Combinatiorics Homework 01

DarkSharpness

2023.10.6

目录

Problem 1

当 $n = t^2 - 2(t \in \mathbb{N})$，$k = \frac{1}{2}(n - \sqrt{n+2})$ 或 $k = \frac{1}{2}(n - \sqrt{n+2}) - 1$ 时，$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}$ 取到最大值。

否则，当 $n = \lfloor \frac{1}{2}(n - \sqrt{n+2}) \rfloor$ 时，取到最大值。

Problem 2

$$E(|X-Y|) = \frac{1000}{2^{1000}}\binom{1000}{500}$$

Problem 3

右边的组合含义是: 从 n 个元素之间有 $n+1$ 个空隙，从中任取 $a+b+1$ 个空隙。而我们转化这个模型: 对于左边的 a 个空隙，我们认为其绑定的是空隙右边的元素；对于右边的 b 个空隙，我们认为其绑定的是空隙左边的元素。对于剩下那个空隙，我们认为其实分割先，把左边和右边的元素分开。

此时，如果我们先枚举中间的空隙，那么其可以把 n 个元素分为左边 k 个和右边 $n-k$ 个。而对于左边的 k 个元素，我们相当于从 k 个元素中选 a 个。对于右边同理。因此，其等于 $\binom{k}{a}\binom{n-k}{b}$ 然后对于 k 求和，即为左边的式子。

Problem 4

有 $2n$ 个元素，我们不妨将其两两配对得到 n 个对子。右式相当于从 $2n$ 个元素中选出 n 个的方案数量。而对于每个对子，我们存在三种可能: 选了 0 or 1 or 2 个元素。对于选 n 个物品的方案，我们如果被选择了 2 个元素的对子有 k 个。显然，被选了 0 个元素的对子也有 k 个，而选了 1 个元素的对子有 $n-2k$ 个。

因此，对于右边的式子，我们先枚举选了 2 个元素的对子，再枚举选了 0 个元素的对子，一共有 $\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}$ 种方案。而对于剩下的选了 1 个元素的对子，每种对子有 2 种选择，因此有 2^{n-2k} 种方案。右边的式子等价于 $\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}2^{n-2k}$ 求和，即为左边的式子。

Problem 5

(a)

我们考虑 $P(-x)\times P(x)$ 。因为 $P(x)=\sum_{k=0}^{2n}a_kx^k$ ，且显然 $a_k=a_{2n-k}$ ，因此 $P(-x)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^ka_{n-2k}x^k$ 。考虑 $P(x)\times P(-x)$ 的第 $2n$ 次项 b_{2k} 。显然，

$$b_{2k}=\sum_{k=0}^{2n}a_k(-1)^{2n-k}a_k=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^ka_k^2$$

而我们代入多项式的原始含义:

$$P(x)\times P(-x)=(1+x^2+x^4)^n=P(x^2)$$

所以由定义，$b_{2k}=a_k$ 。所以得证。

(b)

代入 $x=\pm1$ 。$P(1)=\sum_{k=0}^{2n}a_k$ 且 $P(-1)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^ka_k$ 。所以

$$a_0+\cdots+a_{2n}=\frac{1}{2}(P(1)+P(-1))=\frac{1}{2}(3^n+(-1)^n)$$

(c)

考虑 $G(x)=(1-x)^n$ 。设 $G(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k$ 。显然 $b_k=(-1)^k\binom{n}{k}$ 。令 $H(x)=G(x)P(x)=(1-x^3)^n$ 。设 $H(x)=\sum_{k=0}^{3n}c_kx^k$ 。显然 $c_k=\sum_{i=0}^{k}b_ia_{k-i}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}a_{k-i}$ 。所以所求即为 c_k 。显然:

$$c_k = \begin{cases} (-1)^k \binom{n}{t} & (k = 3 * t, \quad t \in \mathbb{Z}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Problem 6

显然，

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n}{b}}{\binom{n}{a}} &= \frac{a!(n-a)!}{b!(n-b)!} \\ &= \frac{a!(n-a)!(b-a)!}{b!(n-b)!(b-a)!} \\ &= \frac{\binom{n-a}{n-b}}{\binom{b}{a}} \end{aligned}$$

如果 $\gcd(\binom{n}{b}, \binom{n}{a}) = 1$ ，那么 $\frac{\binom{n}{b}}{\binom{n}{a}}$ 一定已经是最简形式的分式，但 $\binom{b}{a} < \binom{n}{a}$ 说明其一定不是最简形式的分式，因此矛盾。所以 $\gcd(\binom{n}{b}, \binom{n}{a}) > 1$ 。