Combinatiorics Homework 01

DarkSharpness

2023.10.6

目录

Problem 1

e^{-1}

Problem 2

e^{-2}

Problem 3

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i$$

$$f(x) \cdot f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j}$$

由题，$C_n = \sum_{i+j=n-1, i,j \geq 0} C_i C_j$ 且 $C_0 = 1$ ，因此有:

$$f(x) \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^{n-1}$$

因此，$f(x) \cdot f(x) \cdot x = f(x) - C_0 = f(x) - 1$
观察到 $g(x) = \frac{1}{2x}(-1 + \sqrt{1+4x})$ 满足上式。且 $g(x)$ 的幂级数展开为:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2x}(-1+\sqrt{1+4x}) \\
&= \frac{1}{2x}(-1+\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{i}(4x)^i) \\
&= \frac{1}{2x}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i-2)!}{2^{2i-1}(i-1)!i!}4^ix^i \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i-2)!}{(i-1)!i!}x^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}x^i
\end{aligned}
$$

且特别地，边界项 $\frac{1}{0+1}\binom{0}{0}=1=C_0$ 。有 $C_i=\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}$ 。

Problem 4

考虑把 $[n]$ 分为两个连续的可空区间 $[1,k]$ 和 $[k+1,n]$ ，其中 $k\in[0,n]$ 。显然，一共有 $n+1$ 种划分方法。

我们记 $A_i=0,1$ 为 i 在左边/右边的情况。定义一个事件为给定所有 $\{A_i\},i\in[n]$ 。定义 $B_i=\{\{A_j\}|A_i=1\wedge A_{i+1}=0\}$ ，即所有满足 $i+1$ 在左边，i 在右边的全体事件。不难发现，一个划分满足条件，当且仅当 B_i 同时不发生。由容斥原理，满足条件的划分数 C 满足:

$$
C=\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}\left|\bigcap_{i\in I}B_i\right|
$$

下面分析 $|I|=k$ 时，$\left|\bigcap_{i\in I}B_i\right|$ 的总数。

显然，$B_i\cap B_{i+1}=\varnothing$ 。因此我们只需考虑 $|I|=k$ 且 $B_i\cap B_{i+1}\neq\varnothing\ \ \forall i\in[n]$ 的情况。其相当于给定 n 个元素，我们选出其中 k 个元素对，其他元素情况任意的总数。

因为剩下 $n-2k$ 个元素状态任意，而 A_i 取值共两种，所以剩下的元素共有 2^{n-2k} 种情况。

对于选出的 k 个元素对，我们可以看作从 n 个元素中选取 k 个元素，且选出的元素后面那个元素没有被选中。其等价于我们强行在前面加入第 0 个元素，而我们需要从 $n+1$ 个元素中选取 k 个元素且，且选出的元素前后元素均为被选中。而这又等价于我们用 $n+1-k$ 个元素填充 $k+1$ 个空位，且每个空位至少填充一个元素。显然，该结果相当于 $n+1-k$ 个元素中选择 $k+1$ 个，即 $\binom{n+1-k-1}{k+1-1}=\binom{n-k}{k}$ 。

综上，当 $|I|=k$ 时，$\left|\bigcap_{i\in I}B_i\right|=\binom{n-k}{k}2^{n-2k}$ 。

求和，即可得到

$$C=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-k}{k}2^{n-2k}=\sum_{k=0}^{\lfloor(\frac{n}{2})\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}2^{n-2k}$$

因此 $C=n+1$ 。当 n 为偶数即为题目情况。