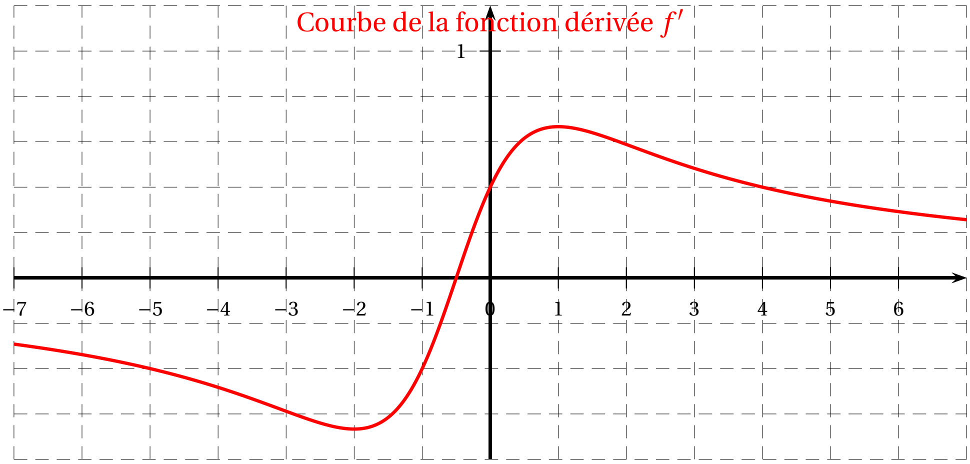
EXERCICE – A

Principaux domaines abordés
– convexité
– fonction logarithme

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.

2) **a)** Donner les variations de la fonction dérivée f'.

b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.

4) **a)** Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

5) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

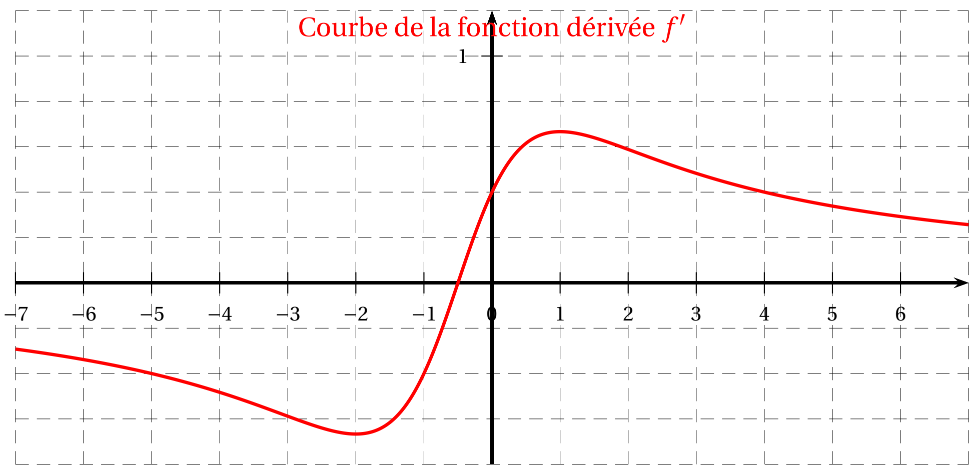
Correction

EXERCICE – A

Principaux domaines abordés
– convexité
– fonction logarithme

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



1) On lit $f'(0) = 0,4 = \dfrac{2}{5}$.

2) **a)** D'après la figure :

- $f'(x)$ est croissante si $x \in [-2\,;\,1]$;
- $f'(x)$ est décroissante si $x < -2$ et si $x > 1$.

b) • $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Donc $f''(x) > 0$ sur l'intervalle $[-2\,;\,1]$; la fonction f est convexe sur l'intervalle $[-2\,;\,1]$.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1) • On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 + x + \frac{5}{2} = +\infty$, d'où par composition de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• On a $x^2 + x + \dfrac{5}{2} = x^2\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{2x^2}\right)$.

Donc $f(x) = \ln x^2\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{2x^2}\right) = \ln x^2 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{2x^2}\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{2x^2 x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2}\right) = \ln 1 = 0$.

Finalement :

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln x^2 = +\infty$.

2) On a $f(x) = \ln u(x)$, avec $u(x) = x^2 + x + \dfrac{5}{2}$.

u étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour le trinôme $x^2 + x + \dfrac{5}{2}$, $\Delta = 1 - 10 = -9 < 0$, donc

$x^2 + x + \dfrac{5}{2} > 0$ quel que soit le réel x.

La fonction $\ln u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$(\ln u)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$.

Conclusion : quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$.

3) On a vu que $x^2 + x + \dfrac{5}{2} > 0$ sur $\mathbb{R}$; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $2x+1$:

- $f'(x) > 0 \iff 2x+1 > 0 \iff x > -\dfrac{1}{2}$: la fonction f est croissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$;
- $f'(x) < 0 \iff 2x+1 < 0 \iff x < -\dfrac{1}{2}$: la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right[$.

On a $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\right) = \ln\dfrac{9}{4}$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\ln\frac{9}{4}$	$+\infty$

4) **a)** Dans la tableau précédent $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{9}{4} \approx 0,81$.

Sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ la fonction f est continue car dérivable et comme $2 \in \left[\ln\frac{9}{4}\ ;\ +\infty\right[$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\alpha \in \left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

b) La calculatrice donne :

$f(1) \approx 1,5$ et $f(2) \approx 2,14$, donc $\alpha \in]1\ ;\ 2[$;

$f(1,7) \approx 1,96$ et $f(1,8) \approx 2,02$, donc $\alpha \in]1,7\ ;\ 1,8[$;

$f(1,76) \approx 1,995$ et $f(1,77) \approx 2,002$, donc $\alpha \in]1,76\ ;\ 1,77[$.

Conclusion $\alpha \approx 1,8$ à 10^{-1} près.

5)

La fonction a un point d'inflexion si en ce point sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

On a $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 + x + \frac{5}{2}}$: cette fonction est dérivable car le dénominateur ne s'annule pas, donc sur $\mathbb{R}$:

$$f''(x) = \frac{2\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) - (2x+1)(2x+1)}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 5 - 4x^2 - 4x - 1}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{-2\left(x^2 + x - 2\right)}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}; f''(x) = \frac{-2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} - 2\right]}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{-2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right]}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{-2\left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}.$$

Comme $\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2>0$, quel que soit le réel x, le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $-2(x+2)(x-1)=2(x+2)(1-x)$, soit celui du trinôme $(x+2)(1-x)$. On en déduit le

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+2)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On constate que la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en -2 et en 1. La courbe a donc deux points d'inflexion.