Savoir-faire en géométrie dans l'espace

- **Savoir si un couple de vecteurs $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}\right)$ est une base d'un plan :**
il faut prouver que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

- **Savoir si un triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\ ,\ \overrightarrow{w}\right)$ est une base de l'espace :**
il faut prouver que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires.

- **Savoir si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires :**

  ✲ Sans coordonnées : on prouve qu'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{u} = k \times \overrightarrow{v}$.

  ✲ Avec coordonnées : on prouve que les abscisses, les ordonnées et les cotes des vecteurs sont proportionnelles en calculant les 3 quotients correspondants : $\dfrac{x_{\overrightarrow{u}}}{x_{\overrightarrow{v}}} = \dfrac{y_{\overrightarrow{u}}}{y_{\overrightarrow{v}}} = \dfrac{z_{\overrightarrow{u}}}{z_{\overrightarrow{v}}}$ par exemple.

- **Savoir si trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires :**

  ✲ On peut montrer qu'il existe 3 réels a, b et c non tous nuls tels que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

  ✲ On peut aussi montrer que l'on peut exprimer l'un des vecteurs à l'aide d'une combinaison linéaire des deux autres, c'est-à-dire qu'il existe 2 réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

  ✲ Si on travaille avec des coordonnées, on est alors amené à résoudre un système de trois équations (avec deux inconnues avec la deuxième méthode) où on utilise deux lignes pour déterminer les réels a et b et où on utilise la ligne restante pour savoir si les vecteurs sont coplanaires ou non (toujours avec la deuxième méthode).

- **Savoir déterminer une représentation paramétrique d'une droite :**
On écrit la représentation paramétrique sous la forme d'un système à l'aide d'un point de la droite et d'un vecteur directeur de la droite.
En pratique on écrit les coordonnées du point de la droite suivi des coordonnées du vecteur directeur multiplié par le paramètre (souvent noté t) choisi pour le système.

  Exemple : la droite passant par le point $A(1\ ;\ 3\ ;\ 5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique

  le système : $\left\{\begin{array}{l} x = \boxed{1} + \boxed{2}\,t \\ y = \boxed{3} + \boxed{4}\,t \\ z = \boxed{5} + \boxed{6}\,t \end{array}\right.\quad (t \in \mathbb{R})$

- **Savoir retrouver un point d'une droite à l'aide d'une représentation paramétrique :**
Il suffit de remplacer le paramètre par un réel.

- **Savoir démontrer que 3 points définissent un plan :**
Il faut montrer que les 3 points ne sont pas alignés (c'est-à-dire que 2 vecteurs créés à l'aide de ces 3 points ne sont pas colinéaires).

- **Savoir démontrer qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à un plan :**
Il faut démontrer que ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan.
Dans la pratique on calcule le produit scalaire de $\overrightarrow{n}$ avec ces deux vecteurs et on doit trouver 0 pour les 2 calculs.

- **Savoir trouver un vecteur normal à un plan (ABC) :**
On nomme ce vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et on résout le système obtenu avec $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC}$ par exemple.
Dans la pratique on fixera l'une des 3 coordonnées de $\overrightarrow{n}$ ($c = 1$ par exemple).

- **Savoir déterminer une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$:**
Il faut un point et un vecteur normal à ce plan.

  ✲ Méthode 1 : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$. On écrit le résultat du produit scalaire et on obtient l'équation.

- Méthode 2 : on écrit qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est de la forme $ax+by+cz+d=0$ en remplaçant a, b et c par les coordonnées du vecteur normal puis on trouve d en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point appartenant au plan et en résolvant l'équation ainsi obtenue.

- **Savoir démontrer qu'un plan et une droite sont sécants :**
Il faut démontrer qu'un vecteur normal au plan et qu'un vecteur directeur de la droite ne sont pas orthogonaux (produit scalaire non nul).

- **Savoir démontrer qu'un plan et une droite sont parallèles :**

  - Il faut démontrer qu'un vecteur normal au plan est orthogonal à un vecteur directeur de la droite (produit scalaire nul).
  - Si l'on veut montrer que la droite est strictement parallèle il faut choisir un point de la droite (ou du plan) et montrer qu'il n'appartient pas au plan (ou à la droite).
  Si on prouve que le point choisi appartient à la droite et au plan, on a alors prouvé que la droite est incluse dans le plan.

- **Savoir démontrer que deux plans sont sécants :**
Il faut démontrer que les vecteurs normaux à chacun de ces plans ne sont pas colinéaires.
Si les vecteurs normaux sont colinéaires, les plans sont parallèles ou confondus. On choisit alors un point appartenant à un des deux plans et on cherche s'il appartient à l'autre plan : s'il appartient à l'autre plan alors les deux plans sont confondus, sinon ils sont strictement parallèles.

- **Savoir si deux plans sont orthogonaux :**
Il suffit que les vecteurs normaux soient orthogonaux (produit scalaire nul).

- **Savoir déterminer l'intersection d'une droite (représentation paramétrique) et d'un plan (équation cartésienne) :**
Il faut remplacer les x, y et z de l'équation cartésienne du plan par les x, y et z de la représentation paramétrique de la droite et ainsi, en résolvant l'équation obtenue, on trouve la valeur du paramètre t.
Il reste alors à remplacer t par sa valeur dans la représentation paramétrique de la droite pour obtenir les coordonnées du point d'intersection.

- **Savoir déterminer l'intersection de deux plans (équations cartésiennes) :**

  - On écrit d'abord le système de 2 équations à 3 inconnues obtenu en écrivant les équations cartésiennes des deux plans.
  - Ensuite on écrit deux des trois inconnues en fonction de la troisième (x et y en fonction de z par exemple).
  - Enfin on pose $z=t$ (si on a exprimé x et y en fonction de z) et on obtient la représentation paramétrique de la droite en remplaçant z par t dans les équations obtenues pour x et y (lorsqu'on les a exprimé en fonction de z).

- **Savoir déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point A sur une droite d (représentation paramétrique) :**

  - Comme le projeté orthogonal H doit appartenir à d alors ses coordonnées vérifient les équations de la représentation paramétrique de d pour une certaine valeur du paramètre t.
  - On écrit alors que $\overrightarrow{AH}$ et un vecteur directeur de d sont orthogonaux en écrivant que que leur produit scalaire doit être nul.
  - On obtient alors une équation que l'on résout et on obtient alors la valeur du paramètre t qu'il reste alors à remplacer dans la représentation paramétrique de d pour obtenir les coordonnées de H.

- **Savoir déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H d'un point A sur un plan (équation cartésienne) :**

  - La droite (AH) doit être orthogonale au plan donc un vecteur normal au plan est un vecteur directeur de (AH).
  - On peut donc créer une représentation paramétrique de la droite (AH).
  - On utilise alors la technique consistant à déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan décrite plus haut pour déterminer les coordonnées de H.