Fiche d'entraînement : inéquations (divers)

Exercice 1 : sans fractions

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(2x+4)(6x-6)<0$

2) $(3x-12)(-2x+4)\leqslant 0$

3) $(7x-6)(-4-2x)\geqslant 0$

4) $(6-3x)(4x+5)<0$

5) $(2x-4)(x-2)\leqslant 0$

6) $(3x-2)(4x+5)+(3x-2)(x-6)\leqslant 0$

7) $(3x-6)(2x+1)-(3x-6)(4x+7)<0$

8) $(2x+1)^2-(3x-5)^2\geqslant 0$

9) $(4x-5)^2-(-2x+7)^2\leqslant 0$

Solutions

1) $S=\,]-2\,;\,1[$

2) $S=\,]-\infty\,;\,2]\cup[4\,;\,+\infty[$

3) $S=\left[-2\,;\,\dfrac{6}{7}\right]$

4) $S=\left]-\infty\,;\,-\dfrac{5}{4}\right[\cup\,]2\,;\,+\infty[$

5) $S=\{2\}$

6) $S=\left[\dfrac{1}{5}\,;\,\dfrac{2}{3}\right]$

7) $S=\,]-\infty\,;\,-3[\cup]2\,;\,+\infty[$

8) $S=\left[\dfrac{4}{5}\,;\,6\right]$

9) $S=[-1\,;\,2]$

Exercice 2 : avec fractions

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{(2x+5)(5x-4)}{3x-7}\geqslant 0$

2) $\dfrac{(-3x-2)(2x+9)}{-5x+3}\leqslant 0$

3) $\dfrac{6x-2}{(-4x-6)(2x-3)}\geqslant 0$

4) $\dfrac{-4x+1}{(2x-4)(3x+6)}\leqslant 0$

5) $\dfrac{-5x-3}{(7-2x)(4x-8)}\leqslant 0$

6) $\dfrac{8+3x}{(x-5)(3x-1)}\geqslant 0$

7) $\dfrac{3x-5}{(2x+8)(7-2x)}\geqslant 0$

8) $\dfrac{2x+1}{3x-6}\leqslant 3$

9) $\dfrac{3x-5}{2x+4}\geqslant -2$

10) $\dfrac{-2x+4}{4x-4}\leqslant 4$

Solutions

1) $S=\left[-\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{4}{5}\right]\cup\left]\dfrac{7}{3}\,;\,+\infty\right[$

2) $S=\left]-\infty\,;\,-\dfrac{9}{2}\right]\cup\left[-\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{3}{5}\right[$

3) $S=\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[\cup\left[\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$

4) $S=\left]-2\,;\,\dfrac{1}{4}\right]\cup\,]2\,;\,+\infty[$

5) $S=\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{5}\right]\cup\left]2\,;\,\dfrac{7}{2}\right[$

6) $S=\left[-\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right[\cup\,]5\,;\,+\infty[$

7) $S=\,]-\infty\,;\,-4[\cup\left[\dfrac{5}{3}\,;\,\dfrac{7}{2}\right[$

8) $S=\,]-\infty\,;\,2[\cup\left[\dfrac{19}{7}\,;\,+\infty\right[$

9) $S=\,]-\infty\,;\,-2[\cup\left[-\dfrac{3}{7}\,;\,+\infty\right[$

10) $S=\,]-\infty\,;\,1[\cup\left[\dfrac{10}{9}\,;\,+\infty\right[$

Correction

Exercice 1 :

1)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+4)(6x-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-2\,;\,1[$

2)

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$3x-12$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x+4$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x-12)(-2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty\,;\,2] \cup [4\,;\,+\infty[$

3)

x	$-\infty$		-2		$\frac{6}{7}$		$+\infty$
$7x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$-4-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(7x-6)(-4-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \left[-2\,;\,\frac{6}{7}\right]$

4)

x	$-\infty$		$\frac{-5}{4}$		2		$+\infty$
$6-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(6-3x)(4x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty\,;\,-\frac{5}{4}\right[\cup]2\,;\,+\infty[$

5)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$(2x-4)(x-2)$		$+$	0	$+$	

$S = \{2\}$

6) Il faut tout d'abord factoriser l'expression (à l'aide du facteur commun) avant d'utiliser un tableau de signes avec l'expression factorisée :

$\underline{(3x-2)}(4x+5) + \underline{(3x-2)}(x-6) = \underline{(3x-2)}\,[(4x+5)+(x-6)] = (3x-2)(4x+5+x-6) = (3x-2)(5x-1)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$5x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-2)(5x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left[\frac{1}{5}\ ;\ \frac{2}{3}\right]$

7) $\underline{(3x-6)}(2x+1)+\underline{(3x-6)}(4x+7)=\underline{(3x-6)}\,[(2x+1)-(4x+7)]=(3x-6)(2x+1-4x-7)=(3x-6)(-2x--6)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$3x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x-6$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x-6)(-2x-6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=]-\infty\,;\,-3[\cup]2\,;\,+\infty[$

8) On factorise cette fois-ci l'expression en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$:

$$\underbrace{(2x+1)^2}_{a^2}-\underbrace{(3x-5)^2}_{b^2}=\left[\underbrace{(2x+1)}_{a}+\underbrace{(3x-5)}_{b}\right]\times\left[\underbrace{(2x+1)}_{a}-\underbrace{(3x-5)}_{b}\right]=[2x+1+3x-5]\times[2x+1-3x+5]$$
$$=(5x-4)(-x+6).$$

