Fiche d'entraînement : intégrations par parties

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de la technique de l'intégration par parties :

1) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 4x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

2) $I_2 = \displaystyle\int_1^3 x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$

3) $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

4) $I_4 = \displaystyle\int_0^{\pi} (2x+1)\sin(3x)\,\mathrm{d}x$

5) $I_5 = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

6) $I_6 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

7) $I_7 = \displaystyle\int_2^4 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$

8) $I_8 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (2x-1)\ln(x)\,\mathrm{d}x$

9) $I_9 = \displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$

10) $I_{10} = \displaystyle\int_0^1 (3x+1)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

Solutions

1) $u(x)=4x \quad u'(x)=4$
$v'(x)=\mathrm{e}^{-x} \quad v(x)=-\mathrm{e}^{-x}$

Donc $I_1=\Big[\underbrace{-4x\,\mathrm{e}^{-x}}_{uv}\Big]_0^1-\int_0^1\underbrace{-4\,\mathrm{e}^{-x}}_{u'v}\,\mathrm{d}x=\left[-4x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1-\left[4\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1=-4\,\mathrm{e}^{-1}+0-\left(4\,\mathrm{e}^{-1}-4\,\mathrm{e}^{0}\right)=-8\,\mathrm{e}^{-1}+4$

2) $u(x)=\ln(x) \quad u'(x)=\dfrac{1}{x}$
$v'(x)=x^2 \quad v(x)=\dfrac{1}{3}x^3$

Donc $I_2=\left[\underbrace{\frac{1}{3}x^3\ln(x)}_{uv}\right]_1^3-\int_1^3\underbrace{\frac{1}{3}x^2}_{u'v}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^3-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^3=9\ln(3)-0-\left(3-\frac{1}{9}\right)=9\ln(3)-\frac{26}{9}$

3) $u(x)=2x \quad u'(x)=2$
$v'(x)=\cos(x) \quad v(x)=\sin(x)$

Donc $I_3=\Big[\underbrace{2x\sin(x)}_{uv}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{2\sin(x)}_{u'v}\,\mathrm{d}x=\left[2x\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-2\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-0-(-0+2)=\pi-2$

4) $u(x)=2x+1 \quad u'(x)=2$
$v'(x)=\sin(3x) \quad v(x)=-\dfrac{1}{3}\cos(3x)$

Donc $I_4=\left[\underbrace{-\frac{1}{3}(2x+1)\cos(3x)}_{uv}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\cos(3x)\right)}_{u'v}\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}(2x+1)\cos(3x)\right]_0^{\pi}-\left[\frac{2}{9}\sin(3x)\right]_0^{\pi}$

$I_4=-\frac{1}{3}(2\pi+1)\cos(3\pi)+\frac{1}{3}\cos(0)-\left(-\frac{2}{9}\sin(3\pi)+\frac{2}{9}\sin(0)\right)=-\frac{1}{3}(2\pi+1)\times(-1)+\frac{1}{3}\times1-(0+0)=\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3}$

5) $u(x)=x \quad u'(x)=1$
$v'(x)=\mathrm{e}^{-x} \quad v(x)=-\mathrm{e}^{-x}$

Donc $I_5=\Big[\underbrace{-x\,\mathrm{e}^{-x}}_{uv}\Big]_0^1-\int_0^1\underbrace{\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)}_{u'v}\mathrm{d}x=\left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1-\left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1=-\mathrm{e}^{-1}+0-\left(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{0}\right)=-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}+1=-2\,\mathrm{e}^{-1}+1$

6) $u(x)=x \quad u'(x)=1$
$v'(x)=\sin(2x) \quad v(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x)$

Donc $I_6=\left[\underbrace{-\frac{1}{2}x\cos(2x)}_{uv}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)}_{u'v}\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[-\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$I_6=-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\times0\times\cos(0)-\left(-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\sin(0)\right)=0+0+\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$

7) $u(x)=\ln(x) \quad u'(x)=\dfrac{1}{x}$
$v'(x)=x \quad v(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

Donc $I_7=\left[\underbrace{\frac{1}{2}x^2\ln(x)}_{uv}\right]_2^4-\int_2^4\underbrace{\left(\frac{1}{2}x\right)}_{u'v}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_2^4-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_2^4=8\ln(4)-2\ln(2)-(4-1)=14\ln(2)-3$

8)

$u(x) = \ln(x)$ $\quad u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = 2x - 1$ $\quad v(x) = x^2 - x$

Donc $I_8 = \left[\underbrace{(x^2 - x)\ln(x)}_{uv}\right]_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \underbrace{(x-1)}_{u'v} \,\mathrm{d}x = \left[(x^2-x)\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \left[\dfrac{1}{2}x^2 - x\right]_1^{\mathrm{e}}$

$I_8 = (\mathrm{e}^2 - \mathrm{e})\ln(\mathrm{e}) - (1^2 - 1)\ln(1) - \left(\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \dfrac{1}{2} \times 1^2 + 1\right) = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 0 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 + \mathrm{e} + \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \dfrac{1}{2}$

9)

$u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$

$v'(x) = \mathrm{e}^{3x}$ $\quad v(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$

Donc $I_9 = \left[\underbrace{\dfrac{1}{3}x\,\mathrm{e}^{3x}}_{uv}\right]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 \underbrace{\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}}_{u'v} \,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{3}x\,\mathrm{e}^{3x}\right]_1^2 - \left[\dfrac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}\right]_1^2 = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^6 - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \left(\dfrac{1}{9}\mathrm{e}^6 - \dfrac{1}{9}\mathrm{e}^3\right) = \dfrac{5}{9}\mathrm{e}^6 - \dfrac{2}{9}\mathrm{e}^3$

10)

$u(x) = 3x + 1$ $\quad u'(x) = 3$

$v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$ $\quad v(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$

Donc $I_{10} = \left[\underbrace{\dfrac{1}{2}(3x+1)\,\mathrm{e}^{2x}}_{uv}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \underbrace{\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{2x}}_{u'v} \,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{2}(3x+1)\,\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 - \left[\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 = 2\,\mathrm{e}^2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^0 - \left(\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^2 - \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^0\right) = \dfrac{5}{4}\mathrm{e}^2 + \dfrac{1}{4}$