Homework 01

DarkSharpness

2023.09.21

目录

T4

$\forall a, b, c \in A$，显然 $\phi(a) = \phi(a)$ 即 $a \sim a$。同时，若 $\phi(a) = \phi(b)$，则 $\phi(b) = \phi(a)$，即 $a \sim b \to b \sim a$。最后，若 $\phi(a) = \phi(b)$ 且 $\phi(b) = \phi(c)$，则 $\phi(a) = \phi(c)$，即 $a \sim b \land b \sim c \to a \sim c$。综上，$\sim$ 是等价关系。

因为 ϕ 是集合 A 到 B 的映射，所以等价类为 $[x] = \{a | \phi(a) = x, a \in A\} (x \in B)$

T8

$\forall (a, b) \in S$，显然 $ab = ba = ab$，所以 $(a, b) \sim (a, b)$。同时，若 $(a, b) \sim (c, d)$，则 $ad = bc$ 即 $bc = ad$，即 $(a, b) \sim (c, d) \to (c, d) \sim (a, b)$。最后，若 $(a, b) \sim (c, d)$ 且 $(c, d) \sim (e, f)$，则 $ad = bc \land cf = de$。因为 $b, d, f \neq 0$，所以 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$，因此，$af = be$，即 $(a, b) \sim (c, d) \land (c, d) \sim (e, f) \to (a, b) \sim (e, f)$。综上，$\sim$ 是等价关系。

T5

$a \oplus b = a + b - 2, \forall a, b \in \mathbb{Z}$。下证 $(\mathbb{Z}, \oplus)$ 构成群。

1. 封闭性：$\forall a, b \in \mathbb{Z}$，显然 $a \oplus b = a + b - 2 \in \mathbb{Z}$。
2. 结合律：$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$，显然 $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c - 2) = a + b + c - 4 = (a + b - 2) + c - 2 = (a \oplus b) \oplus c$
3. 单位元：$e = 2$，显然 $a \oplus e = a + e - 2 = a$。
4. 逆元：$\forall a \in \mathbb{Z}$，显然 $a \oplus (4 - a) = a + 4 - a - 2 = 2 = e$。逆元为 $4 - a$。

T12

因为 $\forall x \in G$，$x^2 = e$，由逆元定义有 $x = x^{-1}$。因此，$xy = (xy)^{-1} = e$，而 $xyy^{-1}x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e$，所以 $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$，因此 $xy = yx$。综上，G 是交换群。

T13

必要性，若 G 为交换群，则 $(ab)^2 = abab = aabb = a^2b^2$ 。

充分性，若 $(ab)^2 = a^2b^2$ ，则 $abab = aabb$ ，因此，$a^{-1}ababb^{-1} = a^{-1}aabbb^{-1}$ ，即 $ba = ab$ 。因此，G 为交换群。

T 15

若 G 为有限群，下证明 $x^3 = e$ 的元素个数是奇数。

首先 e 显然满足。下证 $x^3 = e(x \neq e)$ 的元素个数为偶数。

因为 $x^3 = e$ ，所以 $x^2 = x^{-1}$ 。对于任意满足的解 x ，存在 x^{-1} 满足 $(x^{-1})^3 = (x^2)^3 = x^6 = ee = e$ 。若 $x = x^{-1}$ ，则 $x^2 = e$ 。又因为 $x^3 = e$ ，所以显然 $x = e$ 与假设矛盾。所以对于任意 $x \neq e$ ，若 $x^3 = e$ ，则存在唯一对应的 $x^{-1} \neq x$ 满足 $(x^{-1})^3 = e$ 也是满足的解　且 $(x^{-1})^{-1} = x$ ，即满足的解成对出现，形如 (x, x^{-1}) 。又因为是有限群，所以对数个数有限，所以 $x^3 = e(x \neq e)$ 的元素个数为偶数。

综上，$x^3 = e$ 的元素个数是奇数。