Fiche d'entraînement : équations et inéquations avec $\ln$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $\ln(x^2-5x+4)=\ln(2x+4)$

2) $\ln(3x-9)\leqslant\ln(-2x+10)$

3) $\ln(x^2+5x+12)>\ln(4x-1)$

4) $\ln(-x+3)=\ln(-2x-6)$

5) $\ln(3x+4)\geqslant\ln(2x^2-3x+5)$

6) $\ln(2x-5)+\ln(3x+3)=0$

7) $\ln(4x+3)+\ln(2x-5)\geqslant 0$

8) $\ln(2x-3)+\ln(2x-8)=\ln(-x+10)$

9) $\ln(3x+5)+\ln(2x)\leqslant\ln(3x-3)$

10) $\ln(x+2)-\ln(2x+3)=0$

11) $\ln(3x-5)-\ln(4x+1)\leqslant\ln(x-1)$

12) $\ln(3x-7)+\ln(2x+4)\geqslant\ln(-2x+12)$

Solutions

1)

- Condition d'existence :

  ✲ $x^2-5x+4>0$:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Donc $I_1=]-\infty\,;\,1[\cup]4\,;\,+\infty[$

  ✲ $2x+4>0 \iff x>-2$ donc $I_2=]-2\,;\,+\infty[$

  ✲ Donc l'équation est définie sur $I=I_1\cap I_2=]-2\,;\,1[\cup]4\,;\,+\infty[$

- On résout :
  $\ln(x^2-5x+4)=\ln(2x+4) \iff \mathrm{e}^{\ln(x^2-5x+4)}=\mathrm{e}^{\ln(2x+4)} \iff x^2-5x+4=2x+4 \iff x^2-7x=0$ et on obtient donc $x=0$ ou $x=7$.

- Conclusion : $0\in I$ et $7\in I$ donc $\boxed{S=\{0\,;\,7\}}$.

2)

- Condition d'existence :

  ✲ $3x-9>0 \iff x>3$ donc $I_1=]3\,;\,+\infty[$

  ✲ $-2x+10>0 \iff x<5$ donc $I_2=]-\infty\,;\,5[$

  ✲ Donc l'inéquation est définie sur $I=I_1\cap I_2=]3\,;\,5[$

- On résout :
  $\ln(3x-9)\leqslant\ln(-2x+10) \iff \mathrm{e}^{\ln(3x-9)}\leqslant\mathrm{e}^{\ln(-2x+10)} \iff 3x-9\leqslant-2x+10 \iff x\leqslant\dfrac{19}{5}$ donc $J=\left]-\infty\,;\,\dfrac{19}{5}\right]$

- Conclusion : $S=I\cap J=\boxed{\left]3\,;\,\dfrac{19}{5}\right]=S}$

3)

- Condition d'existence :

  ✲ $x^2+5x+12>0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2+5x+12$		$+$	

  donc $I_1=\mathbb{R}$

  ✲ $4x-1>0 \iff x>\dfrac{1}{4}$ donc $I_2=\left]\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$

  ✲ Donc l'inéquation est définie sur $I=I_1\cap I_2=\left]\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$

- On résout :
  $\ln(x^2+5x+12)>\ln(4x-1) \iff \mathrm{e}^{\ln(x^2+5x+12)}>\mathrm{e}^{\ln(4x-1)} \iff x^2+5x+12>4x-1 \iff x^2+x+13>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2+x+13		$+$	

  donc $J=\mathbb{R}$

- Conclusion : $S=I\cap J=\boxed{\left]\dfrac{1}{4}\,;\,+\infty\right[}$

4)

- Condition d'existence :

  ✲ $-x+3>0 \iff x<3$ donc $I_1=]-\infty\,;\,3[$

  ✲ $-2x-6>0 \iff x<-3$ donc $I_2=]-\infty\,;\,-3[$

  ✲ Donc l'équation est définie sur $I=I_1\cap I_2=]-\infty\,;\,-3[$

- On résout :
  $\ln(-x+3)=\ln(-2x-6) \iff \mathrm{e}^{\ln(-x+3)}=\mathrm{e}^{\ln(-2x-6)} \iff -x+3=-2x-6 \iff x=-9$

- Conclusion : $-9\in I$ donc $\boxed{S=\{-9\}}$

5)

- <u>Condition d'existence :</u>

  ✻ $3x+4>0 \iff x>-\dfrac{4}{3}$ donc $I_1=\left]-\dfrac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$

  ✻ $2x^2-3x+5>0$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$2x^2-3x+5$	$+$

  donc $I_2=\mathbb{R}$

  ✻ Donc l'inéquation est définie sur $I=I_1\cap I_2=\left]-\dfrac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$

