# Fiche d'entraînement : variations de fonctions (par calculs)

### **Exercice 1**

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^2 - 12x + 22$ 

- 1) Sur  $]-\infty$ ; 3]:
  - **a)** Montrer que f(a) f(b) = (a b) [2(a + b) 12].
  - **b)** Étudier le sens de variation de f sur  $]-\infty$ ; 3].
- 2) Sur  $[3; +\infty[:$ 
  - a) Montrer que la forme canonique de f est  $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$ .
  - **b)** Étudier le sens de variation de f sur  $[3; +\infty[$ .
- **3)** Dresser le tableau de variations de f sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exercice 2

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -3x^2 - 24x - 43$ 

- 1) Sur  $[-4; +\infty[:$ 
  - **a)** Montrer que f(a) f(b) = (a b)[-3(a + b) 24].
  - **b)** Étudier le sens de variation de f sur  $[-4; +\infty[$ .
- 2) Sur  $]-\infty$ ; -4]:
  - a) Montrer que la forme canonique de f est  $f(x) = -3(x+4)^2 + 5$ .
  - **b)** Étudier le sens de variation de f sur  $]-\infty$ ; -4].
- 3) Dresser le tableau de variations de f sur  $\mathbb{R}$ .

### **Exercice 3**

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -2x^2 - 4x$ 

- 1) Sur  $]-\infty;-1]:$ 
  - a) Montrer que f(a) f(b) = (a b)[-2(a + b) 4].
  - **b)** Étudier le sens de variation de f sur  $]-\infty$ ; -1].
- 2) Sur  $[-1; +\infty[:$ 
  - a) Montrer que la forme canonique de f est  $f(x) = -2(x+1)^2 + 2$ .
  - **b)** Étudier le sens de variation de f sur  $[-1; +\infty[$ .
- **3)** Dresser le tableau de variations de f sur  $\mathbb{R}$ .

# **Exercice 4**

Soit *f* la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 6x^2 - 60x + 149$ 

- 1) Sur  $[5; +\infty[:$ 
  - a) Montrer que f(a) f(b) = (a b) [6(a + b) 60].
  - **b)** Étudier le sens de variation de f sur  $[5; +\infty[$ .
- **2)** Sur  $]-\infty$ ; 5]:
  - a) Montrer que la forme canonique de f est  $f(x) = 6(x-5)^2 1$ .
  - **b)** Étudier le sens de variation de f sur  $]-\infty$ ; 5].
- **3)** Dresser le tableau de variations de f sur  $\mathbb{R}$ .

# **Solutions**

## Exercice 1

- a)  $f(a) f(b) = 2a^2 12a + 22 (2b^2 12b + 22) = 2a^2 2b^2 12a + 12b = 2(a^2 b^2) 12(a b)$ 1) f(a) - f(b) = 2(a+b)(a-b) - 12(a-b) = (a-b)[2(a+b) - 12]
  - **b)** Soient a et b deux réels appartenant à  $]-\infty$ ; 3] tels que

$$f(a) - f(b) = \underbrace{(a - b)}_{\text{car } a < b} \underbrace{ \begin{bmatrix} 2(a + b) - 12 \end{bmatrix}}_{a < 3}$$

$$b < 3$$

$$\text{et donc } 2(a + b) < 12$$

$$\text{donc } 2(a + b) - 12 < 0$$

$$\underbrace{ \begin{bmatrix} 2(a + b) - 12 \end{bmatrix}}_{\text{cond}}$$

Donc f(a) - f(b) > 0 donc f(a) > f(b) et donc f est décroissante sur  $] - \infty$ ; 3].

