3^\circ.\end{aligned}$$

c) Sytuację omawianą w zadaniu przedstawiono na rysunku obok. Początek układu współrzędnych umieszczono w jednym z wierzchołków prostopadłościanu, a osie pokrywają się z jego krawędziami. Wektory \vec{u} , \vec{v} i \vec{w} rozpinające ten prostopadłościan mają wtedy postać:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (a, 0, 0) = (5, 0, 0), \\ \vec{v} &= (0, b, 0) = (0, 6, 0), \\ \vec{w} &= (0, 0, c) = (0, 0, 7).\end{aligned}$$



Przekątne ścian prostopadłościanu wychodzące z początku układu współrzędnych są reprezentowane przez wektory:

$$\vec{p} = \vec{u} + \vec{v} = (5, 6, 0), \quad \vec{q} = \vec{v} + \vec{w} = (0, 6, 7), \quad \vec{r} = \vec{u} + \vec{w} = (5, 0, 7).$$

Miary kątów między tymi przekątnymi wyrażają się wzorami:

$$\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \arccos \frac{\vec{p} \circ \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \arccos \frac{(5, 6, 0) \circ (0, 6, 7)}{\sqrt{5^2 + 6^2} \cdot \sqrt{6^2 + 7^2}} = \arccos \frac{36}{\sqrt{5185}} \approx 60^\circ,$$

$$\measuredangle(\vec{p}, \vec{r}) = \arccos \frac{\vec{p} \circ \vec{r}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{r}|} = \arccos \frac{(5, 6, 0) \circ (5, 0, 7)}{\sqrt{5^2 + 6^2} \cdot \sqrt{5^2 + 7^2}} = \arccos \frac{25}{\sqrt{4514}} \approx 68^\circ,$$

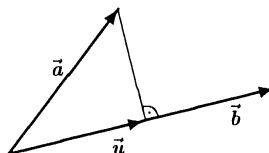
$$\measuredangle(\vec{q}, \vec{r}) = \arccos \frac{\vec{q} \circ \vec{r}}{|\vec{q}| \cdot |\vec{r}|} = \arccos \frac{(0, 6, 7) \circ (5, 0, 7)}{\sqrt{6^2 + 7^2} \cdot \sqrt{5^2 + 7^2}} = \arccos \frac{49}{\sqrt{6290}} \approx 52^\circ.$$

● Przykład 11.6

Obliczyć długość rzutu prostokątnego wektora $\vec{a} = (3, 4, -1)$ na prostą tworzącą jednakowe kąty z dodatnimi osiami układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że prosta tworząca jednakowe kąty z osiami układu współrzędnych jest równoległa do wektora $\vec{b} = (1, 1, 1)$. Rzut prostokątny dowolnego wektora na tę prostą jest taki sam jak rzut tego wektora na wektor \vec{b} . Rzut prostokątny \vec{u} wektora \vec{a} na wektor \vec{b} (rysunek) wyraża się wzorem



$$\vec{u} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}.$$

Wzór ten wynika bezpośrednio z definicji iloczynu skalarnego wektorów \vec{a} i \vec{b} . Rzut \vec{u} wektora $\vec{a} = (3, 4, -1)$ na wektor $\vec{b} = (1, 1, 1)$ ma zatem postać

$$\vec{u} = \frac{(3, 4, -1) \circ (1, 1, 1)}{(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2})^2} \cdot (1, 1, 1) = (2, 2, 2).$$

Stąd $|\vec{u}| = 2\sqrt{3}$.

● Przykład 11.7

Obliczyć iloczyny wektorowe podanych par wektorów:

a) $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, -5)$; b) $\vec{p} = 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Rozwiązańie

a) Do obliczenia iloczynu wektorowego wektorów $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ wykorzystamy wzór

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (-1, 3, 2) \times (-1, 2, -5) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}[3 \cdot (-5) - 2 \cdot 2] - \vec{j}[(-1) \cdot (-5) - (-1) \cdot 2] + \vec{k}[(-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 3] \\ &= -19\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k} = (-19, -7, 1). \end{aligned}$$

b) W rozwiązaaniu wykorzystamy własności iloczynu wektorowego oraz równości

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \vec{p} \times \vec{q} &= (2\vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) \\ &= 2(\vec{j} \times \vec{i}) - 2(\vec{j} \times \vec{j}) + 6(\vec{j} \times \vec{k}) + (\vec{k} \times \vec{i}) - (\vec{k} \times \vec{j}) + 3(\vec{k} \times \vec{k}) \\ &= -2\vec{k} - \vec{0} + 6\vec{i} + \vec{j} + \vec{i} + \vec{0} = 7\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}. \end{aligned}$$

Uwaga. Przykład b) można oczywiście obliczyć sposobem przedstawionym w a) po zapisaniu $\vec{p} = (0, 2, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 3)$.

● Przykład 11.8

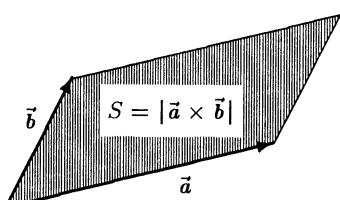
Obliczyć pola podanych powierzchni:

- a) trójkąt rozpięty na wektorach $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (0, 3, -2)$;
- b) równoległobok o trzech kolejnych wierzchołkach w punktach $A = (1, 0, 1)$, $B = (3, -1, 5)$, $C = (-1, 5, 0)$;
- c) równoległościan rozpięty na wektorach \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} .

Rozwiązańie

W rozwiązaaniu wykorzystamy określenie iloczynu wektorowego, z którego m. in. wynika, że pole S równoległoboku rozpiętego na wektorach \vec{a} , \vec{b} jest równe długości wektora $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$



a) Ponieważ pole trójkąta rozpiętego na wektorach \vec{a} , \vec{b} jest równe połowie pola równoległoboku rozpiętego na tych wektorach, więc

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |(1, -1, 1) \times (0, 3, -2)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}| = \frac{\sqrt{14}}{2}. \end{aligned}$$

b) Równoległobok $ABCD$ o wierzchołkach w punktach $A = (1, 0, 1)$, $B = (3, -1, 5)$, $C = (-1, 5, 0)$ jest rozpięty na wektorach

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 4), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 5, -1),$$

zatem jego pole wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \right| \\ &= |-19\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}| = \sqrt{(-19)^2 + (-6)^2 + 8^2} = \sqrt{461} \approx 21,47. \end{aligned}$$

c) Powierzchnia równoległościanu rozpiętego na wektorach \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} składa się z dwóch równoległoboków rozpiętych na wektorach \vec{p} , \vec{q} , z dwóch równoległoboków rozpiętych na wektorach \vec{p} , \vec{r} oraz dwóch równoległoboków rozpiętych na wektorach \vec{q} , \vec{r} . Pole tej powierzchni będzie zatem równe

$$S = 2(|\vec{p} \times \vec{q}| + |\vec{p} \times \vec{r}| + |\vec{q} \times \vec{r}|).$$

● Przykład 11.9

Obliczyć odległość punktu $P = (3, 2, 5)$ od prostej l wyznaczonej przez wektor $\vec{a} = (1, 1, 1)$ zaczepiony w początku układu współrzędnych.

Rozwiązańe

Odległość d punktu P od prostej l (rysunek) wyznaczamy z trójkąta OPP' , gdzie P' jest rzutem prostopadłym punktu P na prostą l . Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $d = \sqrt{(OP)^2 - (OP')^2}$. W naszym przypadku mamy $OP = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38}$.

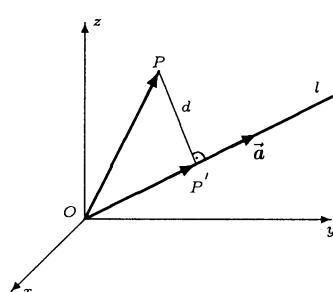
Wyznaczamy teraz długość wektora $\overrightarrow{OP'}$, który jest rzutem wektora \overrightarrow{OP} na wektor \vec{a} . Długość tego rzutu wyraża się wzorem (zobacz **Przykład 11.6**)

$$|\overrightarrow{OP'}| = \frac{|\overrightarrow{OP} \circ \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|(3, 2, 5) \circ (1, 1, 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

Zatem

$$d = \sqrt{(OP)^2 - (OP')^2} = \sqrt{38 - \frac{100}{3}} = \sqrt{\frac{14}{3}}.$$

Drugi sposób rozwiązania tego zadania podany będzie w **Przykładzie 13.1 c**).



Zadania

○ **Zadanie 11.1**

Obliczyć długości podanych wektorów:

- a) $\vec{a} = (3, -4, 12)$; b) $\vec{b} = (\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 2\sqrt{2})$;
- c) $\vec{c} = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, h)$, gdzie $\varrho \geq 0$ oraz $\varphi, h \in \mathbf{R}$;
- d) $\vec{d} = (\varrho \cos \varphi \cos \psi, \varrho \sin \varphi \cos \psi, \varrho \sin \psi)$, gdzie $\varrho \geq 0$ oraz $\varphi, \psi \in \mathbf{R}$.

○ **Zadanie 11.2**

Wektory \vec{a} , \vec{b} tworzą dwa sąsiednie boki trójkąta. Wyrazić środkowe tego trójkąta przez wektory \vec{a} , \vec{b} .

○ **Zadanie 11.3**

Znaleźć wersor \vec{u} , który:

- a) leży w płaszczyźnie xOy i tworzy kąt α z dodatnią częścią osi Ox ;
- b) tworzy z dodatnimi częściami osi Ox , Oy , Oz odpowiednio kąty α , β , γ ;
- c) tworzy jednakowe kąty z wektorami $\vec{a} = (0, 3, -4)$, $\vec{b} = (8, 6, 0)$ i jest położony w płaszczyźnie wyznaczonej przez te wektory.

○ **Zadanie 11.4**

Obliczyć iloczyny skalarne podanych par wektorów:

- a) $\vec{a} = (1, -2, 5)$, $\vec{b} = (3, -1, 0)$;
- b) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$;
- c*) $\vec{x} = \vec{p} + 2\vec{q} - \vec{r}$, $\vec{y} = 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$, gdzie \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} są wersorami parami prostopadłymi.

○ **Zadanie 11.5**

Korzystając z iloczynu skalarnego obliczyć miary podanych kątów:

- a) między wektorami $\vec{a} = (-3, 0, 4)$, $\vec{b} = (0, 1, -2)$;
- b) między dwusiecznymi kątów utworzonych przez osie Ox , Oy oraz osie Oy , Oz układu $Oxyz$;
- c) między przekątnymi równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 0, 2)$, $\vec{w} = (3, 1, 5)$.

○ **Zadanie 11.6**

Obliczyć długość rzutu prostokątnego wektora $\vec{a} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{5})$ na wektor $\vec{b} = (-\sqrt{8}, 0, \sqrt{5})$.

○ **Zadanie 11.7**

Obliczyć iloczyny wektorowe podanych par wektorów:

- a) $\vec{a} = (-3, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 5, -2)$;
- b) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$;
- c*) $\vec{x} = 2\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{y} = \vec{p} + 3\vec{q} + 4\vec{r}$, gdzie \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} są parami prostopadłymi wersorami o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych.

○ **Zadanie 11.8**

Obliczyć pola podanych powierzchni:

- równoległobok rozpięty na wektorach $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (0, -2, 5)$;
- trójkąt o wierzchołkach $A = (1, -1, 3)$, $B = (0, 2, -3)$, $C = (2, 2, 1)$;
- czworościan rozpięty na wektorach \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} .

○ **Zadanie 11.9**

Trójkąt ABC rozpięty jest na wektorach $\overrightarrow{AB} = (1, 5, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 4)$. Obliczyć wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C .

○ **Zadanie* 11.10**

Dane są wartości trzech sił:

$$F_1 = |\vec{F}_1| = 3 \text{ N}, \quad F_2 = |\vec{F}_2| = 4 \text{ N}, \quad F_3 = |\vec{F}_3| = 5 \text{ N}.$$

Jaki powinny być skierowane w przestrzeni te siły, aby ich wypadkowa była wektorem zerowym?

Odpowiedzi i wskazówki

11.1 a) 13; b) 4; c) $\sqrt{\varrho^2 + h^2}$; d) ϱ .

11.2 $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$.

11.3 a) $\vec{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$; b) $\vec{u} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$; c) $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{17}}(2, 3, -2)$ lub $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-2, -3, 2)$.

11.4 a) 5; b) -17; c*) -1.

11.5 a) $\arccos \frac{-8\sqrt{5}}{25} \approx 2,37 \text{ [rad]} \approx 135,8^\circ$; b) $\frac{\pi}{3} \text{ [rad]}$; c) $\varphi_1 = \arccos \frac{20}{3\sqrt{59}} \approx 0,52 \text{ [rad]} \approx 29,8^\circ$, $\varphi_2 = \arccos \frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{295}} \approx 0,39 \text{ [rad]} \approx 22,3^\circ$, $\varphi_3 = \arccos \frac{13}{3\sqrt{35}} \approx 0,75 \text{ [rad]} \approx 43,0^\circ$.

11.6 $\frac{9}{\sqrt{13}}$.

11.7 a) $(-4, -6, -17)$; b) $3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$; c*) $\vec{p} - 7\vec{q} + 5\vec{r}$.

11.8 a) $S = \sqrt{285}$; b) $S = \sqrt{61}$;

c) $S = \frac{1}{2}(|\vec{u} \times \vec{v}| + |\vec{v} \times \vec{w}| + |\vec{w} \times \vec{u}| + |(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{w} - \vec{v})|)$.

11.9 $h_c = \frac{\sqrt{14910}}{35}$.

11.10* Siły te po przesunięciu równoległy powinny utworzyć trójkąt (prostokątny).

Dwunasty tydzień

Iloczyn mieszany (5.4). Równania płaszczyzny (5.6). Równania prostej (5.7).

Przykłady

● Przykład 12.1

Obliczyć iloczyny mieszane podanych trójkę wektorów:

- $\vec{a} = (3, -2, 5)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (-2, 2, 1)$;
- $\vec{p} + \vec{q}$, $2\vec{p} - \vec{q}$, \vec{r} , jeżeli $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = 3$.

Rozwiążanie

a) Do obliczenia iloczynu mieszanego wektorów $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ wykorzystamy wzór

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Dla wektorów $\vec{a} = (3, -2, 5)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (-2, 2, 1)$ mamy

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\frac{w_1 - 3w_2}{w_3 + 2w_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -7.$$

b) W rozwiązaniu wykorzystamy następujące własności iloczynu mieszanego

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{r}) &= (\vec{u}, \vec{w}, \vec{r}) + (\vec{v}, \vec{w}, \vec{r}), \\ (\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \alpha (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}), \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}). \end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned} (\vec{p} + \vec{q}, 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{r}) &= (\vec{p}, 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{r}) + (\vec{q}, 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{r}) \\ &= 2(\vec{p}, \vec{p}, \vec{r}) - (\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) + 2(\vec{q}, \vec{p}, \vec{r}) - (\vec{q}, \vec{q}, \vec{r}) \\ &= 2 \cdot 0 - (\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) - 2(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) - 0 \\ &= -3(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = 3 \cdot (-3) = -9. \end{aligned}$$

● Przykład 12.2

Obliczyć objętości podanych wielościanów:

- równoległościan $ABCDA'B'C'D'$, gdzie $A = (1, 0, 3)$, $B = (1, 2, 0)$, $D = (3, 0, 4)$, $A' = (0, -1, 3)$;
- czworościan rozpięty na wektorach $\vec{p} = (1, 1, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 0)$, $\vec{r} = (-1, 3, -2)$.

