Sujets de bac : espace

Exercice 1 :
L'objectif de cet exercice est de déterminer les positions relatives de différents objets de l'espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points A(1 ; 1 ; 4) ; B(4 ; 2 ; 5) ; C(3 ; 0 ; −2) et J(1 ; 4 ; 2).
On note :
- $\mathscr{P}$ le plan passant par les points A, B et C ;
- $\mathscr{D}$ la droite passant par le point J et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

1) Position relative de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}$

a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

c) Montrer que $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$.

On rappelle que, un point I et un nombre réel strictement positif r étant donnés, la sphère de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\mathrm{I}M = r$.
On considère le point I (1 ; 9 ; 0) et on appelle $\mathscr{S}$ la sphère de centre I et de rayon 6.

2) Position relative de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{S}$

a) Montrer que la droite Δ passant par I et orthogonale au plan $\mathscr{P}$ coupe ce plan $\mathscr{P}$ au point H(3 ; 1 ; 2).

b) Calculer la distance IH.
On admet que pour tout point M du plan $\mathscr{P}$ on a $\mathrm{I}M \geqslant \mathrm{IH}$.

c) Le plan $\mathscr{P}$ coupe-t-il la sphère $\mathscr{S}$? Justifier la réponse

3) Position relative de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{S}$

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

b) Montrer qu'un point M de coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$ appartient à la sphère $\mathscr{S}$ si et seulement si :

$$(x-1)^2+(y-9)^2+z^2=36.$$

c) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe la sphère en deux points distincts.
On ne cherchera pas à déterminer les coordonnées de ses points.

Correction exercice 1

1) Position relative de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}$

a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\-6\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n} = 3-4+1=0$: les vecteurs sont orthogonaux ;
- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n} = 2+4-6=0$: les vecteurs sont orthogonaux.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$, orthogonal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (ABC), est donc un vecteur normal à ce plan.

b) Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC) donc le plan (ABC) a une équation de la forme $x-4y+z+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.
A(1 ; 1 ; 4) $\in$ (ABC) donc $1-4+4+d=0 \iff d=-1$. Donc le plan (ABC) a pour équation : $x-4y+z-1=0$

c) On va montrer que $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$.
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n} = 1-4+3=0$: les vecteurs $\overrightarrow{u}$ (vecteur directeur de $\mathscr{D}$) et $\overrightarrow{n}$ (vecteur normal à $\mathscr{P}$) sont orthogonaux ce qui montre que $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}$.

On rappelle que, un point I et un nombre réel strictement positif r étant donnés, la sphère de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant I$M = r$.

On considère le point I(1 ; 9 ; 0) et on appelle $\mathscr{S}$ la sphère de centre I et de rayon 6.

2) Position relative de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{S}$

a) On va montrer que la droite Δ passant par I est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ coupe ce plan $\mathscr{P}$ au point H (3 ; 1 ; 2).
La droite Δ passant par I et orthogonale au plan $\mathscr{P}$ a donc pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\Delta \iff \overrightarrow{IM} = \alpha\,\overrightarrow{n}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, soit :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\Delta \iff \left\{\begin{array}{rcr} x-1 &=& \alpha\\ y-9 &=& -4\alpha\\ z-0 &=& \alpha\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1+\alpha\\ y &=& 9-4\alpha\\ z &=& \alpha\end{array}\right.,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Le point d'intersection H de Δ et de $\mathscr{P}$ a ses coordonnées qui vérifient les équations de la droite et celle du plan, soit le système : $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1+\alpha\\ y &=& 9-4\alpha\\ z &=& \alpha\\ x-4y+z-1 &=& 0\end{array}\right.$

On a donc $(1+\alpha)-4(9-4\alpha)+\alpha-1=0$ ce qui équivaut $\alpha=2$.
$x=1+\alpha=3$, $y=9-4\alpha=1$ et $z=\alpha=2$ donc le point H a pour coordonnées (3 ; 1 ; 2).

b) On calcule la distance IH.
$\text{IH}^2 = (3-1)^2+(1-9)^2+(2-0)^2 = 4+64+4=72$; donc $\text{IH} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
On admet que pour tout point M du plan $\mathscr{P}$ on a I$M \geqslant$ IH.

c) La sphère $\mathscr{S}$ a pour centre I et la distance IH du centre au plan $\mathscr{P}$ est $6\sqrt{2}$ qui est supérieure au rayon $r=6$ de la sphère.
Donc le plan $\mathscr{P}$ ne coupe pas la sphère $\mathscr{S}$

3) Position relative de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{S}$

a) On détermine une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$, passant par J et de vecteur directeur $\vec{u}$..

