Fiche d'exercices projeté orthogonal, trigonométrie

Exercice 1 :
Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$ on donne les points $A(4\,;\,2)$, $B(-2\,;\,1)$ et $C(3\,;\,-4)$.

1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

2) Déterminer la nature du triangle ABC.

3) Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
Déterminer les coordonnées de H.

4) Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au dixième de degré près.

5) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

6) Déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 2 :
Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$ on donne les points $A(-6\,;\,1)$, $B(-3\,;\,4)$ et $C(-1\,;\,-4)$.

1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

2) Déterminer la nature du triangle ABC.

3) Déterminer l'aire du triangle ABC.

4) **a)** Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au dixième de degré près.
b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BCA}$.

5) Soit K le milieu du segment $[BC]$.

a) Déterminer les coordonnées de K.
b) Déterminer les coordonnées du point D symétrique du point A par rapport au point K.
c) Déterminer la nature du quadrilatère $ABDC$.

Exercice 3 :
Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,\,J)$ on donne les points $A(-1\,;\,2)$, $B(3\,;\,4)$ et $C(1\,;\,0)$.

1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure de l'exercice.

2) Déterminer la nature du triangle ABC.

3) Soit H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).
Déterminer les coordonnées du point H.

4) Déterminer une mesure de chacun des angles du triangle ABC (arrondir les résultats au dixième de degré près).

5) Déterminer les coordonnées du point D symétrique du point B par rapport au point H.

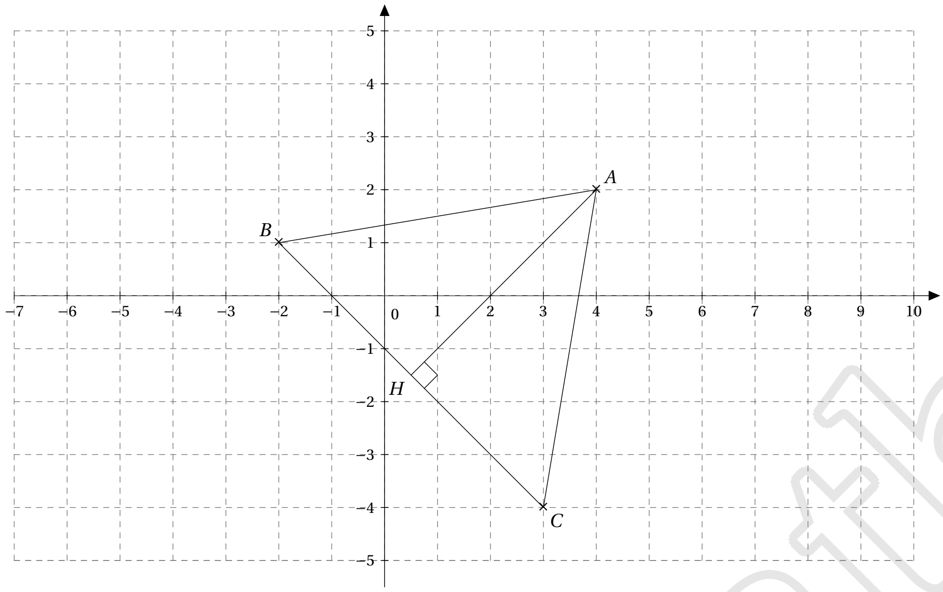
6) Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

7) Déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

Solutions

Exercice 1 :

1)



2) $AB = \sqrt{37}$, $AC = \sqrt{37}$ et $BC = \sqrt{50}$ donc ABC est isocèle en A.
$BC^2 = 50$ et $AB^2 + BC^2 = 37 + 37 = 74 \neq 50$ donc, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

3) Le triangle ABC est isocèle en A donc la hauteur (AH) est également médiane donc H sera le milieu du segment $[BC]$ donc $H\left(\dfrac{x_B + x_C}{2}\ ;\ \dfrac{y_B + y_C}{2}\right)$ donc $H(0,5\ ;\ -1,5)$.

