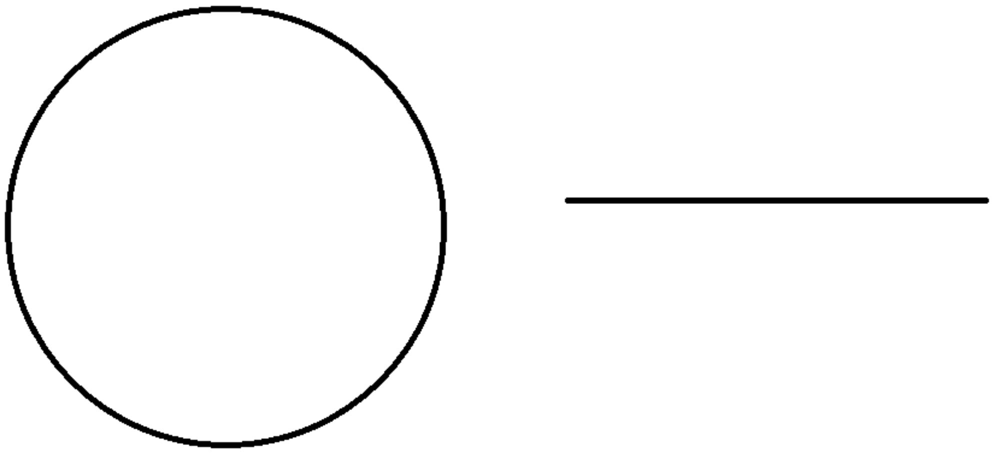
题目:TODO

摘要

TODO

引言

平面曲线在生活中处处可见，各种屏幕上显示出来的图形的轮廓就是由二维的平面曲线构成，而各种文字也是由平面曲线构成。而对于平面曲线，我们可以很直观的感觉的不同曲线在不同地方弯曲程度不同。例如下图中的一条直线和一个圆，我们很明显能感知到圆的弯曲程度要大于直线。



然而，这样的对于“弯曲程度”的感知只是一种直觉上的感知，是基于比较且不能量化的。对于给定参数的一个平面曲线，我们应该发展出数学的工具来给出一个点附近弯曲程度的严格定义。而到了高维度，甚至是超过了我们所生活的三维空间更高维度，我们的直觉就完全失效了。这就更加需要我们发展出一套数学理论来解决这样的问题。

事实上，这样的理论工具在生活中也大有用处。它可以和物理学工程学等结合，进而用于解决实际生活的一些问题。

主体

一般曲线的表示

弧长参数

在数学上，一条曲线的定义为：设 $I=[a,b]$ $I=[a,b]$ 为一实数区间，即实数集的非空子集，那么曲线 c 就是一个连续函数 $c:I\rightarrow X$ 的映像，其中 X 为一个拓扑空间。[1]

因此，对于 R^n 的任意一条曲线，我们都可以把其写成每一个维度的分量关于参数 t 的形式，记作 $x_i=x_i(t)$ 。因此，曲线的位矢可写作展开形式 $\vec{r}=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ ，其中 $t\in[a,b]$ 。

然而，这样的的表示是不完美的，其存在一个与曲线本身无直接关联的参数 t 。例如，对于任意 $t^{'}$ 和单调增函数 f 满足 $f(t^{'})\in[a,b]\ (t\in[c,d])$ ，t 和 $t^{'}$ 存在一一映射的关系。因此， $\vec{r}=(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))=(x_1(f(t^{'})),x_2(f(t^{'})),...,x_n(f(t^{'})))=(x_1^{'}(t^{'}),x_2^{'}(t^{'}),...,x_n^{'}(t^{'}))$。可以看出，曲线的表示依赖于参数 t 的选取，将 t 替换为 $t^{'}$ 之后，曲线的表示发生改变。这显然不是一个很本质的表示。

事实上，我们可以考虑下参数 t 的现实意义，在一条曲线相同位置固定 $d\vec{r}$ 的情况下，选择不同的参数， dt 也会不同。若把 t 当作为时间，$\vec{r}$ 当作位移，那么不同的 t 则对应了我们在曲线上移动的速度 $\frac{d\vec{r}}{dt}$ 不同。

为了解决这一问题，我们引入新的一个参数 ds，定义 $ds=\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+...+dx_n^2}$ ，$s=\int ds+C$。

为了简化讨论，我们将讨论范围局限于 **正则曲线**[2]，即满足 $\vec{r}$ 对于 t 处处可微的曲线。此时，将 $\vec{r(t)}$ 可写作 $\vec{r(s)}$。由复合函数求导公式， $\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt}$ 。而注意到 $|d\vec{r}|=\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+...+dx_n^2}$，因此 $|\frac{d\vec{r}}{ds}|=1$。该参数与曲线本身密切相关，用前面的现实意义去分析，s 就可以理解为固定速度为1的在曲线上移动。