- a)  $f(x) = 2x^2 12x + 22 = 2(x^2 6x) + 22 = 2(x^2 6x + 9 9) + 22 = 2[(x 3)^2 9] + 22$ 2)  $f(x) = 2(x-3)^2 - 18 + 22 = 2(x-3)^2 + 4$ 
  - **b)** Soient a et b deux réels appartenant à [3;  $+\infty$ [ tels que a < b:

 $3 \le a < b \text{ donc}$ 

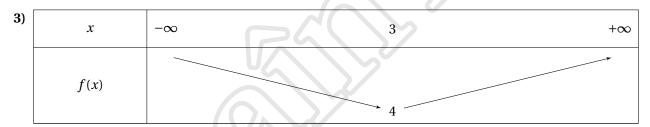
 $0 \le a - 3 < b - 3$  (on soustrait 3) donc

 $0 \le (a-3)^2 < (b-3)^2$  (on passe au carré avec des nombres positifs) donc

 $0 \le 2(a-3)^2 < 2(b-3)^2$  (on multiplie par 2) donc

$$4 \le \underbrace{2(a-3)^2 + 4}_{f(a)} < \underbrace{2(b-3)^2 + 4}_{f(b)}$$
 (on ajoute 4)

Donc f(a) < f(b) et donc f(a) < f(b) et donc f est croissante sur  $[3; +\infty[$ .



# **Exercice 2**

- a)  $f(a) f(b) = -3a^2 24a 43 (-3b^2 24b 43) = -3a^2 + 3b^2 24a + 24b$  $f(a) - f(b) = -3(a^2 - b^2) - 24(a - b) = -3(a + b)(a - b) - 24(a - b) = (a - b)[-3(a + b) - 24]$ 
  - **b)** Soient a et b deux réels appartenant à  $[-4; +\infty[$  tels que (a(<

$$f(a) - f(b) = \underbrace{(a - b)}_{\text{car } a < b} \underbrace{\begin{bmatrix} -3(a + b) - 24 \end{bmatrix}}_{\text{a} > -4}$$

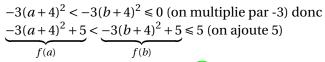
$$\underbrace{\begin{array}{c} a > -4 \\ b > -4 \\ \end{array}}_{\text{et donc } -3(a + b) < 24}$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} \text{donc } -3(a + b) < 24 \\ \text{donc } -3(a + b) - 24 < 0 \\ \end{array}}_{\text{(+)}}$$

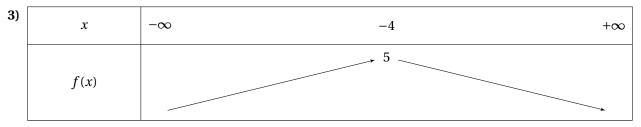
Donc f(a) - f(b) > 0 donc f(a) (>) f(b) et donc f est décroissante sur  $[-4; +\infty[$ .

- a)  $f(x) = -3x^2 24x 43 = -3(x^2 + 8x) 43 = -3(x^2 + 8x + 16 16) 43$ 2)  $f(x) = -3[(x+4)^2 - 16] - 43 = -3(x+4)^2 + 48 - 43 = -3(x+4)^2 + 5$ 
  - **b)** Soient a et b deux réels appartenant à  $]-\infty$ ; -4] tels que a(<)b:  $a < b \le -4$  donc  $a+4 < b+4 \le 0$  (on ajoute 4) donc

 $(a+4)^2 > (b+4)^2 \ge 0$  (on passe au carré avec des nombres négatifs) donc



Donc f(a) < f(b) et donc f(a) < f(b) et donc f est croissante sur  $]-\infty$ ; -4].



#### **Exercice 3**

1) **a)** 
$$f(a) - f(b) = -2a^2 - 4a - (-2b^2 - 4b) = -2a^2 + 2b^2 - 4a + 4b = -2(a^2 - b^2) - 4(a - b)$$
  
 $f(a) - f(b) = -2(a + b)(a - b) - 4(a - b) = (a - b)[-2(a + b) - 4]$ 

**b)** Soient 
$$a$$
 et  $b$  deux réels appartenant à  $]-\infty;-1]$  tels que  $a < b$ 

$$f(a) - f(b) = \underbrace{(a - b)}_{\text{car } a < b} \underbrace{\begin{bmatrix} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{a < -1}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