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D} \iff \overrightarrow{JM} = t\,\overrightarrow{u} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t\\ y-4 &=& t\\ z-2 &=& 3t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R},\text{ soit :}$$

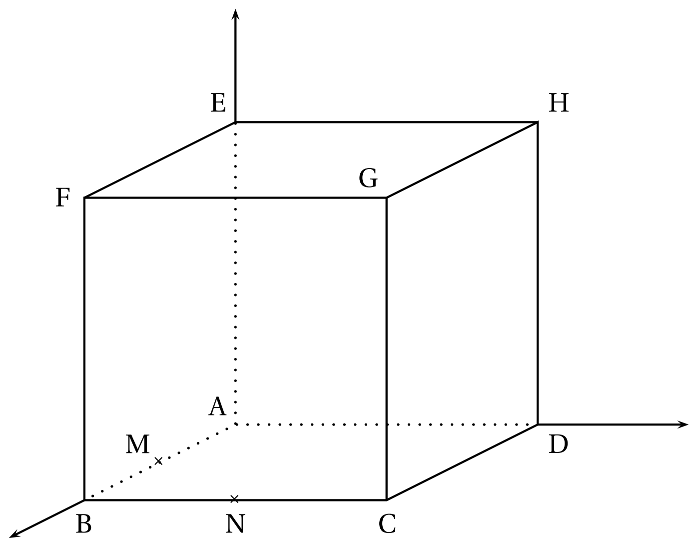
$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D} \iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& 1+t\\ y &=& 4+t\\ z &=& 2+3t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

b) $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{S} \iff \text{I}M=6 \iff \text{I}M^2=36 \iff (x-1)^2+(y-(-4))^2+(z-0)^2=36$
$\iff (x-1)^2+(y-9)^2+z^2=36.$

c) On a $\text{IJ}^2 = (1-1)^2+(9-4)^2+(2-0)^2 = 25+4=29$.
Donc $\text{IJ} = \sqrt{29}\approx 5{,}4 < 6$ longueur du rayon de la sphère : ceci montre que J est intérieur à la sphère et donc toute droite contenant J coupe la sphère en deux points.

Exercice 2 :

Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous et reproduit en **ANNEXE à rendre avec la copie**, on a placé les points M et N milieux respectifs des segments [AB] et [BC].



On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1) Donner sans justifier les coordonnées des points H, M et N.

2) On admet que les droites (CD) et (MN) sont sécantes et on note K leur point d'intersection.

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (MN).
On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

b) Déterminer les coordonnées du point K.

3) On admet que les points H, M, N définissent un plan et que la droite (CG) et le plan (HMN) sont sécants. On note L leur point d'intersection.

a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMN).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (HMN).

c) En déduire les coordonnées du point L.

4) Sur l'**ANNEXE à rendre avec la copie**, construire les points K et L puis la section du cube ABCDEFGH par le plan (HMN).

Correction exercice 2

1) H(0 ; 1 ; 1) , M(0,5 ; 0 ; 0) et N(1 ; 0,5 ; 0).

2) **a)** La droite (MN) est définie par le point M et le vecteur $\overrightarrow{MN}$.

M(0,5 ; 0 ; 0) et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de la droite (MN) est donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0,5+0,5k \\ y & = & 0,5k \\ z & = & 0 \end{array}\right. , k \in \mathbb{R}.$$

b) Une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

K étant le point d'intersection des droites (CD) et (MN), ses coordonnées sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=0 \\ x=0,5+0,5k \\ y=0,5k \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=0,5k \\ t=0,5+0,5k \\ x=t \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ t=1,5 \\ x=1,5 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

C'est pourquoi K (1,5 ; 1 ; 0)

3) **a)** $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}0,5\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HN}\begin{pmatrix}1\\-0,5\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HN}$ ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{0,5} \neq \frac{-0,5}{-1}$

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{HM} = 2\times 0,5 - 2\times(-1) + 3\times(-1) = 1+2-3 = 0$

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{HN} = 2\times 1 - 2\times(-0,5) + 3\times(-1) = 2+1-3 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMN),c'est donc un vecteur normal à ce plan.

