Homework 03

DarkSharpness

2023.10.6

目录

T3

充分性: 如果 $\phi : x \longmapsto x^{-1}$ 是 G 的同构映射,则 $\forall x, y \in G$,有 $xy = (y^{-1}x^{-1})^{-1} = \phi(\phi(y)\phi(x)) = \phi(\phi(y))\phi(\phi(x)) = yx$,即 G 是交换群。

必要性: 如果 G 是交换群，那么 $\phi(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = \phi(x)\phi(y)$ ，即 ϕ 是 G 的同构映射。

T4

$\forall x, y \in G$ ，有 $phi(xy) = axya^{-1} = ax(a^{-1}a)ya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \phi(x)\phi(y)$ ，即 ϕ 是 G 的同构映射。

T6

取 G 和 H 都是 $(\mathbb{N}, +)$ 。真子群为 $(2\mathbb{N}, +)$ ，取映射 $\phi = 2x$ 即可。

T1

(1) 0 的阶为 1 ; 其他数的阶为 7 。

(2) 0 的阶为 1 ; $1, 3, 5, 7$ 的阶为 8 ; $2, 6$ 的阶为 4 ; 4 的阶为 2 .

(3) 0 的阶为 1 ; $1, 3, 7, 9$ 的阶为 10 ; $2, 4, 6, 8$ 的阶为 5 ; 5 的阶为 2 .

(4) 0 的阶为 1 ; $1, 3, 5, 9, 11, 13$ 的阶为 14 ; $2, 4, 6, 10, 12$ 的阶为 7 ; 7 的阶为 2 .

(5) 0 的阶为 1 ; $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ 的阶为 15 ; $3, 6, 9, 12$ 的阶为 5 ; $5, 10$ 的阶为 3 .

(6) 0 的阶为 1 ; $1, 5, 7, 11, 13, 17$ 的阶为 18 ; $2, 4, 8, 10, 14, 16$ 的阶为 9 ; $3, 15$ 的阶为 6 ; $6, 12$ 的阶为 3 ; 9 的阶为 2 .

T5

显然，$U(n) = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} | k \in [n]\}$ 为 n 阶循环群。

循环元为所有 k 与 n 互素的 k ，$e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ 即为循环元。

T12

若 $(gag^{-1})^k = e$ ，则展开后得到 $ga^kg^{-1} = e$ ，即 $ga^k = g$ ，即等价于 $a^k = e$ 。因此显然 a 与 gag^{-1} 有相同的阶。