- On résout :
  $\ln(3x+4)\geqslant\ln(2x^2-3x+5) \iff e^{\ln(3x+4)}\geqslant e^{\ln(2x^2-3x+5)} \iff 3x+4\geqslant 2x^2-3x+5 \iff -2x^2+6x-1\geqslant 0$

x	$-\infty$		$\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$		$\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+6x-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

  donc $J=\left[\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\ ;\ \dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right]$

- <u>Conclusion :</u> $S=I\cap J=\boxed{\left[\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\ ;\ \dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right]=S}$

6)

- <u>Condition d'existence :</u>

  ✻ $2x-5>0 \iff x>\dfrac{5}{2}$ donc $I_1=\left]\dfrac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[$

  ✻ $3x+3>0 \iff x>-1$ donc $I_2=]-1\ ;\ +\infty[$

  ✻ Donc l'équation est définie sur $I=I_1\cap I_2=\left]\dfrac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[$

- On résout :
  $\ln(2x-5)+\ln(3x+3)=0 \iff \ln\left((2x-5)\times(3x+3)\right)=0 \iff \ln(6x^2-9x-15)=0 \iff e^{\ln(6x^2-9x-15)}=e^0$
  $\iff 6x^2-9x-15=1 \iff 6x^2-9x-16=0$ et on obtient :

  $x_1=\dfrac{9-\sqrt{465}}{12}$ ou $x_2=\dfrac{9+\sqrt{465}}{12}$

- <u>Conclusion :</u> $x_1\notin I$ et $x_2\in I$ donc $\boxed{S=\left\{\dfrac{9+\sqrt{465}}{12}\right\}}$

7)

- <u>Condition d'existence :</u>

  ✻ $4x+3>0 \iff x>-\dfrac{3}{4}$ donc $I_1=\left]-\dfrac{3}{4}\ ;\ +\infty\right[$

  ✻ $2x-5>0 \iff x>\dfrac{5}{2}$ donc $I_2=\left]\dfrac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[$

  ✻ Donc l'inéquation est définie sur $I=I_1\cap I_2=\left]\dfrac{5}{2}\ ;\ +\infty\right[$

- On résout :
  $\ln(4x+3)+\ln(2x-5)\geqslant 0 \iff \ln\left((4x+3)\times(2x-5)\right)\geqslant 0 \iff \ln(8x^2-14x-15)\geqslant 0 \iff e^{\ln(8x^2-14x-15)}\geqslant e^0$
  $\iff 8x^2-14x-15\geqslant 1 \iff 8x^2-14x-16\geqslant 0$

x	$-\infty$		$\dfrac{7-\sqrt{177}}{8}$		$\dfrac{7+\sqrt{177}}{8}$		$+\infty$
$8x^2-14x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Donc $J=\left]-\infty\ ;\ \dfrac{7-\sqrt{177}}{8}\right]\cup\left[\dfrac{7+\sqrt{177}}{8}\ :\ +\infty\right[$

- <u>Conclusion :</u> $S = I \cap J =$ $\boxed{\left[\dfrac{7+\sqrt{177}}{8}\ ;\ +\infty\right[= S}$

8)
- <u>Condition d'existence :</u>
  - ✼ $2x-3>0 \iff x>\dfrac{3}{2}$ donc $I_1 = \left]\dfrac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$
  - ✼ $2x-8>0 \iff x>4$ donc $I_2 =]4\ ;\ +\infty[$
  - ✼ $-x+10>0 \iff x<10$ donc $I_3 =]-\infty\ ;\ 10[$
  - ✼ Donc l'équation est définie sur $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3 =]4\ ;\ 10[$
- On résout :
  $\ln(2x-3)+\ln(2x-8) = \ln(-x+10) \iff \ln\left((2x-3)\times(2x-8)\right) = \ln(-x+10) \iff \ln(4x^2-22x+24) = \ln(-x+10)$
  $\iff \mathrm{e}^{\ln(4x^2-22x+24)} = \mathrm{e}^{\ln(-x+10)} \iff 4x^2-22x+24 = -x+10$
  $\iff 4x^2-21x+14 = 0$ et on obtient :
  $x_1 = \dfrac{21-\sqrt{217}}{8}$ et $x_2 = \dfrac{21+\sqrt{217}}{8}$
- <u>Conclusion :</u> $x_1 \notin I$ et $x_2 \in I$ donc $\boxed{S = \left\{\dfrac{21+\sqrt{217}}{8}\right\}}$