我们将上述参数定义为**弧长参数**，其是一个只与曲线本身相关的曲线的参数表示，其中曲线需要满足正则曲线的性质。

切线

在最开始发展微分理论的时候，导数就是用来求出函数在一个点的切线方向的工具。在平面直角坐标系中，函数一点的切线的一个方向向量为 $(1,\frac{dy}{dx})$ 。而对于任意的

可弧长参数化的曲线 $\vec{x}=\vec{x}(s)$ ，我们可以回到切线的定义去求出切线方向。我们设切线这条直线的参数形式为 $\vec{y}=\vec{y}(s)$ ，在 $s=s_0$ 处相切，因此 $\vec{y}(s_0)=\vec{x}(s_0)$ ，且在 s_0 附近，两条曲线要尽可能地接近。令 $\delta s=s-s_0$ ，则:

$$\begin{aligned}|\vec{y}(s)-\vec{x}(s)| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i(s)-x_i(s))^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{dy}{ds}-\frac{dx}{ds})^2\cdot\delta s^2+o((\delta s)^2)} \\ &= |\frac{d\vec{y}}{ds}-\frac{d\vec{x}}{ds}|\cdot\delta s+o(\delta s)\end{aligned}$$

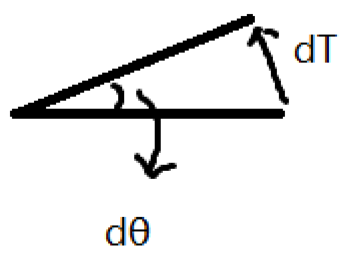
不难看出，当切线满足 $\frac{d\vec{y}}{ds}=\frac{d\vec{x}}{ds}(s=s_0)$ 时候，在 s_0 附近两者最接近，所以曲线地切线方向地一个方向向量即为 $\frac{d\vec{x}}{ds}$ 。注意到 $|\frac{d\vec{x}}{ds}|=1$，所以其也是切向的单位向量。记**单位切向量**为 $\vec{T}=\frac{d\vec{x}}{ds}$ ，满足 $|\vec{T}|=1$。

二维曲线

二维曲线的法向量与曲率

为了简单起见，我们先从二维的情况开始讨论。二维曲线在一个平面内，除了切向量，其还存在恰好一个方向向量与切向量相切，记这个方向为**法向**。此时，由于 $|\vec{T}|=1$ ，因此 $\vec{T}\cdot\vec{T}=1$ 。左右对 s 求导， $\frac{d\vec{T}}{ds}\cdot\vec{T}=0$ 。因此可以得出， $\frac{d\vec{T}}{ds}\perp\vec{T}$ ，其沿法向。我们记**单位法向量** $\vec{N}=\frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{|\frac{d\vec{T}}{ds}|}$ 。

而曲线的曲率被定义为曲线转动的快慢，即在一个点附近切向转过角度与偏离位移大小的比值的极限。对于二维的曲线，因为在弧长参数下 $\vec{T}$ 的模长保持不变，其装过的



角度 $\delta\theta=\frac{|\delta\vec{T}|}{|T|}=|\delta\vec{T}|$ ，如下图所示。

因此，记**曲率的大小**为 κ ，由定义， $\kappa=\lim_{\delta s\to 0}\frac{\delta\theta}{\delta s}=\lim_{\delta s\to 0}\frac{|\delta\vec{T}|}{\delta s}\cdot\frac{1}{|\vec{T}|}=|\frac{d\vec{T}}{ds}|$ ，所以由单位法向量 $\vec{N}$ 的定义， $\frac{d\vec{T}}{ds}=\kappa\vec{N}$ 。 在一般情况下，我们还用记曲率半径

$\rho=\frac{1}{\kappa}$ 。对于一个特殊的曲线:圆，该曲率半径就等于圆的半径。

切向量、法向量与曲率的其他性质

由上，在二维弧长参数 $\vec{r}=\vec{r}(s)$ 下，我们已经定义了如下三个量:

$$\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{ds}$$
$$\kappa=|\frac{d\vec{T}}{ds}|$$
$$\vec{N}=\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{d\vec{T}}{ds}$$

而这些量之间还存在一些内在的联系。由 $|\vec{T}|=1$，即 $\vec{T}\cdot\vec{T}=1$ ，对两边求二阶导，$\frac{d^2\vec{T}}{ds^2}\cdot T+(\frac{d\vec{T}}{ds})^2=0$ 此时由定义以及 $|\vec{N}|=1$ ，有 $\frac{d^2\vec{T}}{ds^2}\cdot\vec{T}=-\kappa^2$。记为(1)式。

类似的，因为 $|\vec{N}|=1$ 即 $\vec{N}\cdot\vec{N}=1$，我们对两边对 s 求导 $\vec{N}\cdot\frac{d\vec{N}}{ds}=0$ ，所以可知 $\vec{N}\perp\frac{d\vec{N}}{ds}$。又因为已经证过 $\vec{T}\perp\frac{d\vec{T}}{ds}=\kappa\cdot\vec{N}$ ，所以 $\frac{d\vec{N}}{ds}$ 与 $\vec{T}$ 共线。再带入 $\vec{N}$ 的定义，以及(1)式，可知 $\frac{d\vec{N}}{ds}=-\kappa\vec{T}$

