# Projeté orthogonal d'un point sur un plan

Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du point $H$ projeté orthogonal du point $A$ sur le plan $\mathscr{P}$ :

**1)** $A(-6\ ;\ 8\ ;\ 3)$ et $\mathscr{P} : -2x+4y+3z+5=0$.

**2)** $A(1\ ;\ 3\ ;\ -9)$ et $\mathscr{P} : 3x-2y+2z+4=0$.

**3)** $A(18\ ;\ 9\ ;\ -4)$ et $\mathscr{P} : 4x+3y-z+1=0$.

**4)** $A(9\ ;\ 3\ ;\ -6)$ et $\mathscr{P} : -3x-2y+4z-1=0$.

**5)** $A(-11\ ;\ -14\ ;\ 5)$ et $\mathscr{P} : 2x+5y+z-3=0$.

**6)** $A(2\ ;\ -4\ ;\ -7)$ et $\mathscr{P} : 4x-4y+3z-3=0$.

**7)** $A(27\ ;\ 7\ ;\ 9)$ et $\mathscr{P} : 5x+2y-2z+1=0$.

**8)** $A(-4\ ;\ 6\ ;\ 16)$ et $\mathscr{P} : -x+2y-z+6=0$.

**9)** $A(30\ ;\ -13\ ;\ 15)$ et $\mathscr{P} : -6x+3y-2z+4=0$.

**10)** $A(11\ ;\ 18\ ;\ -30)$ et $\mathscr{P} : 2x+3y-5z+2=0$.

# Solutions

**1)** Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de la droite $(AH)$ donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(AH)$ et donc une représentation paramétrique de la droite $(AH)$ est : $\begin{cases} x=-6-2t\\ y=8+4t\\ z=3+3t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

En utilisant l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ (car $H\in\mathscr{P}$) on obtient donc : $-2\underbrace{(-6-2t)}_{x}+4\underbrace{(8+4t)}_{y}+3\underbrace{(3+3t)}_{z}+5=0$, ce qui donne : $12+4t+32+16t+9+9t+5=0 \iff 29t=-58 \iff t=\dfrac{-58}{29}=-2$.

Et donc, en remplaçant $t$ par $-2$ dans la représentation paramétrique de $(AH)$ (car $H\in(AH)$) on obtient :
$\begin{cases} x_H=-6-2\times(-2)=-2\\ y_H=8+4\times(-2)=0\\ z_H=3+3\times(-2)=-3\end{cases}$ et donc $\boxed{H(-2\,;\,0\,;\,-3)}$.

**2)** Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de la droite $(AH)$ donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(AH)$ et donc une représentation paramétrique de la droite $(AH)$ est : $\begin{cases} x=1+3t\\ y=3-2t\\ z=-9+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

En utilisant l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ (car $H\in\mathscr{P}$) on obtient donc : $3\underbrace{(1+3t)}_{x}-2\underbrace{(3-2t)}_{y}+2\underbrace{(-9+2t)}_{z}+4=0$, ce qui donne : $3+9t-6+4t-18+4t+4=0 \iff 17t=17 \iff t=\dfrac{17}{17}=1$.

Et donc, en remplaçant $t$ par 1 dans la représentation paramétrique de $(AH)$ (car $H\in(AH)$) on obtient :
$\begin{cases} x_H=1+3\times1=4\\ y_H=3-2\times=1\\ z_H=-9+2\times1=-7\end{cases}$ et donc $\boxed{H(4\,;\,1\,;\,-7)}$.

**3)** Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de la droite $(AH)$ donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(AH)$ et donc une représentation paramétrique de la droite $(AH)$ est : $\begin{cases} x=18+4t\\ y=9+3t\\ z=-4-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

En utilisant l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ (car $H\in\mathscr{P}$) on obtient donc : $4\underbrace{(18+4t)}_{x}+3\underbrace{(9+3t)}_{y}-\underbrace{(-4-t)}_{z}+1=0$, ce qui donne : $72+16t+27+9t+4+t+1=0 \iff 26t=-104 \iff t=\dfrac{-104}{26}=-4$.

Et donc, en remplaçant $t$ par $-4$ dans la représentation paramétrique de $(AH)$ (car $H\in(AH)$) on obtient :
$\begin{cases} x_H=18+4\times(-4)=2\\ y_H=9+3\times(-4)=-3\\ z_H=-4-(-4)=0\end{cases}$ et donc $\boxed{H(2\,;\,-3\,;\,0)}$.

**4)** Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de la droite $(AH)$ donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(AH)$ et donc une représentation paramétrique de la droite $(AH)$ est : $\begin{cases} x=9-3t\\ y=3-2t\\ z=-6+4t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

En utilisant l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ (car $H\in\mathscr{P}$) on obtient donc : $-3\underbrace{(9-3t)}_{x}-2\underbrace{(3-2t)}_{y}+4\underbrace{(-6+4t)}_{z}-1=0$, ce qui donne : $-27+9t-6+4t-24+16t-1=0 \iff 29t=58 \iff t=\dfrac{58}{29}=2$.

Et donc, en remplaçant $t$ par 2 dans la représentation paramétrique de $(AH)$ (car $H\in(AH)$) on obtient :
$\begin{cases} x_H=9-3\times2=3\\ y_H=3-2\times2=-1\\ z_H=-6+4\times2=2\end{cases}$ et donc $\boxed{H(3\,;\,-1\,;\,2)}$.

**5)** Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de la droite $(AH)$ donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(AH)$ et donc une représentation paramétrique de la droite $(AH)$ est : $\begin{cases} x = -11+2t \\ y = -14+5t \\ z = 5+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

En utilisant l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ (car $H \in \mathscr{P}$) on obtient donc : $2\underbrace{(-11+2t)}_{x}+5\underbrace{(-14+5t)}_{y}+\underbrace{(5+t)}_{z}-3=0$, ce qui donne : $-22+4t-70+25t+5+t-3=0 \iff 30t=90 \iff t=\dfrac{90}{30}=3$.