Rozwiążanie

a) Objętość równoległościanu V rozpiętego na wektorach \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} wyraża się wzorem

$$|V| = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Równoległościan rozważany w zadaniu jest rozpięty na wektorach

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (0, 2, -3), \quad \vec{b} = \overrightarrow{AD} = (2, 0, 1), \quad \vec{c} = \overrightarrow{AA}' = (-1, -1, 0),$$

zatem jego objętość wyraża się wzorem

$$|V| = |\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}| = |4| = 4.$$

b) Objętość czworościanu V rozpiętego na wektorach \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} wyraża się wzorem

$$|V| = \frac{1}{6} |(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})|.$$

Czworościan V rozważany w zadaniu jest rozpięty na wektorach $\vec{p} = (1, 1, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 0)$, $\vec{r} = (-1, 3, -2)$. Zatem

$$|V| = \frac{1}{6} |\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}| = \frac{1}{6} |6| = 1.$$

Przykład 12.3

Sprawdzić, czy

- a) wektory $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (0, 4, -1)$, $\vec{c} = (2, 2, 3)$ są współ płaszczyznowe;
- b) punkty $P = (1, 1, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$, $R = (-1, 3, 0)$, $S = (5, 0, -4)$ należą do jednej płaszczyzny.

Rozwiążanie

a) W rozwiązaniu wykorzystamy fakt mówiący, że wektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} są współ płaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Dla wektorów $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (0, 4, -1)$, $\vec{c} = (2, 2, 3)$ mamy

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Wektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} są zatem współ płaszczyznowe.

b) Punkty P, Q, R, S należą do jednej płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy wektory \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} , \overrightarrow{PS} są współ płaszczyznowe. Dla punktów $P = (1, 1, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$, $R = (-1, 3, 0)$, $S = (5, 0, -4)$, mamy

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, 0, 1), \quad \overrightarrow{PR} = (-2, 2, -1), \quad \overrightarrow{PS} = (4, -1, -5).$$

Obliczając iloczyn mieszany wektorów \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{PR} , \overrightarrow{PS} otrzymamy

$$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 5.$$

Ponieważ ten iloczyn jest różny od zera, więc punkty P, Q, R, S nie należą do jednej płaszczyzny.

● Przykład 12.4

Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzn spełniających podane warunki:

- płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (0, 1, -3)$ i jest prostopadła do wektora $\vec{n} = (-2, 3, -5)$;
- płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (-1, 0, 1)$, $P_3 = (5, 6, 7)$;
- płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (3, 0, 0)$ i jest prostopadła do płaszczyzny xOy ;
- płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (0, 1, 0)$ i jest równoległa do wektorów $\vec{a} = (-1, 3, 0)$, $\vec{b} = (3, 1, -5)$;
- płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (-1, 4, 1)$ i jest równoległa do płaszczyzny $\pi_1 : x - y + 6z - 12 = 0$;
- płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (2, 3, -6)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi_1 : x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : x - y + 2 = 0$;
- płaszczyzna jest dwusieczną kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny $\pi_1 : x - y + z = 0$; $\pi_2 : 5x + y - z + 24 = 0$.

Rozwiązanie

W rozwiążaniu wykorzystamy następujące fakty:

- Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym \vec{r}_0 i prostopadłej do wektora $\vec{n} = (A, B, C)$ ma postać

$$\pi : (\vec{r} - \vec{r}_0) \circ \vec{n} = 0, \text{ gdzie } \vec{r} = (x, y, z).$$

Po przekształceniach równanie to przyjmuje postać

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

- Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym \vec{r}_0 i równoległej do niewspółliniowych wektorów $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ ma postać

$$\pi : \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{u} + t\vec{v}, \text{ gdzie } \vec{r} = (x, y, z) \text{ oraz } s, t \in \mathbb{R}.$$

Po rozpisaniu na współrzędne równanie to przyjmuje postać

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + a_1 s + a_2 t, \\ y = y_0 + b_1 s + b_2 t, \\ z = z_0 + c_1 s + c_2 t, \end{cases} \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R}.$$

- Równanie ogólne płaszczyzny π rozważanej w zadaniu ma postać

$$\pi : (x - 0, y - 1, z + 3) \circ (-2, 3, -5) = 0,$$

stąd

$$-2x + 3y - 5z - 18 = 0.$$

W równaniu parametrycznym płaszczyzny występują dwa niewspółliniowe wektory rozpinające tę płaszczyznę. Wektory te są prostopadłe do wektora normalnego \vec{n} . Takimi niewspółliniowymi wektorami są np. $\vec{u} = (3, 2, 0)$ oraz $\vec{v} = (0, 5, 3)$. Rzeczywiście, mamy $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ oraz $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$. Równanie parametryczne płaszczyzny π (w postaci wektorowej) ma zatem postać

$$\pi : (x, y, z) = (0, 1, -3) + s(3, 2, 0) + t(0, 5, 3), \text{ gdzie } s, t \in \mathbf{R},$$

stąd otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = 3s, \\ y = 1 + 2s + 5t, \\ z = -3 + 3t, \end{cases} \text{ gdzie } s, t \in \mathbf{R}.$$

b) Płaszczyzna π przechodząca przez punkty $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (-1, 0, 1)$, $P_3 = (5, 6, 7)$ jest równoległa do wektorów $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, -1, 0)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (4, 5, 6)$. Wektor normalny \vec{n} tej płaszczyzny ma zatem postać

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-2, -1, 0) \times (4, 5, 6) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 12\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Wektor normalny \vec{n} można skrócić np. do wektora $(1, -2, 1)$. Równanie ogólne płaszczyzny π ma więc postać

$$\pi : (x - 1, y - 1, z - 1) \circ (1, -2, 1) = 0,$$

stąd

$$\pi : x - 2y + z = 0.$$

Przechodzimy teraz do równania parametrycznego płaszczyzny π . Płaszczyzna ta przechodzi przez punkt $P_1 = (1, 1, 1)$ i jest rozpięta na wektorach $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, -1, 0)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (4, 5, 6)$, zatem

$$\pi : (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(-2, -1, 0) + t(4, 5, 6), \text{ gdzie } s, t \in \mathbf{R},$$

stąd otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - 2s + 4t, \\ y = 1 - s + 5t, \\ z = 1 + 6t, \end{cases} \text{ gdzie } s, t \in \mathbf{R}.$$

c) Ponieważ płaszczyzna π rozważana w zadaniu jest prostopadła do płaszczyzny xOy , więc jest równoległa do osi Oz . Jest zatem równoległa np. do wektora $\vec{v} = (0, 0, 1)$.

Ponadto płaszczyzna π jest równoległa do wektora $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -1, 0)$. Wektor normalny tej płaszczyzny wyraża się zatem wzorem

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j}.$$

Równanie ogólne płaszczyzny π ma postać

$$\pi : (x - 0, y - 1, z - 0) \circ (1, 3, 0) = 0,$$

stąd

$$\pi : x + 3y - 3 = 0.$$

Ponieważ płaszczyzna π przechodzi przez punkt $P_1 = (0, 1, 0)$ oraz jest równoległa do wektorów $\vec{v} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{P_1 P_2} = (3, -1, 0)$, więc jej równanie parametryczne ma postać

$$\pi : (x, y, z) = (0, 1, 0) + s(0, 0, 1) + t(3, -1, 0), \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R},$$

stąd

$$\pi : \begin{cases} x = 3t, \\ y = 1 - t, \\ z = s, \end{cases} \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R}.$$

d) Wektor normalny płaszczyzny π rozważanej w zadaniu ma postać

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (-1, 3, 0) \times (3, 1, -5) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k}.$$

Dla uproszczenia dalszych obliczeń wektor normalny można skrócić np. do wektora $\vec{n} = (3, 1, 2)$. Równanie płaszczyzny π ma postać

$$\pi : (x - 0, y - 1, z - 0) \circ (3, 1, 2) = 0,$$

stąd

$$\pi : 3x + y + 2z - 1 = 0.$$

Ponieważ płaszczyzna π przechodzi przez punkt $P = (0, 1, 0)$ i jest równoległa do wektorów $\vec{a} = (-1, 3, 0)$, $\vec{b} = (3, 1, -5)$, więc jej równanie parametryczne przyjmuje postać

$$\pi : (x, y, z) = (0, 1, 0) + s(-1, 3, 0) + t(3, 1, -5), \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R},$$

stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = -s + 3t, \\ y = 1 + 3s + t, \\ z = -5t, \end{cases} \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R}.$$

e) Ponieważ płaszczyzna π rozważana w zadaniu jest równoległa do płaszczyzny π_1 : $x - y + 6z - 12 = 0$, więc jej wektor normalny \vec{n} jest taki sam jak wektor normalny płaszczyzny π_1 . Zatem $\vec{n} = (1, -1, 6)$. Ponieważ płaszczyzna π przechodzi przez punkt $P = (-1, 4, 1)$ i ma wektor normalny $\vec{n} = (1, -1, 6)$, więc jej równanie ogólne ma postać

$$\pi : (x + 1, y - 4, z - 1) \circ (1, -1, 6) = 0,$$

stąd

$$\pi : x - y + 6z - 1 = 0.$$

Znajdziemy teraz dwa niewspółliniowe wektory \vec{u} , \vec{v} , które są równoległe do szukanej płaszczyzny π . Ponieważ płaszczyzny π_1 i π są równoległe, więc wektory \vec{u} , \vec{v} muszą być prostopadłe do wektora normalnego płaszczyzny π_1 , tj. do wektora $\vec{n}_1 = (1, -1, 6)$. Takimi wektorami są np. $\vec{u} = (1, 1, 0)$ oraz $\vec{v} = (0, 6, 1)$. Rzeczywiście mamy $\vec{u} \circ \vec{n}_1 = 0$ oraz $\vec{v} \circ \vec{n}_1 = 0$. Ponieważ płaszczyzna π przechodzi przez punkt $P = (-1, 4, 1)$ oraz jest równoległa do wektorów \vec{u} i \vec{v} , więc jej równanie parametryczne (wektorowe) ma postać

$$\pi : (x, y, z) = (-1, 4, 1) + s(1, 1, 0) + t(0, 6, 1), \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R},$$

stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s, \\ y = 4 + s + 6t, \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R}.$$

f) Ponieważ szukana płaszczyzna π ma być prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : x - y + 2 = 0$, więc jej wektor normalny \vec{n} powinien być prostopadły do wektora normalnego $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ płaszczyzny π_1 oraz do wektora normalnego $\vec{n}_2 = (1, -1, 0)$ płaszczyzny π_2 . Wektor prostopadły do wektorów \vec{n}_1 i \vec{n}_2 ma postać

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 1, 1) \times (1, -1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Ponieważ płaszczyzna π przechodzi przez punkt $P = (2, 3, -6)$ i ma wektor normalny $\vec{n} = (1, 1, -2)$, więc jej równanie ma postać

$$\pi : (x - 2, y - 3, z + 6) \circ (1, 1, -2) = 0,$$

stąd

$$\pi : x + y - 2z - 17 = 0.$$

Znajdziemy teraz dwa niewspółliniowe wektory \vec{u} i \vec{v} , które rozwijają szukaną płaszczyznę π . Wektory \vec{u} i \vec{v} muszą być prostopadłe do wektora normalnego $\vec{n} = (1, 1, -2)$ tej płaszczyzny. Takimi niewspółliniowymi wektorami są np. $\vec{u} = (1, -1, 0)$ oraz $\vec{v} = (0, 2, 1)$. Rzeczywiście $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ oraz $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$. Ponieważ płaszczyzna π przechodzi przez punkt $P = (2, 3, -6)$ i jest rozpięta przez wektory $\vec{u} = (1, -1, 0)$ oraz $\vec{v} = (0, 2, 1)$, więc jej równanie parametryczne (wektorowe) ma postać

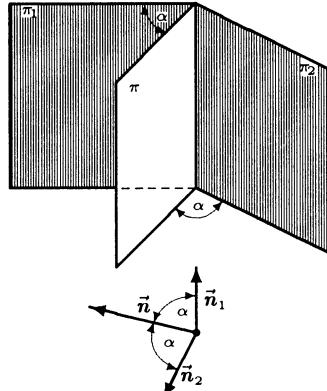
$$\pi : (x, y, z) = (2, 3, -6) + s(1, -1, 0) + t(0, 2, 1), \quad \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R},$$

stąd otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + s, \\ y = 3 - s + 2t, \\ z = -6 + t, \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \mathbb{R}.$$

g*) Niech \vec{n}_1 i \vec{n}_2 oznaczają wektory normalne odpowiednio płaszczyzn π_1 i π_2 . Zatem $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ oraz $\vec{n}_2 = (5, 1, -1)$. Ponieważ płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny π_1 i π_2 (oznaczona na rysunku przez π), tworzy jednakowe kąty dwuścienne z płaszczyznami π_1 i π_2 , więc wektor normalny \vec{n} tej płaszczyzny jest dwusieczną kąta utworzonego przez wektory normalne \vec{n}_1 i \vec{n}_2 . Wektor \vec{v} , który leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory \vec{a}_1 , \vec{a}_2 oraz tworzy z nimi jednakowe kąty ma postać $\vec{v} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Zatem wektor normalny \vec{n} płaszczyzny π wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} + \frac{\vec{n}_2}{|\vec{n}_2|} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} + \frac{(5, 1, -1)}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(5, 1, -1) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(8, -2, 2). \end{aligned}$$



Dla uproszczenia dalszych obliczeń skracamy wektor normalny np. do postaci $\vec{n} = (4, -1, 1)$. Znajdziemy teraz punkt należący do płaszczyzn π_1 i π_2 . Przyjmując np. $y = 0$, otrzymamy układ równań $\begin{cases} x + z = 0, \\ 5x - z = -24. \end{cases}$. Rozwiążaniem tego układu równań jest para $x = -4$, $z = 4$. Zatem $P = (-4, 0, 4)$ jest punktem wspólnym płaszczyzn π_1 i π_2 . Ponieważ płaszczyzna dwusieczna przechodzi przez punkt P i ma wektor normalny \vec{n} , zatem jej równanie ogólne ma postać

$$\pi : (x + 4, y - 0, z - 4) \circ (4, -1, 1) = 0,$$

stąd

$$\pi : 4x - y + z - 12 = 0.$$

Uwaga. Istnieje jeszcze druga płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny π_1 i π_2 . Wektor normalny tej płaszczyzny wyraża się wzorem:

$$\vec{n}' = \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} - \frac{\vec{n}_2}{|\vec{n}_2|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-2, -2, 2).$$

Równanie drugiej płaszczyzny dwusiecznej ma zatem postać

$$\pi' : (x + 4, y - 0, z - 4) \circ (1, 1, -1) = 0,$$

stąd

$$\pi' : x + y - z + 8 = 0.$$

Znalezienie równań parametrycznych płaszczyzn π i π' zostawiamy Czytelnikowi.

● Przykład 12.5

Napisać równania parametryczne i kierunkowe prostych spełniających podane warunki:

- prosta przechodzi przez punkt $P = (1, 0, 2)$ i jest równoległa do wektora $\vec{v} = (0, 5, -3)$;
- prosta przechodzi przez punkty $P_1 = (-1, 1, 0)$, $P_2 = (0, 3, -2)$;
- prosta przechodzi przez punkt $P = (1, -5, 3)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : x - 3z + 7 = 0$;
- prosta przechodzi przez punkt $P = (0, 0, -2)$ i jest prostopadła do wektorów $\vec{a} = (0, 1, -5)$ i $\vec{b} = (-2, 3, 0)$;
- prosta jest dwusieczną kąta utworzonego przez przecinające się proste

$$l_1 : \begin{cases} x = -t, \\ y = 2t, \\ z = 3t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbf{R}, \quad l_2 : \begin{cases} x = -2 + s, \\ y = 4 - 3s, \\ z = 6 + 2s, \end{cases} \quad \text{gdzie } s \in \mathbf{R};$$

- prosta jest częścią wspólną płaszczyzny $\pi_1 : x + 2z - 4 = 0$ i płaszczyzny $\pi_2 : x - y + 6 = 0$.

