<u>Exercice 3</u> **Liban mai 2 012 (ES)** ***5 points***

Commun à tous les candidats

Dans un salon de coiffure pour femmes, le coloriste propose aux clientes qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires :

- une coloration naturelle à base de plantes qu'il appelle « couleur-soin »,
- des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, qu'il appelle « effet coup de soleil ».

Ce coloriste a fait le bilan suivant sur ces prestations :

- 40 % des clientes demandent une « couleur-soin ».
- parmi celles qui n'en veulent pas, 30 % des clientes demandent un « effet coup de soleil ».
- de plus, 24 % des clientes demandent les deux à la fois.

On considère une de ces clientes.
On notera C l'évènement « <u>la cliente souhaite une "couleur-soin"</u> ».
On notera M l'évènement « <u>la cliente souhaite un "effet coup de soleil"</u> ».

1) Calculer la probabilité de M sachant C notée $P_C(M)$.

2) Construire un arbre pondéré qui illustre la situation.

3) Calculer la probabilité que la cliente ne souhaite ni une « couleur-soin », ni un « effet coup de soleil ».

4) Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à 0,42.

5) Les évènements C et M sont-ils indépendants ?

6) Une « couleur-soin » coûte 35 euros et un « effet coup de soleil » coûte 40 euros.

a) Recopier puis compléter sans justifier le tableau suivant donnant la loi de probabilité du gain en euros du coloriste par client :

x_i	75	40	35	0
p_i	0,24			0,42

b) Donner l'espérance E de cette loi.

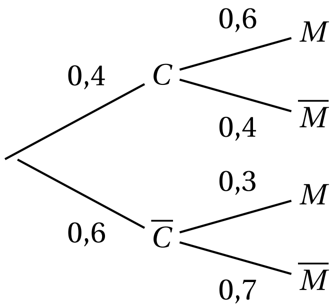
c) <u>Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation</u>.
Combien le coloriste doit-il facturer la réalisation d'un « effet coup de soleil » pour que l'espérance de gain par client augmente de 15% ?

entraînmaths

<u>Correction</u>

1) On sait que $P_C(M) = \dfrac{P(M \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,24}{0,4} = 0,6$.

2)



3) On a $P\left(\overline{C} \cap \overline{M}\right) = P_{\overline{C}}\left(\overline{M}\right) \times P\left(\overline{C}\right) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$.

4) Les évènements C et M déterminent une partition de l'ensemble des résultats, donc d'après la formule des probabilités totales :

$P(M) = P(M \cap C) + P\left(M \cap \overline{C}\right) = 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,3 = 0,24 + 0,18 = 0,42$.

5) On a $P(M) = 0,42$ et $P_C(M) = 0,6$, donc les évènements M et C ne sont pas indépendants.

6) **a)** On a $\left(C \cap \overline{M}\right) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$: cet évènement correspond à un coût de 35 euros.

x_i	75	40	35	0
p_i	0,24	0,18	0,16	0,42

b) On a $\mathrm{E} = 75 \times 0,24 + 40 \times 0,18 + 35 \times 0,16 = 30,80$ (€)

La dépense moyenne par client sera de $30,80$ (€)

c) On reprend le tableau précédent en appelant x la somme demandée pour la réalisation d'un « effet coup de soleil »

x_i	$35 + x$	x	35	0
p_i	0,24	0,18	0,16	0,42

On veut une espérance de $30,8 \times 1,15 = 35,42$.

Il faut donc que $35,42 = 0,24(35 + x) + 0,18x + 35 \times 0,16 + 0$ soit

$35,42 = 8,4 + 0,24x + 0,18x + 5,6$ ou encore $21,42 = 0,42x$ soit $x = 51$ (€)

Il faut donc augmenter la prestation « effet coup de soleil » de $51 - 35 = 16$ (€).

entrainmaths

Exercice 3 **Centres étrangers juin 2 018** ***7 points***
Pour tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Partie B

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

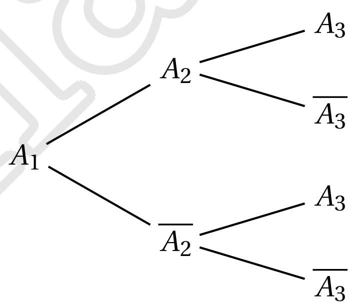
- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1) **a)** Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.

b) Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.

c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?
Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

3) **a)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.

b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

c) La suite (p_n) est-elle convergente ?

4) On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

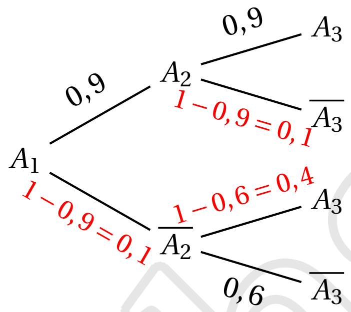
b) Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c) Déterminer la limite de la suite (p_n).

entrain'maths

Correction

1) **a)** On complète l'arbre de probabilités relatif aux trois premières semaines.



b) D'après la formule des probabilités totales :

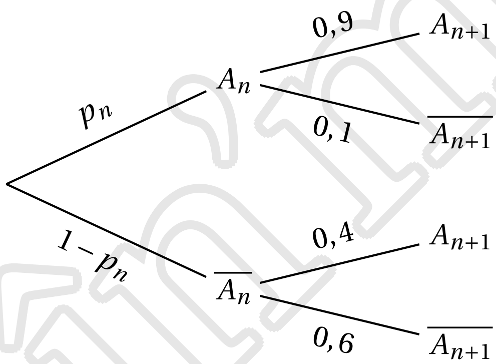
$$P(A_3) = P(A_2 \cap A_3) + P\left(\overline{A_2} \cap A_3\right)$$
$$= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P\left(\overline{A_2}\right) \times P_{\overline{A_2}}(A_3)$$
$$= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85$$

c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 est :

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0,9 \times 0,9}{0,85} \approx 0,95.$$

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2) On représente un arbre pondéré correspondant aux semaines n et $n+1$:



D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) = p_n \times 0,9 + \left(1 - p_n\right) \times 0,4 = 0,5p_n + 0,4.$$

3) **a)** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $p_n > 0,8$.