Et donc, en remplaçant $t$ par 3 dans la représentation paramétrique de $(AH)$ (car $H \in (AH)$) on obtient :
$\begin{cases} x_H = -11+2\times 3 = -5 \\ y_H = -14+5\times 3 = 1 \\ z_H = 5+3 = 8 \end{cases}$ et donc $\boxed{H(-5\,;\,1\,;\,8)}$.

**6)** Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de la droite $(AH)$ donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\-4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(AH)$ et donc une représentation paramétrique de la droite $(AH)$ est : $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = -4-4t \\ z = -7+3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

En utilisant l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ (car $H \in \mathscr{P}$) on obtient donc : $4\underbrace{(2+4t)}_{x}-4\underbrace{(-4-4t)}_{y}+3\underbrace{(-7+3t)}_{z}-3=0$, ce qui donne : $8+16t+16+16t-21+9t-3=0 \iff 41t=0 \iff t=\dfrac{0}{41}=0$.

Et donc, en remplaçant $t$ par 0 dans la représentation paramétrique de $(AH)$ (car $H \in (AH)$) on obtient :
$\begin{cases} x_H = 2+4\times 0 = 2 \\ y_H = -4-4\times 0 = -4 \\ z_H = -7+3\times 0 = -7 \end{cases}$ et donc $\boxed{H(2\,;\,-4\,;\,-7)}$ (en fait $A=H$ car $A \in \mathscr{P}$).

**7)** Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de la droite $(AH)$ donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(AH)$ et donc une représentation paramétrique de la droite $(AH)$ est : $\begin{cases} x = 27+5t \\ y = 7+2t \\ z = 9-2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

En utilisant l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ (car $H \in \mathscr{P}$) on obtient donc : $5\underbrace{(27+5t)}_{x}+2\underbrace{(7+2t)}_{y}-2\underbrace{(9-2t)}_{z}+1=0$, ce qui donne : $135+25t+14+4t-18+4t+1=0 \iff 33t=-132 \iff t=\dfrac{132}{33}=-4$.

Et donc, en remplaçant $t$ par $-4$ dans la représentation paramétrique de $(AH)$ (car $H \in (AH)$) on obtient :
$\begin{cases} x_H = 27+5\times(-4) = 7 \\ y_H = 7+2\times(-4) = -1 \\ z_H = 9-2\times(-4) = 17 \end{cases}$ et donc $\boxed{H(7\,;\,-1\,;\,17)}$.

**8)** Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de la droite $(AH)$ donc $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(AH)$ et donc une représentation paramétrique de la droite $(AH)$ est : $\begin{cases} x = -4-t \\ y = 6+2t \\ z = 16-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

En utilisant l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ (car $H \in \mathscr{P}$) on obtient donc : $-\underbrace{(-4-t)}_{x}+2\underbrace{(6+2t)}_{y}-\underbrace{(16-t)}_{z}+6=0$, ce qui donne : $4+t+12+4t-16+t+6=0 \iff 6t=-6 \iff t=\dfrac{-6}{6}=-1$.

Et donc, en remplaçant $t$ par $-1$ dans la représentation paramétrique de $(AH)$ (car $H \in (AH)$) on obtient :
$\begin{cases} x_H = -4-(-1) = -3 \\ y_H = 6+2\times(-1) = 4 \\ z_H = 16-(-1) = 17 \end{cases}$ et donc $\boxed{H(-3\,;\,4\,;\,17)}$.

**9)** Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de la droite $(AH)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}-6\\3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(AH)$ et donc une représentation paramétrique de la droite $(AH)$ est : $\begin{cases} x = 30-6t \\ y = -13+3t \\ z = 15-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

En utilisant l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ (car $H \in \mathscr{P}$) on obtient donc : $-6\underbrace{(30-6t)}_{x}+3\underbrace{(-13+3t)}_{y}-2\underbrace{(15-2t)}_{z}+4=0$,

ce qui donne : $-180+36t-39+9t-30+4t+4=0 \iff 49t=245 \iff t=\dfrac{245}{49}=5$.

Et donc, en remplaçant $t$ par 5 dans la représentation paramétrique de $(AH)$ (car $H \in (AH)$) on obtient :

$\begin{cases} x_H = 30-6\times 5 = 0 \\ y_H = -13+3\times 5 = 2 \\ z_H = 15-2\times 5 = 5 \end{cases}$ et donc $\boxed{H(0\,;\,2\,;\,5}$.

**10)** Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est un vecteur directeur de la droite $(AH)$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(AH)$ et donc une représentation paramétrique de la droite $(AH)$ est : $\begin{cases} x = 11+2t \\ y = 18+3t \\ z = -30-5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

En utilisant l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ (car $H \in \mathscr{P}$) on obtient donc : $2\underbrace{(11+2t)}_{x}+3\underbrace{(18+3t)}_{y}-5\underbrace{(-30-5t)}_{z}+2=0$,

ce qui donne : $22+4t+54+9t+150+25t+2=0 \iff 38t=-228 \iff t=\dfrac{-228}{38}=-6$.

Et donc, en remplaçant $t$ par $-6$ dans la représentation paramétrique de $(AH)$ (car $H \in (AH)$) on obtient :

$\begin{cases} x_H = 11+2\times(-6) = -1 \\ y_H = 18+3\times(-6) = 0 \\ z_H = -30-5\times(-6) = 0 \end{cases}$ et donc $\boxed{H(-1\,;\,0\,;\,0)}$.