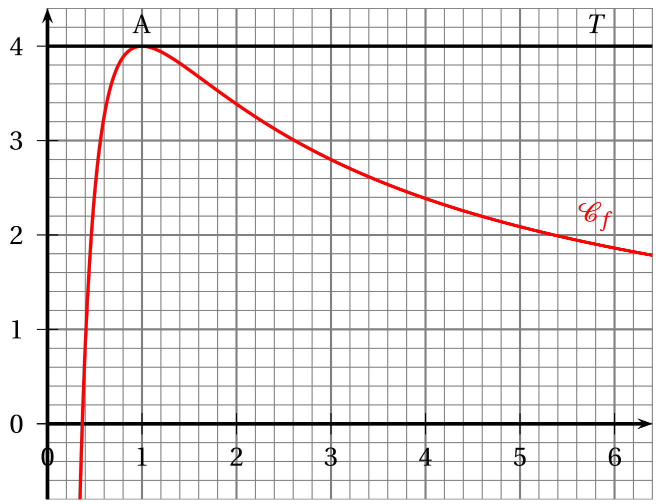
EXERCICE B **5 points**

Principaux domaines abordés :

- Fonction logarithme népérien
- Convexité

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A(1 ; 4).



1) Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

3) En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5) Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

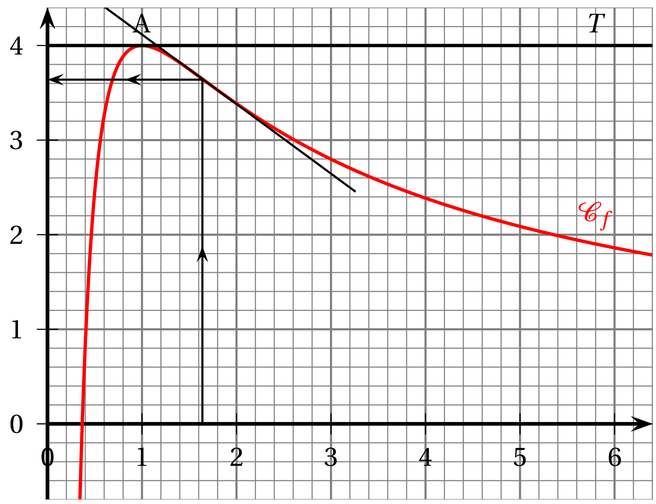
6) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

7) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

Correction

Exercice B **5 points**



1) Par lecture graphique : $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2) f est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b\ln x)}{x^2} = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$.

3) En utilisant les lectures du **1.** :

$f(1) = \dfrac{a + b\ln 1}{1} = 4 \iff a = 4$;

$f'(1) = \dfrac{b - 4 - b\ln 1}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4)
- On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$;
- On a $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4\ln x}{x}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$ et on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4\ln x}{x} = 0$, donc par somme de limites :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5) On a donc sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-4\ln x$.

On sait que sur $]0\,;\,1[$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0\,;\,1[$;

Par contre sur $]1\,;\,+\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$;

$f'(1) = 0$, donc le point de coordonnées $(1\,;\,4)$ est le maximum de la fonction sur $]0\,;\,+\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0\,;\,1[$ de $-\infty$ à 4, puis décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$ de 4 à 0 avec un maximum 4 pour $x = 1$.

6) f'étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f''(x) = \dfrac{-4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (-4\ln x)}{x^4} = \dfrac{-4x + 8x\ln x}{x^4} = \dfrac{-4 + 8\ln x}{x^3}$.

7) La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :

$$f''(x) = 0 \iff \frac{-4+8\ln x}{x^3} = 0 \iff -4+8\ln x = 0 \iff -1+2\ln x = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1,649 \left(\text{ou } \sqrt{\mathrm{e}}\right).$$

L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{4+4\times\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 3,639.$

Ce point d'inflexion et la tangente en ce point sont indiqués sur la figure ci-dessus.