Fiche d'entraînement : variations de fonctions (par calculs)

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$

1) Sur $]-\infty\,;\,3]$:

- **a)** Montrer que $f(a) - f(b) = (a-b)\,[2(a+b) - 12]$.
- **b)** Étudier le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,3]$.

2) Sur $[3\,;\,+\infty[$:

- **a)** Montrer que la forme canonique de f est $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$.
- **b)** Étudier le sens de variation de f sur $[3\,;\,+\infty[$.

3) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 - 24x - 43$

1) Sur $[-4\,;\,+\infty[$:

- **a)** Montrer que $f(a) - f(b) = (a-b)\,[-3(a+b) - 24]$.
- **b)** Étudier le sens de variation de f sur $[-4\,;\,+\infty[$.

2) Sur $]-\infty\,;\,-4]$:

- **a)** Montrer que la forme canonique de f est $f(x) = -3(x+4)^2 + 5$.
- **b)** Étudier le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,-4]$.

3) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 4x$

1) Sur $]-\infty\,;\,-1]$:

- **a)** Montrer que $f(a) - f(b) = (a-b)\,[-2(a+b) - 4]$.
- **b)** Étudier le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,-1]$.

2) Sur $[-1\,;\,+\infty[$:

- **a)** Montrer que la forme canonique de f est $f(x) = -2(x+1)^2 + 2$.
- **b)** Étudier le sens de variation de f sur $[-1\,;\,+\infty[$.

3) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 60x + 149$

1) Sur $[5\,;\,+\infty[$:

- **a)** Montrer que $f(a) - f(b) = (a-b)\,[6(a+b) - 60]$.
- **b)** Étudier le sens de variation de f sur $[5\,;\,+\infty[$.

2) Sur $]-\infty\,;\,5]$:

- **a)** Montrer que la forme canonique de f est $f(x) = 6(x-5)^2 - 1$.
- **b)** Étudier le sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,5]$.

3) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Solutions

Exercice 1

1) **a)** $f(a)-f(b)=2a^2-12a+22-\left(2b^2-12b+22\right)=2a^2-2b^2-12a+12b=2(a^2-b^2)-12(a-b)$
$f(a)-f(b)=2(a+b)(a-b)-12(a-b)=(a-b)\,[2(a+b)-12]$

b) Soient a et b deux réels appartenant à $]-\infty\,;\,3]$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=\underbrace{\underbrace{(a-b)}_{-\text{ car } a<b}\quad\underbrace{[2(a+b)-12]}_{\substack{\left.\begin{array}{l}a<3\\ b<3\end{array}\right\}\text{ donc } a+b<6\\ \text{et donc } 2(a+b)<12\\ \underbrace{\text{donc } 2(a+b)-12<0}_{-}}}}_{+}$$

Donc $f(a)-f(b)>0$ donc $f(a)>f(b)$ et donc f est décroissante sur $]-\infty\,;\,3]$.

2) **a)** $f(x)=2x^2-12x+22=2(x^2-6x)+22=2(x^2-6x+9-9)+22=2\left[(x-3)^2-9\right]+22$
$f(x)=2(x-3)^2-18+22=2(x-3)^2+4$

b) Soient a et b deux réels appartenant à $[3\,;\,+\infty[$ tels que $a<b$:
$3\leqslant a<b$ donc
$0\leqslant a-3<b-3$ (on soustrait 3) donc
$0\leqslant (a-3)^2<(b-3)^2$ (on passe au carré avec des nombres positifs) donc
$0\leqslant 2(a-3)^2<2(b-3)^2$ (on multiplie par 2) donc
$4\leqslant \underbrace{2(a-3)^2+4}_{f(a)}<\underbrace{2(b-3)^2+4}_{f(b)}$ (on ajoute 4)
Donc $f(a)<f(b)$ et donc $f(a)<f(b)$ et donc f est croissante sur $[3\,;\,+\infty[$.

3)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	4	↗	

Exercice 2

1) **a)** $f(a)-f(b)=-3a^2-24a-43-\left(-3b^2-24b-43\right)=-3a^2+3b^2-24a+24b$
$f(a)-f(b)=-3(a^2-b^2)-24(a-b)=-3(a+b)(a-b)-24(a-b)=(a-b)\,[-3(a+b)-24]$

b) Soient a et b deux réels appartenant à $[-4\,;\,+\infty[$ tels que $a<b$:

$$f(a)-f(b)=\underbrace{\underbrace{(a-b)}_{-\text{ car } a<b}\quad\underbrace{[-3(a+b)-24]}_{\substack{\left.\begin{array}{l}a>-4\\ b>-4\end{array}\right\}\text{ donc } a+b>-8\\ \text{et donc } -3(a+b)<24\\ \underbrace{\text{donc } -3(a+b)-24<0}_{-}}}}_{+}$$

Donc $f(a)-f(b)>0$ donc $f(a)>f(b)$ et donc f est décroissante sur $[-4\,;\,+\infty[$.

