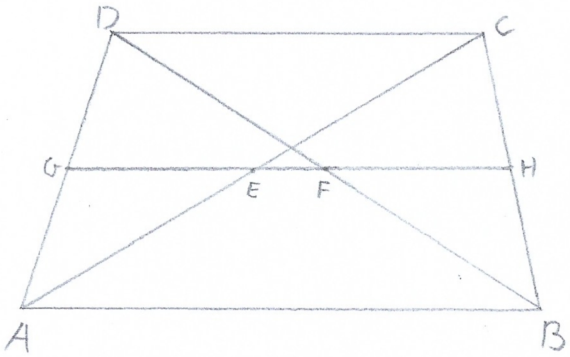
KARTA PRACY

Numer kodowy: | 1 | 4 | 5 | 3 |

Przedmiot: matematyka

Odpowiedzi: $|CD| = 40$

Zadanie nr 1



$|AB| = 48 \qquad |AB| \parallel |GH| \parallel |CD|$

$|EF| = 4$

$|CD| = ?$

$$\begin{cases} \sphericalangle ADC = \sphericalangle AGE \\ |AG| = \frac{1}{2}|AD| \\ |AE| = \frac{1}{2}|AC| \end{cases} \Rightarrow |GE| = \frac{1}{2}|CD|$$

$$\begin{cases} \sphericalangle ADB = \sphericalangle GDF \\ |AG| = \frac{1}{2}|AD| \\ |BF| = \frac{1}{2}|BD| \end{cases} \Rightarrow |GF| = \frac{1}{2}|AB|$$

$|EF| = |GF| - |GE|$

$|EF| = \frac{1}{2}|AB| - \frac{1}{2}|CD|$

$4 = \frac{1}{2} \cdot 48 - \frac{1}{2}|CD| \quad / \cdot 2$

$8 = 48 - |CD| \quad / + |CD| - 8$

$|CD| = 40$

KARTA PRACY

Numer kodowy: 1 4 5 3

Przedmiot: matematyka

Zadanie nr 2

$$\left\{\cos\frac{(n^7-n)\pi}{12} : n\in\mathbb{N}\right\}$$

$n^7-n = n(n^6-1) = n(n^3-1)(n^3+1) = n(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)$

$(n-1)n(n+1)$ - iloczyn 3 kolejnych liczb naturalnych

Wśród 3 kolejnych liczb naturalnych znajduje się przynajmniej jedna liczba parzysta:
parzysta, nieparzysta, parzysta
lub
nieparzysta, parzysta, nieparzysta
przez co ich iloczyn zawsze jest podzielny przez 2.

$n(n-1)(n+1) = n(n^2-1) = n^3-n$ - z małego twierdzenia Fermata wiadomo, że n^3-n, jest podzielne przez 3

$(n-1)n(n+1)$ - jest podzielne przez 2 i 3, więc jest także podzielne przez 6. Co oznacza, że n^7-n również jest podzielne przez 6.

$n^7-n = (n^3-n)(n^2+n+1)(n^2-n+1)$

$\Downarrow$

$n^7-n = 6k : k\in\mathbb{C}$

$$\cos\frac{6k\pi}{12} = \cos\frac{k\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases}\cos(\frac{\pi}{2}+2m\pi)=0\\ \cos(\pi+2m\pi)=-1\\ \cos(\frac{3}{2}\pi+2m\pi)=0\\ \cos(2\pi+2m\pi)=1\end{cases}$$

$m\in\mathbb{C}$

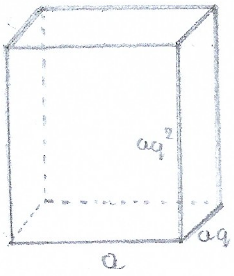
Odpowiedź:

Jedyne możliwe elementy zbioru to $\{-1,0,1\}$, ponieważ jedyne wartości w cosinusie to iloczyn $\frac{\pi}{2}$ i liczby całkowitej, przez co wartość kątowa może wynosić tylko $0°, 90°, 180°, 270°$, których wartości liczbowe to $1, 0, -1, 0$

KARTA PRACY

Numer kodowy: 1 4 5 3

Przedmiot: matematyka



Zadanie nr. 3

Odpowiedzi: Długość najdłuższej krawędzi wynosi 18.

