Fiche d'entraînement sur les inéquations

Exercice 1 : Inéquations « classiques »
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(3x-1)(-2x+6) \leqslant 0$

2) $(3+6x)(5x+5) \geqslant 0$

3) $\dfrac{2x+6}{(-5x-5)(-3x+12)} \leqslant 0$

4) $(x-2)(-2x+4) \geqslant 0$

5) $\dfrac{2x-6}{-x+3} \leqslant 0$

6) $\dfrac{3x-10}{2x+4} \leqslant 2$

Exercice 2 : Intersections et réunions
Déterminer l'intersection et la réunion des intervalles suivants :

1) $I = [-5\,;\,1[$ et $J =]0\,;\,4]$

2) $I =]-\infty\,;\,2]$ et $J = [2\,;\,7[$

3) $I = [-5\,;\,2]$ et $J =]2\,;\,+\infty[$

Exercice 3 : Systèmes
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'inéquations suivants :

1) $\begin{cases} 2x-4 \geqslant -3 \\ \quad et \\ -3x+20 > 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -4x-8 \geqslant -3 \\ \quad ou \\ 2x+5 > 1 \end{cases}$

Exercice 4 : Choisir la bonne forme
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-7)(x-3)$.

1) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = x^2 - 10x + 21 = (x-5)^2 - 4$.

2) Résoudre chacune des inéquations suivantes en choisissant l'expression de $f(x)$ la mieux adaptée :

- **a)** $f(x) \leqslant 0$
- **b)** $f(x) \leqslant 12$
- **c)** $f(x) \leqslant x^2 + 1$

Exercice 5 : Inéquations « plus compliquées »
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(4x-8)(-2x+1) - (4x-8)(-3x+5) \geqslant 0$

2) $9x^2 - 49 \leqslant 0$

3) $(2x+1)^2 - (3x-5)^2 \geqslant 0$

4) $\dfrac{2x-5}{x^2-1} \leqslant 0$

Correction

Exercice 1 :

1)

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x-1)(-2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{3}\right] \cup [3\,;\,+\infty[$$

2)

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3+6x$		$-$		$-$	0	$+$	
$5x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3+6x)(5x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S =]-\infty\,;\,-1] \cup \left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$$

3)

x	$-\infty$		-3		-1		4		$+\infty$
$2x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-5x-5$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$-3x+12$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x+6}{(-5x-5)(-3x+12)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

$$S =]-\infty\,;\,-3] \cup]-1\,;\,4[$$

4)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$-2x+4$		$+$	0	$-$	
$(x-2)(-2x+4)$		$-$	0	$-$	

$$S = \{2\}$$

5)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$	0	$+$	
$-x+3$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x-6}{-x+3}$		$-$	$\Vert$	$-$	

$$S =]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[=\mathbb{R}\setminus\{3\}$$

6) $\dfrac{3x-10}{2x+4}\leqslant 2$ donc $\dfrac{3x-10}{2x+4}-2\leqslant 0$ donc $\dfrac{3x-10}{2x+4}-\dfrac{2\times(2x+4)}{2x+4}\leqslant 0$ donc $\dfrac{3x-10-4x-8}{2x+4}\leqslant 0$

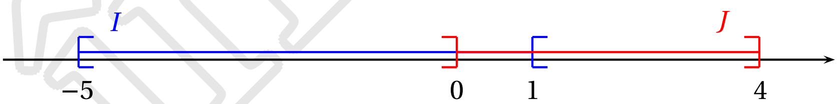
donc $\dfrac{-x-18}{2x+4}\leqslant 0$

x	$-\infty$		-18		-2		$+\infty$
$-x-18$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x+4$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-x-18}{2x+4}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

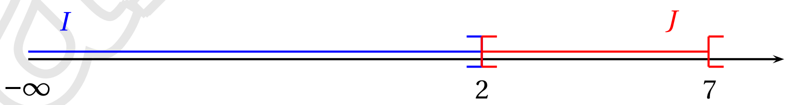
$$S =]-\infty\,;\,-18]\cup]-2\,;\,+\infty[$$

<u>Exercice 2 :</u>

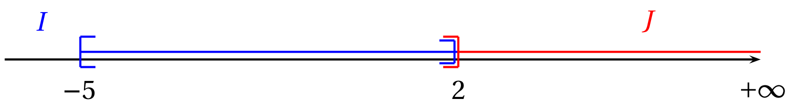
1) $I\cap J =]0\,;\,1[$
$I\cup J = [-5\,;\,4]$



