Exercices TVI

Exercice 1

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 200$.

- **a)** Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- **b)** Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur son ensemble de définition.
- **c)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.
- **d)** Déterminer une valeur approchée de α au centième près.
- **e)** En déduire le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

- **a)** Expliquer pourquoi l'ensemble de définition de g est $[\alpha\ ;\ +\infty[$.
- **b)** Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
- **c)** Calculer $g'(x)$.
- **d)** Dresser le tableau de variations complet de la fonction g sur son ensemble de définition.
- **e)** Montrer que l'équation $g(x) = 20$ admet une unique solution β sur son ensemble de définition et donner un encadrement de β à 10^{-2} près.

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x^4 + 3x^3 + 1$.

1) Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction g sur son ensemble de définition.

3)
- **a)** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 sur $\mathbb{R}$.
- **b)** Donner un encadrement d'amplitude $0,1$ de chaque solution.

4) Déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Exercice 3

1) Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \left(2x^3 - 5\right)^4$. Calculer $f_1'(x)$.

2) Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = \sqrt{2x^2 - x + 1}$.
Justifier que f_2 est bien définie sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f_2'(x)$.

Correction

Exercice 1

1) **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	244	$\searrow$	119	$\nearrow$	$+\infty$

c)
- f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.
- f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-2]$ (sur $[-2\,;\,+\infty[$, le minimum est positif (119) donc l'équation n'a pas de solution)
- $f(-2) = 244$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ or $0 \in\ ]-\infty\,;\,244]$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

d) $\alpha \approx -5,35$

e)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2) **a)** g est définie si f est positive donc, d'après la question précédente, g est définie sur $[\alpha\,;\,+\infty[$

b) g est la composée de la fonction f suivie de la fonction racine carrée.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
$f(\alpha) = 0$ et $\sqrt{0} = 0$ donc $g(\alpha) = 0$

c) $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \dfrac{6x^2 - 6x - 36}{2\sqrt{2x^3 - 3x^2x - 36x + 200}}$

d)

x	α		-2		3		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{244}$	$\searrow$	$\sqrt{119}$	$\nearrow$	$+\infty$

e)
- g est continue sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ comme composée d'une fonction racine et d'une fonction polynôme.
- g est strictement croissante sur $[3\,;\,+\infty[$ (sur $[\alpha\,;\,3]$, le maximum est $\sqrt{244}$ qui est inférieur à 20 donc l'équation n'a pas de solution)
- $g(3) = \sqrt{119}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ or $20 \in [\sqrt{119}\,;\,+\infty[$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 20$ admet une unique solution β sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ et $6,56 < \beta < 6,57$

Exercice 2

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-3x^4\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-3x^4\right) = -\infty$.

2) $g'(x) = -12x^3 + 9x^2 = x^2(-12x + 9)$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$-12x+9$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{337}{256} \approx 1{,}31$	$\searrow$	$-\infty$

3) **a)**

- <u>Sur $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{4}\right]$:</u>
  - g est continue car dérivable
  - g est strictement croissante
  - $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \\ g\left(\frac{3}{4}\right) \approx 1{,}31\end{array}\right\}$ or $0 \in]-\infty\,;\,1{,}31]$

  Donc d'après le corollaire du TVI, $g(x) = 0$ admet une unique solution α_1 sur $\left]-\infty\,;\,\frac{3}{4}\right]$

- <u>Sur $\left]\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right]$:</u>
  - g est continue car dérivable
  - g est strictement décroissante
  - $\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \\ g\left(\frac{3}{4}\right) \approx 1{,}31\end{array}\right\}$ or $0 \in]-\infty\,;\,1{,}31]$

  Donc d'après le corollaire du TVI, $g(x) = 0$ admet une unique solution α_2 sur $\left]\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right]$

b) $-0{,}6 < \alpha_1 < -0{,}5$ et $1{,}1 < \alpha_2 < 1{,}2$

4)

x	$-\infty$		α_1		α_2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

<u>Exercice 3</u>

1) $f_1'(x) = 4 \times \left(2x^3 - 5\right)^3 \times (6x^2) = 24x^2\left(2x^3 - 5\right)^3$

2) f_2 est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $2x^2 - x + 1$ est toujours positif ($\Delta = -7$ donc $2x^2 - x + 1$ est toujours positive (signe de $a = 2$))

$f_2'(x) = \dfrac{4x-1}{2\sqrt{2x^2 - x + 1}}$