Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Dans chacun des cas suivants déterminer les coordonnées du point H : projeté orthogonal du point B sur la droite d passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$:

1) $A(3\,;\,1\,;\,4)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $B(5\,;\,0\,;\,15)$.

2) $A(-2\,;\,2\,;\,5)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ et $B(5\,;\,2\,;\,3)$.

3) $A(2\,;\,0\,;\,7)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}$ et $B(-3\,;\,1\,;\,6)$.

4) $A(-3\,;\,2\,;\,-4)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$ et $B(-2\,;\,1\,;\,2)$.

5) $A(4\,;\,-3\,;\,5)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et ß$(4\,;\,-2\,;\,-7)$.

6) $A(4\,;\,0\,;\,5)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $B(-2\,;\,1\,;\,9)$.

7) $A(-3\,;\,2\,;\,4)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $B(5\,;\,-4\,;\,0)$.

8) $A(-1\,;\,1\,;\,3)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $B(2\,;\,6\,;\,-2)$.

9) $A(-2\,;\,-3\,;\,1)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ et $B(0\,;\,0\,;\,10)$.

10) $A(4\,;\,2\,;\,3)$, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $B(-4\,;\,2\,;\,5)$.

Solutions

1) Une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 1+t \\ z = 4+3t \end{cases}$

$H \in d$ donc $x_H = 3-2t$, $y_H = 1+t$ et $z_H = 4+3t$ et donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 3-2t-5 \\ 1+t-0 \\ 4+3t-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2t \\ 1+t \\ -11+3t \end{pmatrix}$.

$(BH) \perp d$ donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{u} = 0 \iff -2(-2-2t)+1(1+t)+3(-11+3t) = 0 \iff 4+4t+1+t-33+9t = 0$
donc $14t = 28 \iff t = \dfrac{28}{14} = 2$.

Et donc, en remplaçant t par 2 dans la représentation paramétrique de d, on obtient : $\begin{cases} x_H = 3-2\times 2 = -1 \\ y_H = 1+2 = 3 \\ z_H = 4+3\times 2 = 10 \end{cases}$ et

donc $\boxed{H(-1\,;\,3\,;\,10)}$

2) Une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = 2+2t \\ z = 5+2t \end{cases}$

$H \in d$ donc $x_H = -2+3t$, $y_H = 2+2t$ et $z_H = 5+2t$ et donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -2+3t-5 \\ 2+2t-2 \\ 5+2t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+3t \\ 2t \\ 2+2t \end{pmatrix}$.

$(BH) \perp d$ donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{u} = 0 \iff 3(-7+3t)+2(2t)+2(2+2t) = 0 \iff -21+9t+4t+4+4t = 0$
donc $17t = 17 \iff t = \dfrac{17}{17} = 1$.

Et donc, en remplaçant t par 1 dans la représentation paramétrique de d, on obtient : $\begin{cases} x_H = -2+3\times 1 = 1 \\ y_H = 2+2\times 1 = 4 \\ z_H = 5+2\times 1 = 7 \end{cases}$ et

donc $\boxed{H(1\,;\,4\,;\,7)}$

3) Une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases} x = 2-4t \\ y = 0+2t \\ z = 7+t \end{cases}$

$H \in d$ donc $x_H = 2-4t$, $y_H = 2t$ et $z_H = 7+t$ et donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 2-4t+3 \\ 2t-1 \\ 7+t-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4t \\ -1+2t \\ 1+t \end{pmatrix}$.

$(BH) \perp d$ donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{u} = 0 \iff -4(5-4t)+2(-1+2t)+1(1+t) = 0 \iff -20+16t-2+4t+1+t = 0$
donc $21t = 21 \iff t = \dfrac{21}{21} = 1$.

Et donc, en remplaçant t par 1 dans la représentation paramétrique de d, on obtient : $\begin{cases} x_H = 2-4\times 1 = -2 \\ y_H = 2\times 1 = 2 \\ z_H = 7+1 = 8 \end{cases}$ et

donc $\boxed{H(-2\,;\,2\,;\,8)}$

4) Une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 2-3t \\ z = -4+4t \end{cases}$

$H \in d$ donc $x_H = -3+2t$, $y_H = 2-3t$ et $z_H = -4+4t$ et donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -3+2t+2 \\ 2-3t-1 \\ -4+4t-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2t \\ 1-3t \\ -6+4t \end{pmatrix}$.

$(BH) \perp d$ donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{u} = 0 \iff 2(-1+2t)-3(1-3t)+4(-6+4t) = 0 \iff -2+4t-3+9t-24+16t = 0$
donc $29t = 29 \iff t = \dfrac{29}{29} = 1$.

Et donc, en remplaçant t par 1 dans la représentation paramétrique de d, on obtient : $\begin{cases} x_H = -3+\times 1 = -1 \\ y_H = 2-3\times 1 = -1 \\ z_H = -4+4\times 1 = 0 \end{cases}$ et

donc $\boxed{H(-1\,;\,-1\,;\,0)}$

5) Une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases} x = 4+t \\ y = -3+0t \\ z = 5+t \end{cases}$

$H \in d$ donc $x_H = 4+t$, $y_H = -3$ et $z_H = 5+t$ et donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 4+t-4 \\ -3+2 \\ 5+t+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 12+t \end{pmatrix}$.