2) $I\cap J = \{2\}$
$I\cup J =]-\infty\,;\,7[$

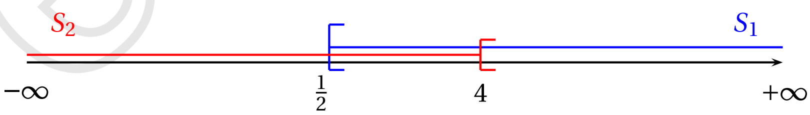


3) $I\cap J = \varnothing$
$I\cup J = [-5\,;\,+\infty[$

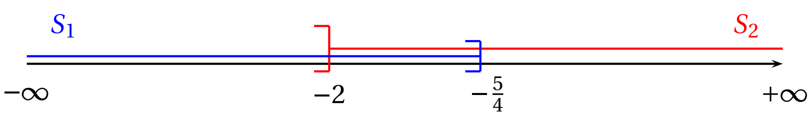


<u>Exercice 3 :</u>

1) $S_1=\left[\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ et $S_2=]-\infty\,;\,4[$ donc $S=S_1\cap S_2=\left[\dfrac{1}{2}\,;\,4\right[$



2) $S_1=\left]-\infty\,;\,-\dfrac{5}{4}\right]$ et $S_2=]-2\,;\,+\infty[$ donc $S=S_1\cup S_2=]-\infty\,;\,+\infty[=\mathbb{R}$



Exercice 4 :

1)
- $f(x) = (x-7)(x-3) = x^2 - 3x - 7x + 21 = x^2 - 10x + 21$
- $(x-5)^2 - 4 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 - 4 = x^2 - 10x + 25 - 4 = x^2 - 10x + 21$

Donc, au final, $f(x) = (x-7)(x-3) = x^2 - 10x + 21 = (x-5)^2 - 4$

2) **a)** On utilise la forme $f(x) = (x-7)(x-3)$:

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-7)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = [3\,;\,7]$

b) On utilise la forme $f(x) = (x-5)^2 - 4$:
$(x-5)^2 - 4 \leqslant 12$ donc $(x-5)^2 - 4 - 12 \leqslant 0$ donc $(x-5)^2 - 16 \leqslant 0$ donc $(x-5)^2 - 4^2 \leqslant 0$ donc $(x-5+4)(x-5-4) \leqslant 0$ donc $(x-1)(x-9) \leqslant 0$:

x	$-\infty$		1		9		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-9)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = [1\,;\,9]$

c) On utilise la forme $f(x) = x^2 - 10x + 21$:
$x^2 - 10x + 21 \leqslant x^2 + 1$ donc $x^2 - 10x + 21 - x^2 - 1 \leqslant 0$ donc $-10x + 20 \leqslant 0$ donc $-10x \leqslant -20$ donc $x \geqslant 2$ et donc $S = [2\,;\,+\infty[$.

Exercice 5 :

1) On factorise par $(4x-8)$ et on obtient :
$(4x-8)[(-2x+1)-(-3x+5)] \geqslant 0$ donc $(4x-8)(-2x+1+3x-5) \geqslant 0$ donc $(4x-8)(x-4) \geqslant 0$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$4x-8$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$(4x-8)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;\,2] \cup [4\,;\,+\infty[$

2) $9x^2-49 \leqslant 0$ donc $(3x)^2-7^2 \leqslant 0$ donc $(3x-7)(3x+7) \leqslant 0$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$3x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-7)(3x-7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S=\left[-\frac{7}{3}\ ;\ \frac{7}{3}\right]$$

3) $(2x+1)^2-(3x-5)^2 \geqslant 0$ donc $[(2x+1)+(3x-5)]\times[(2x+1)-(3x-5)] \geqslant 0$ donc $(2x+1+3x-5)(2x+1-3x+5) \geqslant 0$ donc $(5x-4)(-x+6) \geqslant 0$

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		6		$+\infty$
$5x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$(5x-4)(-x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S=\left[\frac{4}{5}\ ;\ 6\right]$$

4) $\dfrac{2x-5}{x^2-1} \leqslant 0$ donc $\dfrac{2x-5}{x^2-1^2} \leqslant 0$ donc $\dfrac{2x-5}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0$

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{2x-5}{(x-1)(x+1)}$		$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	

$$S=\left]-\infty\ ;\ -1\right[\cup\left]1\ ;\ \frac{5}{2}\right]$$