Fiche d'entraînement : équations différentielles

1) **a)** Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 2y = 0$

b) Déterminer la solution f_1 de (E_1) vérifiant la condition $f_1(0) = 4$

2) **a)** Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_2) : $y' = 3y - 2$

b) Déterminer la solution f_2 de (E_2) vérifiant la condition $f_2(0) = 2$

3) **a)** Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_3) : $2y' - 3y = 0$

b) Déterminer la solution f_3 de (E_3) vérifiant la condition $f_3(1) = 5$

4) **a)** Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_4) : $y = 2y'$

b) Déterminer la solution f_4 de (E_4) vérifiant la condition $f_4(0) = 1$

5) **a)** Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_5) : $y' + 4y = 5$

b) Déterminer la solution f_5 de (E_5) vérifiant la condition $f_5(1) = 3$

6) **a)** Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_6) : $y' = -2y + 1$

b) Déterminer la solution f_6 de (E_6) vérifiant la condition $f_6'(0) = -1$

7) **a)** Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_7) : $y' = 5y$

b) Déterminer la solution f_7 de (E_7) vérifiant la condition $f_7'(2) = 4$

8) **a)** Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_8) : $3y' - y = 6$

b) Déterminer la solution f_8 de (E_8) vérifiant la condition $f_8'(0) = 4$

9) **a)** Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_9) : $2y' - 6y = 4$

b) Déterminer la solution f_9 de (E_9) vérifiant la condition $f_9(-2) = 4$

10) **a)** Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_{10}) : $3y' + 2y = 0$

b) Déterminer la solution f_{10} de (E_{10}) vérifiant la condition $f_{10}'(3) = 2$

11) Soit l'équation différentielle (E_{11}) : $y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}$

a) Montrer que la fonction u_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $u_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E_{11}).

b) En déduire toutes les solutions de (E_{11}).

c) Déterminer la solution f_{11} de (E_{11}) vérifiant la condition $f_{11}(0) = 3$

12) Soit l'équation différentielle (E_{12}) : $y' - 3y = 4x$

a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction u_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $u_2(x) = ax + b$ soit une solution de (E_{12}).

b) En déduire toutes les solutions de (E_{12}).

c) Déterminer la solution f_{12} de (E_{12}) vérifiant la condition $f_{12}(2) = 4$

13) Soit l'équation différentielle (E_{13}) : $y' + 4y = 5x\,\mathrm{e}^{x}$

a) Montrer que la fonction u_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $u_3(x) = \left(x - \dfrac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{x}$ est une solution de (E_{13}).

b) En déduire toutes les solutions de (E_{13}).

c) Déterminer la solution f_{13} de (E_{13}) vérifiant la condition $f_{13}(3) = -1$

14) Soit l'équation différentielle (E_{14}) : $y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$

a) Montrer que la fonction u_4 définie sur $\mathbb{R}$ par $u_4(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de (E_{14}).

b) En déduire toutes les solutions de (E_{14}).

c) Déterminer la solution f_{14} de (E_{14}) vérifiant la condition $f_{14}'(4) = 2$

15) Soit l'équation différentielle (E_{15}) : $2y' + 3y = 3x - 5$

a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction u_5 définie sur $\mathbb{R}$ par $u_5(x) = ax + b$ soit une solution de (E_{15}).

b) En déduire toutes les solutions de (E_{15}).

c) Déterminer la solution f_{15} de (E_{15}) vérifiant la condition $f_{15}'(-1) = 0$

Solutions

1) **a)** $y'+2y=0 \iff y'=-2y$.

