流体力学与场论

DarkSharpness

2023.06.06

摘要

场论是数学中研究函数的一个有力的工具。本文借助场论的知识，以及物理学中基本的质量、动量、能量守恒和一些本构关系，推导出了流体力学中的重要定理、守恒定律，以及某些特殊流体满足的基本方程。

Keywords: 场论, 流体力学

Contents

1 引言

流体力学，是物理学重要的分支，是研究流体运动和力学性质的学科，涵盖了广泛的领域，包括天气预报、空气动力学、海洋学等等。在生活中，我们也常常能见到各种流体，例如水龙头里面流动的水，我们呼吸的空气。而流体也存在许多有趣的现象，例如层流与湍流。在过去，人们一直在不断深化对流体力学的理解，并发展了一系列数学模型和理论框架，来解释这些独特的流体现象。

场论是现代物理学的一个重要分支，它为描述自然界中的基本相互作用提供了强大的数学工具。

本文旨在借助场论的知识，以及物理学中基本的质量、动量、能量守恒和一些本构关系，推导出了流体力学中的重要定理、守恒定律。本文也将讨论，满足特殊条件的流体流体，其基本动力学方程。

2 流体运动的基本表述

在流体力学中，一个重要而基本的问题就是如何描述流体的运动。

2.1 拉格朗日表述

该表述的基本思想是，在流体中某一个位置 $\vec{r}_0$ 放置一个标记的试探粒子，其不影响且跟随原来流体运动。此时，通过该粒子的运动的位置矢量 $\vec{r}$ 关于时间的变化关系，即可反映流体运动的特性。因此，我们只需求出 $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$ 即可表征物体的运动。特别地，$\vec{r}(\vec{r}_0, 0) = \vec{r}_0$

2.2 欧拉表述

该表述的基本思想是，对于某个空间中某个固定的位置 $\vec{r}_0$ ，我们去研究该固定点的流体微元的运动状态 $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}_0, t)$，即可。需要特别注意的是，在固定研究空间某一点 $\vec{r}_0$ 后，如果为空间中每个流体粒子都打上标记，那么处于 $\vec{r}_0$ 的流体微粒的标记可能会随时间而变化。

2.3 两种表述的差异与联系

前者表述为:

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$$

而后者则是:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$$

由物理含义，我们不难得出关系:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{r}(\vec{r}_0, t)$$

其中 $\vec{r}_0$ 可以由 $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$ 反解得到。

由于流体粒子数量众多，且难以区分分辨，在流体力学中，我们往往更多地去用欧拉表述。而拉格朗日表述更加适合于粒子可以辨认，位矢信息比较重要的固体物理中。

值得关注的是，在欧拉表述中，状态量描述的是场的属性，并不直接是粒子的属性。例如关于 $\vec{r}$ 处的流体微元，我们可能用 $f=f(\vec{r},t)$ 的物理量去描述流体。此时，$(\frac{\partial f}{\partial t})_r$ 描述的是在这一点的 f 场的变化，而不是物理量 f 如何随着特定的试探粒子 (流体微元) 的运动而变化。事实上，在大多物理方程中，例如动量方程 $\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$，外界 (本例子中为外力 $\vec{F}$) 作用的对象是那个运动的流体微元，而不是场。

实际上，常见物理方程中的的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 记号，其是作用于具体粒子。因此其在欧拉表述下，应该是 $(\frac{\partial}{\partial t})_{\vec{r}_0}$ ，即是同一团粒子，而不是简单的 $(\frac{\partial}{\partial t})_{\vec{r}}$ 。为避免歧义，后文我们将用 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ 来代替，称为物质导数[1]，即:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\equiv(\frac{\partial}{\partial t})_{\vec{r}_0}$$

由链式法则，我们不难求出:

$$\frac{\mathrm{D}f(\vec{r},t)}{\mathrm{D}t}=(\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t})_{\vec{r}_0}=(\frac{\partial f}{\partial t})_{\vec{r}}+(\frac{\partial f}{\partial r})_t\cdot(\frac{\partial r}{\partial t})_{\vec{r}_0}$$

在欧拉表述下，我们可以得出，在某一点某一时刻:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla$$

3 Reynolds 输运定理

在流体力学中，物理学家们常常会考察某些特定区域 $V(t)$ 内的流体状态。

对于一个区域 $V(t)$ ，边界为 $\partial V(t)$ ，流体具有某个广度量 f ，很多物理方程中，会出现这部分流体粒子该物理量的总和对于时间的导数。即:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}f\mathrm{d}V$$

注意到我们在分析这个式子的时候，我们是对于特定的粒子在分析，并不是背后的场，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 必须作用在粒子上。因此，V 会随着时间而改变。