$2\sqrt{91} = \sqrt{a^2 + (aq)^2 + (aq^2)^2} \quad /()^2$

Z: $a > 0$

$aq > 0$

$aq^2 > 0$

$q > 0$

$364 = a^2 + a^2q^2 + a^2q^4$

$364 = \left(\frac{6}{q}\right)^2 + 6^2 + (6q)^2$

$364 = \frac{36}{q^2} + 36 + 36q^2 \qquad q^2 = t$

$364 = \frac{36}{t} + 36 + 36t \quad / \cdot t$

$364t = 36 + 36t + 36t^2 \quad / -364t$

$36t^2 - 328t + 36 = 0 \quad : 4$

$9t^2 - 82t + 9 = 0$

$\Delta_t = 82^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9 = 6724 - 324 = 6400$

$\sqrt{\Delta_t} = 80$

$t_1 = \frac{82-80}{18} = \frac{1}{9} = q_1^2 \qquad q_1 = \frac{1}{3} \vee q_1 \neq -\frac{1}{3} \Leftarrow q > 0$

$t_2 = \frac{82+80}{18} = 9 = q_2^2 \qquad q_2 = 3 \vee q_2 \neq -3 \Leftarrow q > 0$

$aq_1^2 = 6q_1 \quad 6q_1 = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$

$a = \frac{6}{q_1} \quad 6 : \frac{1}{3} = 18$

$aq_2^2 = 6 \cdot 3 = 18$

$2, 6, 18$

$a = \frac{6}{3} = 2$

$aq_2^2 = 18, \quad aq_2 = 6, \quad a = 2$

KARTA PRACY

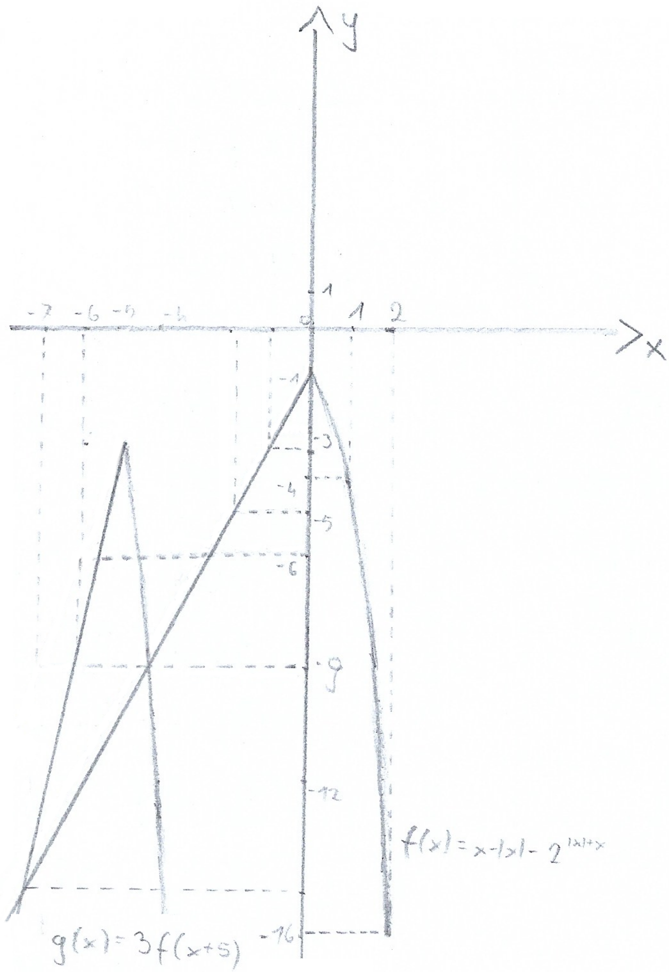
Numer kodowy: 1 4 5 3

Przedmiot: matematyka

Zadanie nr 4

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) = x - x - 2^{x+x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ f(x)\, x - (-x) - 2^{(-x)+x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) = -2^{2x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ f(x) = 2x - 1 \end{cases}$$



$g(x) = 3f(x+5)$

$$\begin{cases} x \geqslant -5 \\ g(x) = 3 \cdot -2^{2(x+5)} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -5 \\ g(x) = 3(2x+9) \end{cases}$$

Odpowiedzi:

m ma 2 rozwiązania, dla
$m \in (-\infty, -3)$

m ma 1 rozwiązanie, dla
$m \in \{-3\}$

m ma 0 rozwiązań, dla
$m \in (-3, +\infty)$

KARTA PRACY

Numer kodowy: | 1 | 4 | 5 | 3 |

Przedmiot: matematyka

Zadanie nr 5.

