

习题 1-1

T4. 设 ϕ 是集合 A 到 B 的映射, $a, b \in A$, 规定关系“ \sim ”:

$$a \sim b \Leftrightarrow \phi(a) = \phi(b)$$

证明: \sim 是 A 的一个等价关系, 并求其等价类。

T8. 设集合

$$S = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\},$$

在集合 S 中, 规定关系“ \sim ”:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

证明: \sim 是 S 的一个等价关系。

习题 1-2

T5. 在整数集 \mathbb{Z} 中, 规定运算“ \oplus ”如下:

$$a \oplus b = a + b - 2, \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

证明: (\mathbb{Z}, \oplus) 构成群。

T12. 设 G 是群。证明: 如果对任意的 $x \in G$, 都有 $x^2 = e$, 则 G 是一个交换群。

T13. 设 G 是群。证明: G 是交换群的充分必要条件是对任意的 $a, b \in G$, $(ab)^2 = a^2b^2$ 。

T16. 设 G 是有限群。证明: G 中使 $x^3 = e$ 的元素 x 的个数是奇数。