为了避免过多的讨论，这里假设 f 的性质足够的好，满足函数本身和偏导数都连续，且积分区域为紧集 (即有界闭区域)。那么在积分区域上，则:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}f\mathrm{d}V=\int_{V(t)}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V+\int_{\partial V(t)}f\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_{V(t)}(\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla(f\vec{v}))\mathrm{d}V$$

该式即为 Reynolds 输运定理 [2]。

3.1 物理直观

从直观上去理解，上述式子的物理含义是在某时刻和某体积内，全部流体某个广度量的总和的变化量。根据物理直观，我们可以猜测: 该变化量等于内部的广度量变化量，以及从边界流出的量。

内部的广度量变化量即等于:

$$\int_V\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V$$

边界流出的量需要定义流。由物理直观，流即为量乘上速度，即: $\vec{j} \equiv f \cdot \vec{v}$
直观上，边界流出的量等于从所有面积流出的量积分，等于:

$$\int_{\partial V} \vec{j} \mathrm{d}\vec{S}$$

因此，合并两项，完全借助物理直观，我们可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V(t)} f \mathrm{d}V &= \int_V \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d}V + \int_{\partial V} \vec{j} \mathrm{d}\vec{S} \\ &= \int_V (\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v})) \mathrm{d}V \end{aligned}$$

其中，最后一步用到了高斯定理，以及 $\vec{j}$ 的定义。

3.2 数学推导

我们假设体积 $V(t)$ 足够好，满足有界性，由分段光滑的闭曲面围成，且 f 在区域内有连续的偏导数，则需证:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V(t)} f \mathrm{d}V = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d}V + \int_{\partial V(t)} f \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{V(t)} (\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(f\vec{v})) \mathrm{d}V$$

简单起见，我们暂时只证明其一维时候的形式。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) \mathrm{d}x = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \mathrm{d}x + f(b,y) \cdot \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}y} - f(a,y) \cdot \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y}$$

记: $\phi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) \mathrm{d}x$

$$\phi(y+h) - \phi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} (f(x,y+h) - f(x,y)) \mathrm{d}x - \int_{a(y)}^{a(y+h)} f(x,y+h) \mathrm{d}x + \int_{b(y)}^{b(y+h)} f(x,y+h) \mathrm{d}x$$

由微分中值定理:

$$\int_a^b (f(x,y+h) - f(x,y)) \mathrm{d}x = h \cdot \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y+\theta h) \mathrm{d}x (\theta \in [0,1])$$

因为连续且有界，所以 f 一致连续，所以

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \mathrm{d}x$$

由牛顿莱布尼兹公式，可得:

$$\lim_{h \to 0} \int_{b(y)}^{b(y+h)} \frac{f(x,y+h)}{h} \mathrm{d}x = f(b,y) \cdot \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}y}$$

所以当 h 趋向于 0 的时候，有:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\frac{\phi(y+h)-\phi(y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\mathrm{d}x + \lim_{h\to 0}\int_{b(y)}^{b(y+h)}\frac{f(x,y+h)}{h}\mathrm{d}x - \lim_{h\to 0}\int_{a(y)}^{a(y+h)}\frac{f(x,y+h)}{h}\mathrm{d}x \\
&= \int_{a(y)}^{b(y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x + f(b,y)\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}y} - f(a,y)\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y}
\end{aligned}
$$

对于高维的情况，我们可以类似地证明 [3] ，下式依然成立:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} f\mathrm{d}V = \int_{V(t)}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_{\partial V(t)} f\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{V(t)}(\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla(f\vec{v}))\mathrm{d}V
$$

在这里，物理直观与数学理论达成了一致。

4 流体力学的守恒定律

4.1 质量守恒定理

对于固定的一个流体微元，其质量一定是保持不变的，即对任意一些固定的粒子构成的体积:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}\rho\mathrm{d}V = 0
$$

由 Reynolds 输运定理，可以得:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla(\rho\vec{v}))\mathrm{d}V = 0
$$

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla(\rho\vec{v}) = 0
$$

其物理含义是: 某一点处的密度增加量，加上该点净流出的所有流体，为零。有时可写作:

$$
\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\nabla\cdot\vec{v} = 0
$$