$x^2 - y^2 = 25$

$H = \{(5,0), (-5,0), (13,12), (-13,12), (13,-12), (-13,-12)\}$

$$\begin{cases} (5-a)^2 + (-b)^2 = r^2 \\ (-5-a)^2 + (-b)^2 = r^2 \\ (13-a)^2 + (12-b)^2 = r^2 \\ (-13-a)^2 + (12-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 - 10a + a^2 + b^2 = 169 - 26a + a^2 + 144 - 24b + b^2 \ /-a^2 - b^2 + 26a + 24b - 25 \\ 25 + 10a + a^2 + b^2 = 169 + 26a + a^2 + 144 - 24b + b^2 \ /-a^2 - b^2 - 26a + 24b - 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16a + 24b = 288 \\ -16a + 24b = 288 \end{cases}$$

$32a = 0 \ /:32$

$a = 0$

$24b = 288 \ /:24$

$b = 12$

$x^2 + (y-12)^2 = r^2$

$5^2 + (-12)^2 = r^2$

$r^2 = 25 + 144 = 169$

$x^2 + (y-12)^2 = 169$

KARTA PRACY

Numer kodowy: 1 4 5 3

Przedmiot: matematyka

Zadanie nr 5
ciąg dalszy.

$$\begin{cases}(5-a)^2+(-b)^2=r^2\\(-5-a)^2+(-b^2)=r^2\\(13-a)^2+(-12-b)^2=r^2\\(-13-a)^2+(-12-b)^2=r^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}25-10a+a^2+b^2=169-26a+a^2+144+24b+b^2 \quad /-a^2-b^2+26a-24b-25\\25+10a+a^2+b^2=169+26a+a^2+144+24b+b^2/-a^2-b^2-26a-24b-25\end{cases}$$

$$\begin{cases}16a-24b=288\\-16a-24b=288\end{cases}$$

$-$

$32a=0 \quad /:32$

$a=0$

$-24b=288 \quad /:-24$

$b=-12$

$x^2+(y+12)^2=169$

Odpowiedzi

Równania okręgów to:

$x^2+(y-12)^2=169$

$x^2+(y+12)^2=169$

KARTA PRACY

Numer kodowy: | 1 | 4 | 5 | 3 |

Przedmiot: matematyka

Zadanie nr 6

$$\begin{cases} 4x+(p+3)y=p-1 \\ (p-1)x+py=p-2 \end{cases}$$

$$Z: \begin{cases} W \neq 0 \\ p \neq -1,\ p \neq 3 \\ p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\} \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} 4 & p+3 \\ p-1 & p \end{vmatrix} = 4p-(p-1)(p+3) = 4p-p^2-2p+3 = -p^2+2p+3 = -(p+1)(p-3)$$

$$W_x = \begin{vmatrix} p-1 & p+3 \\ p-2 & p \end{vmatrix} = p(p-1)-(p-2)(p+3) = p^2-p-p^2-p+6 = -2p+6 = -2(p-3)$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 4 & p-1 \\ p-1 & p-2 \end{vmatrix} = 4p-8-(p-1)^2 = 4p-8-p^2+2p-1 = -p^2+6p-9 = -(p-3)^2$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-2(p-3)}{-(p+1)(p-3)} = \frac{2}{p+1}$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{-(p-3)^2}{-(p+1)(p-3)} = \frac{p-3}{p+1}$$

KARTA PRACY

Numer kodowy: 1 4 5 3

Przedmiot: matematyka

Zadanie nr 6 ciąg dalszy

$Z: p \neq -1$

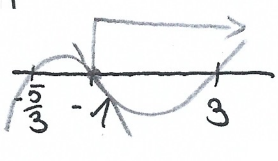
$$\begin{cases} \frac{2}{p+1} \geq 0 \;/\cdot(p+1)^2 \\ \frac{p-3}{p+1} \geq 0 \;/\cdot(p+1)^2 \\ \frac{2}{p+1} + \frac{p-3}{p+1} \leq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{p+1} \geq 0 \\ \frac{p-3}{p+1} < 0 \\ \frac{2}{p+1} - \frac{p-3}{p+1} \leq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{p+1} < 0 \\ \frac{p-3}{p+1} \geq 0 \\ \frac{-2}{p+1} + \frac{p-3}{p+1} \leq 4 \end{cases}$$