b) $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ étant un vecteur normal du plan (HMN),

une équation cartésienne de ce plan est $2x-2y+3z+d=0$, H(0 ; 1 ; 1) appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, on a donc $2\times 0 - 2\times 1 + 3\times 1 + d = 0$ soit $d=-1$

Une équation du plan (HMN) est donc $2x-2y+3z-1=0$

c) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (CG). Cette droite est déterminée par le point C(1 ; 1 ; 0) et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de la droite (MN) est donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z & = & p \end{array}\right. , p \in \mathbb{R}.$$

L est le point d'intersection de la droite (CG) et du plan (HMN), ses coordonnées sont donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 2x-2y+3z-1=0 \\ x=1 \\ y=1 \\ z=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2+3p-1=0 \\ x=1 \\ y=1 \\ z=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=\dfrac{1}{3} \\ x=1 \\ y=1 \\ z=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

C'est pourquoi L $(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{3})$

4) Sur la face (ABCD), on trace le segment [MN],

sur la face (BCGF), on trace le segment [NL],

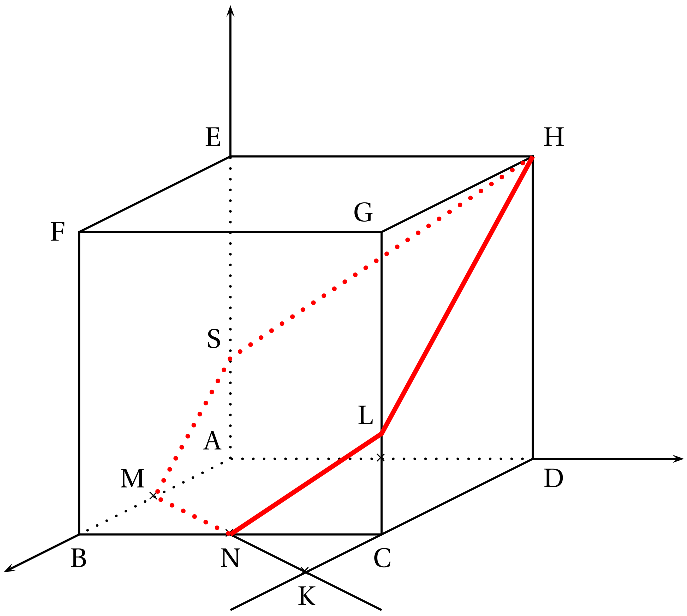
sur la face (CDHG), on trace le segment [LH],

Les faces (ABFE) et (CDHG) sont parallèles donc les droites d'intersection des ces deux plans avec le plan (HMN) sont parallèles. On trace la parallèle à (LH) passant par M, elle coupe la droite (AE) en un point S.

Sur la face (ADHE), on trace le segment [SH],(on peut remarquer que (SH) est parallèle à (NL).

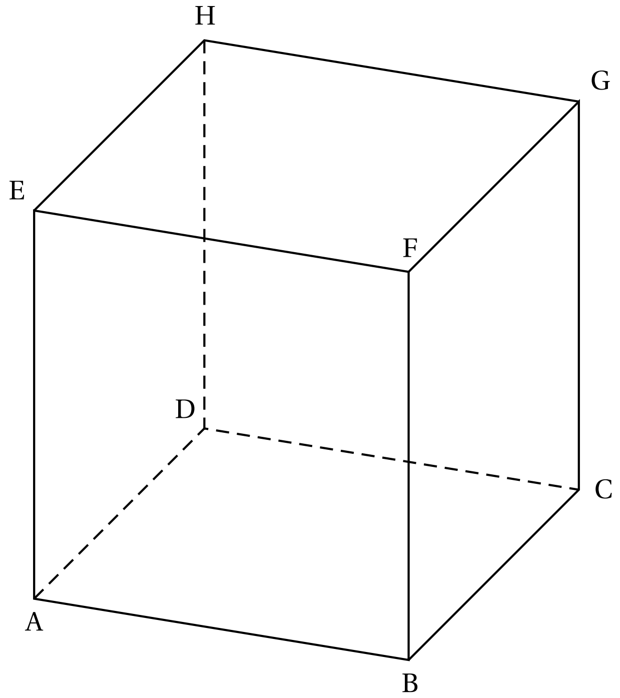
La section du cube par le plan (HMN) est donc MNLHS.