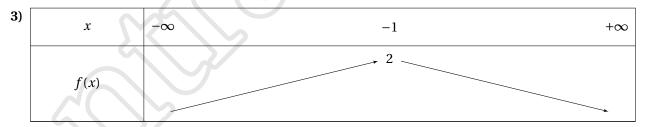
$$\underbrace{\begin{cases} -2(a + b) - 4 \end{bmatrix}}_{\text{donc } a + b < -2}$$

Donc f(a) - f(b) < 0 donc f(a) < f(b) et donc f(a) est croissante sur  $[-\infty; -1]$ .

2) a) 
$$f(x) = -2x^2 - 4x = -2(x^2 + 2x) = -2(x^2 + 2x + 1 - 1) = -2[(x + 1)^2 - 1] = -2(x + 1)^2 + 2$$

- **b)** Soient a et b deux réels appartenant à  $[-1; +\infty[$  tels que a < b:
  - $-1 \le a < b \text{ donc}$
  - $0 \le a+1 < b+1$  (on ajoute 1) donc
  - $0 \le (a+1)^2 < (b+1)^2$  (on passe au carré avec des nombres positifs) donc
  - $0 \ge -2(a+1)^2 > -2(b+1)^2$  (on multiplie par -2) donc
  - $2 \ge \underbrace{-2(a+1)^2 + 2}_{f(a)} > \underbrace{-2(b+1)^2 + 2}_{f(b)}$  (on ajoute 2)

Donc f(a) > f(b) et donc f(a) > f(b) et donc f est décroissante sur  $[-1; +\infty[$ .



### **Exercice 4**

1) a) 
$$f(a) - f(b) = 6a^2 - 60a + 149 - (6b^2 - 60b + 149) = 6a^2 - 6b^2 - 60a + 60b$$
  
 $f(a) - f(b) = 6(a^2 - b^2) - 60(a - b) = 6(a + b)(a - b) - 60(a - b) = (a - b)[6(a + b) - 60]$ 

**b)** Soient a et b deux réels appartenant à  $[5; +\infty[$  tels que (a < b)

$$f(a) - f(b) = \underbrace{(a - b)}_{\text{car } a < b} \underbrace{\begin{bmatrix} 6(a + b) - 60 \end{bmatrix}}_{a > 5}$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} a > 5 \\ b > 5 \end{array}}_{\text{et donc } 6(a + b) > 60}$$

$$\underbrace{\begin{array}{c} donc 6(a + b) > 60 \\ donc 6(a + b) - 60 > 0 \end{array}}_{\text{+}}$$

Donc f(a) - f(b) < 0 donc f(a) < f(b) et donc f est croissante sur  $[5; +\infty[$ .

2) **a)** 
$$f(x) = 6x^2 - 60x + 149 = 6(x^2 - 10x) + 149 = 6(x^2 - 10x + 25 - 25) + 149$$
  
 $f(x) = 6[(x - 5)^2 - 25] + 149 = 6(x - 5)^2 - 150 + 149 = 6(x - 5)^2 - 1$ 

**b)** Soient a et b deux réels appartenant à  $]-\infty$ ; 5] tels que a < b:

$$a < b \le 5$$
 donc

 $a-5 < b-5 \le 0$  (on soustrait 5) donc

 $(a-5)^2 > (b-5)^2 \ge 0$  (on passe au carré avec des nombres négatifs) donc

$$6(a-5)^2 > 6(b-5)^2 \ge 0$$
 (on multiplie par 6) donc  
 $6(a-5)^2 > 6(b-5)^2 \ge 0$  (on multiplie par 6) donc  
 $6(a-5)^2 - 1 > 6(b-5)^2 - 1 \ge -1$  (on soustrait 1)

Donc f(a) > f(b) et donc f(a) > f(b) et donc f est décroissante sur  $]-\infty$ ; 5].

3)	x	$-\infty$	5	+∞
	f(x)		-1	