Exercice loi binomiale

Une usine fabrique une grande quantité de sacs dont 2 % sont défectueux.
Afin de contrôler la qualité de sacs, on prélève au hasard un échantillon de 150 sacs issus de la production d'une journée.
La production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 150 sacs.
Soit X la variable aléatoire qui associe, à tout prélèvement de 150 sacs, le nombre de sacs défectueux.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on justifiera les paramètres.

2) Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat obtenu.

3) Calculer les probabilités suivantes à l'aide de la calculatrice (on arrondira les résultats au millième) :

- **a)** $P(X = 2)$
- **b)** $P(X \leqslant 1)$
- **c)** $P(X > 2)$
- **d)** $P(2 \leqslant X < 5)$
- **e)** $P(3 < X \leqslant 6)$
- **f)** $P(2 < X < 5)$
- **g)** $P(3 \leqslant X \leqslant 5)$

4)
- **a)** Déterminer les réels a et b tels que a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$ et b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.
- **b)** En déduire un intervalle I tel que $P(X \in I) \geqslant 0,95$.
- **c)** Lors d'un contrôle de qualité, 8 sacs sur les 150 sélectionnés sont défectueux.
  Que peut-on en conclure ?

Solutions

1) X suit une loi binomiale car il y a répétition, de manière indépendante, d'une même expérience n'ayant que deux issues possibles (le sac est défectueux ou ne l'est pas).
Les paramètres sont $n = 150$ et $p = 0,02$: $X \sim \mathscr{B}(150\ ;\ 0,02)$

2) $E(X) = np = 150 \times 0,02 = 3$.
Cela signifie qu'en moyenne il y aura 3 sacs défectueux dans un échantillon de 150 sacs.

3) **a)** $P(X = 2) \approx 0,225$

b) $P(X \leqslant 1) \approx 0,196$

c) $P(X > 2) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 0,579$

d) $P(2 \leqslant X < 5) = P(X \leqslant 4) - P(X \leqslant 1) \approx 0621$

e) $P(3 < X \leqslant 6) = P(X \leqslant 6) - P(X \leqslant 3) \approx 0,321$

f) $P(2 < X < 5) = P(X \leqslant 4) - P(X \leqslant 2) \approx 0,396$

g) $P(3 \leqslant X \leqslant 5) = P(X \leqslant 5) - P(X \leqslant 2) \approx 0,497$

4) **a)** $a = 0$ et $b = 7$

b) $I = [0\ ;\ 7]$

c) $8 \notin I$ donc l'hypothèse selon laquelle 2 % des sacs sont défectueux peut être rejetée (avec un seuil d'erreur de 5 %).