Rozwiązanie

Równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wiodącym \vec{r}_0 , równoległej do niezerowego wektora $\vec{v} = (a, b, c)$ ma postać

$$l : \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbf{R},$$

gdzie $\vec{r} = (x, y, z)$ jest promieniem wodzącym punktu tej prostej. Po rozpisaniu na współrzędne powyższe równanie przyjmuje postać

$$l : \begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Inną formą zapisu tego równania jest tzw. równanie kierunkowe prostej. Równanie to ma postać

$$l : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

a) Równanie parametryczne (wektorowe) prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (1, 0, 2)$ i równoległą do wektora $\vec{v} = (0, 5, -3)$ ma postać

$$l : (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(0, 5, -3), \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Po rozpisaniu tej równości na współrzędne otrzymamy

$$l : \begin{cases} x = 1, \\ y = 5t, \\ z = 2 - 3t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Równanie kierunkowe prostej l ma postać

$$l : \frac{x - 1}{0} = \frac{y - 0}{5} = \frac{z - 2}{-3}.$$

b) Ponieważ szukana prosta l przechodzi przez punkty $P_1 = (-1, 1, 0)$, $P_2 = (0, 3, -2)$, więc jest równoległa do wektora $\overrightarrow{P_1 P_2} = (1, 2, -2)$. Równanie parametryczne (wektorowe) tej prostej ma zatem postać

$$l : (x, y, z) = (-1, 1, 0) + t(1, 2, -2), \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R},$$

stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$l : \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = -2t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Równanie kierunkowe prostej l ma postać

$$l : \frac{x + 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z}{-2}.$$

c) Ponieważ prosta l rozważana w zadaniu jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : x - 3z + 7 = 0$, więc jest równoległa do wektora normalnego tej płaszczyzny, tj. do wektora $\vec{n} = (1, 0, -3)$. Równanie parametryczne (wektorowe) prostej przechodzącej przez punkt $P = (1, -5, 3)$ i równoległą do wektora $\vec{n} = (1, 0, -3)$ ma zatem postać

$$l : (x, y, z) = (1, -5, 3) + t(1, 0, -3), \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R},$$

stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -5, \\ z = 3 - 3t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Równanie kierunkowe prostej l ma postać

$$l : \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-3}{-3}.$$

d) Ponieważ szukana prosta l jest prostopadła do wektorów $\vec{a} = (0, 1, -5)$, $\vec{b} = (-2, 3, 0)$, więc jest równoległa do wektora $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$. Obliczamy teraz wektor \vec{v} . Mamy

$$\vec{v} = (0, 1, -5) \times (-2, 3, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 10\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Prosta l przechodzi przez punkt $P = (0, 0, -2)$ i jest równoległa do wektora $\vec{v} = (15, 10, 2)$, więc jej równanie parametryczne (wektorowe) ma postać

$$l : (x, y, z) = (0, 0, -2) + t(15, 10, 2), \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$l : \begin{cases} x = 15t, \\ y = 10t, \\ z = -2 + 2t, \end{cases} \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Równanie kierunkowe prostej l ma postać

$$l : \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z+2}{2}.$$

e) Wektory kierunkowe \vec{v}_1 , \vec{v}_2 odpowiednio prostych l_1 , l_2 mają postać $\vec{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\vec{v}_2 = (1, -3, 2)$. Ponieważ szukana prosta l ma być dwusiecznąkąą utworzonego przez proste l_1 , l_2 , więc jej wektor kierunkowy \vec{v} powinien być dwusiecznąkąą utworzonego przez wektory \vec{v}_1 i \vec{v}_2 lub przez wektory \vec{v}_1 i $-\vec{v}_2$. Wiadomo (patrz Przykład 12.4. g*), że wektor \vec{v} leżący w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory niezerowe \vec{u} , \vec{w} oraz tworzący z tymi wektorami jednakowe kąty ma postać

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}.$$

Zatem wektor kierunkowy \vec{v} dwusiecznej l ma postać

$$\vec{v} = \frac{(-1, 2, 3)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} + \frac{(1, -3, 2)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(0, -1, 5),$$

a wektor kierunkowy \vec{v}' drugiej dwusiecznej l' ma postać

$$\vec{v}' = \frac{(-1, 2, 3)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} - \frac{(1, -3, 2)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 5, 1).$$

Znajdziemy teraz punkt $P = (x, y, z)$ przecięcia prostych l_1 i l_2 . Współrzędne tego punktu spełniają układ równań

$$\begin{cases} x = -t = -2 - s, \\ y = 2t = 4 - 3s, \\ z = 3t = 6 - 2s. \end{cases}$$

Rozwiążując ten układ otrzymamy $x = -2$, $y = 4$, $z = 6$, $s = 0$, $t = 2$. Zatem $P = (-2, 4, 6)$. Możemy więc napisać równania szukanych dwusiecznych. Przyjmując dla uproszczenia obliczeń, że wektory kierunkowe tych dwusiecznych mają postać $\vec{v} = (0, -1, 5)$ oraz $\vec{v}' = (-2, 5, 1)$ otrzymamy

$$l : \begin{cases} x = -2, \\ y = 4 - t, \\ z = 6 + 5t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad l' : \begin{cases} x = -2 - 2t, \\ y = 4 + 5t, \\ z = 6 + t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Kierunkowe równania prostych l i l' mają postać

$$l : \frac{x+2}{0} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-6}{5} \quad \text{oraz} \quad l' : \frac{x+2}{-2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-6}{1}.$$

f) Niech \vec{n}_1 oraz \vec{n}_2 oznaczają odpowiednio wektory normalne płaszczyzn $\pi_1 : x+2z-4=0$ oraz $\pi_2 : x-y+6=0$. Wtedy $\vec{n}_1 = (1, 0, 2)$ oraz $\vec{n}_2 = (1, -1, 0)$. Wektor kierunkowy \vec{v} szukanej prostej l jest prostopadły do wektorów \vec{n}_1 i \vec{n}_2 , a zatem będzie miał postać $\vec{v} = c(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)$, gdzie $c \neq 0$. Przyjmując $c = 1$ otrzymamy

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 0, 2) \times (1, -1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

Potrzebny jest jeszcze dowolny punkt P należący do prostej l . Punkt ten wyznaczymy z układu równań

$$\begin{cases} x &+ 2z = 4, \\ x - y &= -6. \end{cases}$$

Przyjmując np. $x = 0$, otrzymamy $y = 6$ oraz $z = 2$. Zatem $P = (0, 6, 2)$. Równanie parametryczne prostej l ma więc postać

$$l : \begin{cases} x = 2t, \\ y = 6 + 2t, \\ z = 2 - t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Równanie kierunkowe tej prostej ma postać

$$l : \frac{x}{2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

● Przykład 12.6

Zbadać, czy

a) punkty $A = (1, -2, 5)$, $B = (3, -2, 11)$ należą do prostej

$$l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-5}{-3};$$

b) prosta

$$l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2t, \\ z = 3 + 3t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}$$

jest zawarta w płaszczyźnie $\pi : 3x + 3y + z - 6 = 0$;

c) punkty $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, -1, 3)$ należą do płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + s - t, \\ y = -3 - s + 2t, \\ z = 4 - 2t, \end{cases} \text{ gdzie } s, t \in \mathbf{R};$$

d) proste l_1 oraz l_2 mają punkt wspólny, jeżeli:

$$l_1 : \begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = 3t, \end{cases} \text{ gdzie } t \in \mathbf{R} \quad l_2 : \begin{cases} x = -1 + s, \\ y = 2 - s, \\ z = -3 + 4s, \end{cases} \text{ gdzie } s \in \mathbf{R};$$

e) prosta

$$l : \frac{x+5}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

jest równoległa do płaszczyzny $\pi : x + y - z + 15 = 0$;

f) płaszczyzny $\pi_1 : 2x + 3y - 5z + 30 = 0$, $\pi_2 : \begin{cases} x = -5 + t, \\ y = 2 + 5s + t, \\ z = 1 + 3s + t, \end{cases}$ gdzie $s, t \in \mathbf{R}$
są równoległe.

Rozwiązanie

a) Równanie parametryczne prostej l ma postać

$$(x, y, z) = (1 - t, -2, 5 - 3t),$$

gdzie $t \in \mathbf{R}$. Dla $t = 0$ otrzymujemy punkt A , zaś dla $t = -2$ punkt B . Oba punkty należą więc do prostej l .

b) Podstawiając przedstawienia parametryczne współrzędnych prostej

$$l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2t, \\ z = 3 + 3t, \end{cases} \text{ gdzie } t \in \mathbf{R}$$

do równania płaszczyzny $\pi : 3x + 3y + z - 6 = 0$ otrzymamy, że równość $3(1 + t) + 3(-2t) + (3 + 3t) - 6 = 0$ jest prawdziwa dla każdego $t \in \mathbf{R}$. Oznacza to, że prosta l jest zawarta w płaszczyźnie π .

c) Podstawiając współrzędne punktu $A = (0, 0, 0)$ do równania parametrycznego płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + s - t, \\ y = -3 - s + 2t, \\ z = 4 - 2t, \end{cases} \text{ gdzie } s, t \in \mathbf{R},$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} s - t = -1, \\ s - 2t = -3, \\ 2t = 4. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $s = 1, t = 2$. Oznacza to, że punkt A należy do płaszczyzny π . Postępując podobnie z punktem B , otrzymamy sprzeczny układ równań.

Oznacza to, że punkt B nie należy do płaszczyzny π .

d) Aby sprawdzić, czy proste l_1 i l_2 mają punkt wspólny rozwiążujemy układ równań

$$\begin{cases} t = -1 + s, \\ -2t = 2 - s, \\ 3t = -3 + 4s. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $t = -1, s = 0$. Proste l_1 i l_2 mają zatem punkt wspólny. Współrzędne tego punktu odpowiadają wartościom $t = -1$ i $s = 0$ parametrów i są równe $x = -1, y = 2, z = -3$.

e) Prosta l o wektorze kierunkowym \vec{v} jest równoległa do płaszczyzny π o wektorze normalnym \vec{n} wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$. Wektor kierunkowy prostej rozważanej w zadaniu ma postać $\vec{v} = (-2, 1, -1)$, a wektor normalny płaszczyzny π postać $\vec{n} = (1, 1, -1)$. Wektory te spełniają warunek $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$, zatem prosta l jest równoległa do płaszczyzny π .

f) Dwie płaszczyzny są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory normalne są współliniowe. Wektor normalny \vec{n}_1 płaszczyzny $\pi_1 : 2x + 3y - 5z + 30 = 0$ ma postać $\vec{n}_1 = (2, 3, -5)$. Natomiast wektor normalny \vec{n}_2 płaszczyzny

$$\pi_2 : (x, y, z) = (-5, 2, 1) + s(0, 5, 3) + t(1, 1, 1), \text{ gdzie } s, t \in \mathbf{R}$$

ma postać

$$\vec{n}_2 = (0, 5, 3) \times (1, 1, 1) = (2, 3, -5).$$

Ponieważ wektory \vec{n}_1 i \vec{n}_2 są współliniowe, więc płaszczyzny π_1 i π_2 są równoległe.

● Przykład 12.7

Znaleźć punkty przecięcia:

a) prostych $l_1 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3}, \quad l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-4}$;

b) prostej $l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -3t, \\ z = 4 - t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbf{R}$ i płaszczyzny $\pi : x + y + z - 7 = 0$;

c) płaszczyzn

$$\pi_1 : (x, y, z) = (0, 0, 0) + r(1, -2, 4) + s(0, -1, 3), \text{ gdzie } r, s \in \mathbf{R},$$

$$\pi_2 : (x, y, z) = (1, -1, 1) + t(1, 1, 1) + u(-1, 0, 0), \text{ gdzie } t, u \in \mathbf{R},$$

$$\pi_3 : (x, y, z) = (2, 3, 3) + v(1, 0, 0) + w(0, -2, -1) \text{ gdzie } v, w \in \mathbf{R}.$$

Rozwiązanie

a) Współrzędne (x, y, z) punktu przecięcia prostych l_1 i l_2 spełniają układ równań

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3}, \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-4}. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójką liczb

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 1, \\ z = 7. \end{cases}$$

Zatem punkt wspólny prostych l_1 i l_2 ma współrzędne $(-1, 1, 7)$.

b) Aby obliczyć współrzędne punktu przecięcia prostej l i płaszczyzny π , wstawiamy przedstawienia parametryczne współrzędnych tej prostej do równania płaszczyzny. Wtedy mamy

$$(1+t) + (-3t) + (4-t) - 7 = 0,$$

stąd $t = -\frac{2}{3}$. Punkt wspólny prostej l i płaszczyzny π ma zatem współrzędne $\left(\frac{1}{3}, 2, \frac{14}{3}\right)$.

c) Aby znaleźć współrzędne punktu przecięcia płaszczyzn π_1 , π_2 i π_3 , rozwiążujemy układ 6 równań z niewiadomymi parametrami r, s, t, u, v, w . Mamy

$$\begin{cases} r = 1+t-u = 2+v, \\ -2r-s = -1+t = 3-2w, \\ 4r+3s = 1+t = 3-w. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest szóstka liczb $r = 1, s = -1, t = 0, u = 0, v = -1, w = 2$. Punkt P przecięcia płaszczyzn π_1 , π_2 i π_3 odpowiada np. wartościom parametrów $t = 0, u = 0$, zatem $P = (1, -1, 1)$.

Zadania

○ Zadanie 12.1

Obliczyć iloczyny mieszane podanych trójkę wektorów:

- a) $\vec{a} = (-3, 2, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, -5)$, $\vec{c} = (2, 3, -4)$;
- b) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

○ Zadanie 12.2

Obliczyć objętości podanych wielościanów:

- a) równoległościan rozpięty na wektorach $\vec{a} = (0, 0, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$, $\vec{c} = (2, 5, -1)$;
- b) czworościan o wierzchołkach $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (2, 3, -1)$, $D = (-1, 3, 5)$;
- c*) równoległościan o przekątnych \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} .

○ Zadanie 12.3

Sprawdzić, czy

- a) wektory $\vec{a} = (-1, 3, -5)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, $\vec{c} = (4, -2, 0)$ są współpłaszczyznowe;
- b) punkty $P = (0, 0, 0)$, $Q = (-1, 2, 3)$, $R = (2, 3, -4)$, $S = (2, -1, 5)$ są współpłaszczyznowe.

○ Zadanie 12.4

Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzn spełniających podane warunki:

- a) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (1, -2, 0)$ i jest prostopadła do wektora $\vec{n} = (0, -3, 2)$;

- b) płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (1, 2, 3)$, $P_3 = (-1, -3, 5)$;
- c) płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (1, -3, 4)$, $P_2 = (2, 0, -1)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny xOz ;
- d) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (1, -1, 3)$ oraz jest równoległa do wektorów $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$;
- e) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (0, 3, 0)$ i jest równoległa do płaszczyzny $\pi : 3x - y + 2 = 0$;
- f) płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (2, 1, -3)$ i jest prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : x + y = 0$, $\pi_2 : y - z = 0$.