On est donc sous la forme $y'=ay$ donc les solutions sont les fonctions $\boxed{x\mapsto k\,\mathrm{e}^{-2x}}$

b) $f_1(0)=k\,\mathrm{e}^{-2\times 0}=k\,\mathrm{e}^{0}=k\times 1=k$ donc $k=4$ et donc $\boxed{f_1(x)=4\,\mathrm{e}^{-2x}}$

2) **a)** $y'=3y-2$

On est donc sous la forme $y'=ay+b$ donc les solutions sont les fonctions $x\mapsto k\,\mathrm{e}^{3x}-\dfrac{-2}{3}$ donc $\boxed{x\mapsto k\,\mathrm{e}^{3x}+\dfrac{2}{3}}$

b) $f_2(0)=k\,\mathrm{e}^{3\times 0}+\dfrac{2}{3}=k\,\mathrm{e}^{0}+\dfrac{2}{3}=k\times 1+\dfrac{2}{3}=k+\dfrac{2}{3}=2$ donc $k=2-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$ et donc $\boxed{f_2(x)=\dfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{3x}+\dfrac{2}{3}}$

3) **a)** $2y'-3y=0 \iff y'=\dfrac{3}{2}y$

On est donc sous la forme $y'=ay$ donc les solutions sont les fonctions $\boxed{x\mapsto k\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}}$

b) $f_3(1)=k\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}=5$ donc $k=\dfrac{5}{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}=5\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ et donc $f_3(x)=5\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}=\boxed{5\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}}=5\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}=f_3(x)}$

4) **a)** $y=2y' \iff y'=\dfrac{1}{2}y$

On est donc sous la forme $y'=ay$ donc les solutions sont les fonctions $\boxed{x\mapsto k\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}$

b) $f_4(0)=k\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\times 0}=k=1$ donc $\boxed{f_4(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}$

5) **a)** $y'+4y=5 \iff y'=-4y+5$

On est donc sous la forme $y'=ay+b$ donc les solutions sont les fonctions $x\mapsto k\,\mathrm{e}^{-4x}-\dfrac{5}{-4}$ donc $\boxed{x\mapsto k\,\mathrm{e}^{-4x}+\dfrac{5}{4}}$

b) $f_5(1)=k\,\mathrm{e}^{-4}+\dfrac{5}{4}=3$ donc $k=\dfrac{3-\frac{5}{4}}{\mathrm{e}^{-4}}=\dfrac{7}{4}\,\mathrm{e}^{4}$ donc $f_5(x)=\dfrac{7}{4}\,\mathrm{e}^{4}\,\mathrm{e}^{-4x}+\dfrac{5}{4}=\boxed{\dfrac{7}{4}\,\mathrm{e}^{-4x+4}+\dfrac{5}{4}=f_5(x)}$

6) **a)** $y'=-2y+1$

On est donc sous la forme $y'=ay+b$ donc les solutions sont les fonctions $x\mapsto k\,\mathrm{e}^{-2x}-\dfrac{1}{-2}$ donc $\boxed{x\mapsto k\,\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{1}{2}}$

b) $f_6'(x)=-2k\,\mathrm{e}^{-2x}$ donc $f_6'(0)=-2k\,\mathrm{e}^{-2\times 0}=-2k=-1$ donc $k=\dfrac{1}{2}$ et donc $\boxed{f_6(x)=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{1}{2}}$

7) **a)** $y'=5y$

On est donc sous la forme $y'=ay$ donc les solutions sont les fonctions $\boxed{x\mapsto k\,\mathrm{e}^{5x}}$

b) $f_7'(x)=5k\,\mathrm{e}^{5x}$ donc $f_7'(2)=5k\,\mathrm{e}^{10}=4$ donc $k=\dfrac{4}{5\,\mathrm{e}^{10}}=\dfrac{4}{5}\,\mathrm{e}^{-10}$ et donc $f_7(x)=\dfrac{4}{5}\,\mathrm{e}^{-10}\,\mathrm{e}^{5x}=\boxed{\dfrac{4}{5}\,\mathrm{e}^{5x-10}=f_7(x)}$

8) **a)** $3y'-y=6 \iff y'=\dfrac{1}{3}y+2$

On est donc sous la forme $y'=ay+b$ donc les solutions sont les fonctions $x\mapsto k\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}-\dfrac{2}{\frac{1}{3}}$ donc $\boxed{x\mapsto k\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}-6}$

b) $f_8'(x)=\dfrac{1}{3}k\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}$ donc $f_8'(0)=\dfrac{1}{3}\times k\times \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\times 0}=\dfrac{1}{3}k=4$ donc $k=\dfrac{4}{\frac{1}{3}}=12$ et donc $\boxed{f_8(x)=12\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}-6}$