事实上，很多时候，许多的物理量往往正比于流体密度，例如单位体积势能 $\phi(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)\cdot U(\vec{r},t)$ ，即为密度乘以该点的势 (电势/重力势等等)。借助 Reynolds 输运定理，可知:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}\phi \mathrm{d}V &= \int_{V(t)}(\frac{\partial \phi}{\partial t}+\nabla(\phi\vec{v}))\mathrm{d}V \\
&= \int_{V(t)}(\frac{\partial \rho}{\partial t}U+\rho\frac{\partial U}{\partial t}+\rho U\nabla\vec{v}+\rho(\nabla U)\vec{v}+(\nabla\rho)U\vec{v})\mathrm{d}V \\
&= \int_{V(t)}(U(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla(\rho\vec{v}))+\rho(\frac{\partial U}{\partial t}+\vec{v}\nabla U))\mathrm{d}V \\
&= \int_{V(t)}\rho\frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

4.2 动量守恒定理

由动量守恒定律，作用在一些流体位元的力的大小乘以作用时间，即为动量变化量，因此:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}\rho\vec{v}\mathrm{d}V=\vec{F}
$$

而作用在物体上的外力往往由两部分构成: 一部分是作用在单位质量流体微元上的力，单位体积力大小 $\vec{f}$ 。另一部分是该流体微元表面受到的应力，应力张量为 σ 。

因此，由动量守恒定律:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}\rho\vec{v}\mathrm{d}V=\int_{V(t)}\rho\vec{f}\mathrm{d}V+\int_{\partial V(t)}\sigma\mathrm{d}\vec{S}
$$

由质量守恒定律的推论，以及高斯定理，可得:

$$
\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}=\frac{1}{\rho}\nabla\sigma+\vec{f}
$$

$$
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=\frac{1}{\rho}\nabla\sigma+\vec{f}
$$

4.3 能量守恒定理

流体的总内能由两项组成: 流体的宏观运动动能，流体的微观内能 (包含热运动动能，以及分子间势能之和)。一定体积内的总内能即为: $E=\int_V\rho(\frac{v^2}{2}+\epsilon)$ ，其中 ϵ 为单位体积的微观内能。

特别地，为了简单起见，我们认为热量仅仅通过热传导传递，即热流 $\vec{j_q}=-\kappa\nabla T$ ，且假设 κ 为常数。此时，由热力学第一定律 $\mathrm{d}E=\partial W+\partial Q$:

$$
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\int_{V(t)}\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\mathrm{d}V+\int_{\partial V(t)}\sigma\vec{v}\mathrm{d}\vec{S}+\int_{\partial V(t)}\vec{j_q}\mathrm{d}\vec{S}
$$

由质量守恒定律、动量守恒定理的推论，以及高斯定理，可得:

$$
\rho(\frac{\partial \epsilon}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\epsilon)=\nabla(\sigma\vec{v})-\nabla\sigma\cdot\vec{v}-\kappa\nabla^2T
$$

5 流体力学的基本方程

为了简单起见，在之后的讨论中，我们认为物理过程进行的很快，以至于流体之间完全来不及进行热传导，因此忽略流体之间的热传导，即可以认为 $\kappa = 0$ 。

5.1 不可压缩黏性流体

由于不可压缩，因此，任何流体微元在流动过程中，体积不变，只和初始密度有关，即 $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$ 。代入质量守恒定律，可得

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

同时，我们假设流体性质较好，即满足流体均匀各向同性。由不可压缩流体的本构关系方程 [4]：

$$\sigma_{i,j} = -p\delta_{i,j} + \mu(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

其中 $\delta_{i,j}$ 当且仅当 $i = j$ 的时候为 1 ，否则为 0 。而 μ 是流体的第一黏性系数。

将本构关系代入动量守恒方程。可得:

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v} + \vec{f}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v} + \vec{f}$$

5.2 可压缩无黏性流体

当流体没有黏性，此时，应力张量仅仅由压强提供，即 $\sigma = -pI$ ，其中 I 为单位矩阵。

此时，满足:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0 \\
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \\
\rho(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\epsilon) = -p\nabla \cdot v
\end{aligned}$$

由 1,3 式:

$$\frac{\mathrm{D}\epsilon}{\mathrm{D}t} = \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}$$

特别地，当流体为理想气体，满足 $p = \frac{\rho}{\mu}RT$ ，$\epsilon = \frac{1}{\mu}C_vT$ ，因此可得:

$$\frac{C_v}{R}\frac{\mathrm{D}(\rho T)}{\mathrm{D}t} = T\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\frac{T}{\rho^{\gamma-1}})=0$$

其中 $\gamma=1+\frac{R}{C_v}$ 。该式子对应的物理含义为，一个气流团在上升的过程中，保持绝热 (即无热交换)。事实上，将 1,3 式直接得到的式子，乘以 V (气流团体积微元的大小)，便可以得到:

$$\frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t}=\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}V$$