○ **Zadanie 12.5**

Napisać równania parametryczne i kierunkowe prostych spełniających podane warunki:

- a) prosta przechodzi przez punkt $P = (-3, 5, 2)$ i jest równoległa do wektora $\vec{v} = (2, -1, 3)$;
- b) prosta przechodzi przez punkty $P_1 = (1, 0, 6)$, $P_2 = (-2, 2, 4)$;
- c) prosta przechodzi przez punkt $P = (0, -2, 3)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : 3x - y + 2z - 6 = 0$;
- d) prosta przechodzi punkt $P = (7, 2, 0)$ i jest prostopadła o wektorów $\vec{v}_1 = (2, 0, -3)$, $\vec{v}_2 = (-1, 2, 0)$;
- e) prosta jest dwusiecznąkąta ostrego utworzonego przez proste

$$l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{5}, \quad l_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z}{3};$$

- f*) prosta jest dwusiecznąkąta ostrego utworzonego przez proste

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \quad l_2 : \frac{x+6}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+29}{-12}.$$

○ **Zadanie 12.6**

Zbadać, czy

- a) punkty $A = (1, 2, 3)$, $B = (-1, -2, 0)$ należą do prostej

$$l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 3 - t, \end{cases} \text{ gdzie } t \in \mathbf{R};$$

- b) prosta $m : \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ jest zawarta w płaszczyźnie
 $\pi : 5y - 3z + 13 = 0$;

- c) punkty $A = (0, 1, 5)$, $B = (1, 2, 3)$ należą do płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s + t, \\ y = 2 + 3s - t, \\ z = 3 - s + 2t, \end{cases} \text{ gdzie } s, t \in \mathbf{R};$$

d) proste $l_1 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-8}$, $l_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ mają punkt wspólny;

e) prosta $l : \begin{cases} x = t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 + 3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$, jest równoległa do płaszczyzny $\pi : x + y - z + 3 = 0$.

○ **Zadanie 12.7**

Znaleźć punkty przecięcia:

a) prostych $l_1 : \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0, \\ y + z - 3 = 0, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} 2x - y - 2z + 8 = 0, \\ x + 2y + 2z - 5 = 0; \end{cases}$

b) prostej $l : \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-1}$ i płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = s + t, \\ y = 1 + s + 2t, \\ z = 3 + 2s + 4t, \end{cases} \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R};$$

c) płaszczyzn $\pi_1 : 3x + y + z + 1 = 0$, $\pi_2 : x + 2z + 6 = 0$, $\pi_3 : 3y + 2z = 0$.

○ **Zadanie 12.8**

Zbadać, czy punkty $P = (1, -2, 2)$ i $Q = (-2, 4, 3)$ leżą po tej samej stronie podanych płaszczyzn:

a) $\pi : 2x + 3z - 7 = 0$; b) $\pi : x - 2y + 3z + 13 = 0$.

Odpowiedzi i wskazówki

12.1 a) -55; b) 22.

12.2 a) $|V| = 9$; b) $|V| = 2$; c*) $|V| = \frac{1}{8}|(\vec{v} - \vec{w}, \vec{u} - \vec{w}, \vec{u} + \vec{v})| = \frac{1}{4}|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

12.3 a) tak; b) nie.

12.4 a) $3y - 2z + 6 = 0$, $(x, y, z) = (1, -2, 0) + s(1, 0, 0) + t(0, 2, 3)$, gdzie $s, t \in \mathbb{R}$;
 b) $19x - 8y - z = 0$, $(x, y, z) = (0, 0, 0) + s(1, 2, 3) + t(-1, -3, 5)$, gdzie $s, t \in \mathbb{R}$;
 c) $5x + z - 9 = 0$, $(x, y, z) = (1, -3, 4) + s(0, 1, 0) + t(1, 3, -5)$, gdzie $s, t \in \mathbb{R}$;
 d) $x - y + z - 5 = 0$, $(x, y, z) = (1, -1, 3) + s(1, 1, 0) + t(0, 1, 1)$, gdzie $s, t \in \mathbb{R}$;
 e) $3x - y + 3 = 0$, $(x, y, z) = (0, 3, 0) + s(0, 0, 1) + t(1, 3, 0)$, gdzie $s, t \in \mathbb{R}$.
 f) $-x + y + z + 4 = 0$, $(x, y, z) = (2, 1, -3) + s(1, 1, 0) + t(0, 1, -1)$, gdzie $s, t \in \mathbb{R}$.

12.5 a) $l : \begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = 5 - t, \\ z = 2 + 3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$, $l : \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-2}{3}$;

b) $l : \begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = 2t, \\ z = 6 - 2t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$, $l : \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-2}$;

c) $l : \begin{cases} x = 3t, \\ y = -2 - t, \\ z = 3 + 2t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$, $l : \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$;

- d) $l : \begin{cases} x = 7 + 6t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 4t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$, $l : \frac{x-7}{6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$;
- e) $l : \begin{cases} x = -2 + 2t, \\ y = 4 - 3t, \\ z = 4t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$, $l : \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z}{4}$;
- f*) $l : \begin{cases} x = 1 + 7t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = 2 + 31t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$, $l : \frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{31}$.

12.6 a) punkt A należy, a punkt B nie należy do prostej l ; b) prosta m jest zawarta w płaszczyźnie π ; c) punkt A należy, a punkt B nie należy do płaszczyzny π ; d) proste l_1 i l_2 mają punkt wspólny $(1, 2, 4)$; e) prosta l jest równoległa do płaszczyzny π .

12.7 a) $(-1, 0, 3)$; b) $(1, 1, 3)$; c) $(0, 2, -3)$.

12.8 Punkty te leżą a) po przeciwnych stronach; b) po tej samej stronie płaszczyzny π .

Trzynasty tydzień

Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn (5.8).

Przykłady

● **Przykład 13.1**

Obliczyć odległość

- a) punktu $P = (1, 0, -5)$ od płaszczyzny $\pi : 3x - 12y + 4z + 8 = 0$;
- b) płaszczyzn równoległych $\pi_1 : 2x - y + 3z = 0$, $\pi_2 : -4x + 2y - 6z + 8 = 0$;
- c) punktu $P = (0, 0, 0)$ od prostej $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-2}$;
- d) prostych równoległych $l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$, $l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$;
- e) prostych skośnych $l_1 : \begin{cases} x = 0, \\ z = 1, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0; \end{cases}$
- f) prostej $l : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ od płaszczyzny $\pi : x + y - z + 7 = 0$.

Rozwiążanie

a) W rozwiążaniu wykorzystamy wzór na odległość d punktu $P = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$;

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Odległość d punktu $P = (1, 0, -5)$ od płaszczyzny $\pi : 3x - 12y + 4z + 8 = 0$ jest równa

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 12 \cdot 0 + 4 \cdot (-5) + 8|}{\sqrt{3^2 + (-12)^2 + 4^2}} = \frac{9}{\sqrt{169}} = \frac{9}{13}.$$

b) W rozwiązyaniu wykorzystamy wzór na odległość d płaszczyzn równoległych $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$;

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Przekształcamy równanie płaszczyzny π_2 tak, aby miała te same współczynniki co płaszczyzna π_1 . Mamy $\pi_2 : 2x - y + 3z - 4 = 0$. Odległość d płaszczyzn π_1 i π_2 jest zatem równa

$$d = \frac{|0 - (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

c) Odległość d punktu P od prostej l wyznaczmy w następujący sposób:
przez punkt P prowadzimy płaszczyznę π prostopadłą do prostej l , następnie wyznaczamy punkt P' przecięcia prostej l z płaszczyzną π (będzie to rzut punktu P na prostą l) i wyznaczamy odległość punktów P i P' . Ponieważ płaszczyzna π ma wektor normalny \vec{n} taki sam jak wektor kierunkowy \vec{v} prostej l , więc $\vec{n} = \vec{v} = (2, -1, -2)$. Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (0, 0, 0)$ ma zatem postać $\pi : 2(x-0) - 1(y-0) - 2(z-0) = 0$, stąd otrzymamy $\pi : 2x - y - 2z = 0$.

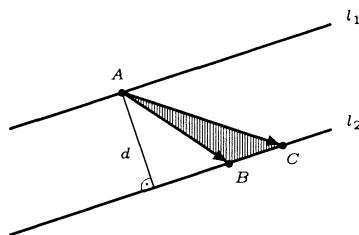
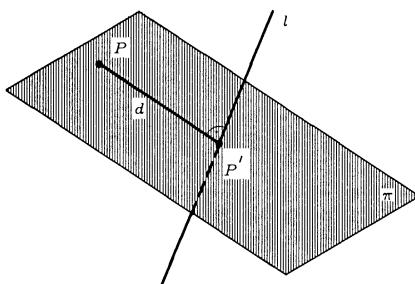
Znajdziemy teraz punkt P' przecięcia prostej l i płaszczyzny π . Współrzędne tego punktu spełniają układ równań

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 0, \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-2}. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymamy $x = \frac{5}{3}$, $y = -\frac{4}{3}$, $z = \frac{7}{3}$. Obliczamy teraz odległość d punktu $P' = \left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$ od punktu $P = (0, 0, 0)$, czyli szukaną odległość punktu P od prostej l , mamy

$$d = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{4}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{7}{3} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{90}}{3} = \sqrt{10}.$$

d) I sposób. Odległość d między prostymi równoległyimi l_1 i l_2 wyznaczamy w następujący sposób: na prostej l_1 wybieramy dowolny punkt A , a na prostej l_2 dwa dowolne punkty B , C ; obliczamy pole S trójkąta ABC (wykorzystując iloczyn wektorowy); obliczamy wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka A .



Aby wyznaczyć dowolny punkt A na prostej $l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$, przyjmujemy $x = 1$, stąd $y = 2$ oraz $z = -3$. Zatem $A = (1, 2, -3)$. Podobnie znajdujemy punkty B i C na prostej $l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$. Przyjmując $x = 0$, otrzymamy $y = 0$ oraz $z = 0$, a przyjmując $x = 1$, otrzymamy $y = 2$ oraz $z = 3$. Zatem $B = (0, 0, 0)$, $C = (1, 2, 3)$. Obliczamy teraz pole S trójkąta ABC korzystając ze wzoru

$$S = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

Tak więc mamy

$$S = \frac{1}{2} |(-1, -2, 3) \times (0, 0, 6)| = \frac{1}{2} |(-12, 6, 0)| = \frac{1}{2} \sqrt{(-12)^2 + 6^2 + 0^2} = 3\sqrt{5}.$$

Obliczamy następnie długość boku BC trójkąta ABC . Mamy

$$|BC| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{14}.$$

Możemy teraz obliczyć wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka A , czyli szukaną odległość d prostych l_1 i l_2 . Mamy

$$d = \frac{2S}{|BC|} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{5}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{7}\sqrt{70}.$$

II sposób. Odległość d między prostymi równoległymi l_1 i l_2 obliczymy w następujący sposób: wyznaczmy równanie płaszczyzny π prostopadłej do obu prostych (przechodzącej przez dowolny punkt P_1 na prostej l_1), następnie wyznaczamy punkt P_2 przecięcia tej płaszczyzny z prostą l_2 i na końcu obliczamy odległość punktów P_1, P_2 (rysunek). Wektor normalny \vec{n} płaszczyzny π jest równoległy do wektora kierunkowego \vec{v}_1 prostej l_1 . Można przyjąć, że $\vec{n} = \vec{v}_1 = (1, 2, 3)$. Współrzędne punktu P_1 należącego do prostej l_1 wyznaczamy tak jak w I sposobie, zatem $P_1 = (1, 2, -3)$. Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt P_1 i prostopadłej do obu prostych ma postać

$$\pi : (x-1, y-2, z+3) \circ (1, 2, 3) = 0,$$

stąd

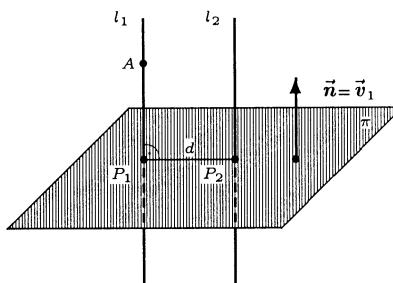
$$\pi : x + 2y + 3z + 4 = 0.$$

Współrzędne punktu P_2 są rozwiązaniami układu równań

$$P_2 : \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}, \\ x + 2y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

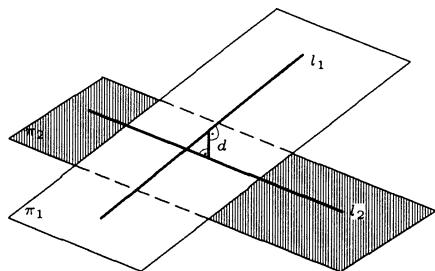
Po rozwiązaniu tego układu otrzymamy $P_2 = \left(-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{6}{7} \right)$. Odległość d prostych równoległych l_1 i l_2 jest zatem równa

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(2 + \frac{4}{7}\right)^2 + \left(-3 + \frac{6}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{70}}{7}.$$



e) W rozwiązaniu wykorzystamy fakt mówiący, że odległość dwóch prostych skośnych jest równa odległości dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste. Najpierw znajdziemy wektory kierunkowe \vec{v}_1 i \vec{v}_2 odpowiednio prostych l_1 i l_2 .

Wektor kierunkowy prostej l_1 : $\begin{cases} x = 0, \\ z = 1, \end{cases}$
 jest równy $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$, a prostej l_2 :
 $\begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ równy $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$.



Wspólny wektor normalny \vec{n} płaszczyzn równoległych π_1 i π_2 zawierających odpowiednio proste l_1 i l_2 , jest prostopadły do obu wektorów. Można zatem przyjąć, że

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (0, 1, 0) \times (1, 1, 0) = (0, 0, -1).$$

Napiszemy teraz równania płaszczyzn π_1 i π_2 . W tym celu wybieramy po jednym dowolnym punkcie na każdej z prostych. Na prostej l_1 wybraliśmy punkt $A_1 = (0, 0, 1)$, a na prostej l_2 punkt $A_2 = (0, 1, 0)$. Równanie płaszczyzny π_1 ma zatem postać $\pi_1 : 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) - (z - 1) = 0$, stąd $\pi_1 : z = 1$. Podobnie równanie płaszczyzny π_2 ma postać $\pi_2 : 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 1) - (z - 0) = 0$, stąd $\pi_2 : z = 0$. Odległość dwóch płaszczyzn π_1 i π_2 , a zatem i odległość prostych l_1 i l_2 , jest równa $d = |1 - 0| = 1$.

f) Zauważmy najpierw, że prosta $l : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ o wektorze kierunkowym $\vec{v} = (-1, 2, 1)$, jest równoległa do płaszczyzny $\pi : x + y - z + 7 = 0$ o wektorze normalnym $\vec{n} = (1, 1, -1)$. Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\vec{n} \circ \vec{v} = (1, 1, -1) \circ (-1, 2, 1) = 0.$$

Odległość prostej l od płaszczyzny π jest równa odległości dowolnego punktu prostej l od tej płaszczyzny. Wybieramy dowolny punkt P na prostej l . Przyjmując $x = 0$, otrzymamy $y = -1$ oraz $z = 0$. Stąd $P = (0, -1, 0)$. Korzystając teraz ze wzoru na odległość punktu od płaszczyzny otrzymamy

$$d = \frac{|0 + (-1) - 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

● Przykład 13.2

Obliczyć miarę kąta między:

a) prostą $l : \frac{x+2}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ i płaszczyzną $\pi : 2x - 3y - 5 = 0$;

b) płaszczyznami $\pi_1 : (x, y, z) = (1, 6, 7) + s(-1, 2, 0) + t(1, 1, 1)$, gdzie $s, t \in \mathbf{R}$,
 $\pi_2 : (x, y, z) = (3, 4, 5) + s(0, 1, -3) + t(1, 0, -2)$, gdzie $s, t \in \mathbf{R}$;

c) prostymi $l_1 : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y - z + 3 = 0, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ -x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$

Rozwiązanie

a) Miara kąta α między prostą l o wektorze kierunkowym \vec{v} i płaszczyzną π o wektorze

normalnym \vec{n} jest określona wzorem

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n} \times \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Ponieważ prosta l ma wektor kierunkowy $\vec{v} = (-3, -2, 1)$, a płaszczyzna π wektor normalny $\vec{n} = (2, -3, 0)$, więc

