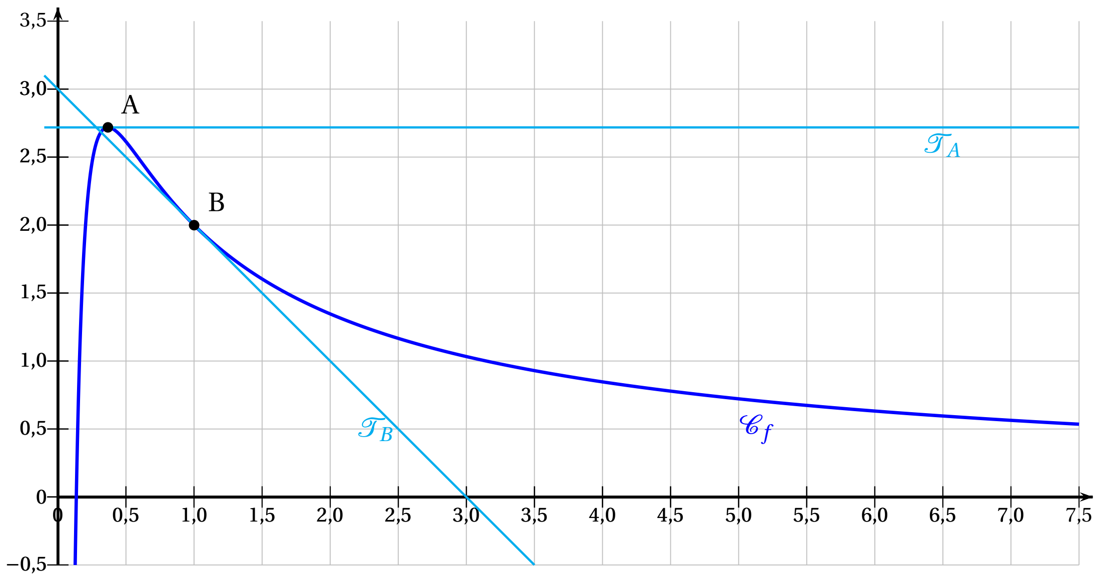
**EXERCICE A** **5 points**

| **Principaux domaines abordés** |
|---|
| Logarithme |
| Dérivation, convexité, limites |

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$;
- la tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\text{e}}\,;\,\text{e}\right)$;
- la tangente $\mathscr{T}_B$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$.




On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.

**PARTIE I**

**1)** Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{\text{e}}\right)$ et de $f'(1)$.

**2)** En déduire une équation de la droite $\mathscr{T}_B$.

**PARTIE II**

On suppose maintenant que la fonction $f$ est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

**1)** Par le calcul, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.

**2)** Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**3)** Montrer que, pour tout $x \in ]0\,;\,\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$

**4)** Dresser le tableau de variations de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

**5)** On note $f''$ la fonction dérivée seconde de $f$ On admet que, pour tout $x \in ]0\,;\,+\infty[$

$$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel $f$ est convexe.