ANNEXE



Exercice 3 :

Soit ABCDEFGH un cube. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



Pour tout réel t, on considère le point M de coordonnées $(1-t\ ;\ t\ ;\ t)$.

1) Montrer que pour tout réel t, le point M appartient à la droite (BH).

On admet que les droites(BH) et (FC) ont respectivement pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & t' \\ z & = & 1-t' \end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales et non coplanaires.

2) Pour tout réel t', on considère le point $M'(1; t'; 1-t')$.

a) Montrer que pour tous réels t et t', $MM'^2 = 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.

b) Pour quelles valeurs de t et de t' la distance MM' est-elle minimale ? Justifier.

c) On nomme P le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$et Q celui de coordonnées $\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
Justifier que la droite (PQ) est perpendiculaire aux deux droites (BH) et (FC).

Correction exercice 3

1) Le point B a pour coordonnées (1 ; 0 ; 0), et comme $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, le point H a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1).

Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(1-t-1\,;\,t-0\,;\,t-0)$ soit $(-t\,;\,t\,;\,t)$.

Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ a pour coordonnées $(0-1\,;\,1-0\,;\,1-0)$ soit $(-1\,;\,1\,;\,1)$.

On a donc $\overrightarrow{BM} = t\,\overrightarrow{BH}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires, ce qui prouve que le point M appartient à la droite (BH) pour tout réel t.

On admet que les droites(BH) et (FC) ont respectivement pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array}\right. \text{ où } t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & t' \\ z & = & 1-t' \end{array}\right. \text{ où } t'\in\mathbb{R}.$$

2) On va démontrer que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales et non coplanaires.

- D'après sa représentation paramétrique, la droite (BH) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(-1\,;1\,;1)$.
  D'après sa représentation paramétrique, la droite (FC) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n'}$ de coordonnées $(0\,;1\,;-1)$.
  $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n'} = (-1)\times 0 + 1\times 1 + 1\times(-1) = 0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{n'}$.
  On en déduit que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales.
- Si les droites les droites (BH) et (FC) sont coplanaires, comme elles sont orthogonales, elles seront sécantes ; il suffit donc de prouver que les droites (BH) et (FC) ne sont pas sécantes pour démontrer qu'elles ne sont pas coplanaires.
  Les droites (BH) et (FC) sont sécantes si on peut trouver t et t' tels que : $\left\{\begin{array}{lcl} 1-t & = & 1 \\ t & = & t' \\ t & = & 1-t' \end{array}\right.$.
  Ce système n'a pas de solution donc les droites (BH) et (FC) ne sont pas sécantes, donc elles ne sont pas coplanaires.

3) Pour tout réel t', on considère le point $\mathrm{M}'(1;t';1-t')$.

a) $\mathrm{MM}'^2 = (1-1+t)^2 + (t'-t)^2 + (1-t'-t)^2 = t^2 + t'^2 - 2tt' + t^2 + 1 - t' - t - t' + t'^2 + tt' - t + tt' + t^2$
$= 3t^2 + 2t'^2 - 2t' - 2t + 1$

$$3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} = 3\left(t^2 - \frac{2t}{3} + \frac{1}{9}\right) + 2\left(t'^2 - \frac{2t'}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6}$$
$$= 3t^2 - 2t + \frac{1}{3} + 2t'^2 - 2t' + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 3t^2 + 2t'^2 - 2t' - 2t + 1 = \mathrm{MM}'^2$$

b) La distance MM' est minimale quand MM'^2 est minimale.
MM'^2 est la somme de trois nombres positifs ou nuls, et sera minimale quand chacun de ces nombres est minimal.

- $3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2$ est minimale et vaut 0 pour $t = \frac{1}{3}$;
- $2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2$ est minimale et vaut 0 pour $t' = \frac{1}{2}$.

Donc MM' est minimale pour $t = \frac{1}{3}$ et $t' = \frac{1}{2}$; dans ce cas $\mathrm{MM}' = \sqrt{\frac{1}{6}}$.

c) On nomme P le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$et Q celui de coordonnées $\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

- Le point P appartient à la droite (BH) pour $t = \frac{1}{3}$, donc (BP) = (BH).
- Le point Q appartient à la droite (FC) pour $t' = \frac{1}{2}$, donc (QC) = (FC).
- Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $\left(1-\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{6}\,;\,\frac{1}{6}\right)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{BP}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}-1\,;\,\frac{1}{3}-0\,;\,\frac{1}{3}-0\right) = \left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.
- $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = 0$ donc $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{PQ}$ donc la droite (PQ) est perpendiculaire à la droite (BP) donc à la droite (BH).
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc C a pour coordonnées (1 ; 1 ; 0).

