

Combinatorics Homework 01

DarkSharpness

2023.09.17

目录

Problem 1

30000

Problem 2

81

Problem 3

$1 + 10n + 100\binom{n}{2}$

Problem 4

对于初始分班, 假设一开始 $k+1$ 个班级人数分别为 x_i ($i \in [1, k+1]$)。此时, 我们为第 i 个班级的每个人赋予权值 $a = \frac{1}{x_i}$, 那么一个班级内所有人的权值和 $\sum a = 1$, 所有人的权值和 $\sum a = k+1$ 。

那么, 在分完班之后, 第 i ($i \in [1, 2023]$) 个人的权值同理设为 b , 那么同理 $\sum b_i = k$ 。

因此, $\sum(a_i - b_i) = 1$ 。设原来第 i 个人班级里人数为 c_i , 现在班变为了 d_i , 那么 $a_i = \frac{1}{c_i}$ 且 $b_i = \frac{1}{d_i}$ 。若至多一个人其同学人数变多, 若存在不妨设其为 1 号, 那么 $c_i > d_i$ ($i \in [2, 2023]$)。又因为人数为正整数, 所以满足 $a_1 - b_1 = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{d_1} < 1 - 0 = 1$, 而 $a_i - b_i = \frac{1}{c_i} - \frac{1}{d_i} < 0$ ($i \in [2, 2023]$), 所以 $\sum(a_i - b_i) < 1 + 0 + \dots + 0 = 1$, 矛盾。

综上, 至少有两个人同学人数变多。