Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme ; convexité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

3) **a)** Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
On admettra que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

b) Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.

4) Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.

On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

Correction

Exercice B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme ; convexité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \dfrac{3}{x}$,
où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1) On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$f(x) = x\left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \frac{3}{x}$$

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - 4\frac{\ln(x)}{x}\right) + 4 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

$$f'(x) = 1 + 0 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$$

3) **a)** On cherche le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$:
$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

x	0		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

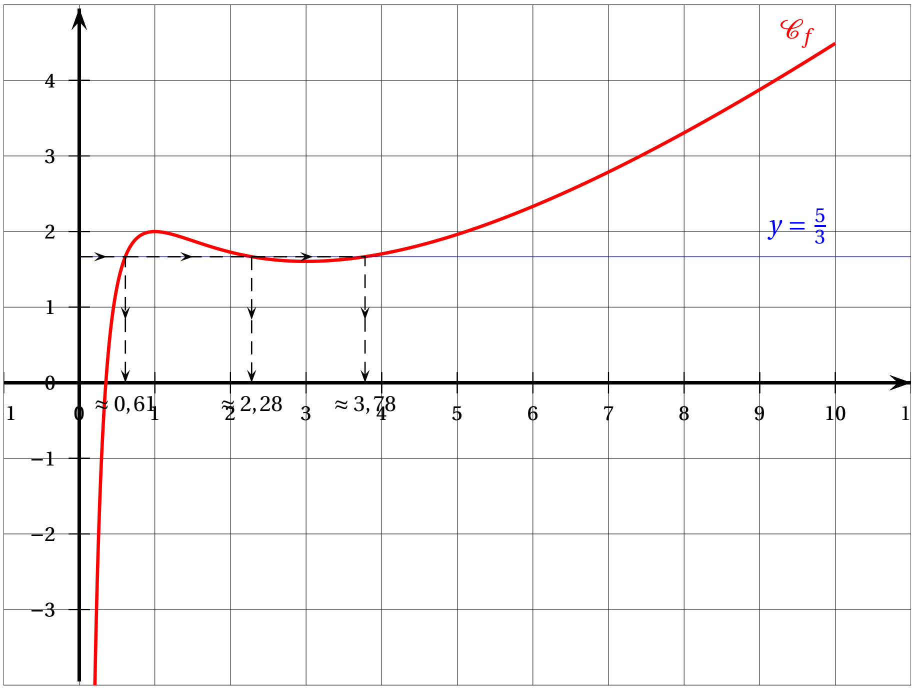
$f(1) = 1 + 4 - 4\ln(1) - \dfrac{3}{1} = 2$; $f(3) = 3 + 4 - 4\ln(3) - \dfrac{3}{3} = 6 - 4\ln(3) \approx 1,69$
On établit le tableau des variations de f en admettant que que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$:

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$6 - 4\ln(3) \approx 1,61$	$\nearrow$	$+\infty$

b)
- $\dfrac{5}{3} \in]-\infty\,;\,2]$ donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.
- $\dfrac{5}{3} \approx 1,67$ et $f(3) = 6 - 4\ln 3 \approx 1,61$ donc $\dfrac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\,;\,2]$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;\,3[$.
- $\dfrac{5}{3} \in [6 - 4\ln 3\,;\,+\infty[$, donc $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

Conclusion : l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet donc trois solutions dans $]0\,;\,+\infty[$.

Voir cidessus les valeurs approchées des solutions.



4) Pour étudier la convexité de f, on détermine le signe de f'', la dérivée seconde de f.

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$ donc

$$f''(x) = \frac{(2x-4) \times x^2 - (x^2 - 4x + 3) \times 2x}{x^4} = \frac{(2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 6) \times x}{x^4} = \frac{4x-6}{x^3}$$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-6$		$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
	$\Vert$	f concave		f convexe	

La dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{3}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + 4 - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{7}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$.