EXERCICE – B

Principaux domaines abordés
– Suites, étude de fonction
– Fonction logarithme

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

1) Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?

2) À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2) **a)** Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

b) En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, complété par les limites.

c) Justifier que pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1) En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4) On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Donner la valeur de ℓ.

<u>Correction</u>

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés
– Suites, étude de fonction
– Fonction logarithme

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

1) Il faut écrire dans la cellule B3 : $\boxed{\text{=B2 - ln(B2 - 1)}}$.

2) On peut penser que la suite est décroissante et a pour limite 2.

Partie II :

1) On a $\lim\limits_{x \to 1} x - 1 = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x-1) = -\infty$ et enfin par somme de limites $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

<u>Rem.</u> : la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la représentation graphique de la fonction f.

2) **a)** Sachant que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $u(x)$ étant une fonction de x ne s'annulant pas sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$, on a donc :

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1-1}{x-1} = \dfrac{x-2}{x-1}$ sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

b) Sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$ on a bien entendu $x > 1$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du dénominateur $x - 2$:

- $x - 2 > 0 \iff x > 2$: $f'(x) > 0$ sur $]2~;~+\infty[$; la fonction f est croissante sur $]2~;~+\infty[$;
- $x - 2 < 0 \iff x < 2$: $f'(x) > 0$ sur $]1~;~2[$; la fonction f est décroissante sur $]1~;~2[$;
- $x - 2 = 0 \iff x = 2$: $f'(2) = 0$ la fonction f a un minimum $f(2) = 2 - \ln 1 = 2 - 0 = 2$ sur $]1~;~+\infty[$. D'où le tableau de variations :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

c) La question précédente a montré que $f(2) = 2$ est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.

On a donc pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1) <u>Initialisation</u> : on a $u_0 = 10 \geqslant 2$: la proposition est vraie au rang 0.

<u>Hérédité</u> : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n \geqslant 2$.

Par croissance de la fonction f, on a donc $f(u_n) \geqslant f(2)$, c'est-à-dire :

$u_{n+1} \geqslant 2$: la proposition est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence la proposition :

« $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n » est vraie.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculons $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \ln(u_n - 1) - u_n = -\ln(u_n - 1)$.

Or d'après la question précédente, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$, donc $u_n - 1 \geqslant 2 - 1$, ou $u_n - 1 \geqslant 1$, donc $\ln(u_n - 1) \geqslant 0$ et enfin $-\ln(u_n - 1) \leqslant 0$.

Conclusion : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ou $_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

3) On a donc démontré dans les deux questions précédentes que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2 : elle converge donc vers une limite ℓ, telle $\ell \geqslant 2$.

4) $f(\ell) = \ell \iff \ell - \ln(\ell - 1) = \ell \iff 0 = \ln(\ell - 1) \iff 1 = \ell - 1$ (par croissance de la fonction logarithme népérien), d'où $2 = \ell$.

La suite (u_n) converge vers le nombre 2.