9) **a)** $2y'-6y=4 \iff y'=3y+2$

On est donc sous la forme $y'=ay+b$ donc les solutions sont les fonctions $\boxed{x\mapsto k\,\mathrm{e}^{3x}-\dfrac{2}{3}}$

b) $f_9(-2)=k\,\mathrm{e}^{-6}-\dfrac{2}{3}=4$ donc $k=\dfrac{4+\frac{2}{3}}{\mathrm{e}^{-6}}=\dfrac{14}{3}\,\mathrm{e}^{6}$ et donc $f_9(x)=\dfrac{14}{3}\,\mathrm{e}^{6}\,\mathrm{e}^{3x}-\dfrac{2}{3}=\boxed{\dfrac{14}{3}\,\mathrm{e}^{3x+6}-\dfrac{2}{3}=f_9(x)}$

10) **a)** $3y'+2y=0 \iff y'=-\dfrac{2}{3}y$

On est donc sous la forme $y'=ay$ donc les solutions sont les fonctions $\boxed{x\mapsto k\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}}$

b) $f'_{10}(x) = -\frac{2}{3}k\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}$ donc $f'_{10}(3) = -\frac{2}{3}k\,\mathrm{e}^{-2} = 2$ donc $k = \frac{2}{-\frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-2}} = -3\,\mathrm{e}^{2}$ donc

$f_{10}(x) = -3\,\mathrm{e}^{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} = \boxed{-3\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x+2} = f_{10}(x)}$

11) **a)** $u'_1(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ donc $u'_1(x) + 2u_1(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$ donc u_1 est bien solution de (E_{11})

b) $y' + 2y = \mathrm{e}^{-x} \iff y' = -2y + \mathrm{e}^{-x}$
On est donc sous la forme $y' = ay + f$ et u_1 est une solution particulière de (E_{11}) donc les solutions sont les fonctions $\boxed{x \mapsto k\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}}$

c) $f_{11}(0) = k\,\mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{0} = k + 1 = 3$ donc $k = 2$ et donc $\boxed{f_{11}(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}}$

12) **a)** $u_2(x) = ax + b$ donc $u'_2(x) = a$ et donc $u'_2(x) - 3u_2(x) = 4x \iff a - 3(ax + b) = 4x \iff a - 3ax - 3b = 4x$ et donc $-3ax + a - 3b = 4x$ et donc, par identification, on obtient $\begin{cases} -3a = 4 \\ a - 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{4}{3} \\ b = -\frac{4}{9} \end{cases}$

b) $y' - 3y = 4x \iff y' = 3y + 4x$
On est donc sous la forme $y' = ay + f$ et $u_2(x) = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{9}$ est une solution particulière de (E_{12}) donc les solutions sont les fonctions $\boxed{x \mapsto k\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}}$

c) $f_{12}(2) = k\,\mathrm{e}^{6} - \frac{4}{3} \times 2 - \frac{4}{9} = k\,\mathrm{e}^{6} - \frac{28}{9} = 4$ donc $k = \frac{4 + \frac{28}{9}}{\mathrm{e}^{6}} = \frac{64}{9}\,\mathrm{e}^{-6}$ et donc $f_{12}(x) = \frac{64}{9}\,\mathrm{e}^{-6}\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}$ ou
$\boxed{f_{12}(x) = \frac{64}{9}\,\mathrm{e}^{3x-6} - \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}}$

13) **a)** $u'_3(x) = \mathrm{e}^{x} + \left(x - \frac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{x} = \left(1 + x - \frac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{x} = \left(x + \frac{4}{5}\right)\mathrm{e}^{x}$ donc :
$u'_3(x) + 4u_3(x) = \left(x + \frac{4}{5}\right)\mathrm{e}^{x} + 4\left(x - \frac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{x} = \left(x + \frac{4}{5} + 4x - \frac{4}{5}\right)\mathrm{e}^{x} = 5x\,\mathrm{e}^{x}$ donc u_3 est bien une solution de (E_{13})