- Le vecteur $\overrightarrow{QC}$ a pour coordonnées $\left(1-1\ ;\ 1-\frac{1}{2}\ ;\ 0-\frac{1}{2}\right)=\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.
- $\overrightarrow{QC}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\times\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=0+\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=0$ donc $\overrightarrow{QC}\perp\overrightarrow{PQ}$ donc la droite (PQ) est perpendiculaire à la droite (QC) donc à la droite (FC).

Donc la droite (PQ) est perpendiculaire aux deux droites (BH) et (FC).

Exercice 4 :

Soit ABCDEFGH un cube et I le centre du carré ADHE, c'est-à-dire, le milieu du segment [AH] et du segment [ED]. Soit J un point du segment [CG].

La section du cube ABCDEFGH par le plan (FIJ) est le quadrilatère FKLJ.

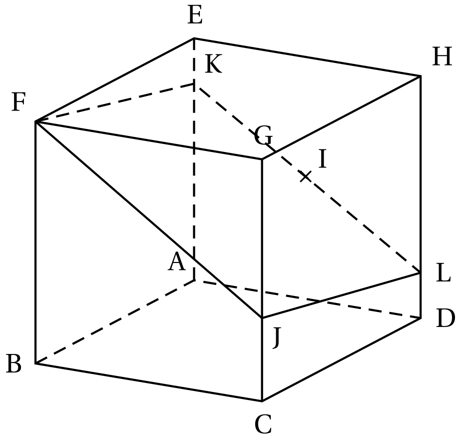


Figure 1

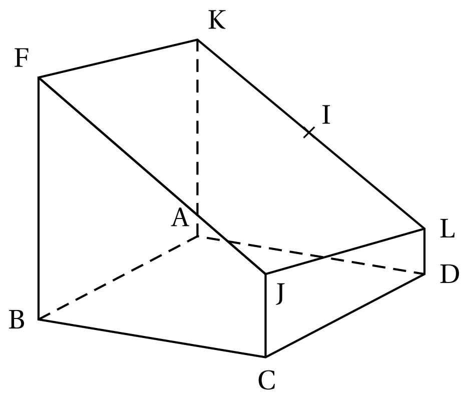


Figure 2

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On a donc $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$ et $E(0\,;0\,;1)$.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

Dans cette partie, le point J a pour coordonnées $\left(1\,;\ 1\,;\ \frac{2}{5}\right)$

1) Démontrer que les coordonnées du point I sont $\left(0\,;\ \frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2}\right)$.

2) **a)** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (FIJ).

b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est

$$-x+3y+5z-4=0.$$

3) Soit d la droite orthogonale au plan (FIJ) et passant par B.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b) On note M le point d'intersection de la droite d et du plan (FIJ).

Démontrer que $M\left(\frac{6}{7}\,;\ \frac{3}{7}\,;\ \frac{5}{7}\right)$.