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos \frac{|(2, -3, 0) \times (-3, -2, 1)|}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2}} \\ &= \arccos \frac{|(-3, -2, -13)|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}} = \arccos 1 = 0 \text{ [rad].}\end{aligned}$$

oznacza to, że prosta l jest równoległa do płaszczyzny π .

b) W tym przykładzie wykorzystamy fakt mówiący, że miara kąta między dwiema płaszczyznami jest równa mierze kąta między wektorami normalnymi tych płaszczyzn. Wyznaczmy teraz wektory normalne płaszczyzn π_1 i π_2 . Płaszczyzna π_1 jest rozpięta na wektorach $\vec{u}_1 = (-1, 2, 0)$, $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, a płaszczyzna π_2 na wektorach $\vec{u}_2 = (0, 1, -3)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, -2)$. Wektory normalne \vec{n}_1 i \vec{n}_2 tych płaszczyzn mają odpowiednio postaci:

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= \vec{u}_1 \times \vec{v}_1 = (-1, 2, 0) \times (1, 1, 1) = (2, 1, -3), \\ \vec{n}_2 &= \vec{u}_2 \times \vec{v}_2 = (0, 1, -3) \times (1, 0, -2) = (-2, -3, -1).\end{aligned}$$

Miara kąta α między wektorami normalnymi \vec{n}_1 i \vec{n}_2 (a zatem i między płaszczyznami π_1 i π_2) jest równa

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \\ &= \arccos \frac{|(2, 1, -3) \circ (-2, -3, -1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} \\ &= \arccos \frac{2}{7} \approx 1,28 \text{ [rad]} \approx 73,4^\circ.\end{aligned}$$

c) Kątem między dwiema prostymi nazywamy kąt między wektorami kierunkowymi tych prostych. Wektor kierunkowy \vec{v}_1 prostej l_1 : $\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$ ma postać

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 0) \times (0, 1, -1) = (-1, 1, 1),$$

a wektor kierunkowy \vec{v}_2 prostej l_2 : $\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ postać

$$\vec{v}_2 = (1, -2, 1) \times (-1, 3, 2) = (-7, -3, 1).$$

Miara kąta α między wektorami \vec{v}_1 i \vec{v}_2 (a zatem i miara kąta między prostymi l_1 i l_2) jest równa

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos \frac{|\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} \\ &= \arccos \frac{|(-1, 1, 1) \circ (-7, -3, 1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2 + 1^2}} \\ &= \arccos \frac{5}{\sqrt{177}} \approx 1,19 \text{ [rad]} \approx 67,9^\circ.\end{aligned}$$

● **Przykład 13.3**

Wyznaczyć rzut prostokątny:

- punktu $P = (1, 0, -3)$ na prostą $l : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$;
- punktu $P = (0, 0, 1)$ na płaszczyznę $\pi : x + y - 2z + 4 = 0$;
- prostej $l : x = y = z$ na płaszczyznę $\pi : x + 2y + 3z - 6 = 0$.

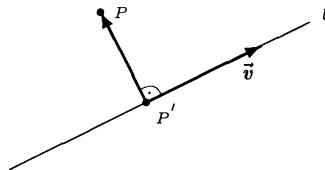
Rozwiązanie

a) I sposób. Punkt $P' \in l$ jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą l , jeżeli spełniony jest warunek

$$\overrightarrow{P'P} \perp \vec{v},$$

gdzie \vec{v} oznacza wektor kierunkowy prostej l . Niech $P' = (x, y, z)$. Wtedy

$$\overrightarrow{P'P} = (1-x, -y, -3-z)$$



Wektor $\overrightarrow{P'P}$ jest prostopadły do wektora $\vec{v} = (2, -1, 2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{P'P} \circ \vec{v} = 0$. Współrzędne punktu P' spełniają zatem układ równań

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}, \\ (1-x, -y, -3-z) \circ (2, -1, 2) = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} -x - 2y &= -2, \\ 2y + z &= 1, \\ -2x + y - 2z &= 4. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójką liczب $x = -\frac{2}{9}$, $y = \frac{10}{9}$, $z = -\frac{11}{9}$. Zatem

$$P' = \left(-\frac{2}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{11}{9} \right).$$

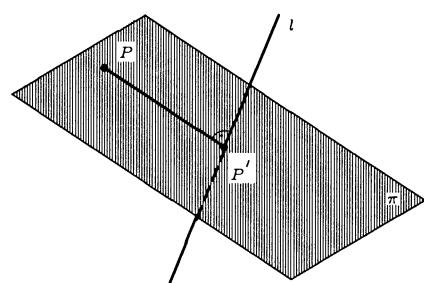
II sposób. Szukany rzut P' jest punktem, w którym prosta l przecina płaszczyznę π prostopadłą do niej i przechodzącą przez punkt P . Równanie płaszczyzny ma postać

$$\pi : 2x - y + 2z + 4 = 0.$$

Prostą l przedstawiamy w postaci parametrycznej

$$l : x = 2t, y = 1-t, z = -1+2t, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Współrzędne punktu $P' = (2t, 1-t, -1+2t)$ wyznaczamy z zależności $2(2t) - (1-t) + 2(-1+2t) + 4 = 0$.



Stąd $9t + 1 = 0$, czyli $t = -\frac{1}{9}$, więc $P' = \left(-\frac{2}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{11}{9}\right)$.

b) I sposób. Punkt $P' \in \pi$ jest rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π , jeżeli spełniony jest warunek $\overrightarrow{P'P} \parallel \vec{n}$, gdzie \vec{n} oznacza wektor normalny płaszczyzny π . Niech $P' = (x, y, z)$. Wtedy $\overrightarrow{P'P} = (-x, -y, 1 - z)$. Wektor $\overrightarrow{P'P}$ jest równoległy do wektora $\vec{n} = (1, 1, -2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{P'P} = k \cdot \vec{n}$ dla pewnego $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Współrzędne punktu P' spełniają zatem układ równań

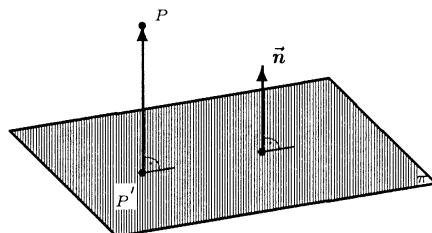
$$\begin{cases} x + y - 2z + 4 = 0, \\ \frac{-x}{1} = \frac{-y}{1} = \frac{1-z}{-2}. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} x + y - 2z = -4, \\ x - y = 0, \\ 2y + z = 1. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójką liczób $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{5}{3}$. Zatem

$$P' = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$



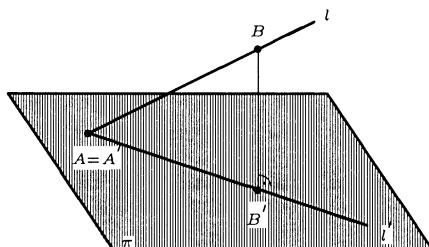
II sposób Niech l oznacza prostą prostopadłą do płaszczyzny π i przechodzącą przez punkt P . Równanie parametryczne tej prostej ma postać

$$l: x = t, y = t, z = 1 - 2t, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Szukany rzut P' jest punktem wspólnym prostej l i płaszczyzny π . Jego współrzędne $(t, t, 1 - 2t)$ wstawiamy do równania płaszczyzny π otrzymując $t + t - 2(1 - 2t) + 4 = 0$. Stąd $6t + 2 = 0$, więc $t = -\frac{1}{3}$. Zatem $P' = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

c) Rzut prostej l na płaszczyznę π wyznaczamy w następujący sposób. Na prostej l wybieramy dwa dowolne punkty A i B . Następnie znajdujemy rzuty prostokątne A' i B' tych punktów na płaszczyznę π . Rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę π będzie wtedy prosta l' przechodząca przez punkty A' i B' . Dla uproszczenia obliczeń wygodnie jest przyjąć, że A jest punktem przecięcia prostej l i płaszczyzny π . Wtedy $A' = A$. Niech $A = (x, y, z)$. Współrzędne punktu A spełniają układ równań

$$\begin{cases} x = y = z, \\ x + 2y + 3z - 6 = 0. \end{cases}$$



Rozwiązaniem tego układu jest trójką liczb $x = 1, y = 1, z = 1$. Zatem $A = (1, 1, 1) = A'$. Wybieramy teraz dowolny punkt $B = (x', y', z') \neq A$ na prostej l . Przyjmując np. $x' = 0$, otrzymamy $y' = 0$ oraz $z' = 0$. Postępując podobnie jak w punkcie b) tego przykładu znajdziemy rzut prostokątny $B' = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$ punktu B na płaszczyznę π . Teraz znajdziemy równanie prostej l' przechodzącej przez punkty A' i B' . Mamy

$$l' : \begin{cases} x = 1 + \frac{4}{7}t, \\ y = 1 + \frac{1}{7}t, & \text{gdzie } t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - \frac{2}{7}t, \end{cases}$$

Przyjmując $t = 7s$ otrzymamy uproszczoną postać tego równania

$$l' : \begin{cases} x = 1 + 4s, \\ y = 1 + s, & \text{gdzie } s \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - 2s, \end{cases}$$

● Przykład 13.4

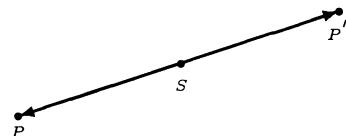
Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P = (0, 1, 3)$ względem:

- a) punktu $S = (1, 0, -1)$;
- b) prostej $l : \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{3}$;
- c) płaszczyzny $\pi : x + y + z = 0$.

Rozwiązanie

a) Punkt P' jest symetryczny do punktu P względem punktu S , jeżeli spełnia warunek

$$\overrightarrow{SP}' = -\overrightarrow{SP}.$$



Niech $P' = (x, y, z)$. Wtedy $\overrightarrow{SP}' = (x - 1, y, z + 1)$ oraz $\overrightarrow{SP} = (-1, 1, 4)$. Z warunku $\overrightarrow{SP}' = -\overrightarrow{SP}$ wynika, że współrzędne punktu P' spełniają układ równań

$$\begin{cases} x - 1 = 1, \\ y = -1, \\ z + 1 = -4. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójką liczb $x = 2, y = -1, z = -5$. Zatem $P' = (2, -1, -5)$.

b) Punkt P' jest symetryczny do punktu P względem prostej l , jeżeli spełnia warunek $\overrightarrow{SP}' = -\overrightarrow{SP}$, gdzie S oznacza rzut prostokątny punktu P na prostą l . Zajdziemy teraz rzut prostokątny S punktu $P = (0, 1, 3)$ na prostą

$$l : \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{3}.$$

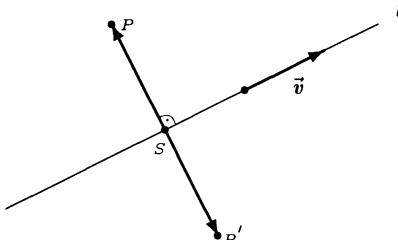
I sposób wyznaczania S . Niech $S = (x, y, z)$. Ponieważ punkt należy do prostej l , więc spełnia jej równanie. Ponadto wektor \overrightarrow{SP} jest prostopadły do wektora kierunkowego \vec{v} tej prostej, więc spełnia warunek $\overrightarrow{SP} \circ \vec{v} = 0$.

Mamy $\vec{v} = (-2, 1, 3)$ oraz $\overrightarrow{SP} = (-x, 1-y, 3-z)$. Współrzędne punktu S spełniają układ równań

$$\begin{cases} \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{3}, \\ (-x, 1-y, 3-z) \circ (-2, 1, 3) = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} x + 2y = -1, \\ 3y - z = -5, \\ 2x - y - 3z = -10. \end{cases}$$



Rozwiązaniem tego układu jest trójkąta liczb $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{7}{2}$, zatem $S = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

II sposób wyznaczania S . Równanie parametryczne tej prostej ma postać $l : x = -1 - 2t$, $y = t$, $z = 5 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$. Punkt S jest punktem przecięcia prostej l z płaszczyzną π prostopadłą do l i przechodzącą przez punkt P . Równanie płaszczyzny π jest postaci $\pi : -2x + y + 3z - 10 = 0$. Współrzędne $(-1 - 2t, t, 5 + 3t)$ punktu S wyznaczymy z zależności $-2(-1 - 2t) + t + 3(5 + 3t) - 10 = 0$. Stąd $14t + 7 = 0$. Zatem $t = -\frac{1}{2}$, więc $S = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Znajdziemy teraz punkt P' . Niech $P' = (x', y', z')$. Wtedy

$$\overrightarrow{SP}' = \left(x' - 0, y' + \frac{1}{2}, z' - \frac{7}{2}\right) \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{SP} = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Współrzędne punktu P' znajdujemy z układu równań

$$\begin{cases} x' = 0, \\ y' + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}, \\ z' - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójkąta liczb $x' = 0$, $y' = -2$, $z' = 4$. Zatem $P' = (0, -2, 4)$.

c) Punkt P' jest symetryczny do punktu P względem płaszczyzny π , jeżeli spełnia warunek $\overrightarrow{SP}' = -\overrightarrow{SP}$, gdzie S oznacza rzut prostokątny punktu P na płaszczyznę π . Znajdziemy teraz rzut prostokątny S punktu $P = (0, 1, 3)$ na płaszczyznę

$$\pi : x + y + z = 0.$$

I sposób wyznaczania S . Niech $S = (x, y, z)$. Ponieważ punkt S należy do płaszczyzny π , więc spełnia jej równanie. Ponadto wektor \overrightarrow{SP} jest prostopadły do tej płaszczyzny, więc jest równoległy do wektora normalnego \vec{n} płaszczyzny π , czyli spełnia warunek

$\overrightarrow{SP} = k \vec{n}$ dla pewnego $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Mamy $\vec{n} = (1, 1, 1)$ oraz $\overrightarrow{SP} = (-x, 1-y, 3-z)$. Współrzędne punktu S spełniają układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ \frac{-x}{1} = \frac{1-y}{1} = \frac{3-z}{1}. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ -x + y = 1, \\ -x + z = 3. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójką liczb $x = -\frac{4}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{5}{3}$.

II sposób wyznaczania S . Zauważmy, że prosta $l : x = t, y = 1+t, z = 3+t$, gdzie $t \in \mathbf{R}$, przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do płaszczyzny π . Punkt $S = (t, 1+t, 3+t)$ jest punktem przecięcia prostej l i płaszczyzny π . Jego współrzędne wyznaczamy z zależności $t + (1+t) + (3+t) = 0$. Stąd $t = -\frac{4}{3}$, zatem $S = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Znajdziemy teraz punkt P' . Niech $P' = (x', y', z')$. Wtedy

$$\overrightarrow{SP}' = \left(x' + \frac{4}{3}, y' + \frac{1}{3}, z' - \frac{5}{3}\right)$$

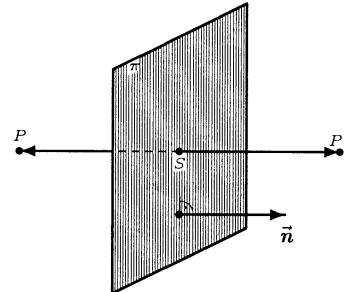
oraz

$$\overrightarrow{SP} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Współrzędne punktu P' znajdziemy z układu równań

$$\begin{cases} x' + \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}, \\ y' + \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}, \\ z' - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójką liczb $x' = -\frac{8}{3}$, $y' = -\frac{5}{3}$, $z' = \frac{1}{3}$. Zatem $P' = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$.



