Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme; dérivation.

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2.$$

1) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.

2) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.

4) Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction *f*

On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1).$$

1) **a)** On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
Démontrer que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.

2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction *F* admettant pour dérivée la fonction *f*

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f.
Ainsi, on a : $F' = f$.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1) Étudier les variations de F sur $]0\,;\,+\infty[$.

2) La courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?
Justifier la réponse.

Correction

Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme ; dérivation.

Partie I : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$.

1) On détermine les limites de g en $+\infty$ et 0.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x-2 = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to0} 2x-2 = -2\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = -\infty$$

2) La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 2 > 0$; donc la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

3) On établit le tableau des variations de la fonction g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.

4) $g(1) = 0$ donc $\alpha = 1$.

On en déduit que $g(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$, et que $g(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

Partie II : étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$par : $f(x) = \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 1]$.

1) **a)** On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa dérivée.

Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(\ln(x) - 1) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x) - 1 + 2x - 1}{x^2} = \frac{\ln(x) + 2x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) Sur $]0\,;\,+\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ qui s'annule pour $x = 1$.

$$f(1) = \left(2 - \frac{1}{1}\right)(\ln(1) - 1) = -1$$

On dresse le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

2) $f(x) = 0 \iff \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1) = 0 \iff 2 - \dfrac{1}{x} = 0 \text{ ou } \ln(x) - 1 = 0$

$$\iff 2 = \frac{1}{x} \text{ ou } \ln(x) = 1 \iff x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \mathrm{e}$$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions sur $]0\,;\,+\infty[$: $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = \mathrm{e}$.

On complète le tableau de variations de f en intégrant les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

x	0		$\frac{1}{2}$		1		e		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit le tableau de signes de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie III : étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f. Ainsi, on a : $F' = f$. On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$.

1) Par définition $F' = f$, donc le signe de $F'(x)$ est celui de $f(x)$. On en déduit les variations de la fonction F sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
F	$\Vert$	F croissante		F décroissante		F croissante	

2) Le coefficient directeur de la tangente en $x = a$ à la courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de F est $F'(a)$ soit $f(a)$. Pour que $\mathscr{C}_F$ admette des tangentes parallèles à l'axe des abscisses, il faut trouver des valeurs de x pour lesquelles $F'(x) = 0$ c'est-à -dire $f(x) = 0$.

D'après les questions précédentes, on peut dire $\mathscr{C}_F$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, en $x = \frac{1}{2}$ et en $x = \mathrm{e}$.