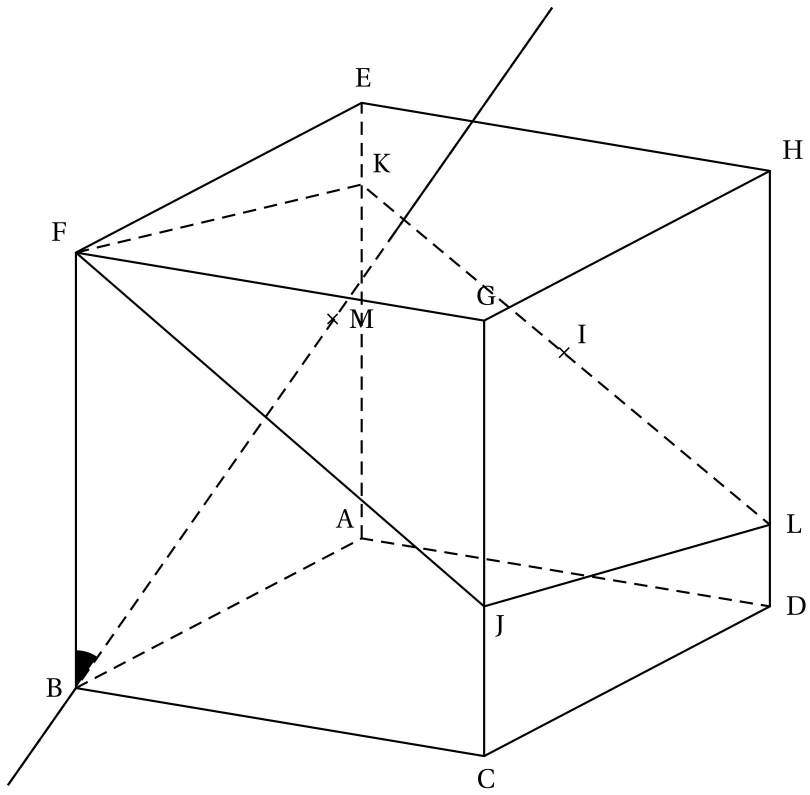


Figure 1

4) **a)** Calculer $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BF}$.

b) En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{MBF}$.

Partie B

Dans cette partie, J est un point quelconque du segment [CG].
Ses coordonnées sont donc $(1\ ;\ 1\ ;\ a)$, où a est un réel de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

1) Montrer que la section du cube par le plan (FIJ) est un parallélogramme.

2) On admet alors que L a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{a}{2}\right)$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a le quadrilatère FKLJ est-il un losange ?

Correction exercice 4 :

Partie A

Dans cette partie, le point J a pour coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\dfrac{2}{5}\right)$

1) I est le centre du carré ADHE, donc en particulier I est le milieu du segment [DE], donc $\mathrm{I}\left(\frac{0+0}{2}\,;\,\frac{1+0}{2}\,;\,\frac{0+1}{2}\right)$ soit $\mathrm{I}\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

a) Avec F(1 ; 0 ; 1), $\mathrm{I}\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{J}\left(1\,;\,1\,;\,\dfrac{2}{5}\right)$, on obtient :

$\overrightarrow{\mathrm{IF}}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{\mathrm{IF}}=-1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{\mathrm{FJ}}=0+3-3=0$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FIJ) est un vecteur normal à ce plan.

b) D'après le résultat précédent on sait que :

$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathrm{FIJ}) \iff -1x+3y+5z=d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.

Or $\mathrm{F}\in(\mathrm{FIJ}) \iff -1+0+5=d=0 \iff d=4$.

Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\mathrm{FIJ}) \iff -x+3y+5z-4=0$.

2) a) Si (d) est orthogonale au plan (FIJ), tout vecteur directeur de (d), donc en particulier $\overrightarrow{\mathrm{B}M}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ précédent.

Il existe donc $t\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{B}M}=t\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl}x-1&=&-t\\y-0&=&3t\\z-0&=&5t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr}x&=&1-t\\y&=&3t\\z&=&5t\end{array}\right.$$

Conclusion $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(d) \iff \left\{\begin{array}{rcr}x&=&1-t\\y&=&3t\\z&=&5t\end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$.

b) $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ a ses coordonnées qui vérifient les équations paramétriques de (d) et l'équation cartésienne du plan, soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&1-t\\y&=&3t\\z&=&5t\\-x+3y+5z-4&=&0\end{array}\right. \Rightarrow -1+t+9t+25t-4=0 \iff 35t=5 \iff$$

$7t=1 \iff t=\dfrac{1}{7}$.

Les coordonnées de M sont donc $\mathrm{M}\left(1-\dfrac{1}{7}\,;\,3\times\dfrac{1}{7}\,;\,5\times\dfrac{1}{7}\right)$, donc $\mathrm{M}\left(\dfrac{6}{7}\,;\,\dfrac{3}{7}\,;\,\dfrac{5}{7}\right)$.