● Przykład 13.5

Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{w} = (1, -1, 1)$:

- punktu $P = (0, 1, 0)$ na płaszczyznę $\pi : x + 3y - 6 = 0$;
- prostej $l : x = -2y = 3z$ na płaszczyznę $\pi : x + y + z - 5 = 0$.

Rozwiązańie

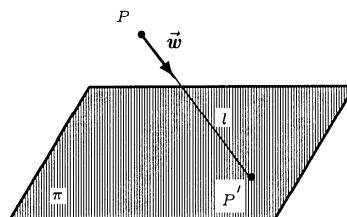
a) Rzut punktu P na płaszczyznę π w kierunku wektora \vec{w} jest punktem przecięcia prostej l , o wektorze kierunkowym \vec{w} , poprowadzonej przez punkt P , z płaszczyzną π (rysunek). Znajdziemy najpierw równanie prostej l o wektorze kierunkowym $\vec{w} = (1, -1, 1)$ przechodzącej przez punkt $P = (0, 1, 0)$. Mamy

$$l : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}.$$

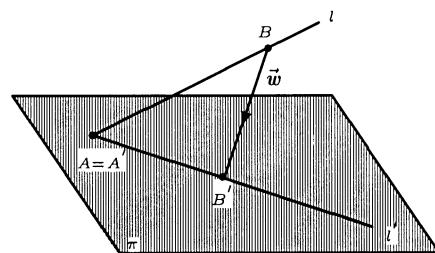
Wyznaczamy teraz punkt $P' = (x, y, z)$ przecięcia prostej l z płaszczyzną π . Współrzędne tego punktu spełniają układ równań

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}, \\ x + 3y - 6 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójką liczb $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{2}$, $z = -\frac{3}{2}$. Zatem $P' = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.



b) Rzut prostej l na płaszczyznę π w kierunku wektora \vec{w} wyznaczamy w następujący sposób. Na prostej l wybieramy dwa dowolne punkty A' i B' . Następnie znajdujemy ich rzuty A i B na płaszczyznę π w kierunku wektora \vec{w} . Rzutem prostej l na płaszczyznę π w kierunku wektora \vec{w} będzie wtedy prosta l' przechodząca przez punkty A' i B' (rysunek). Dla uproszczenia obliczeń wygodnie jest przyjąć, że A jest punktem przecięcia prostej l z płaszczyzną π . Wtedy oczywiście $A' = A$. Niech $A = (x, y, z)$. Współrzędne punktu A spełniają układ równań



$$\begin{cases} x = -2y = 3z, \\ x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójką liczb $x = 6$, $y = -3$, $z = 2$. Zatem $A = (6, -3, 2) = A'$. Wybieramy teraz dowolny punkt $B = (x', y', z') \neq A$ na prostej l . Przyjmując np. $x' = 0$ otrzymamy $y' = 0$ oraz $z' = 0$. Postępując podobnie jak w punkcie a) tego przykładu znajdziemy rzut $B' = (5, -5, 5)$ punktu B na płaszczyznę π w kierunku wektora \vec{w} . Teraz znajdziemy równanie prostej l' przechodzącej przez punkty A' i B' . Mamy

$$l' : \begin{cases} x = 6 - t, \\ y = -3 - 2t, \\ z = 2 + 3t, \end{cases} \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

● **Przykład 13.6**

Obliczyć objętości i pola powierzchni brył ograniczonych podanymi płaszczyznami:

- a) $x = 0, y = 2, z = -1, x + y + z = 6;$
- b) $x = 1, x = 2, x - y = 0, x - y = 3, y + z = 0, y + z = 4.$

Rozwiązanie

a) Bryła rozważana w zadaniu jest czworościanem, który ma trzy pary prostopadłej płaszczyzny. Wyznaczymy najpierw wierzchołki A, B, C, D tego czworościanu. Współrzędne tych wierzchołków spełniają odpowiednio układy równań

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 2, \\ z = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 2, \\ x + y + z = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ z = -1, \\ x + y + z = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ z = -1, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

Po rozwiążaniu tych układów otrzymamy $A = (0, 2, -1)$, $B = (0, 2, 4)$, $C = (0, 7, -1)$ oraz $D = (5, 2, -1)$. Ponieważ czworościan $ABCD$ jest rozpięty na wektorach

$$\overrightarrow{AB} = (0, 0, 5), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 5, 0), \quad \overrightarrow{AD} = (5, 0, 0),$$

więc jego objętość V można obliczyć wykorzystując iloczyn mieszany wektorów. Mamy

$$|V| = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right) \right| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = \frac{125}{6}.$$

Do obliczenia powierzchni całkowitej S czworościanu $ABCD$ wykorzystamy iloczyn wektorowy. Mamy $\overrightarrow{DB} = (-5, 0, 5)$ oraz $\overrightarrow{DC} = (-5, 5, 0)$. Zatem

$$\begin{aligned} S &= S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD} + S_{\Delta DBC} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| + \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right| + \left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right| + \left| \overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| + \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} (|-25\vec{i}| + |25\vec{j}| + |-25\vec{k}| + |-25\vec{i} - 25\vec{j} - 25\vec{k}|) = \frac{1}{2} (75 + 25\sqrt{3}). \end{aligned}$$

b) Bryła rozważana w zadaniu jest równoległościanem $ABCDA'B'C'D'$. Do obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej tego równoległościanu wystarczy znajomość punktów A, B, D i A' . Współrzędne tych punktów spełniają odpowiednio układy równań

$$\begin{cases} x = 1, \\ x - y = 0, \\ y + z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x - y = 3, \\ y + z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x - y = 0, \\ y + z = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ x - y = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Po rozwiążaniu tych układów otrzymamy

$$A = (1, 1, -1), \quad B = (1, -2, 2), \quad D = (1, 1, 3), \quad A' = (2, 2, -2).$$

Ponieważ rozważany równoległościan jest rozpięty na wektorach

$$\overrightarrow{AB} = (0, -3, 3), \quad \overrightarrow{AD} = (0, 0, 4), \quad \overrightarrow{AA'} = (1, 1, -1),$$

więc jego objętość można obliczyć ze wzoru

$$|V| = \left| \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = 12.$$

Pole powierzchni całkowitej S wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} S &= 2(S_{\diamond ABCD} + S_{\diamond ABB'A'} + S_{\diamond AA'D'D'}) \\ &= 2\left(\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| + \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA'}\right| + \left|\overrightarrow{AA'} \times \overrightarrow{AD}\right|\right) \\ &= 2\left(\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}\right| + \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right| + \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}\right|\right) \\ &= 2(|-12\vec{i}| + |3\vec{j} + 3\vec{k}| + |4\vec{i} - 4\vec{j}|) = 2(12 + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) = 24 + 14\sqrt{2}. \end{aligned}$$

● Przykład 13.7

Obliczyć pole trójkąta utworzonego przez parami przecinające się proste:

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}, \quad l_2 : \frac{x-3}{0} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-3}{-6}, \quad l_3 : \frac{x-3}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{-3}.$$

Rozwiązanie

Znajdziemy najpierw punkty przecięcia tych prostych. Niech A będzie punktem przecięcia prostych l_1 i l_3 , B punktem przecięcia prostych l_1 i l_2 oraz C punktem przecięcia prostych l_2 i l_3 . Współrzędne punktów A , B , C spełniają odpowiednio układy równań:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}, \\ \frac{x-3}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{-3}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}, \\ \frac{x-3}{0} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-3}{-6}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-3}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{-3}, \\ \frac{x-3}{0} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-3}{-6}. \end{cases}$$

Rozwiązaniami tych układów są odpowiednio trójkąt liczbowy:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 3, \\ z = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 0, \\ z = -3. \end{cases}$$

Zatem $A = (0, 0, 0)$, $B = (3, 3, 3)$, $C = (3, 0, -3)$. Pole S trójkąta ABC można obliczyć ze wzoru

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2} |(3, 3, 3) \times (3, 0, -3)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-9\vec{i} + 18\vec{j} - 9\vec{k}| = \frac{9}{2}\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Zadania

○ Zadanie 13.1

Obliczyć odległość:

- punktu $P = (1, -2, 3)$ od płaszczyzny $\pi : x + y - 3z + 5 = 0$;
- płaszczyzn równoległych $\pi_1 : 2x + y - 2z = 0$, $\pi_2 : 2x + y - 2z - 3 = 0$;
- płaszczyzn $\pi_1 : x - 2y + 2z + 5 = 0$, $\pi_2 : 3x - 6y + 6z - 3 = 0$;
- punktu $P = (0, 1, -1)$ od prostej $l : \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$;
- prostych równoległych $l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$, $l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-3}{2}$;
- prostych skośnych $l_1 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$, $l_2 : \begin{cases} x = 1, \\ z = 1; \end{cases}$
- prostych $l_1 : \frac{x-9}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1}$, $l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$;
- prostej $l : \begin{cases} x = 2+t, \\ y = -3+2t, \\ z = 2-t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbf{R}$, od płaszczyzny $\pi : 2x + y + 4z = 0$.

○ Zadanie 13.2

Obliczyć miarę kąta między:

- prostą $l : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-3}$ i płaszczyzną $\pi : x - z = 0$;
- płaszczyznami $\pi_1 : x - 2y + 3z - 5 = 0$, $\pi_2 : 2x + y - z + 3 = 0$;
- prostymi $l_1 : \begin{cases} x = 1-t, \\ y = -2+t, \\ z = 3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbf{R}$, $l_2 : \begin{cases} x = 3-2t, \\ y = 4-t, \\ z = 1+3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbf{R}$.

○ Zadanie 13.3

Znaleźć rzut prostokątny:

- punktu $P = (-3, 2, 0)$ na płaszczyznę $\pi : x + y + z = 0$;
- punktu $P = (-1, 2, 0)$ na prostą $l : x = y = z$;
- prostej $l : \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{0}$ na płaszczyznę $\pi : x + 3y - 2z - 6 = 0$.

○ Zadanie 13.4

Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P = (2, 3, -1)$ względem:

- punktu $S = (1, -1, 2)$;
- prostej $l : \begin{cases} x + y = 0, \\ y + z = 0; \end{cases}$
- płaszczyzny $\pi : 2x - y + z - 6 = 0$.

○ Zadanie 13.5

Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{v} = (2, 3, -1)$:

- a) punktu $O = (0, 0, 0)$ na płaszczyznę $\pi : x - 2z + 8 = 0$;
 b) prostej $l : x - 1 = y + 1 = z - 2$ na płaszczyznę $\pi : x - y + z - 1 = 0$.

○ **Zadanie 13.6**

Obliczyć objętości i pola powierzchni brył ograniczonych podanymi płaszczyznami:

- a) $x = 1, y = -1, z = 3, x + y + z = 5$;
 b) $x - y = 1, x - y = 5, x + 2z = 0, x + 2z = 3, z = -1, z = 4$.

○ **Zadanie 13.7**

Obliczyć pole trójkąta utworzonego przez proste:

$$l_1 : \begin{cases} x = -2 + 2t, \\ y = 0, \\ z = 4t, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 3 + 3s, \\ z = -4s, \end{cases} \quad l_3 : \begin{cases} x = -2p, \\ y = 3 - 3p, \\ z = 0, \end{cases} \text{ gdzie } t, s, p \in \mathbf{R}.$$

○ **Zadanie* 13.8**

Niech $A = (1, -1, 3), B = (0, 2, 5)$. Na prostej $l : \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{3}$ znaleźć punkt C taki, że pole trójkąta ABC będzie najmniejsze.

○ **Zadanie* 13.9**

Dane są równania dwóch płaszczyzn

$$\pi_1 : 3x - 4y - 12z = 0, \quad \pi_2 : 4x + 12y + 3z - 13 = 0.$$

Znaleźć równania płaszczyzn, które są dwusiecznymi kątów dwuściennych utworzonych przez płaszczyzny π_1 i π_2 .

Odpowiedzi i wskazówki

13.1 a) $\frac{5}{\sqrt{11}}$; b) 1; c) 2; d) $\sqrt{\frac{6}{7}}$; e) $\sqrt{14}$; f) 1; g) $\frac{57}{7}$; h) $\frac{2}{7}\sqrt{21}$.

13.2 a) $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{26}} \approx 1,37$ [rad] $\approx 78,7^\circ$; b) $\alpha = \arccos \frac{3}{2\sqrt{21}} \approx 1,24$ [rad] $\approx 70,9^\circ$; c) $\alpha = \arccos \frac{10}{\sqrt{154}} \approx 0,63$ [rad] $\approx 36,3^\circ$.

13.3 a) $\left(-\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$; b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; c) $l' : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$.

13.4 a) $(0, -5, 5)$; b) $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; c) $(6, 1, 1)$.

13.5 a) $(-4, -6, 2)$; b) $l' : \frac{x+2}{4} = \frac{y+4}{5} = \frac{z+1}{1}$.

13.6 a) $|V| = \frac{4}{3}$, $|S| = 9$; b) $|V| = 60$, $|S| = 2(15\sqrt{2} + 20\sqrt{5} + \sqrt{4154})$.

13.7 $S = \sqrt{61}$.

13.8* Wskazówka. Punkt C jest punktem, w którym realizuje się najmniejsza odległość między prostymi AB i l , $C = \left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}, 4\right)$.

13.9* $x + 16y + 15z - 13 = 0, 7x + 8y - 9z - 13 = 0$.

Czternasty tydzień

Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn (5.8). Zastosowanie rachunku wektorowego w mechanice (5.5).

Przykłady

● Przykład 14.1

Punkty $A = (0, 0, 0)$, $B = (4, 0, 0)$, $C = (0, 6, 0)$, $D = (0, 0, 8)$ są wierzchołkami czworościanu. Wyznaczyć środek i promień kuli opisanej na tym czworościanie.

Rozwiązanie

Niech $S = (x, y, z)$ będzie środkiem, a R promieniem kuli opisanej na czworościanie $ABCD$. Wtedy

$$|SA| = |SB| = |SC| = |SD| = R.$$

Zapisując te równości w formie układu równań otrzymamy

$$\begin{cases} \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}, \\ \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2}, \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-8)^2}. \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} x &= 2, \\ -2x + 3y &= 5, \\ -3y + 4z &= 7. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest trójkąt

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = 4. \end{cases}$$

Zatem $S = (2, 3, 4)$. Obliczymy teraz promień kuli opisanej na czworościanie $ABCD$. Mamy

$$R = |SA| = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{29}.$$

● Przykład 14.2

W chwili $t_0 = 0$ z punktu $S = (4, -3, 1)$ [km] wystrzelono prostoliniowo rakietę z prędkością $v = 3$ km/s, nadając jej kierunek wektora $\vec{u} = (1, 1, 5)$. Wyznaczyć położenie rakiety w chwili $t_1 = 16$ s.

Rozwiązanie

Rakietą porusza się po linii prostej o równaniu parametrycznym (zapisanym w formie wektorowej) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$, gdzie \vec{r} jest promieniem wodzącym punktów na prostej,

$\vec{r}_0 = (4, -3, 1)$ jest promieniem wodzącym punktu S , $\vec{v} = v \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 5)$ wektorem

prędkości rakiety, a t oznacza czas. Rakieta w chwili $t = 16$ s znajduje się w punkcie o promieniu wodzącym

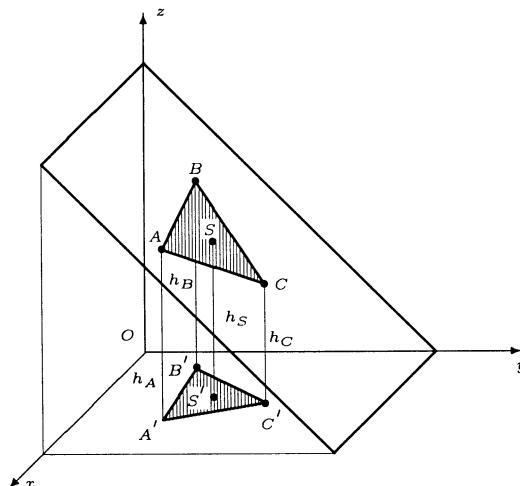
$$\vec{r} = (4, -3, 1) + \frac{16}{\sqrt{3}}(1, 1, 5) = \left(4 + \frac{16}{\sqrt{3}}, -3 + \frac{16}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{80}{\sqrt{3}}\right).$$

● Przykład 14.3

Na pochyłym płaskim terenie wytyczono trójkąt równoboczny ABC . Wzniesienia nad poziom morza punktów A, B, C są równe odpowiednio $h_A = 100$ m, $h_B = 200$ m, $h_C = 150$ m. Obliczyć wzniesienie nad poziom morza środka tego trójkąta.

