EXERCICE B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme népérien, dérivation

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,4]$ par :

$$f(x) = -30x + 50 + 35\ln x.$$

1) On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;\,4]$, montrer que :

$$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

b) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

c) En déduire les variations de f sur ce même intervalle.

2) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;\,4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3) Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\,;\,4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1\,;\,4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1) D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.

On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2) Pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

3) **a)** À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.

b) En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

Correction

EXERCICE B

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

1) **a)** Sur l'intervalle $[1\,;4]$, $f'(x) = -30 + \dfrac{35}{x} = \dfrac{-30x+35}{x} = \dfrac{35-30x}{x}$.

b) Puisque $1 \leqslant x \leqslant 4$, $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $35 - 30x = 5(7-6x)$ donc du facteur $7-6x$.

$7 - 6x > 0 \iff 7 > 6x \iff \dfrac{7}{6} > x \iff x < \dfrac{7}{6}$;

$7 - 6x < 0 \iff 7 < 6x \iff \dfrac{7}{6} <> x \iff x > \dfrac{7}{6}$;

$7 - 6x = 0 \iff 7 = 6x \iff \dfrac{7}{6} = x \iff x = \dfrac{7}{6}$.

c) La fonction f est donc croissante sur $\left[1\,;\,\dfrac{7}{6}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{7}{6}\,;\,4\right]$ et a donc un maximum : $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = -30 \times \dfrac{7}{6} + 50 + 35\ln\dfrac{7}{6} = -35 + 50 + 35\ln\dfrac{7}{6} = 15 + 35\ln\dfrac{7}{6} \approx 20,4$.

2) f décroit sur $\left[\dfrac{7}{6}\,;\,4\right]$ de $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = 15 + 35\ln\dfrac{7}{6} \approx 20,4$ à $f(4) = -120 + 50 + 35\ln 4 = 35\ln 4 - 70 \approx -21,5$.

x	1		$\frac{7}{6}$		α		4
f	20	$\nearrow$	$\approx 20,4$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\approx -21,4$

Sur l'intervalle $\left[\dfrac{7}{6}\,;\,4\right]$, f est continue et strictement décroissante.

Comme $0 \in \left[f\left(\frac{7}{6}\right)\,;\,f(4)\right]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un réel unique α de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 0$.

- On a $f(2) \approx 14,26$ et $f(3) \approx -1,54$, donc $2 < \alpha < 3$;
- On a $f(2,9) \approx 0,26$ et $f(3,0) \approx -1,54$, donc $2,9 < \alpha < 3,0$;
- On a $f(2,91) \approx 0,09$ et $f(2,92) \approx -0,09$, donc $2,91 < \alpha < 2,92$;
- On a $f(2,914) \approx 0,0013$ et $f(2,915) \approx -0,005$, donc $2,914 < \alpha < 2,915$.

3) On a donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;\,\alpha]$ et $f(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\,;\,4]$.

Partie 2 : Optimisation

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1) 2 500 litres correspondent à $x = 2,5$ et $B(2,5) = -15 \times 2,5^2 + 15 \times 2,5 + 35 \times 2,5 \times \ln 2,5 \approx 23{,}925\,4$ soit environ 23 925 €.

2) La fonction B est dérivable sur $[1\,;4]$ et sur cet intervalle :

$B'(x) = -30x + 15 + 35\ln x + 35x \times \dfrac{1}{x} = 50 - 30x + 35\ln x = f(x)$.

3) **a)** D'après la partie 1, $f(x) = B'(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;\,\alpha]$: la fonction B est donc croissante sur $[1\,;\,\alpha]$.
De même $f(x) = B'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\,;\,4]$: la fonction B est donc décroissante sur $[1\,;\,\alpha]$.
Conclusion : $B(\alpha)$ est le maximum de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;4]$.

b) $B(\alpha) = -15\alpha^2 + 15\alpha + 35\alpha\ln\alpha$.
En utilisant la valeur approchée de α trouvée dans la partie 1, on a :
$B(\alpha) \approx -15 \times 2,914^2 + 15 \times 2,914 + 35 \times 2,914 \times \ln 2,914 \approx 25,4201$, soit environ 25 420 € à l'euro près.
Il faut donc que l'entreprise vende 2 914 litres de jus de fruits pour faire un bénéfice maximal.