Fiche d'entrainement : vecteurs

Exercice 1

Dans un repère $\left(O\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$, on donne les points suivants : $A(-2\ ;\ 1)$, $B(0\ ;\ 2)$ et $C(1\ ;\ 0)$.

1) Construire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

2) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

3) Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD}$.

4) Les points E, B et C sont-ils alignés ? Justifier par un calcul.

5) On donne le point $F(5\ ;\ y_F)$. Déterminer y_F sachant que les droites (AC) et (EF) sont parallèles.

6) On donne le point $G(4\ ;\ 4)$. $ADGE$ est-il un parallélogramme ? Justifier par un calcul.

7) Déterminer les coordonnées du point H défini par $\overrightarrow{AH} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Exercice 2

Dans un repère $\left(O\,;\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$, on donne les points suivants : $A(-2\ ;\ 2)$, $B(0\ ;\ 1)$, $C(6\ ;\ -2)$, $D(-3\ ;\ 0)$, $E(1\ ;\ -2)$, $F(4\ ;\ 2)$ et $G(2\ ;\ 3)$.

1) Les points A, B et C sont-ils alignés ?

2) Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

3) Les points D, B et F sont-ils alignés ?

4) $ABFG$ est-il un parallélogramme ?

5) Les droites (GF) et (DC) sont-elles parallèles ?

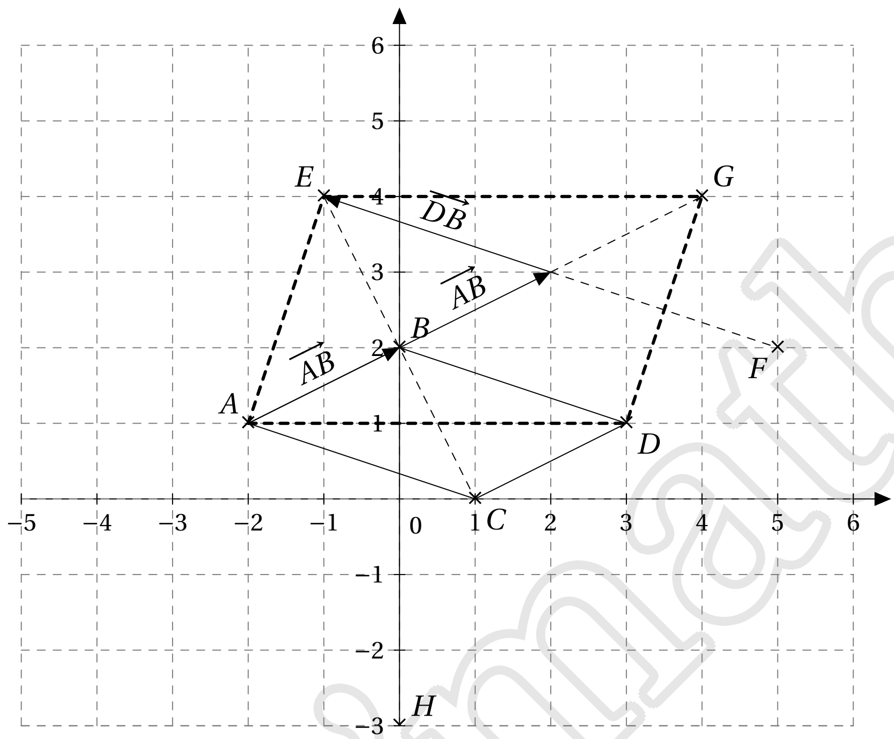
6) $DEFG$ est-il un parallélogramme ?

7) Déterminer x_H pour que le point les points A, G et H soient alignés sachant que $H(x_H\ ;\ 4)$.

Correction

Exercice 1

1) Figure :



2) $ABDC$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc on obtient
$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D - 0 \end{pmatrix}$ et donc $x_D = 2+1 = 3$ et $y_D = 1$.

3) Comme $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD}$ alors on obtient $\begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{pmatrix} x_E + 2 \\ y_E - 1 \end{pmatrix} =$
$2\begin{pmatrix} 0+2 \\ 2-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3-0 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2 - 3 \\ 2\times 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et donc $x_E = 1-2 = -1$ et $y_E = 3+1 = 4$.

4) on a $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} xB - x_E \\ y_B - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} x_C - x_E \\ y_C - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
$\det\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 1\times(-4) - 2\times(-2) = -4+4 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires donc les points E, B et C sont alignés.

5) On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+1 \\ y_F - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ y_F - 4 \end{pmatrix}$.
Si les droites sont parallèles alors le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ est nul :
$\det\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EF}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & y_F - 4 \end{vmatrix} = 3\times(y_F - 4) - 6\times(-1) = 0$ et donc $3y_F - 12 + 6 = 0$ et donc $3y_F = 6$ et donc $y_F = \dfrac{6}{3} = 2$.

6) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} x_G - x_E \\ y_G - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EG}$ et donc $ADGE$ est un parallélogramme.

7) On a $\overrightarrow{AH} - 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$ donc on obtient $\begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc
$\begin{pmatrix} x_H + 2 \\ y_H - 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} x_H + 2 - 2 \\ y_H - 1 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $x_H = 0$ et $y_H = -3$.

Exercice 2

1) oui : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}$

2) oui : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

3) non : $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$

4) oui : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

5) non : $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix}$

6) non : $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

7) On a $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}x_G-x_A\\y_G-y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+2\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x_H-x_A\\y_H-y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_H+2\\4-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_H+2\\2\end{pmatrix}$.

Si les points sont alignés alors le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AH}$ est nul :

$\det\left(\overrightarrow{AG}\,,\ \overrightarrow{AH}\right) = \begin{vmatrix}4 & x_H+2\\1 & 2\end{vmatrix} = 1\times(x_H+2)-4\times 2 = 0$ et donc $x_H+2-8=0$ et donc $x_H=6$.