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		6		$+\infty$
$5x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$(5x-4)(-x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=\left[\frac{4}{5}\ ;\ 6\right]$

9) On factorise cette fois-ci l'expression en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$:

$$\underbrace{(4x-5)^2}_{a^2}-\underbrace{(-2x+7)^2}_{b^2}=\left[\underbrace{(4x-5)}_{a}+\underbrace{(-2x+7)}_{b}\right]\times\left[\underbrace{(4x-5)}_{a}-\underbrace{(-2x+7)}_{b}\right]=[4x-5-2x+7]\times[4x-5+2x-7]$$
$$=(2x+2)(6x-12).$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x-12$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+2)(6x-12)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=[-1\ ;\ 2]$

Exercice 2 :

1)

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{(2x+5)(5x-4)}{3x-7}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$S = \left[-\frac{5}{2} ; \frac{4}{5}\right] \cup \left]\frac{7}{3} ; +\infty\right[$

2)

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		$\frac{-2}{3}$		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$-3x-2$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x+9$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-5x+3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{(-3x-2)(2x+9)}{-5x+3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$S = \left]-\infty ; \frac{-9}{2}\right] \cup \left[\frac{-2}{3} ; \frac{3}{5}\right[$

3)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$6x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-4x-6$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{6x-2}{(-4x-6)(2x-3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$S = \left]-\infty ; -\frac{-3}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{3} ; \frac{3}{2}\right[$

4)

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{4}$		2		$+\infty$
$-4x+1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{-4x+1}{(2x-4)(3x+6)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$S = \left]-2 ; -\frac{1}{4}\right] \cup]2 ; +\infty[$

5)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$-5x-3$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$7-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-8$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-5x-3}{(7-2x)(4x-8)}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

$S=\left]-\infty\,;-\frac{-3}{5}\right]\cup\left]2\,;\frac{7}{2}\right[$

6)

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		$\frac{1}{3}$		5		$+\infty$
$8+3x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{8+3x}{(x-5)(3x-1)}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

$S=\left[-\frac{8}{3}\,;\frac{1}{3}\right[\cup]5\,;+\infty[$

7)

x	$-\infty$		-4		$\frac{5}{3}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+8$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$7-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{3x-5}{(2x+8)(7-2x)}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

$S=]-\infty\,;-4[\cup\left[\frac{5}{3}\,;\frac{7}{2}\right[$

8) Pour résoudre $\dfrac{2x+1}{3x-6}\leqslant 3$ il faut d'abord écrire une seule fraction (donc faire « passer le 3 à gauche ») avant de pouvoir créer un tableau de signes :

$\dfrac{2x+1}{3x-6}\leqslant 3$

$\dfrac{2x+1}{3x-6}-3\leqslant 0$

$\dfrac{2x+1}{3x-6}-\dfrac{3\times(3x-6)}{3x-6}\leqslant 0$ (on va mettre les fractions au même dénominateur)

$\dfrac{2x+1-3\times(3x-6)}{3x-6}\leqslant 0$

$\dfrac{2x+1-9x+18}{3x-6}\leqslant 0$

$\dfrac{-7x+19}{3x-6}\leqslant 0$

On peut donc maintenant créer le tableau de signes avec cette expression :

x	$-\infty$		2		$\frac{19}{7}$		$+\infty$
$-7x+19$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x-6$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-7x+19}{3x-6}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty\,;2\right[\cup \left[\frac{19}{7}\,;\,+\infty\right[$

9) Pour résoudre $\dfrac{3x-5}{2x+4} \geqslant -2$ il faut d'abord écrire une seule fraction (donc faire « passer le 3−2 à gauche ») avant de pouvoir créer un tableau de signes :

$\dfrac{3x-5}{2x+4} \geqslant -2$

$\dfrac{3x-5}{2x+4} + 2 \geqslant 0$

$\dfrac{3x-5}{2x+4} + \dfrac{2 \times (2x+4)}{2x+4} \geqslant 0$ (on va mettre les fractions au même dénominateur)

$\dfrac{3x-5+2\times(2x+4)}{2x+4} \geqslant 0$

$\dfrac{3x-5+4x+8}{2x+4} \geqslant 0$

$\dfrac{7x+3}{2x+4} \geqslant 0$

On peut donc maintenant créer le tableau de signes avec cette expression :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{7}$		$+\infty$
$7x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{7x+3}{2x+4}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$S = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left[\frac{-3}{7}\,;\,+\infty\right[$

10) Pour résoudre $\dfrac{-2x+4}{4x-4} \leqslant 4$ il faut d'abord écrire une seule fraction (donc faire « passer le 4 à gauche ») avant de pouvoir créer un tableau de signes :

$\dfrac{-2x+4}{4x-4} \leqslant 4$

$\dfrac{-2x+4}{4x-4} - 4 \leqslant 0$

$\dfrac{-2x+4}{4x-4} - \dfrac{4 \times (4x-4)}{4x-4} \leqslant 0$ (on va mettre les fractions au même dénominateur)

$\dfrac{-2x+4-4\times(4x-4)}{4x-4} \leqslant 0$

$\dfrac{-2x+4-16x+16}{4x-4} \leqslant 0$

$\dfrac{-18x+20}{4x-4} \leqslant 0$

On peut donc maintenant créer le tableau de signes avec cette expression :

x	$-\infty$		1		$\frac{10}{9}$		$+\infty$
$-18x+20$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-18x+20}{4x-4}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$S = \left]-\infty\,;1\right[\cup \left[\frac{10}{9}\,;\,+\infty\right[$