场论的运用

DarkSharpness

2023.06.06

摘要

这是摘要

Keywords: 场论 , 流体力学

Contents

1 引言

这是引言。

2 流体运动的基本表述

在流体力学中，一个重要而基本的问题就是如何描述流体的运动。

2.1 拉格朗日表述

该表述的基本思想是，在流体中某一个位置 $\vec{r}_0$ 放置一个标记的试探粒子，其不影响且跟随原来流体运动。此时，通过该粒子的运动的位置矢量 $\vec{r}$ 关于时间的变化关系，即可反映流体运动的特性。因此，我们只需求出 $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$ 即可表征物体的运动。特别地，$\vec{r}(\vec{r}_0, 0) = \vec{r}_0$

2.2 欧拉表述

该表述的基本思想是，对于某个空间中某个固定的位置 $\vec{r}_0$ ，我们去研究该固定点的气体微元的运动状态 $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}_0, t)$，即可。需要特别注意的是，在固定研究空间某一点 $\vec{r}_0$ 后，如果为空间中每个流体粒子都打上标记，那么处于 $\vec{r}_0$ 的气体微粒的标记可能会随时间而变化。

2.3 两种表述的差异与联系

前者给出方程

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$$

而后者则是

$$\vec{v}=\vec{v}(\vec{r},t)$$

由物理含义，我们不难得出关系:

$$\vec{v}(\vec{r},t)=\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}(\vec{r}_0,t)$$

其中 $\vec{r}_0$ 可以由 $\vec{r}=\vec{r}(\vec{r}_0,t)$ 反解得到。

由于流体粒子数量众多，且难以区分分辨，在流体力学中，我们往往更多地去用欧拉表述。而拉格朗日表述更加适合于粒子可以辨认，位矢信息比较重要的固体物理中。

值得关注的是，在欧拉表述中，状态量描述的是场的属性，并不直接是粒子的属性。例如关于 $\vec{r}$ 处的气体微元，我们可能用 $f=f(\vec{r},t)$ 的物理量去描述气体。此时， $(\frac{\partial f}{\partial t})_r$ 描述的是在这一点的 f 场的变化，而不是物理量 f 如何随着特定的试探粒子(气体微元)的运动而变化。事实上，在大多物理方程中，例如动量方程 $\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$，外界(本例子中为外力)作用的对象是那个运动的气体微元，而不是场。

实际上，常见物理方程中的的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 记号，其是作用于具体粒子。因此其在欧拉表述下，应该是 $(\frac{\partial}{\partial t})_{\vec{r}_0}$ ，即是同一团粒子，而不是简单的 $(\frac{\partial}{\partial t})_{\vec{r}}$ 。为了避免歧义，后文我们将用 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ 来代替，即:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=(\frac{\partial}{\partial t})_{\vec{r}_0}$$

由链式法则，我们不难求出:

$$\frac{\mathrm{D}f(\vec{r},t)}{\mathrm{D}t}=(\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t})_{\vec{r}_0}=(\frac{\partial f}{\partial t})_{\vec{r}}+(\frac{\partial f}{\partial r})_t\cdot(\frac{\partial r}{\partial t})_{\vec{r}_0}$$

在欧拉表述下，我们可以得出，在某一点某一时刻:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla$$

3 Reynolds 输运定理

在流体力学中，物理学家们常常会考察某些特定区域 $V(t)$ 内的流体状态。

对于一个区域 $V(t)$ ，边界为 $\partial V(t)$ ，流体具有某个广度量 f ，很多物理方程中，会出现这部分流体粒子该物理量的总和对于时间的导数。即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)}f\mathrm{d}V$$

注意到我们在分析这个式子的时候，我们是对于特定的粒子在分析，并不是背后的场，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 必须作用在粒子上。因此， V 会随着时间而改变。

为了避免过多的讨论，这里假设 f 的性质足够的好，满足函数本身和偏导数都连续，且积分区域为紧集(即有界闭区域)。那么在积分区域上，则有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V(t)} f\mathrm{d}V = \int_{V(t)}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_{\partial V(t)} f\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{V(t)}(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(f\vec{v}))\mathrm{d}V$$

物理直观

从直观上去理解，上述式子的物理含义是在某时刻和某体积内，全部流体某个广度量的总和的变化量。根据物理直观，我们可以猜测: 该变化量等于内部的广度量变化量，以及从边界流出的量。

内部的广度量变化量即等于:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V$$

边界流出的量需要定义流。由物理直观，流即为量乘上速度，即: $\vec{j}\equiv f\cdot\vec{v}$

直观上，边界流出的量等于从所有面积流出的量积分，等于:

$$\int_{\partial V}\vec{j}\mathrm{d}\vec{S}$$

因此，合并两项，完全借助物理直观，我们可以得到:

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V &= \int_V \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_{\partial V}\vec{j}\mathrm{d}\vec{S}\\ &= \int_V(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}))\mathrm{d}V\end{aligned}$$

其中，最后一步用到了高斯定理。

数学推导

我们假设体积 $V(t)$ 足够好，其表面方程为 $F(\vec{r},t)=0$ 满足有界性，且 f 在区域内连续且有连续的偏导数。简单起见，我们暂时只证明其一维时候的形式。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{a(y)}^{b(y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x + f(b,y)\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}y} - f(a,y)\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y}$$

记：$\phi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$

$$\phi(y+h)-\phi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)}(f(x,y+h)-f(x,y))\mathrm{d}x - \int_{a(y)}^{a(y+h)} f(x,y+h)\mathrm{d}x + \int_{b(y)}^{b(y+h)} f(x,y+h)\mathrm{d}x$$

由微分中值定理:

$$\int_a^b (f(x,y+h)-f(x,y))\mathrm{d}x = h\cdot\int_a^b\frac{\partial}{\partial y}f(x,y+\theta h)\mathrm{d}x(\theta\in[0,1])$$

因为连续且有界，所以 f 一致连续，所以

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\mathrm{d}x$$

所以结合牛顿莱布尼兹公式，可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{a(y)}^{b(y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x+f(b,y)\cdot\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}y}-f(a,y)\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y}$$

对于高维的情况，我们可以类似地证明 [?] ，下式依然成立:

参考文献

[1] 维基百科:曲线 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9B%B2%E7%BA%BF