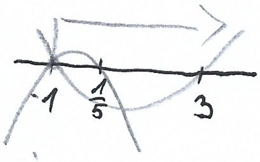
$$\begin{cases} 2(p+1) \geq 0 \\ (p-3)(p+1) \geq 0 \\ \frac{p-1}{p+1} \leq 4 \;/ -4\frac{p+1}{p+1} \end{cases} \quad \begin{cases} 2(p+1) \geq 0 \\ (p-3)(p+1) < 0 \\ \frac{-p+5}{p+1} \leq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(p+1) < 0 \\ (p-3)(p+1) \geq 0 \\ \frac{p-5}{p+1} \leq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2(p+1) < 0 \\ (p-3)(p+1) < 0 \\ \frac{-p+1}{p+1} \leq 4 \end{cases}$$

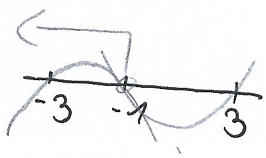
$$\begin{cases} p+1 \geq 0 \\ (p-3)(p+1) \geq 0 \\ \frac{p-1-4(p+1)}{p+1} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p+1 \geq 0 \\ (p-3)(p+1) < 0 \\ \frac{-p+5-4(p+1)}{p+1} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p+1 < 0 \\ (p-3)(p+1) \geq 0 \\ \frac{p-5-4(p+1)}{p+1} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p+1 < 0 \\ (p-3)(p+1) < 0 \\ \frac{-p+1-4(p+1)}{p+1} \leq 0 \end{cases}$$

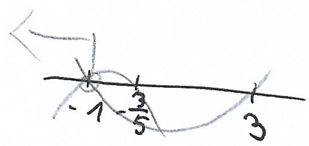
$$\begin{cases} p \geq -1 \\ (p-3)(p+1) \geq 0 \\ \frac{(-3p-5)}{p+1} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p \geq -1 \\ (p-3)(p+1) < 0 \\ \frac{-5p+1}{p+1} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p < -1 \\ (p-3)(p+1) \geq 0 \\ \frac{-3p-9}{p+1} \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p < -1 \\ (p-3)(p+1) < 0 \\ \frac{-5p-3}{p+1} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \geq -1 \\ (p-3)(p+1) \geq 0 \\ -(p+\frac{5}{3})(p+1) \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p \geq -1 \\ (p-3)(p+1) < 0 \\ -5(p-\frac{1}{5})(p+1) \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p < -1 \\ (p-3)p+1) \geq 0 \\ -3(p+3)(p+1) \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p < -1 \\ (p-3)(p+1) < 0 \\ -5(p+\frac{3}{5})(p+1) \leq 0 \end{cases}$$









$$\begin{cases} p \in (-1, +\infty) \\ p \in (-\infty, -1) \cup \langle 3, +\infty) \\ p \in (-\infty, -\frac{5}{3}\rangle \cup (-1, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} p \in (-1, +\infty) \\ p \in (-1, 3) \\ p \in (-\infty, -1) \cup \langle \frac{1}{5}, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} p \in (-\infty, -1) \\ p \in (-\infty, -1) \cup \langle 3, +\infty) \\ p \in (-\infty, -3\rangle \cup (-1, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} p \in (-\infty, -1) \\ p \in (-1, 3) \\ p \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{3}{5}, +\infty) \end{cases}$$

$p \in \langle 3, +\infty)$ $\qquad p \in \langle \frac{1}{5}, 3)$ $\qquad p \in (-\infty, -3\rangle$ $\qquad p \in \emptyset$

$$\begin{cases} p \in \langle 3, +\infty) \\ p \in \langle \frac{1}{5}, 3) \\ p \in (-\infty, -3\rangle \\ p \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow p \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle \frac{1}{5}, +\infty) \qquad \begin{cases} p \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle \frac{1}{5}, +\infty) \\ p \in R \setminus \{-1, 3\} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Odpowiedzi: $p \in (-\infty, -3\rangle \cup \langle \frac{1}{5}, 3) \cup (3, +\infty)$

KARTA PRACY

Numer kodowy: 1 4 5 3

Przedmiot: matematyka

Zadanie nr. 7

A.

$n \geqslant 3$

$(a_1, \dots, a_n)$

$(1, \dots, n)$

n! - ilość wszystkich permutacji

jedyne możliwości monotoniczności w tym ciągu to:

ciąg rosnący

ciąg malejący

Ilość permutacji niebędących ciągami monotonicznymi to $n! - 2$

Odpowiedzi A: $n! - 2$