对于同一团气体，质量始终不变，即 $\frac{\mathrm{D}(\rho V)}{\mathrm{D}t}=0$，因此可得:

$$\frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t}+p\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{D}t}=0$$

即绝热状态下的热力学第一定律 $\mathrm{d}U+p\mathrm{d}V=0$ 。

5.3 不可压缩无黏性流体

由前面可知，此时 $\nabla\cdot\vec{v}=0$ 且 $\sigma=-pI$ 。

我们再考虑一个特殊的情况: $\vec{f}$ 完全由保守力提供，即 $\vec{f}=-\nabla\Phi$ 且流体密度恒为 ρ 。此时，其方程满足:

$$\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-\nabla\Phi$$

将方程两边乘以 $\vec{v}$ ，可得:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\frac{1}{2}v^2)+\vec{v}\cdot\nabla(\frac{p}{\rho}+\Phi)=0$$

当流体满足定常条件，即 $\frac{\partial}{\partial t}=0$ 。则:

$$\vec{v}\cdot\nabla(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}+\Phi)=0$$

因此，在同一条流线上:

$$\frac{1}{2}\rho v^2+p+\rho\Phi=const$$

即为伯努利方程。需要注意的是，伯努利方程成立的条件是不可压缩无黏性流体，且流体满足定常条件，并且仅仅对同一条流线上的流体成立，不同流线的常数可能不同。而一般情况下，我们认为伯努利方程对于全部空间成立，此时需要额外添加无旋条件，即:

$$\nabla\times\vec{v}=0$$

此时，有恒等式:

$$\nabla(\frac{1}{2}v^2)=\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})+(\vec{v}\times\nabla)\vec{v}=(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$$

因此，在额外满足了无旋条件后，结合动量守恒方程，我们可以得出:

$$\nabla(\frac{1}{2}v^2) = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi$$

$$\nabla(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi) = 0$$

因此，此时，对于全空间，均有 $\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho\Phi = const$ 。该形式即为我们熟知的伯努利方程。

6 小结

在流体力学中，我们往往用场的欧拉表述，来反映流体场的性质。而一般的力学定律中，我们研究的是粒子的属性。因此，我们需要将熟知的定律转化为欧拉表述。由此，我们推导出了物质导数的概念:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla$$

在流体力学中，物理学家们常常会考察某些特定区域 $V(t)$ 内的流体状态，即:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} f\mathrm{d}V$$

借助物理直观与数学推导，我们可以得出 Reynolds 输运定理:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} f\mathrm{d}V = \int_{V(t)}(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(f\vec{v}))\mathrm{d}V$$

通过三大守恒 (质量/动量/能量) 定律，我们能推导出:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0 \\
\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \frac{1}{\rho}\nabla\sigma + \vec{f} \\
\rho(\frac{\partial\epsilon}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\epsilon) = \nabla(\sigma\vec{v}) - \nabla\sigma\cdot\vec{v} - \kappa\nabla^2 T
\end{aligned}$$

最后，我们推导了绝热情况下，某些特殊流体的基本动力学方程。对于不可压缩黏性流体，其满足:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{v} = 0 \\
\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v} + \vec{f}
\end{aligned}$$

对于可压缩无黏性流体，其满足:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \\
\frac{\mathrm{D}\epsilon}{\mathrm{D}t} = \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}
\end{aligned}$$

对于不可压缩无黏性流体，其若体积力 $\vec{f}$ 仅由保守力提供，且密度恒定为 ρ ，且流体满足定常条件即 $\frac{\partial}{\partial t}=0$ ，则:

$$\vec{v}\cdot\nabla(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho}+\Phi)=0$$

因此，在同一条流线上:

$$\frac{1}{2}\rho v^2+p+\rho\Phi=const$$

若流体额外满足无旋条件，即 $\nabla\times\vec{v}=0$ ，则此时，上式 (即伯努利方程) 对空间任意一处成立。

7 后记

感谢 Hastin 同学在百忙之中抽出时间来帮忙审稿。

参考文献

[1] 维基百科: 物质导数https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%89%A9%E8%B3%AA%E5%B0%8E%E6%95%B8

[2] 维基百科: 雷诺传输定理https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9B%B7%E8%AB%BE%E5%82%B3%E8%BC%B8%E5%AE%9A%E7%90%86

[3] 维基百科: 积分符号内取微分 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%A7%AF%E5%88%86%E7%AC%A6%E5%8F%B7%E5%86%85%E5%8F%96%E5%BE%AE%E5%88%86#%E9%AB%98%E7%BB%B4%E6%83%85%E5%86%B5

[4] 知乎: 物理学家用流体力学・第二章: 流体的应力与应变https://zhuanlan.zhihu.com/p/554300210