- **Initialisation**
  On sait que $p_1 = 1$ donc $p_1 > 0,8$; la propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité**
  Soit un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la propriété soit vraie au rang k, c'est-à-dire $p_k > 0,8$. C'est l'hypothèse de récurrence.
  On va démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.
  D'après l'hypothèse de récurrence, $p_k > 0,8$ donc $0,5p_k > 0,4$ et donc $0,5p_k + 0,4 > 0,8$ qui signifie $p_{k+1} > 0,8$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire pour tout $k \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0,8$.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n = 0,5p_n + 0,4 - p_n = 0,4 - 0,5p_n$.
Or $p_n > 0,8$ donc $0,5p_n > 0,4$ donc $-0,5p_n < -0,4$ et donc $0,4 - 0,5p_n < 0$.
On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$ et donc que la suite (p_n) est strictement décroissante.

c) Pour tout $n \geqslant 1$, $p_n > 0,8$ donc la suite (p_n) est minorée par $0,8$.
On a vu aussi que la suite (p_n) était décroissante.
D'après le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que la suite (p_n) est convergente.

4) On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$ donc $p_n = v_n + 0,8$.

a)
- $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = 0,5p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5\,(v_n + 0,8) - 0,4 = 0,5v_n + 0,4 - 0,4 = 0,5v_n$
- $v_1 = p_1 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = 0,2$.

b) On déduit de la question précédente que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
Comme pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = v_n + 0,8$, on en déduit que $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

c) La suite (v_n) est géométrique de raison $0,5$ et $-1 < 0,5 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente vers 0. Pour tout $n > 0$, $p_n = v_n + 0,8$ donc la suite (p_n) est convergente et a pour limite $0,8$.

entraîn'maths

Exercice 2 **Pondichéry avril 2 008 (ES)** ***5 points***

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations : la destination A, la destination G et la destination M.

50 % des clients choisissent la destination A ;
30 % des clients choisissent la destination G ;
20 % des clients choisissent la destination M.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction.

Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80 % des clients ayant choisi la destination G.

On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.

On note les évènements :

- A : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A » ;
- G : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G » ;
- M : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M » ;
- S : « le questionnaire est celui d'un client satisfait » ;
- $\overline{S}$ « le questionnaire est celui d'un client insatisfait ».

1) Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.

2) **a)** Traduire par une phrase les évènements $G \cap S$ et $M \cap S$ puis calculer les probabilités $P(G \cap S)$ et $P(M \cap S)$.

b) L'enquête montre que 72 % des clients de l'agence sont satisfaits. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(A \cap S)$.

c) En déduire $P_A(S)$, probabilité de l'évènement S sachant que l'évènement A est réalisé.

3) Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait.

Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie.

Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G (<u>on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible</u>).

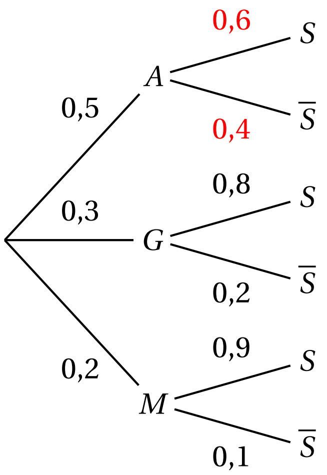
4) On prélève successivement au hasard trois questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants.

Calculer la probabilité de l'évènement : « les trois questionnaires sont ceux de clients insatisfaits » (<u>on donnera le résultat arrondi au millième</u>).

entrainmaths

Correction

1)



2) **a)** $G \cap S$: « le client a choisi la destination G et a été satisfait » ;

$M \cap S$: « le client a choisi la destination M et a été satisfait » ;

$p(G \cap S) = p(G) \times p_G(S) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$;

$p(M \cap S) = p(M) \times p_M(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$.

b) On a donc $p(S) = 0,72$. D'après la loi des probabilités totales on a :

$p(S) = p(A \cap S) + p(G \cap S) + p(M \cap S) \iff$

$p(A \cap S) = p(S) - p(G \cap S) - p(M \cap S) = 0,72 - 0,24 - 0,18 = 0,3$.

c) $p_A(S) = \dfrac{p(A \cap S)}{p_A} = \dfrac{0,3}{0,5} = 0,6$.

3) Il faut trouver $p_S(G) = \dfrac{p(S \cap G)}{p(S)} = \dfrac{0,24}{0,72} = \dfrac{1}{3}$.

4) On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = p\left(\overline{S}\right) = 1 - 0,72 = 0,28$.

La probabilité que les trois soient insatisfaits est $0,28^3 = 0{,}021\,952 \approx 0,022$ au millième près.

entrain maths