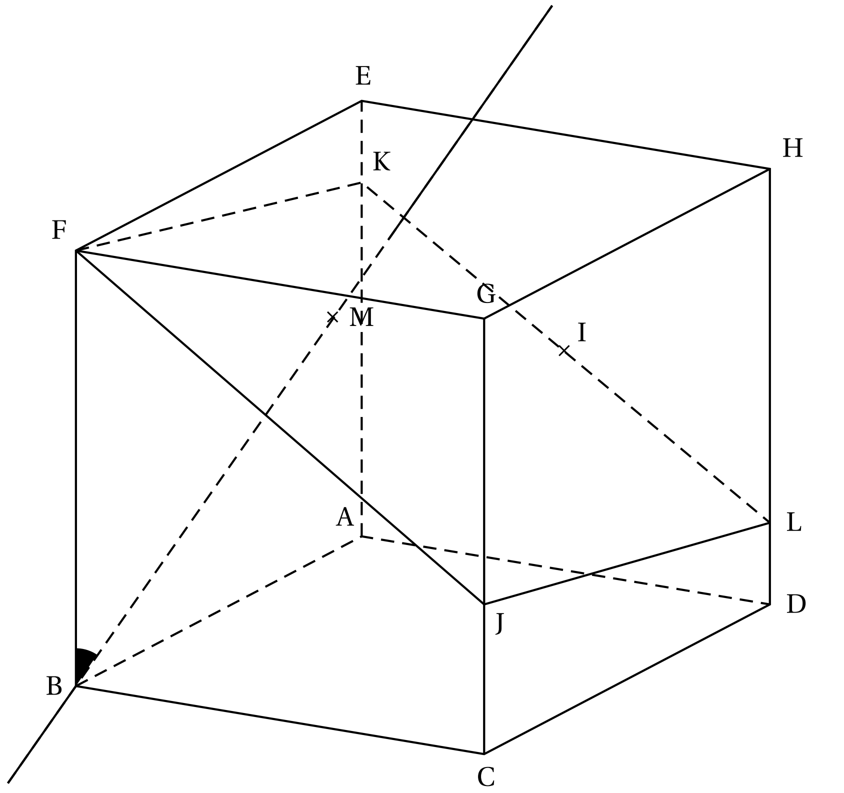


Figure 1

3) **a)** On a $\overrightarrow{\text{BM}}\begin{pmatrix}\frac{6}{7}-1\\ \frac{3}{7}\\ \frac{5}{7}\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{BM}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}\\ \frac{3}{7}\\ \frac{5}{7}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BF}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\text{BM}}.\overrightarrow{\text{BF}} = \frac{5}{7}$.

b) On sait que le produit scalaire peut aussi s'écrire :
$\overrightarrow{\text{BM}}.\overrightarrow{\text{BF}} = \text{BM} \times \text{BF} \times \cos\widehat{\text{MBF}}$ (1).
De façon évidente BF = 1 ; $\text{BM}^2 = \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} + \frac{9}{49} + \frac{1}{49} + \frac{25}{49} = \frac{35}{49}$.
Donc $\text{BM} = \frac{\sqrt{35}}{7}$.
L'égalité (1) s'écrit donc : $\frac{5}{7} = 1 \times \frac{\sqrt{35}}{7} \times \cos\widehat{\text{MBF}} \iff \cos\widehat{\text{MBF}} = \frac{5}{\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{5}{7}}$.
La calculatrice donne $\widehat{\text{MBF}} \approx 32,31°$ soit 32° au degré près.

Partie B

Dans cette partie, J est un point quelconque du segment [CG].
Ses coordonnées sont donc $(1\ ;\ 1\ ;\ a)$, où a est un réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

1) Les faces (BCGF) et (ADHE) sont parallèles ; le plan (FIJ) les coupent donc suivant deux parallèles (FJ) et (KL).

De même les faces (ABFE) et (DCGH) sont parallèles ; le plan (FIJ) les coupent donc suivant deux parallèles (FK) et (JL).

Le quadrilatère (FJLK) ayant ses côtés opposés parallèles est donc un parallélogramme.

2) On a $\text{FJ}^2 = 1 + (a-1)^2$ et $\text{JL}^2 = 1 + \frac{a^2}{4}$.

FKLJ est un losange si deux de ses côtés consécutifs ont la même longueur, d'où

$\text{FJ} = \text{JL} \Rightarrow \text{FJ}^2 = \text{JL}^2 \iff 1 + (a-1)^2 = 1 + \frac{a^2}{4} \iff (a-1)^2 = \frac{a^2}{4} \iff 4(a-1)^2 = a^2 \iff 4(a-1) - a^2 = 0 \iff$
$[2(a-1)+a]\,[2(a-1)-a] = 0 \iff (3a-2)(a-2) = 0 \iff a = \frac{2}{3}$ ou $x = 2$.

Or $0 \leqslant a \leqslant 1$, donc il existe une seule valeur de a pour laquelle le quadrilatère FKLJ est un losange : $a = \frac{2}{3}$.