$(BH) \perp d$ donc $\overrightarrow{BH}.\vec{u} = 0 \iff 1(t)+0(-1)+1(12+t) = 0 \iff t+12+t = 0$
donc $2t = -12 \iff t = \dfrac{-12}{2} = -6$.

Et donc, en remplaçant t par -6 dans la représentation paramétrique de d, on obtient : $\begin{cases} x_H = 4+(-6) = -2 \\ y_H = -3 \\ z_H = 5+(-6) = -1 \end{cases}$ et

donc $\boxed{H(-2\,;\,-3\,;\,-1)}$

6) Une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases} x = 4+t \\ y = 0-t \\ z = 5+t \end{cases}$

$H \in d$ donc $x_H = 4+t$, $y_H = -t$ et $z_H = 5+t$ et donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 4+t+2 \\ -t-1 \\ 5+t-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+t \\ -1-t \\ -4+t \end{pmatrix}$.

$(BH) \perp d$ donc $\overrightarrow{BH}.\vec{u} = 0 \iff 1(6+t)-1(-1-t)+1(-4+t) = 0 \iff 6+t+1+t-4+t = 0$
donc $3t = -3 \iff t = \dfrac{-3}{3} = -1$.

Et donc, en remplaçant t par -1 dans la représentation paramétrique de d, on obtient : $\begin{cases} x_H = 4+(-1) = 3 \\ y_H = -(-1) = 1 \\ z_H = 5+(-1) = 4 \end{cases}$ et

donc $\boxed{H(3\,;\,1\,;\,4)}$

7) Une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases} x = -3+2t \\ y = 2+t \\ z = 4+0t \end{cases}$

$H \in d$ donc $x_H = -3+2t$, $y_H = 2+t$ et $z_H = 4$ et donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -3+2t-5 \\ 2+t+4 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+2t \\ 6+t \\ 4 \end{pmatrix}$.

$(BH) \perp d$ donc $\overrightarrow{BH}.\vec{u} = 0 \iff 2(-8+2t)+1(6+t)+0(4) = 0 \iff -16+4t+6+t+0 = 0$
donc $5t = 10 \iff t = \dfrac{10}{5} = 2$.

Et donc, en remplaçant t par 2 dans la représentation paramétrique de d, on obtient : $\begin{cases} x_H = -3+2\times 2 = 1 \\ y_H = 2+2 = 4 \\ z_H = 4 \end{cases}$ et

donc $\boxed{H(1\,;\,4\,;\,4)}$

8) Une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases} x = -1+0t \\ y = 1+t \\ z = 3-2t \end{cases}$

$H \in d$ donc $x_H = -1$, $y_H = 1+t$ et $z_H = 3-2t$ et donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -1-2 \\ 1+t-6 \\ 3-2t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5+t \\ 5-2t \end{pmatrix}$.

$(BH) \perp d$ donc $\overrightarrow{BH}.\vec{u} = 0 \iff 0(-3)+1(-5+t)-2(5-2t) = 0 \iff 0-5+t-10+4t = 0$
donc $5t = 15 \iff t = \dfrac{15}{5} = 3$.

Et donc, en remplaçant t par 3 dans la représentation paramétrique de d, on obtient : $\begin{cases} x_H = -1 \\ y_H = 1+3 = 4 \\ z_H = 3-2\times 3 = -3 \end{cases}$ et

donc $\boxed{H(-1\,;\,4\,;\,-3)}$

9) Une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases} x = -2+4t \\ y = -3+5t \\ z = 1+6t \end{cases}$

$H \in d$ donc $x_H = -2+4t$, $y_H = -3+5t$ et $z_H = 1+6t$ et donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} -2+4t-0 \\ -3+5t-0 \\ 1+6t-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4t \\ -3+5t \\ -9+6t \end{pmatrix}$.

$(BH) \perp d$ donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{u} = 0 \iff 4(-2+4t)+5(-3+5t)+6(-9+6t) = 0 \iff -8+16t-15+25t-54+36t = 0$
donc $77t = 77 \iff t = \dfrac{77}{77} = 1$.

Et donc, en remplaçant t par 1 dans la représentation paramétrique de d, on obtient : $\begin{cases} x_H = -2+4\times 1 = 2 \\ y_H = -3+5\times 1 = 2 \\ z_H = 1+6\times 1 = 7 \end{cases}$ et

donc $\boxed{H(2\,;\,2\,;\,7)}$

10) Une représentation paramétrique de la droite d est $\begin{cases} x = 4-t \\ y = 2+t \\ z = 3-t \end{cases}$

$H \in d$ donc $x_H = 4-t$, $y_H = 2+t$ et $z_H = 3-t$ et donc $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 4-t+4 \\ 2+t-2 \\ 3-t-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-t \\ t \\ -2-t \end{pmatrix}$.

$(BH) \perp d$ donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{u} = 0 \iff -1(8-t)+1(t)-1(-2-t) = 0 \iff -8+t+t+2+t = 0$
donc $3t = 6 \iff t = \dfrac{6}{3} = 2$.

Et donc, en remplaçant t par 2 dans la représentation paramétrique de d, on obtient : $\begin{cases} x_H = 4-2 = 2 \\ y_H = 2+2 = 4 \\ z_H = 3-2 = 1 \end{cases}$ et donc

$\boxed{H(2\,;\,4\,;\,1)}$