Fiche d'entraînement : limites et comparaisons

Exercice 1 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x^2}+1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{x^2}+1$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Exercice 2 :

Soit f une fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout $x > 1$: $\dfrac{2x^2+3}{3x^2-x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2x^2+5x}{3x^2-x}$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 3 :

Déterminer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$.

1) $f(x) = \dfrac{x+2\sin(x)}{x}$

2) $g(x) = (2+\cos(x))\,x^3$

3) $h(x) = x^2+3\sin(x)$

Exercice 4 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on a : $e^{3x-2}-4 \leqslant f(x) \leqslant 3\,e^{3x-2}-4$

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Solutions

Exercice 1 :

1)
$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = 1 \\ \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{x^2}+1\right) = 1 \\ \bullet \forall x \in \mathbb{R}^* \dfrac{1}{x^2}+1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{x^2}+1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \text{ grâce au théorème des gendarmes.}$$

2)
$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = 1 \\ \bullet \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2}{x^2}+1\right) = 1 \\ \bullet \forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{1}{x^2}+1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2}{x^2}+1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \text{ grâce au théorème des gendarmes.}$$

3)
$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = +\infty \\ \bullet \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \geqslant \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty \text{ (théorème de comparaison).}$$

Exercice 2 :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3}{3x^2-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = \dfrac{2}{3} \\ \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+5x}{3x^2-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = \dfrac{2}{3} \\ \bullet \forall x > 1, \dfrac{2x^2+3}{3x^2-x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2x^2+5x}{3x^2-x} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{2}{3} \text{ grâce au théorème des gendarmes.}$$

Exercice 3 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $-2 \leqslant \sin(x) \leqslant 2$ donc $-2+x \leqslant \sin(x)+x \leqslant 2+x$ (on ajoute x) et donc si on divise par x :

- $\dfrac{-2+x}{x} \leqslant \dfrac{\sin(x)+x}{x} \leqslant \dfrac{2+x}{x}$ si $x > 0$ (inégalité (1))
- $\dfrac{-2+x}{x} \geqslant \dfrac{\sin(x)+x}{x} \geqslant \dfrac{2+x}{x}$ si $x < 0$ (inégalité (2))

✻ Pour la limite en $+\infty$ il faut donc utiliser l'inégalité (1) (car $x > 0$) :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2+x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \bullet \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2+x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \bullet \forall x > 0, \dfrac{-2+x}{x} \leqslant \dfrac{\sin(x)+x}{x} \leqslant \dfrac{2+x}{x} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \text{ grâce au théorème des gendarmes.}$$

✻ Pour la limite en $-\infty$ il faut donc utiliser l'inégalité (2) (car $x < 0$) :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2+x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \bullet \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2+x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \bullet \forall x > 0, \dfrac{-2+x}{x} \geqslant \dfrac{\sin(x)+x}{x} \geqslant \dfrac{2+x}{x} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \text{ grâce au théorème des gendarmes.}$$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 2+\cos(x) \leqslant 3$ (on ajoute 2) et donc si on multiplie par x^3 :

- $x^3 \leqslant (2+\cos(x))\,x^3 \leqslant 3x^3$ si $x > 0$ (inégalité (1))
- $x^3 \geqslant (2+\cos(x))\,x^3 \geqslant 3x^3$ si $x < 0$ (inégalité (2))

✻ Pour la limite en $+\infty$ il faut donc utiliser l'inégalité (1) (car $x>0$) :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty \\ \bullet \forall x>0, (2+\cos(x))\,x^3 \geqslant x^3\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} (2+\cos(x))\,x^3=+\infty \text{ (théorème de comparaison).}$$

✻ Pour la limite en $-\infty$ il faut donc utiliser l'inégalité (2) (car $x<0$) :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty \\ \bullet \forall x<0, (2+\cos(x))\,x^3 \leqslant x^3\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} (2+\cos(x))\,x^3=-\infty \text{ (théorème de comparaison).}$$

3) $\forall x\in\mathbb{R}\; -1\leqslant \sin(x)\leqslant 1$ donc $-3\leqslant \sin(x)\leqslant 3$ (on multiplie par 3) donc $x^2-3\leqslant x^2+3\sin(x)\leqslant x^2+3$ (on ajoute x^2)

✻ Pour la limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-3)=+\infty \\ \bullet \forall x\in\mathbb{R}, x^2+3\sin(x)\geqslant x^2-3\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(x^2+3\sin(x)\right)=+\infty \text{ (théorème de comparaison).}$$

✻ Pour la limite en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-3)=+\infty \\ \bullet \forall x\in\mathbb{R}, x^2+3\sin(x)\geqslant x^2-3\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \left(x^2+3\sin(x)\right)=+\infty \text{ (théorème de comparaison).}$$

Exercice 4 :

1) $x\mapsto \mathrm{e}^{3x-2}$ est la composée de $x\mapsto 3x-2$ suivie de $x\mapsto \mathrm{e}^x$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to-\infty} 3x-2=-\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x=0\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ par composition } \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{3x-2}=0.$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{3x-2}-4=-4$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 3\,\mathrm{e}^{3x-2}-4=-4$ donc, grâce au théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-4$.

2)
$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} 3x-2=+\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ par composition } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x-2}=+\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x-2}-4=+\infty.$$

On a donc :
$$\left.\begin{array}{l}\bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x-2}-4=+\infty \\ \bullet \forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geqslant \mathrm{e}^{3x-2}-4\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ (Théorème de comparaison).}$$