b) $y' + 4y = 5x\,\mathrm{e}^{x} \iff y' = -4y + 5x\,\mathrm{e}^{x}$
On est donc sous la forme $y' = ay + f$ et u_3 est une solution particulière de (E_{13}) donc les solutions sont les fonctions $\boxed{x \mapsto k\,\mathrm{e}^{-4x} + \left(x - \frac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{x}}$

c) $f_{13}(3) = k\,\mathrm{e}^{-12} + \left(3 - \frac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{3} = k\,\mathrm{e}^{-12} + \frac{14}{5}\,\mathrm{e}^{3} = -1$ donc $k = \frac{-1 - \frac{14}{5}\,\mathrm{e}^{3}}{\mathrm{e}^{-12}} = \left(-1 - \frac{14}{5}\,\mathrm{e}^{3}\right)\mathrm{e}^{12} = -\mathrm{e}^{12} - \frac{14}{5}\,\mathrm{e}^{15}$ et donc $f_{13}(x) = \left(-\mathrm{e}^{12} - \frac{14}{5}\,\mathrm{e}^{15}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \left(x - \frac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{x} = \boxed{-\mathrm{e}^{-4x+12} - \frac{14}{5}\,\mathrm{e}^{-4x+15} + \left(x - \frac{1}{5}\right)\mathrm{e}^{x} = f_{13}(x)}$

14) **a)** $u_4(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ donc $u'_4(x) = \mathrm{e}^{2x} + x \times 2\,\mathrm{e}^{2x} = (2x + 1)\,\mathrm{e}^{2x}$ donc :
$u'_4(x) - 2u_4(x) = (2x + 1)\,\mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^{2x} = 2x\,\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$ donc u_4 est bien une solution de (E_{14})

b) $y' - 2y = \mathrm{e}^{2x} \iff y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}$
On est donc sous la forme $y' = ay + f$ et u_4 est une solution particulière de (E_{14}) donc les solutions sont les fonctions $\boxed{x \mapsto k\,\mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{2x}}$

c) $f'_{14}(x) = 2k\,\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x} + 2x\,\mathrm{e}^{2x} = (2k + 1 + 2x)\,\mathrm{e}^{2x}$ donc $f'_{14}(4) = (2k + 1 + 8)\,\mathrm{e}^{8} = (2k + 9)\,\mathrm{e}^{8} = 2k\,\mathrm{e}^{8} + 9\,\mathrm{e}^{8} = 2$ donc $k = \frac{2 - 9\,\mathrm{e}^{8}}{2\,\mathrm{e}^{8}} = \left(2 - 9\,\mathrm{e}^{8}\right) \times \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-8} = \mathrm{e}^{-8} - \frac{9}{2}$ et donc :
$f_{14}(x) = \left(\mathrm{e}^{-8} - \frac{9}{2}\right)\mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{2x} = \boxed{\left(x + \mathrm{e}^{-8} - \frac{9}{2}\right)\mathrm{e}^{2x} = f_{14}(x)}$

15) **a)** $u_5(x) = ax + b$ donc $u'_5(x) = a$ et donc $2u'_5(x) + 3u_5(x) = 3x - 5 \iff 2a + 3(ax + b) = 3x - 5$ et donc $2a + 3ax + 3b = 3x - 5 \iff 3ax + 2a + 3b = 3x - 5$ et donc, par identification, on obtient $\begin{cases} 3a = 3 \\ 2a + 3b = -5 \end{cases}$
donc $a = 1$ et $b = -\frac{7}{3}$

b) $2y' + 3y = 3x - 5 \iff y' = -\dfrac{3}{2}y + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$

On est donc sous la forme $y' = ay + f$ et $u_5(x) = x - \dfrac{7}{3}$ est une solution particulière de (E_{15}) donc les solutions sont les fonctions $\boxed{x \mapsto k\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + x - \dfrac{7}{3}}$

c) $f_{15}'(x) = -\dfrac{3}{2}k\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + 1$ donc $f_{15}'(-1) = -\dfrac{3}{2}k\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} + 1 = 0$ donc $k = \dfrac{-1}{-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$ et donc :

$f_{15}(x) = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x} + x - \dfrac{7}{3} = \boxed{\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}} + x - \dfrac{7}{3} = f_{15}(x)}$