4) Dans le triangle ABH rectangle en H on a : $AB = \sqrt{37}$, $BH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{50}}{2}$ donc

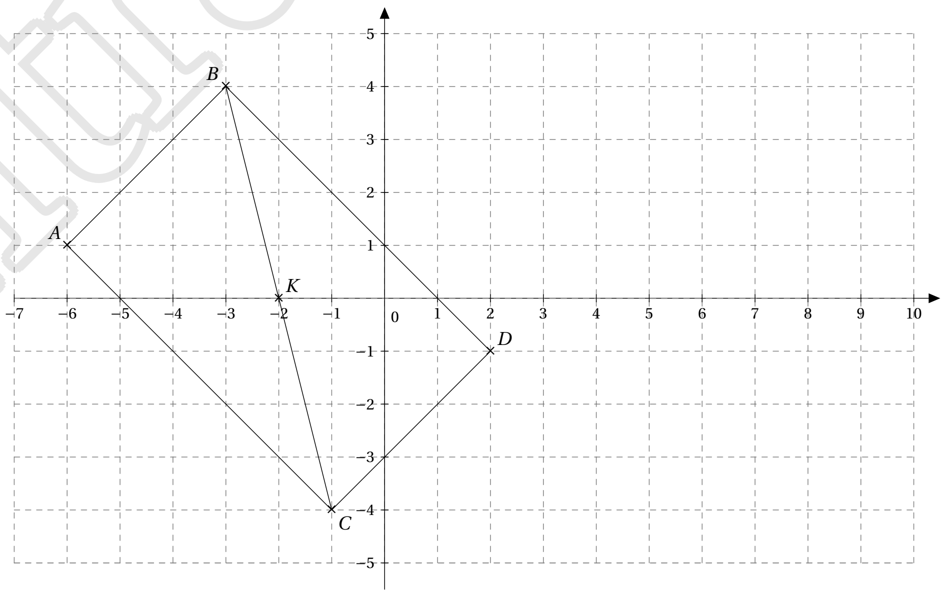
$$\widehat{ABC} = \widehat{ABH} = \cos^{-1}\left(\frac{BH}{AB}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{50}}{2}}{\sqrt{37}}\right) \approx 54,5°.$$

5) Dans un triangle, la somme des angles est égale à 180° donc $\widehat{BAC} = 180 - \widehat{ABC} - \widehat{ACB}$ mais comme ABC est isocèle en A alors $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} \approx 54,5°$ et donc $\widehat{BAC} \approx 180 - 2 \times 54,5 \approx 71°$.

6) $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{BC \times AH}{2} = \dfrac{\sqrt{50} \times \sqrt{24,5}}{2} = 17,5 \text{ cm}^2$.

Exercice 2 :

1)



2) $AB = \sqrt{18}$, $AC = \sqrt{50}$ et $BC = \sqrt{68}$.
$BC^2 = 68$ et $AB^2 + AC^2 = 18 + 50 = 68$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A (car $BC^2 = AB^2 + AC^2$).

3) $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{\sqrt{18} \times \sqrt{50}}{2} = 15 \text{ cm}^2$.

4) **a)** Dans le triangle ABC rectangle en A on a : $AC = \sqrt{50}$ et $BC = \sqrt{68}$ donc
$\widehat{ABC} = \sin^{-1}\left(\dfrac{AC}{BC}\right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{68}}\right) \approx 59°$.

b) Dans un triangle la somme des angles est égale à 180° donc $\widehat{BCA} = 180 - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} \approx 180 - 90 - 59 \approx 31°$.

5) **a)** $K\left(\dfrac{x_B + x_C}{2}\ ;\ \dfrac{y_B + y_C}{2}\right)$ donc $K(-2\ ;\ 0)$.

b) Si D est le symétrique de A par rapport à K alors K est le milieu de $[AD]$ donc :

$K\left(\dfrac{x_A + x_D}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_D}{2}\right)$ donc $K\left(\dfrac{-6 + x_D}{2}\ ;\ \dfrac{1 + y_D}{2}\right)$. Or $K(-2\ ;\ 0)$ donc on obtient les équations :