Rozwiązanie

Sytuację omawianą w zadaniu przedstawiono na rysunku obok. Na rysunku A', B', C' oznaczają rzuty prostopadłe odpowiednio punktów A, B, C na płaszczyznę xOy (poziom morza). Ponieważ przy rzutowaniu prostopadłym na płaszczyznę trzech współliniowych punktów, zachowuje się stosunek odległości między tymi punktami, więc rzut S' punktu S będzie środkiem masy trójkąta $A'B'C'$. Ponieważ środek masy dowolnego trójkąta jest punktem wspólnym środkówowych tego trójkąta, więc $h_S = \frac{1}{3}(h_A + h_B + h_C) = \frac{1}{3}(100 + 200 + 150) = 150$ [m].



Wzniesienie środka S trójkąta ABC nad poziom morza wynosi $h_S = 150$. W rozważaniach nie było istotne, że $\triangle ABC$ jest równoboczny. Powyższe rozwiązanie zapiszemy korzystając z rachunku wektorowego. Niech $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ oznaczają promienie wodzące odpowiednio punktów A, B, C . Wtedy wektor wodzący środka masy wyraża się wzorem

$$\vec{r}_S = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).$$

$$\text{Stąd } z_S = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = \frac{1}{3}(h_A + h_B + h_C) = 150 \text{ [m].}$$

● Przykład 14.4

Obliczyć sumę momentów sił $\vec{F}_1 = (-1, 2, 3)$ oraz $\vec{F}_2 = (0, 1, -5)$ względem punktu $O = (2, 3, -1)$, jeżeli siły te są przyłożone odpowiednio w punktach $P_1 = (0, 0, 0)$ oraz $P_2 = (1, -3, 4)$.

Rozwiązanie

Moment \vec{M} siły \vec{F} przyłożonej w punkcie P , rozważany względem punktu O , wyraża się

wzorem $\vec{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$. Niech \vec{M}_1 i \vec{M}_2 oznaczają odpowiednio momenty sił \vec{F}_1 i \vec{F}_2 . Wtedy

$$\begin{aligned}\vec{M}_1 &= \overrightarrow{OP_1} \times \vec{F}_1 = (-2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) \times (-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \\ &= -3\vec{k} - \vec{j} - 4\vec{k} - 2\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{i} = -11\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}.\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\vec{M}_2 &= \overrightarrow{OP_2} \times \vec{F}_2 = (-\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}) \times (\vec{j} - 5\vec{k}) \\ &= -\vec{k} - 5\vec{i} - 5\vec{j} + 30\vec{i} = 25\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}.\end{aligned}$$

Moment wypadkowy tych sił jest zatem równy

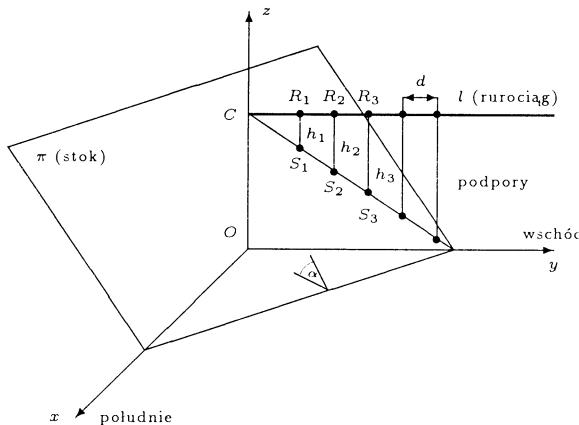
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = (-11\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}) + (25\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}) = 14\vec{i} - 8\vec{k}.$$

● Przykład 14.5

Płaski stok opada w kierunku południowo-wschodnim pod kątem $\alpha = 30^\circ$. Nad stokiem trzeba przeprowadzić w kierunku z zachodu na wschód poziomy prostoliniowy rurociąg. Podpory podtrzymujące rurociąg ustawia się co $d = 10$ m (długości rurociągu). Obliczyć wysokości kilku początkowych podpór rurociągu.

Rozwiązanie

Sytuację opisaną w zadaniu przedstawiono na rysunku poniżej. Układ współrzędnych dobrano w ten sposób, aby rurociąg wychodził z ziemi w punkcie przebicia stoku z osią Oz , a oś Oy leżała pod rurociągiem.



Ponieważ płaszczyzna π (stok) opada w kierunku południowo-wschodnim pod kątem $\alpha = 30^\circ$, więc jej równanie ma postać $\pi : \frac{x}{\sqrt{6}} + \frac{y}{\sqrt{6}} + z = c$, gdzie $C = (0, 0, c)$ jest punktem przebicia rurociągu z osią Oz . Ponadto, skoro prosta l (rurociąg) przebiega poziomo z zachodu na wschód, więc jej równanie ma postać

$$l : \begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = c, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Wysokości podpór będą równe odległościom punktów R_n rurociągu od punktów S_n stoku, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$. Ponieważ podpory są mocowane co $d = 10$ m, więc punkty mocowania mają współrzędne

$$R_n = (0, 10n, c), \quad S_n = \left(0, 10n, c - \frac{10n}{\sqrt{6}}\right),$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$. Stąd $h_n = |R_n S_n| = \frac{10n}{\sqrt{6}}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$. Przyjmując $n = 1, 2, 3$ otrzymamy $h_1 \approx 4,08$ m, $h_2 \approx 8,16$ m, $h_3 \approx 12,25$ m.

● Przykład 14.6

Hala widowiskowa ma kształt trójkąta prostokątnego ABC o przyprostokątnych $AB = 90$ m, $BC = 120$ m. Płaski dach nad tą halą oparty jest na trzech pionowych podporach zamocowanych w punktach A, B, C . Wysokości tych podpór są równe odpowiednio $h_A = 15$ m, $h_B = 20$ m, $h_C = 25$ m. Obliczyć pole powierzchni tego dachu.

Rozwiążanie

Sytuację omawianą w zadaniu przedstawiono na rysunku niżej. Współrzędne wierzchołków A' , B' , C' dachu są wtedy równe $A' = (90, 0, 15)$, $B' = (0, 0, 20)$, $C' = (0, 120, 25)$. Do obliczenia pola powierzchni dachu wykorzystamy iloczyn wektorowy. Pole trójkąta rozpiętego na wektorach \vec{a} , \vec{b} wyraża się wzorem $S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$. Zatem pole trójkąta $A'B'C'$ wyraża się wzorem

$$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} \right|.$$

Obliczymy teraz wektory $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$. Mamy $\overrightarrow{A'B'} = (-90, 0, 5)$, $\overrightarrow{A'C'} = (-90, 120, 10)$. Zatem

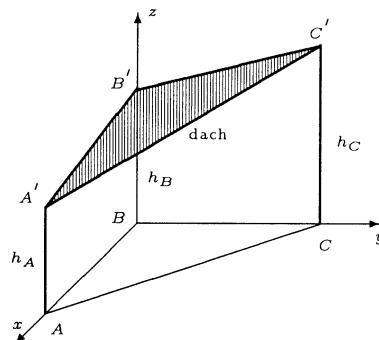
$$\begin{aligned} S_{\triangle A'B'C'} &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -90 & 0 & 5 \\ -90 & 120 & 10 \end{vmatrix} \right| = 25 \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -18 & 0 & 1 \\ -9 & 12 & 1 \end{vmatrix} \right| = 25 \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -18 & 0 & 1 \\ -27 & 12 & 0 \end{vmatrix} \right| \\ &= 25 \left| -12\vec{i} + 9\vec{j} - 216\vec{k} \right| = 25\sqrt{12^2 + 9^2 + 216^2} = 75\sqrt{5209} \approx 5413 \text{ [m}^2\text{]} . \end{aligned}$$

Pole powierzchni dachu jest równe w przybliżeniu 5413 m^2 .

● Przykład 14.7

W punktach $P_1 = (0, 1, -3)$, $P_2 = (7, -3, 2)$, $P_3 = (1, 4, 2)$ umieszczone są odpowiednio masy $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$.

- Wyznaczyć położenie środka masy tego układu;
- Obliczyć moment bezwładności podanego układu mas względem osi Ox ;



c) Obliczyć moment bezwładności podanego układu mas względem prostej

$$l : x = y = 3z;$$

d) Obliczyć siłę przyciągania grawitacyjnego masy $M = 4$ znajdującej się w po-czątku układu współrzędnych przez podany układ mas.

Rozwiązanie

a) Wektor wodzący \vec{r} środka masy układu punktów materialnych o wektorach wodzących \vec{r}_i i masach m_i , gdzie $1 \leq i \leq n$, wyraża się wzorem

$$\vec{r} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

W układzie punktów materialnych rozważanym w zadaniu mamy:

$\vec{r}_1 = (0, 1, -3)$, $\vec{r}_2 = (7, -3, 2)$, $\vec{r}_3 = (1, 4, 2)$ oraz $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$. Zatem

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{1}{6} [3(0, 1, -3) + 1(7, -3, 2) + 2(1, 4, 2)] = \left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Środek masy tego układu jest w punkcie

$$C = \left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right).$$

b) Moment bezwładności podanego układu mas względem osi Ox wyraża się wzorem

$$I_x = m_1 (y_1^2 + z_1^2) + m_2 (y_2^2 + z_2^2) + m_3 (y_3^2 + z_3^2),$$

gdzie $P_i = (x_1, y_1, z_1)$ dla $1 \leq i \leq 3$. Zatem dla podanego układu mas mamy

$$I_x = 3(1+9) + 1(9+4) + 2(16+4) = 83.$$

c) Moment bezwładności układu mas względem prostej l wyraża się wzorem

$$I_l = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_3 d_3^2,$$

gdzie d_i jest odległością punktu P_i od prostej l dla $1 \leq i \leq 3$. Niech $P(t) = (3t, 3t, t)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, będzie bieżącym punktem prostej l . Wielkości d_1^2, d_2^2, d_3^2 wyznaczymy minimalizując kwadrat długości odcinka łączącego punkty $P(t)$ i P_i dla $1 \leq i \leq 3$. Mamy zatem

$$f(t) = |P_1 P(t)|^2 = (3t)^2 + (3t-1)^2 + (t+3)^2 = 19t^2 + 10,$$

$$g(t) = |P_2 P(t)|^2 = (3t-7)^2 + (3t+3)^2 + (t-3)^2 = 19t^2 - 28t + 62,$$

$$h(t) = |P_3 P(t)|^2 = (3t-1)^2 + (3t-4)^2 + (t-2)^2 = 19t^2 - 34t + 21.$$

Zauważmy, że funkcje f, g, h są trójmianami kwadratowymi postaci $at^2 + bt + c$, gdzie $a > 0$. Zatem wartości najmniejsze przyjmują w punkcie $t_{\min} = -\frac{b}{2a}$. Stąd

$$d_1^2 = f_{\min} = f(0) = 10, \quad d_2^2 = g_{\min} = g\left(\frac{14}{19}\right) = \frac{982}{19}, \quad d_3^2 = h_{\min} = h\left(\frac{17}{19}\right) = \frac{110}{19}.$$

Tak więc

$$I_l = 3d_1^2 + d_2^2 + 2d_3^2 = \frac{1662}{19}.$$

d) Siła przyciągania grawitacyjnego masy $M = 4$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$ przez układ punktów materialnych wyraża się wzorem

$$\vec{F} = GM \left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^3} m_1 + \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_0|^3} m_2 + \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_0|^3} m_3 \right),$$

gdzie G jest stałą grawitacji. Mamy więc

$$\begin{aligned} \vec{F} &= 4G \left[\frac{(0, 1, -3)}{10} \cdot 3 + \frac{(7, -3, 2)}{162} \cdot 1 + \frac{(1, 4, 2)}{21} \cdot 2 \right] \\ &= G \left(\frac{542}{651}, \frac{8236}{3255}, -\frac{8818}{3255} \right). \end{aligned}$$

● Przykład 14.8

Radiowa stacja nasłuchowa składa się z dwóch prostoliniowych anten zawieszonych na dwóch parach pionowych słupów. W każdej parze słupy ustawione są w przeciwnieległych wierzchołkach prostokąta $ABCD$ o bokach $AB = 40$ m i $AD = 30$ m. Wysokości słupów ustawionych w punktach A, B, C, D są równe odpowiednio $h_A = 15$ m, $h_B = 20$ m, $h_C = 30$ m, $h_D = 25$ m. Obliczyć najmniejszą odległość między antenami.

Rozwiążanie

Sytuację opisaną w zadaniu przedstawiono na rysunku niżej. Oś Ox i Oy układu współrzędnych pokrywają się z bokami prostokąta, a oś Oz pokrywa się z jednym ze słupów. W tym układzie współrzędnych wierzchołki słupów, tj. punkty A' , B' , C' , D' , mają współrzędne (podane w metrach) $A' = (30, 0, 15)$, $B' = (30, 40, 20)$, $C' = (0, 40, 30)$, $D' = (0, 0, 25)$. Równanie odcinka anteny przechodzącej przez punkty A' , C' ma postać

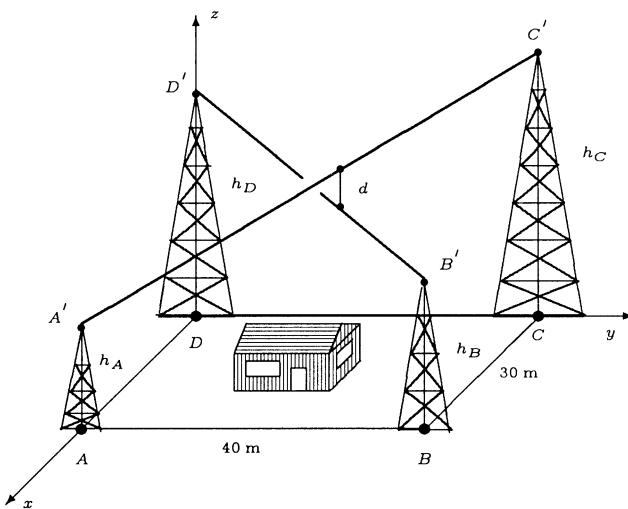
$$A' C' : \begin{cases} x = 30 - 30t, \\ y = 40t, \\ z = 15 + 15t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in [0, 1],$$

a równanie odcinka anteny przechodzącej przez punkty D' i B' postać

$$D' B' : \begin{cases} x = 30s, \\ y = 40s, \\ z = 25 - 5s, \end{cases}$$

gdzie $s \in [0, 1]$. Szukana najmniejsza odległość d między tymi antenami jest odlegością między odcinkami $A' C'$ i $D' B'$. Odległość ta jest równa odległości dowolnego punktu odcinka $D' B'$ (np. punktu D') od płaszczyzny π zawierającej odcinek $A' C'$ i równoległej do odcinka $D' B'$. Znajdziemy teraz równanie płaszczyzny π . Wektor normalny \vec{n} tej płaszczyzny ma postać

$$\vec{n} = \overrightarrow{A' C'} \times \overrightarrow{D' B'} = (-30, 40, 15) \times (30, 40, -5) = 100(-8, 3, 24).$$



Ponieważ płaszczyzna π zawiera punkt $A' = (30, 0, 15)$ i ma wektor normalny $\vec{n}_1 = \frac{1}{100} \vec{n} = (-8, 3, 24)$, więc jej równanie ma postać

$$\pi : -8(x - 30) + 3(y - 0) + 24(z - 15) = 0, \text{ stąd } \pi : -8x + 3y + 24z - 120 = 0.$$

Skorzystamy teraz ze wzoru na odległość d punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Odległość punktu $D' = (0, 0, 25)$ od płaszczyzny $\pi : -8x + 3y + 24z - 120 = 0$ jest zatem równa

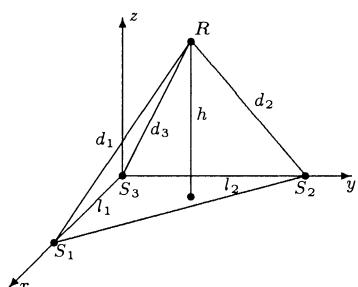
$$d = \frac{|-8 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 24 \cdot 25 - 120|}{\sqrt{(-8)^2 + 3^2 + 24^2}} = \frac{480}{\sqrt{649}} \approx 18,84 \text{ [m].}$$

Dla pełności rozważań niezbędne jest jeszcze sprawdzenie, czy najmniejsza odległość między prostymi przechodzącymi przez punkty A' , C' oraz D' , C' jest realizowana przez punkty odcinków $A'C'$ i $D'C'$. Sprawdzenie, że tak jest w tym przypadku, pozostawiamy Czytelnikowi.