2) **a)** $f(x)=-3x^2-24x-43=-3(x^2+8x)-43=-3(x^2+8x+16-16)-43$
$f(x)=-3\left[(x+4)^2-16\right]-43=-3(x+4)^2+48-43=-3(x+4)^2+5$

b) Soient a et b deux réels appartenant à $]-\infty\,;\,-4]$ tels que $a<b$:
$a<b\leqslant -4$ donc
$a+4<b+4\leqslant 0$ (on ajoute 4) donc
$(a+4)^2>(b+4)^2\geqslant 0$ (on passe au carré avec des nombres négatifs) donc

$-3(a+4)^2 < -3(b+4)^2 \leqslant 0$ (on multiplie par -3) donc
$\underbrace{-3(a+4)^2+5}_{f(a)} < \underbrace{-3(b+4)^2+5}_{f(b)} \leqslant 5$ (on ajoute 5)
Donc $f(a) < f(b)$ et donc $f(a) < f(b)$ et donc f est croissante sur $]-\infty\,;\,-4]$.

3)

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$

Exercice 3

1) **a)** $f(a)-f(b) = -2a^2-4a-\left(-2b^2-4b\right) = -2a^2+2b^2-4a+4b = -2(a^2-b^2)-4(a-b)$
$f(a)-f(b) = -2(a+b)(a-b)-4(a-b) = (a-b)\,[-2(a+b)-4]$

b) Soient a et b deux réels appartenant à $]-\infty\,;\,-1]$ tels que $a < b$:

$$f(a)-f(b) = \underbrace{\underbrace{(a-b)}_{-\text{ car } a<b}\quad \underbrace{\underbrace{[-2(a+b)-4]}_{\left.\begin{array}{l} a<-1 \\ b<-1 \end{array}\right\}\text{ donc } a+b<-2 \text{ et donc } -2(a+b)>4 \text{ donc } -2(a+b)-4>0}}_{+}}_{-}$$

Donc $f(a)-f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$ et donc f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$.

2) **a)** $f(x) = -2x^2-4x = -2(x^2+2x) = -2(x^2+2x+1-1) = -2\left[(x+1)^2-1\right] = -2(x+1)^2+2$

b) Soient a et b deux réels appartenant à $[-1\,;\,+\infty[$ tels que $a < b$:
$-1 \leqslant a < b$ donc
$0 \leqslant a+1 < b+1$ (on ajoute 1) donc
$0 \leqslant (a+1)^2 < (b+1)^2$ (on passe au carré avec des nombres positifs) donc
$0 \geqslant -2(a+1)^2 > -2(b+1)^2$ (on multiplie par -2) donc
$2 \geqslant \underbrace{-2(a+1)^2+2}_{f(a)} > \underbrace{-2(b+1)^2+2}_{f(b)}$ (on ajoute 2)
Donc $f(a) > f(b)$ et donc $f(a) > f(b)$ et donc f est décroissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.

3)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

Exercice 4

1) **a)** $f(a)-f(b) = 6a^2-60a+149-\left(6b^2-60b+149\right) = 6a^2-6b^2-60a+60b$
$f(a)-f(b) = 6(a^2-b^2)-60(a-b) = 6(a+b)(a-b)-60(a-b) = (a-b)\,[6(a+b)-60]$

b) Soient a et b deux réels appartenant à $[5\,;\,+\infty[$ tels que $a < b$:

$$f(a)-f(b) = \underbrace{\underbrace{(a-b)}_{-\text{ car } a<b}\quad \underbrace{\underbrace{[6(a+b)-60]}_{\left.\begin{array}{l} a>5 \\ b>5 \end{array}\right\}\text{ donc } a+b>10 \text{ et donc } 6(a+b)>60 \text{ donc } 6(a+b)-60>0}}_{+}}_{-}$$

Donc $f(a)-f(b)<0$ donc $f(a) < f(b)$ et donc f est croissante sur $[5\ ;\ +\infty[$.

2) **a)** $f(x)=6x^2-60x+149=6(x^2-10x)+149=6(x^2-10x+25-25)+149$
$f(x)=6\left[(x-5)^2-25\right]+149=6(x-5)^2-150+149=6(x-5)^2-1$

b) Soient a et b deux réels appartenant à $]-\infty\ ;\ 5]$ tels que $a < b$:
$a<b\leqslant 5$ donc
$a-5<b-5\leqslant 0$ (on soustrait 5) donc
$(a-5)^2>(b-5)^2\geqslant 0$ (on passe au carré avec des nombres négatifs) donc
$6(a-5)^2>6(b-5)^2\geqslant 0$ (on multiplie par 6) donc
$\underbrace{6(a-5)^2-1}_{f(a)}>\underbrace{6(b-5)^2-1}_{f(b)}\geqslant -1$ (on soustrait 1)
Donc $f(a)>f(b)$ et donc $f(a) > f(b)$ et donc f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 5]$.

3)

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