Homework 05

DarkSharpness

2023.10.18

目录

T1

$H = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ 在 A_4 中的左陪集为:

$$\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

$$\{(132), (243), (142), (134)\}$$

$$\{(123), (143), (234), (124)\}$$

在 S_4 中的左陪集为:

$$\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

$$\{(132), (243), (142), (134)\}$$

$$\{(123), (143), (234), (124)\}$$

$$\{(12), (34), (1423), (1324)\}$$

$$\{(13), (24), (1432), (1234)\}$$

$$\{(14), (23), (1243), (1342)\}$$

T8

两个。$\langle a^2 \rangle$ 和 $a\langle a^2 \rangle = \{a^n | n = 2k - 1, k \in [15]\}$

T11

设子群为 $H \le G$ ，设左陪集为 $aH, a \in G$ 。

$\forall x \in aH, x = ah$ ，因此 $x^{-1} = h^{-1}a^{-1} \in Ha^{-1}$ ，即 aH 中的元素的逆元素在 Ha^{-1} 中。同理，任意 $x \in Ha^{-1}, x = ha^{-1}$ ，因此，$x^{-1} = a^{-1}h^{-1} \in aH$ ，即 Ha^{-1} 每个元素都是 aH 中某个元素的逆元素。所以可知，aH 所有元素的逆元素组成了这个子群的右陪集 Ha^{-1} 。

T12

$$
\begin{aligned}
x \in a(H_1 \cap H_2) &\iff \exists h, h \in H_1 \cap H_2 \wedge x = ah \\
&\iff \exists h, h \in H_1 \wedge h \in H_2 \wedge x = ah \\
&\iff \exists h_1, h_2, h_1 \in H_1 \wedge h_2 \in H_2 \\
&\qquad \wedge x = ah_1 \wedge x = ah_2 (\text{a.k.a} \quad h_1 = h_2 \quad \text{in this case}) \\
&\iff x \in aH_1 \wedge x \in aH_2 \\
&\iff x \in aH_1 \cap aH_2
\end{aligned}
$$

T20

设 $|G| = 3$ 。构造 $G^* = \{(a,b,c) | abc = 1 \ \ , a,b,c \in G\}$ 。因为确定了 a, b 之后，存在唯一的 $c \in G$ 满足条件，所以 $|G^*| = (3n)^{3-1} = 9n^2$ 。定义 $A = \{(a,a,a) | a^3 = 1 \ \ , a \in G\}$ ，$B = \{(a,b,c) | abc = 1 \ \ , a \neq b \vee b \neq c \vee c \neq a \ \ , a,b,c \in G\}$ 。显然，$|G^*| = |A| + |B|$ 。对于任意 $\{a,b,c\} \in B$ ，$(a,b,c), (b,c,a), (c,a,b) \in B$ 。因此，对于每个 B 中元素，存在唯一与之对应的两组元素，即 B 可以看作由一些无序三元组中的每个元素构成。设 $\exists m \in \mathbb{Z}, |B| = 3m$ ，又因为 $|G^*| = |A| + |B|$ ，因此可知 $\exists k \in \mathbb{Z}, |A| = 3k$ 。

注意到: $(1,1,1) \in A$ ，因此 $|A| \ge 3$ ，即 $\exists g \in G, (g,g,g) \in A, g \neq 1$ ，即 G 中存在 3 阶元素.

注: 本结论为 Cauchy 定理的特例。

22

因为交换群，所以: $\pi : a \mapsto a^n$ 满足 $\pi(ab) = (ab)^n = a^n b^n = \pi(a)\pi(b)$ ，即 π 为 G 的自同态。

下证 π 为双射。

若存在 $a, b \in G, a \neq b \wedge \pi(a) = \pi(b)$ ，则由交换群性质，$(ab^{-1})^n = 1$ ，因此 $ord(\langle ab^{-1} \rangle) \mid n$ 。因为 $ab^{-1} \in G$ ，因此 $ord(\langle ab^{-1} \rangle) \mid ord(G)$ 。而注意到 $(ord(G), n) = 1$ 因此 $ord(ab^{-1}) = 1$ 即 $a = b$ 矛盾。所以 $a, b \in G, a \neq b$ ，有 $\pi(a) \neq \pi(b)$ 即为单射。

因为 π 为 G 到自身的单射，且 G 有限，因此由元素数相等可知，为满射。

综上 π 为 G 的自同构。