因此，我们可以总结出下面几个常用的式子。

$$\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{ds}$$
$$\vec{N}=\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=\kappa\cdot\vec{N}$$
$$\frac{d\vec{N}}{ds}=-\kappa\cdot\vec{T}$$

$$\frac{d^2\vec{T}}{ds^2}=-\kappa^2\cdot\vec{T}$$

法向量与切向量的现实意义

事实上，回到最初的含有 t 的参数表示形式，我们只需将每一个 ds 换为 $\frac{ds}{dt}\cdot dt$ 即可。而此时，$\frac{ds}{dt}$ 对于的是现实世界中的运动速度，而 t 对应的是时间。将上述式子整理化简，我们可以得到:

$$\frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\kappa \cdot (\frac{ds}{dt})^2 \cdot \vec{N} + \frac{d^2 s}{dt^2} \cdot \vec{T} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

而在物理中，两个式子的右边分别对应的是速度矢量和加速度矢量。左边的 $\frac{ds}{dt}$ 为速度大小，$\frac{d^2 s}{dt^2}$ 为速度大小的变换率。可以看出，质点在曲线上运动的时候，除了切线方向速度大小改变带来切向加速度，由曲率还会带来一项法向的加速度，这便是人们常说的向心加速度。而通过二维曲线切向量法向量相关的知识，我们便能很容易地研究二维曲线上的质点运动问题。

三维曲线

三维曲线的法向与曲率

对于三维曲线，其切线方向的单位向量依然可以由 $T = \frac{d\vec{r}}{ds}$ 得出。而对于三维的曲线，与其垂直的方向构成了一个平面。因此，我们不能像二维那样将法向定义为与切向垂直的方向，因为这样的方向有无数个。然而，我们依然可以从法线的另外一个性质“切向量变化的方向”入手，来定义法向量。类似二维曲线，通过切向量转过的角度的大小与通过距离的比值，我们依然可以定义**曲率** $\kappa = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta \theta}{\delta s} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{|\delta \vec{T}|}{\delta s} \cdot \frac{1}{|\vec{T}|} = |\frac{d\vec{T}}{ds}|$ 。而我们将切向量变化的方向定义为 **法向**，则可以得到与二维情况下相同的形式 $\vec{N} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$。

三维曲线的副法向与曲率

由此，我们可以得到相互正交的两个方向:切向和法向。但在一个三维空间中，任何一组标准正交基应当存在三个互相垂直单位向量。因此，我们可以通过叉乘给出第三个单位向量，记**副法向的单位向量** $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ 。此时，$\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ 构成了该三维空间中的一组标准正交基。

由正交性，$\vec{N} \cdot \vec{T} = 0$ 。两边对 s 求导，并带入 $\vec{N} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$，可得 $\frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{T} = -\kappa$ 。记为(1)式。　　由于 $|\vec{N}| = 1$ 即 $\vec{N} \cdot \vec{N} = 1$ ，两边对 s 求导有 $\vec{N} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = 0$ 可知 $\vec{N} \perp \frac{d\vec{N}}{ds}$ 。因此，可在标准正交基框架下设 $\frac{d\vec{N}}{ds} = \alpha\vec{T} + \beta\vec{B}$。记为(2)式。

将(2)带入(1),可知 $\alpha = -\kappa$ 。

而类似(2)式，我们可以设 $\frac{d\vec{B}}{ds} = \gamma\vec{T} + \xi\vec{N}$; 类似(1) 式，我们也能写出 $\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{T} = -\vec{B} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$ 以及 $\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = -\vec{B} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds}$ 。容易求出，$\gamma = 0, \xi = -\beta$。

汇总一下，我们可以得到如下这些式子。

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa \cdot \vec{N} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa \cdot \vec{T} + \beta \cdot \vec{B} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} &= -\beta \cdot \vec{N} \end{aligned}$$

其中，$\vec{B}$ 是由 $\vec{T} \times \vec{N}$ 定义得到，β 是一个曲线相关的常数，其绝对值大小等于 $|\frac{d\vec{N}}{ds} + \kappa \cdot \vec{T}|$，称为**挠率**。

挠率的几何直观

至今为止，我们只是从理论上推导出了挠率的值，却没有给出其背后的意义。

参考资料

[1]维基百科:曲线 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9B%B2%E7%BA%BF [2]维基百科:曲线的微分几何。https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9B%B2%E7%BA%BF%E7%9A%84%E5%BE%AE%E5%88%86%E5%87%A0%E4%BD%95 [3]维基百科:弗莱纳公式。https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BC%97%E8%8E%B1%E7%BA%B3%E5%85%AC%E5%BC%8F