# Correction

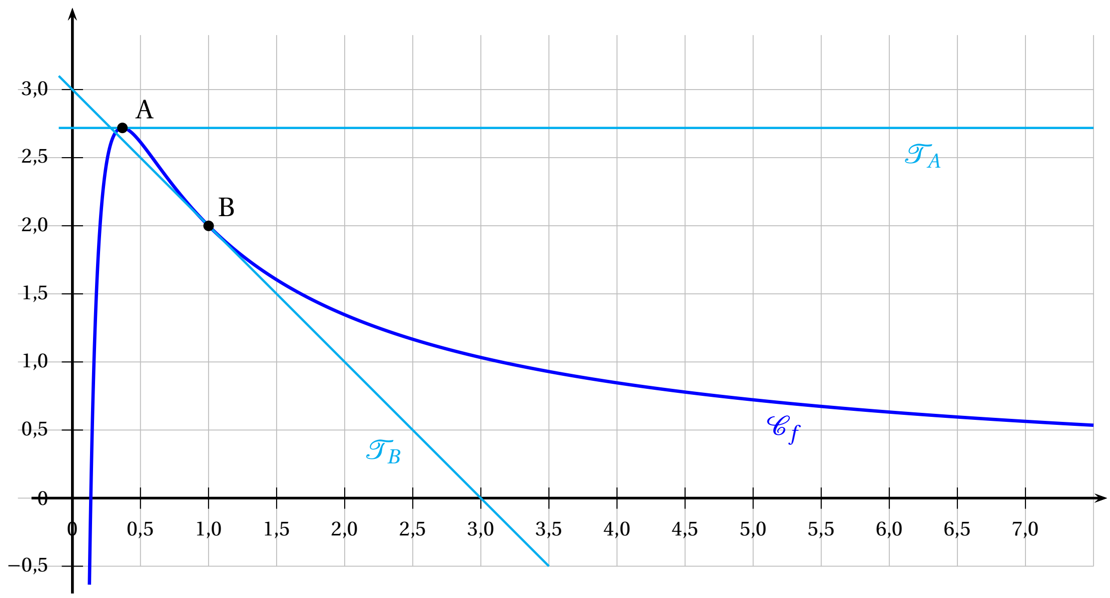
**EXERCICE A** **exercice au choix** **5 points**

| **Principaux domaines abordés** |
|---|
| Logarithme |
| Dérivation, convexité, limites |

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ ;
- la tangente $\mathscr{T}_A$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,\mathrm{e}\right)$ ;
- la tangente $\mathscr{T}_B$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$.

La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,3)$.




On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.

**PARTIE I**

**1)**
- La droite $\mathscr{T}_A$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,\mathrm{e}\right)$ ; elle a donc comme coefficient directeur $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.
  La droite $\mathscr{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul.
  On peut donc déduire que $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 0$.
- La droite $\mathscr{T}_B$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$, donc elle a pour coefficient directeur $f'(1)$.
  La droite $\mathscr{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,3)$, donc on peut en déduire que son coefficient directeur est $\dfrac{3-0}{0-3} = -1$.
  On a donc $f'(1) = -1$.

**2)** La droite $\mathscr{T}_B$ a pour coefficient directeur $-1$ et 3 pour ordonnée à l'origine, donc elle a pour équation : $y = -x+3$.

**PARTIE II**

On suppose maintenant que la fonction $f$ est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2+\ln(x)}{x}$.

**1)**
- $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{2+\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}{\frac{1}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}\,(2-\ln(\mathrm{e})) == \mathrm{e}\,(2-1) = \mathrm{e}$ donc $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_f$.

- $f(1) = \dfrac{2+\ln(1)}{1} = 2$ donc $\mathrm{B} \in \mathscr{C}_f$.
- La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est solution de l'équation $f(x) = 0$. On résout dans $]0\,;\,+\infty[$ cette équation.

  $f(x) = 0 \iff \dfrac{2+\ln(x)}{x} = 0 \iff 2+\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -2 \iff x = \mathrm{e}^{-2}$

  Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point unique de coordonnées $\left(\mathrm{e}^{-2}\,;\,0\right)$.

**2)** Calculs des limites.

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2+\ln(x)) = -\infty\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2+\ln(x)) \times \frac{1}{x} = -\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

**3)** Pour $x \in ]0\,;\,\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - (2+\ln(x))\times 1}{x^2} = \dfrac{1-2-\ln(x)}{x^2} = \dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$.

**4)** $f'(x)$ est du signe de $-1-\ln(x)$ ; $-1-\ln(x) > 0 \iff -1 > \ln(x) \iff x < \mathrm{e}^{-1}$

On dresse le tableau de variations de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\mathrm{e}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $\mathrm{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

**5)** On admet que, pour tout $x \in ]0\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3}$.

La fonction $f$ est convexe sur les intervalles sur lesquels $f''$ est positive.

Sur $]0\,;\,+\infty$, $x^3 > 0$ donc

$f''(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3} \geqslant 0 \iff 1+2\ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -\dfrac{1}{2} \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

Donc le plus grand intervalle sur lequel la fonction $f$ est convexe est $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$.