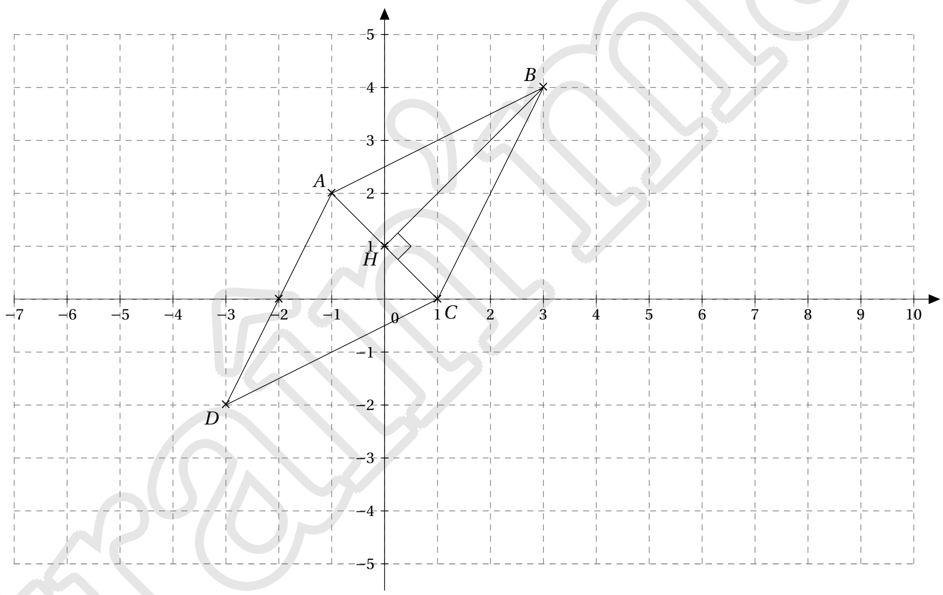
$\dfrac{-6 + x_D}{2} = -2$ et $\dfrac{1 + y_D}{2} = 0$ donc, à l'aide de produits en croix :

$-6 + x_D = -2 \times 2 = -4$ et $1 + y_D = 0 \times 2 = 0$ donc
$x_D = -4 + 6 = 2$ et $y_D = 0 - 1 = -1$ donc $D(2\ ;\ -1)$.

c)
- K est le milieu des diagonales $[BC]$ et $[AD]$ (questions précédentes) donc $ABDC$ est un parallélogramme.
- $ABDC$ est un parallélogramme qui possède un angle droit en A donc c'est un rectangle.
- $ABDC$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs qui ne sont pas de la même longueur donc ce n'est pas un losange (donc ce n'est pas un carré).

Exercice 3 :

1)



2) $AB = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{8}$ et $BC = \sqrt{20}$ donc ABC est isocèle en B
$AB^2 = 20$ et $BC^2 + AC^2 = 20 + 8 = 28$ donc $AB^2 \neq BC^2 + AC^2$ donc, d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

3) Dans le triangle ABC isocèle en B, la hauteur (BH) est aussi la médiane issue de B donc H est le milieu de $[AC]$ donc :

$H\left(\dfrac{x_A + x_C}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_c}{2}\right)$ donc $H(0\ ;\ 1)$.

4)
- Dans le triangle ABH rectangle en H on a $AB = \sqrt{20}$ et $AH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{8}}{2}$ donc

  $\widehat{BAH} = \widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{AH}{AB}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{\frac{\sqrt{8}}{2}}{\sqrt{20}}\right) \approx 71{,}6°$.

- Dans un triangle la somme des angles est égale à 180° donc $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{BAC} - \widehat{BCA}$ mais comme ABC est isocèle en B alors $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} \approx 71{,}6°$ donc $\widehat{ABC} \approx 180 - 2 \times 71{,}6 \approx 36{,}8°$.

5) Si D est le symétrique de B par rapport à H alors H est le milieu de $[BD]$ donc :

$H\left(\dfrac{x_B + x_D}{2}\ ;\ \dfrac{y_B + y_D}{2}\right)$ donc $H\left(\dfrac{3 + x_D}{2}\ ;\ \dfrac{4 + y_D}{2}\right)$. Or $H(0\ ;\ 1)$ donc on obtient les équations :

$\dfrac{3+x_D}{2}=0$ et $\dfrac{4+y_D}{2}=1$ donc, à l'aide de produits en croix :
$3+x_D=2\times 0=0$ et $4+y_D=2\times 1=2$ donc
$x_D=0-3=-3$ et $y_D=2-4=-2$ donc $D(-3\;;\;-2)$.

6)
- H est le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ (questions précédentes) donc $ABCD$ est un parallélogramme .
- $ABCD$ est un parallélogramme qui ne possède pas d'angle droit en B donc ce n'est pas un rectangle (donc ce n'est pas un carré).
- $ABCD$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur (AB et BC) donc c'est un losange.