Zadania

○ Zadanie 14.1

Trzy stacje radiolokacyjne S_1 , S_2 , S_3 umieszczone są w wierzchołkach trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $l_1 = 300 \text{ km}$, $l_2 = 400 \text{ km}$ (rysunek). Pomary odległości rakiety R od tych stacji dały następujące wyniki $d_1 = 300 \text{ km}$, $d_2 = 400 \text{ km}$, $d_3 = 400 \text{ km}$. Obliczyć, na jakiej wysokości h leciała rakieta.



○ **Zadanie 14.2**

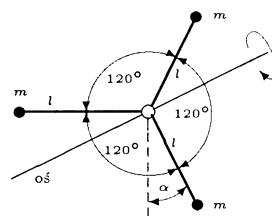
Cząsteczka porusza się po linii prostej ze stałą prędkością. W chwili $t_1 = 2$ cząsteczka znajdowała się w punkcie $P_1 = (0, -2, 5)$, a w chwili $t_2 = 3$ w punkcie $P_2 = (2, 3, 3)$. Znaleźć położenie P_0 tej cząsteczki w chwili $t_0 = 0$.

○ **Zadanie 14.3**

Na pochyłym płaskim terenie wytyczono kwadrat $A_1A_2A_3A_4$. Wzniesienia nad poziom morza punktów A_1, A_2, A_3 wynoszą odpowiednio $h_1 = 100$ m, $h_2 = 110$ m, $h_3 = 160$ m. Obliczyć wzniesienie h_4 punktu A_4 nad poziom morza.

○ **Zadanie 14.4**

Trzy punkty materialne o masie m przymocowane są do nieważkich ramion o długości l , które tworzą między sobą kąty 120° (rysunek). Układ ten osadzony jest na poziomej osi i może obracać się wokół niej. Uzasadnić, że układ ten pozostaje w równowadze, niezależnie od położenia początkowego.

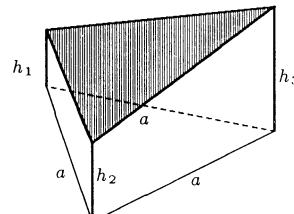


○ **Zadanie 14.5**

W celu określenia kąta nachylenia płaskiego nasypu do poziomu, wykonano pomiary kąta nachylenia tego nasypu w kierunku wschodnim i południowym. Pomiary te dały następujące wyniki: w kierunku wschodnim nasyp wzna się pod kątem $\alpha = 30^\circ$, a w kierunku południowym opada pod kątem $\beta = 45^\circ$. Obliczyć kąt nachylenia tego nasypu do poziomu.

○ **Zadanie 14.6**

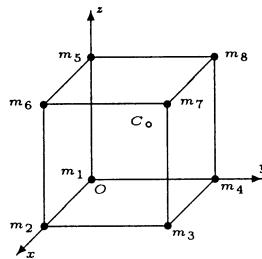
Siatka maskująca obiekt wojskowy zaczepiona jest na trzech masztach (rysunek). Maszty te mają wysokości $h_1 = 5$ m, $h_2 = 7$ m, $h_3 = 10$ m i ustawione są w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku $a = 20$ m. Obliczyć pole siatki maskującej.



○ **Zadanie 14.7**

W wierzchołkach sześcianu o krawędzi $a = 10$ umieszczone są punkty materialne o masach odpowiednio: $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 3, m_4 = 4, m_5 = 5, m_6 = 6, m_7 = 7, m_8 = 8$ (rysunek).

- Określić położenie środka masy tego układu;
- Obliczyć moment bezwadności podanego układu mas względem osi Oz ;
- Obliczyć moment bezwadności podanego układu mas względem osi łączącej masy m_3 i m_7 ;



- d) Obliczyć siłę przyciągania grawitacyjnego masy m_8 przez układ pozostałych siedmiu mas.

○ **Zadanie 14.8**

Nad Wrocławiem przebiegają dwa prostoliniowe korytarze powietrzne dla samolotów. Pierwszy z nich przebiega poziomo na wysokości $h_1 = 1000$ m ze wschodu na zachód. Natomiast drugi przebiega z południowego-wschodu na północny-zachód i wznosi się pod kątem $\alpha = 10^\circ$. Samoloty poruszające się tym korytarzem przelatują nad Wrocławiem na wysokości $h_2 = 3000$ m. Obliczyć najmniejszą możliwą odległość między samolotami lecącymi tymi korytarzami.

Odpowiedzi i wskazówki

14.1 $h = \frac{200}{3}\sqrt{11} \approx 221$ km.

14.2 $P_0 = (-4, -12, 9)$.

14.3 $h_4 = 150$ m.

14.4 Wskazówka. Wykazać, że suma momentów sił ciężkości tych punktów materialnych, względem osi obrotu, jest równa \vec{O} .

14.5 $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\varphi \approx 26,6^\circ$.

14.6 $S = 10\sqrt{319} \text{ m}^2$.

14.7 a) $(x_0, y_0, z_0) = \left(5, \frac{55}{9}, \frac{65}{9}\right)$; b) 4000; c) 3200;

d) $\frac{2G}{25} \left(\frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{9} + 7, \frac{-7\sqrt{2}}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{9} - 5, -\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9} - 4 \right)$, gdzie G jest stałą grawitacji.

14.8 $d_{\min} = (h_2 - h_1) \cos \alpha = 2000 \cos 10^\circ \approx 1970$ m.

Zbiory zadań

1. T.Biegański, I.Dudek, W.A.Dudek, *Algebra liniowa i geometria analityczna*, Wydawnictwo WSP, Częstochowa 1985.
2. O.Cuberbiller, *Zadania i ćwiczenia z geometrii analitycznej*, PWN, Warszawa 1965.
3. W.Dubnicki, L.Filmo, H.Sosnowska, *Algebra liniowa w zadaniach*, PWN, Warszawa 1985.
4. D.K.Faddeev, I.S.Sominsky, *Zbiór zadań z algebry wyższej*, Wydawnictwo „Nauka”, Moskwa 1977 (w jęz. ros.).
5. B.Gdowski, E.Pluciński, *Zbiór zadań z rachunku wektorowego i geometrii analitycznej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
6. H.Guściora, M.Sadowski, *Przykłady i zadania z algebry liniowej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1976.
7. L.Jeśmianowicz, J.Łoś, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1969.
8. I.L.Kalichman, *Zadania z algebry liniowej i programowania liniowego*, PWN, Warszawa 1974.
9. E.Kącki, D.Sadowska, L.Siewierski, *Geometria analityczna w zadaniach*, PWN, Warszawa 1975.
10. J.Klukowski, *Algebra w zadaniach*, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1991.
11. A.I.Kostrikin (red.), *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1995.
12. W.Krysicki, L.Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. I*, PWN, Warszawa 1993.
13. R.Leitner, W.Matuszewski, Z.Rojek, *Zadania z matematyki wyższej, cz. I*, WNT, Warszawa 1992.
14. I.V.Proskuryakow, *Problems in linear algebra*, Mir Publishers, Moscow 1978.
15. S.Przybyło, A.Szlachtowski, *Algebra i wielowymiarowa geometria analityczna w zadaniach*, WNT, Warszawa 1992.
16. Z.Radziszewski, *Zbiór zadań z geometrii analitycznej*, Wydawnictwo UMCS, Warszawa 1996.
17. E.Stolarska, red., *Zbiór zadań z algebry liniowej dla ekonometryków*, PWN, Warszawa 1986.

Księgarnie prowadzące sprzedaż książek naszego wydawnictwa

Księgarnia DOM KSIĄŻKI

Politechnika Białostocka

15-351 **Białystok**, ul. Wiejska 45C

Księgarnia Akademii Bydgoskiej

85-064 **Bydgoszcz**, ul. Chodkiewicza 30

Księgarnia ELEKTRA

Politechnika Częstochowska

42-200 **Częstochowa**, ul. Dekabrystów 26/30

Księgarnia KOLIBER

Wyzsza Szkoła Pedagogiczna

42-200 **Częstochowa**, ul. Waszyngtona 4/8

Księgarnia Wydawnictwa PG

Politechnika Gdańskia

80-952 **Gdańsk**, ul. Narutowicza 11/12

Księgarnia KALLIMACH

Biblioteka Główna Uniwersytetu Gdańskiego

81-824 **Sopot**, ul. Armii Krajowej 119/121

Księgarnia LITERKA

Uniwersytet Gdańskiego

80-952 **Gdańsk-Oliwa**, ul. Wita Stwosza 55

Księgarnia Wydawnictwa PŚ

Politechnika Śląska

44-100 **Gliwice**, ul. Akademicka 2, 7, 16

Księgarnia Wydawnictwa PŚ

Politechnika Śląska

44-100 **Katowice**, ul. Krasińskiego 8

Księgarnia OR PAN

Uniwersytet Śląski

40-007 **Katowice**, ul. Bankowa 11

Księgarnia STACHURSKI

Politechnika Świętokrzyska

25-314 **Kielce**, al. 1000-lecia P.P. 7b

Księgarnia Akademicka ŚWIATOWID

25-315 **Kielce**, ul. Starodomaszowska 30

Księgarnia Naukowa

Politechnika Koszalińska

75-620 **Koszalin**, ul. Racławicka 15-17

Sprzedaż Uczelnianych Wydawnictw

Akademia Górnictwo-Hutnicza

30-059 **Kraków**, al. Mickiewicza 30

Księgarnia

Politechnika Krakowska

31-155 **Kraków**, ul. Warszawska 24

Księgarnia ACADEMICUS

Akademia Pedagogiczna

30-084 **Kraków**, ul. Podchorążych 2

Główna Księgarnia Naukowa

31-118 **Kraków**, ul. Podwale 6

Księgarnia Naukowo-Techniczna

Politechnika Lubelska

20-618 **Lublin**, ul. Nadbystrzycka 36

Księgarnia SINUS

Politechnika Lubelska

20-618 **Lublin**, ul. Nadbystrzycka 40

Księgarnia Uniwersytecka

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej

20-031 **Lublin**, pl. Curie-Skłodowskiej 5

Księgarnia MERITUM

Politechnika Łódzka

90-924 **Łódź**, ul. Żwirki 36

Księgarnia PRUSZYŃSKI BEZ SPÓŁKI

Uniwersytet Łódzki

90-938 **Łódź**, ul. Matejki 34/38

Księgarnia ŹAK

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski

10-718 **Olsztyn**, ul. Oczapowskiego 6

Księgarnia TECHNICZNA

Politechnika Opolska

45-271 **Opole**, ul. Sosnkowskiego 31

Księgarnia AKADEMICKA
Uniwersytet Opolski
45-058 **Opole**, ul. Kośnego 45

Księgarnia Akademicka
Filia Politechniki Warszawskiej
00-271 **Płock**, pl. Łukasiewicza 17

Księgarnia Uniwersytecka
Uniwersytet Adama Mickiewicza
60-813 **Poznań**, ul. Zwierzyńiecka 7

Księgarnia Naukowa KAPITAŁKA
61-725 **Poznań**, ul. Mielżyńskiego 27/29

Księgarnia Techniczna DOM KSIĄŻKI
61-888 **Poznań**, ul. Półwiejska 14

Sklep papierniczy
Politechnika Poznańska
61-141 **Poznań**, ul. Kórnicka 30
(osiedle akademickie Piotrowo)

Księgarnia Akademii Ekonomicznej
61-895 **Poznań**, ul. Powstańców Wielkopolskich 16

Księgarnia EKONOMIK
Politechnika Radomska
26-600 **Radom**, ul. Chrobrego 31 i 42

Księgarnia UNKA
Politechnika Rzeszowska
35-329 **Rzeszów**, al. Powstańców Warszawy 8

Księgarnia Akademicka LIBRA
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
35-310 **Rzeszów**, ul. Rejtana 16c

Kiosk-Księgarnia
Politechnika Szczecińska
70-311 **Szczecin**, al. Piastów 48

Uniwersytecka Księgarnia Naukowa
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
87-100 **Toruń**, ul. Reja 25

Księgarnia Naukowa OR PAN
Pałac Kultury i Nauki
00-901 **Warszawa**

Księgarnia Naukowa OR PAN – BIS
00-818 **Warszawa**, pl. Twarda 51/55

Księgarnia Studencka
Politechnika Warszawska
00-661 **Warszawa**, pl. Politechniki 1

Księgarnia Studencka
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
02-787 **Warszawa**, ul. Nowoursynowska 161

Księgarnia
Szkoła Główna Handlowa
02-554 **Warszawa**, al. Niepodległości 162

Księgarnia POLITECHNIKA
Politechnika Wrocławskiego (bud. A-1)
50-370 **Wrocław**, wyb. Wyspiańskiego 27

Księgarnia TECH
Politechnika Wrocławskiego (bud. D-1)
50-377 **Wrocław**, pl. Grunwaldzki 13

Księgarnia-Ksero ADUŚ
Instytut Matematyczny UWr.
50-314 **Wrocław**, pl. Grunwaldzki 2/4

Kiosk-Księgarnia
Akademia Rolnicza
50-357 **Wrocław**, ul. Grunwaldzka 53

Księgarnia ZETKA
Akademia Ekonomiczna
53-345 **Wrocław**, ul. Komandorska 118/120

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
44-100 **Zabrze**, ul. Roosevelta 26

Księgarnia WSP
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
65-625 **Zielona Góra**, al. Wojska Polskiego 69



Internetowa Księgarnia Akademicka
www.ika.edu.pl

Księgarnia Internetowa MERLIN
www.merlin.com.pl

Księgarnia Internetowa UNIVERSITAS
www.universitas.com.pl



Oficyna Wydawnicza GiS poleca:

Jeszcze 105 zadań Hugona Steinhausa

w opracowaniu Edwarda Piegata

•

Alicja Jokiel-Rokita, Ryszard Magiera

Modele i metody statystyki matematycznej w zadaniach

Polecamy także książki Oficyny Wydawniczej QUADRIVIUM

Marek Zakrzewski, Tomasz Żak

Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i zdrowy rozsądek

•

Jerzy Kierul

Funkcje, wektory i fizyka

•

Jerzy Kierul

Izaak Newton. Bóg, światło i świat