Fiche d'exercices : récurrence

Exercice 1 :
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 2 :
Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exercice 3 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer par récurrente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

Exercice 4 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Exercice 5 :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 < u_n \leqslant 1$.

Exercice 6 :
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 7 :
Soit $(u_,)$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Solutions :

Exercice 1 :

- **Initialisation :** pour $n = 0$, $S_0 = \sum_{k=0}^{0} k = 0$ et $\dfrac{0 \times (0+1)}{2} = 0$ donc l'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité :** on veut prouver que si $S_p = \sum_{k=0}^{p} k = \dfrac{p(p+1)}{2}$ alors $S_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} k = \dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$.

  $S_{p+1} = 0 + 1 + 2 + \cdots + p + (p+1) = S_p + (p+1) = \dfrac{p(p+1)}{2} + (p+1) = \dfrac{p(p+1) + 2(p+1)}{2}$ donc $S_{p+1} = \dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$ donc l'hérédité est vérifiée.

- **Conclusion :** l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

- **Initialisation :** pour $n = 1$, $S_1 = \dfrac{1}{1 \times (1+1)} = \dfrac{1}{2}$ et $1 - \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ donc l'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité :** on veut prouver que si $S_p = 1 - \dfrac{1}{p+1}$ alors $S_{p+1} = 1 - \dfrac{1}{p+2}$.

  $S_{p+1} = S_p + \dfrac{1}{(p+1)(p+2)} = 1 - \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{(p+1)(p+2)} = 1 - \dfrac{p+2}{(p+1)(p+2)} + \dfrac{1}{(p+1)(p+2)}$

  donc $S_{p+1} = 1 - \dfrac{p+2-1}{(p+1)(p+2)} = 1 - \dfrac{p+1}{(p+1)(p+2)}$ donc l'hérédité est vérifiée.

- **Conclusion :** l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 :

- **Initialisation :** pour $n = 0$, $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 2$ donc l'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité :** on veut prouver que si $0 < u_p < 2$ alors $0 < u_{p+1} < 2$

  $0 < u_p < 2$ donc $2 < 2 + u_p < 4$ et donc $\sqrt{2} < \sqrt{2 + u_p} < \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante. On obtient donc : $0 < \sqrt{2} < u_{p+1} < 2$ donc l'hérédité est vérifiée.

- **Conclusion :** l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 :

- **Initialisation :** pour $n = 0$, $u_0 = 3$ et $2^{0+1} + 1 = 2 + 1 = 3$ donc l'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité :** on veut prouver que si $u_p = 2^{p+1} + 1$ alors $u_{p+1} = 2^{p+2} + 1$

  $u_{p+1} = 2u_p - 1 = 2 \times (2^{p+1} + 1) - 1 = 2^{p+2} + 2 - 1 = 2^{p+2} + 1$ donc l'hérédité est vérifiée.

- **Conclusion :** l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 :

- **Initialisation :** pour $n = 1$, $u_1 = \dfrac{1+2u_0}{2+u_0} = \dfrac{1}{2}$ donc $0 < u_1 \leqslant 1$, donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité :** on veut prouver que si $0 < u_p \leqslant 1$ alors $0 < u_{p+1} \leqslant 1$

  Tout d'abord $u_p > 0$ donc $1+2u_p > 0$ et $2+u_p > 0$ donc $u_{p+1} = \dfrac{1+2u_p}{2+u_p} > 0$

  D'autre part $u_{p+1} - 1 = \dfrac{1+2u_p}{2+u_p} - 1 = \dfrac{u_p - 1}{2+u_p}$ et comme $u_p \leqslant 1$ alors $u_p - 1 \leqslant 0$ et donc

  $u_{p+1} - 1 \leqslant 0$ (car $2+u_p > 0$), ce qui équivaut à $u_{p+1} \leqslant 1$ donc l'hérédité est vérifiée.
- **Conclusion :** l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 :

- **Initialisation :** pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ donc $u_0 < u_1$ donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité :** on veut prouver que si $u_p \leqslant u_{p+1}$ alors $u_{p+1} \leqslant u_{p+2}$

  $u_p \leqslant u_{p+1}$ donc $u_p + 1 \leqslant u_{p+1} + 1$ et donc $\sqrt{u_p+1} \leqslant \sqrt{u_{p+1}+1}$ (car la fonction racine carrée est croissante) et donc $u_{p+1} \leqslant u_{p+2}$ donc l'hérédité est vérifiée.
- **Conclusion :** l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 :

- **Initialisation :** pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $\dfrac{2}{2\times 0+1} = 2$ donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité :** on veut prouver que si $u_p = \dfrac{2}{2p+1}$ alors $u_{p+1} = \dfrac{2}{2(p+1)+1} = \dfrac{2}{2p+3}$

  $$u_{p+1} = \frac{u_p}{1+u_p} = \frac{\frac{2}{2p+1}}{1+\frac{2}{2p+1}} = \frac{\frac{2}{2p+1}}{\frac{2p+1+2}{2p+1}} = \frac{2}{2p+1} \times \frac{2p+1}{2p+3} = \frac{2}{2p+3}$$ donc l'hérédité est vérifiée.
- **Conclusion :** l'initialisation et l'hérédité sont vérifiées donc la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.