9)
- <u>Condition d'existence :</u>
  - ✼ $3x+5>0 \iff x>-\dfrac{5}{3}$ donc $I_1 = \left]-\dfrac{5}{3}\ ;\ +\infty\right[$
  - ✼ $2x>0 \iff x>0$ donc $I_2 =]0\ ;\ +\infty[$
  - ✼ $3x-3>0 \iff x>1$ donc $I_3 =]1\ ;\ +\infty[$
  - ✼ Donc l'inéquation est définie sur $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3 = [1\ ;\ +\infty[$
- On résout :
  $\ln(3x+5)+\ln(2x) \leqslant \ln(3x-3) \iff \ln\left((3x+5)\times 2x\right) \leqslant \ln(3x-3) \iff \ln(6x^2+10x) \leqslant \ln(3x-3)$
  $\iff \mathrm{e}^{\ln(6x^2+10x)} \leqslant \mathrm{e}^{\ln(3x-3)} \iff 6x^2+10x \leqslant 3x-3 \iff 6x^2+7x+3 \leqslant 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$6x^2+7x+3$	$+$

donc $J = \varnothing$

- <u>Conclusion :</u> $S = I \cap J =$ $\boxed{\varnothing = S}$

10)
- <u>Condition d'existence :</u>
  - ✼ $x+2>0 \iff x>-2$ donc $I_1 =]-2\ ;\ +\infty[$
  - ✼ $2x+3>0 \iff x>-\dfrac{3}{2}$ donc $I_2 = \left]-\dfrac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$
  - ✼ Donc l'équation est définie sur $I = I_1 \cap I_2 = \left]-\dfrac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$
- On résout :
  $\ln(x+2)-\ln(2x+3) = 0 \iff \ln\left(\dfrac{x+2}{2x+3}\right) = 0 \iff \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{x+2}{2x+3}\right)} = \mathrm{e}^0 \iff \dfrac{x+2}{2x+3} = 1 \iff x+2 = 2x+3 \iff x = -1$
- <u>Conclusion :</u> $-1 \in I$ donc $\boxed{S = \{-1\}}$

11)
- <u>Condition d'existence :</u>
  - ✼ $3x-5>0 \iff x>\dfrac{5}{3}$ donc $I_1 = \left]\dfrac{5}{3}\ ;\ +\infty\right[$
  - ✼ $4x+1>0 \iff x>-\dfrac{1}{4}$ donc $I_2 = \left]-\dfrac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$
  - ✼ $x-1>0 \iff x>1$ donc $I_3 =]1\ ;\ +\infty[$
  - ✼ Donc l'inéquation est définie sur $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \left]\dfrac{5}{3}\ ;\ +\infty\right[$
- On résout :
  $\ln(3x-5)-\ln(4x+1) \leqslant \ln(x-1) \iff \ln\left(\dfrac{3x-5}{4x+1}\right) \leqslant \ln(x-1) \iff \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{3x-5}{4x+1}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{\ln(x-1)} \iff \dfrac{3x-5}{4x+1} \leqslant x-1$

$$\iff \frac{3x-5}{4x+1} \leqslant \frac{(x-1)(4x+1)}{4x+1} \iff \frac{3x-5-(x-1)(4x+1)}{4x+1} \leqslant 0$$

$$\iff \frac{-4x^2+6x-4}{4x+1} \leqslant 0$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$-4x^2+6x-4$		$-$		$-$	
$4x+1$		$-$	0	$+$	
$\frac{-4x^2+6x-4}{4x+1}$		$+$	$\|$	$-$	

donc $J = \left]-\frac{1}{4}\,;\,+\infty\right[$

- <u>Conclusion :</u> $S = I \cap J = \boxed{\left]\frac{5}{3}\,;\,+\infty\right[}$

12)
- <u>Condition d'existence :</u>
  - ✲ $3x-7>0 \iff x>\frac{7}{3}$ donc $I_1 = \left]\frac{7}{3}\,;\,+\infty\right[$
  - ✲ $2x+4>0 \iff x>-2$ donc $I_2 =]-2\,;\,+\infty[$
  - ✲ $-2x+12>0 \iff x<6$ donc $I_3 =]-\infty\,;\,6[$
  - ✲ Donc l'inéquation est définie sur $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \left]\frac{7}{3}\,;\,6\right[$
- On résout :

$\ln(3x-7)+\ln(2x+4) \geqslant \ln(-2x+12) \iff \ln\left((3x-7)\times(2x+4)\right) \geqslant \ln(-2x+12)$

$\iff \ln(6x^2-2x-28) \geqslant \ln(-2x+12) \iff e^{\ln(6x^2-2x-28)} \geqslant e^{\ln(-2x+12)}$

$\iff 6x^2-2x-28 \geqslant -2x+12 \iff 6x^2-40 \geqslant 0$

x	$-\infty$		$\frac{-2\sqrt{15}}{3}$		$\frac{2\sqrt{15}}{3}$		$+\infty$
$6x^2-40$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $J = \left]-\infty\,;\,\frac{-2\sqrt{15}}{3}\right] \cup \left[\frac{2\sqrt{15}}{3}\,;\,+\infty\right[$

- <u>Conclusion :</u> $S = I \cap J = \boxed{\left[\frac{2\sqrt{25}}{3}\,;\,6\right[}$