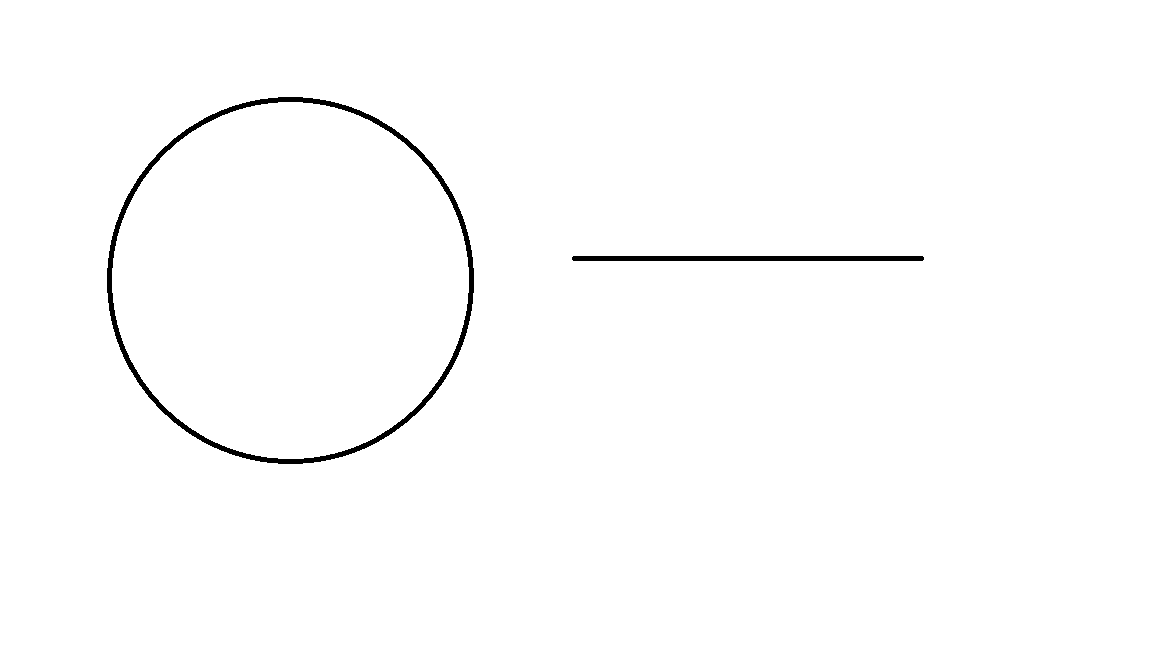
## 摘要

TODO

## 引言

  平面曲线在生活中处处可见，各种屏幕上显示出来的图形的轮廓就是由二维的平面曲线构成，而各种文字也是由平面曲线构成。而对于平面曲线，我们可以很直观的感觉的不同曲线在不同地方弯曲程度不同。例如下图中的一条直线和一个圆，我们很明显能感知到圆的弯曲程度要大于直线。 

  然而，这样的对于“弯曲程度”的感知只是一种直觉上的感知，是基于比较且不能量化的。对于给定参数的一个平面曲线，我们应该发展出数学的工具来给出一个点附近弯曲程度的严格定义。而到了高维度，甚至是超过了我们所生活的三维空间更高维度，我们的直觉就完全失效了。这就更加需要我们发展出一套数学理论来解决这样的问题。

  事实上，这样的理论工具在生活中也大有用处。它可以和物理学工程学等结合，进而用于解决实际生活的一些问题。

## 主体

### 一般曲线的表示

#### 弧长参数

  在数学上，一条曲线的定义为：设 I=[a,b] I=[a,b]{\displaystyle I=[a,b]}\ I=[a,b]I=[a,b] I=[a,b] 为一实数区间，即实数集的非空子集，那么曲线 ccc 就是一个连续函数 c:I→Xc : I → Xc:I→X 的映像，其中 XXX 为一个拓扑空间。[1]

  因此，对于 Rn\mathbb{R}^nRn 的任意一条曲线，我们都可以把其写成每一个维度的分量关于参数 ttt 的形式，记作 xi=xi(t)x\_i = x\_i(t)xi​=xi​(t) 。因此，曲线的位矢可写作展开形式 r⃗=(x1(t),x2(t),...,xn(t))\vec{r} = (x\_1(t),x\_2(t),...,x\_n(t))r=(x1​(t),x2​(t),...,xn​(t)) ，其中 t∈[a,b]t \in [a,b]t∈[a,b] 。

  然而，这样的的表示是不完美的，其存在一个与曲线本身无直接关联的参数 ttt 。例如，对于任意 t′t't′ 和单调增函数 fff 满足 f(t′)∈[a,b] (t∈[c,d])f(t') \in [a,b] \ (t\in[c,d])f(t′)∈[a,b] (t∈[c,d]) ，ttt 和 t′t't′ 存在一一映射的关系。因此， r⃗=(x1(t),x2(t),...,xn(t))=(x1(f(t′)),x2(f(t′)),...,xn(f(t′)))=(x1′(t′),x2′(t′),...,xn′(t′))\vec{r} = (x\_1(t),x\_2(t),...,x\_n(t)) = (x\_1(f(t')),x\_2(f(t')),...,x\_n(f(t'))) = (x\_1'(t'),x\_2'(t'),...,x\_n'(t'))r=(x1​(t),x2​(t),...,xn​(t))=(x1​(f(t′)),x2​(f(t′)),...,xn​(f(t′)))=(x1′​(t′),x2′​(t′),...,xn′​(t′))。可以看出，曲线的表示依赖于参数 ttt 的选取，将 ttt 替换为 t′t't′ 之后，曲线的表示发生改变。这显然不是一个很本质的表示。

  事实上，我们可以考虑下参数 ttt 的现实意义，在一条曲线相同位置固定 dr⃗d\vec{r}dr 的情况下，选择不同的参数， dtdtdt 也会不同。若把 ttt 当作为时间，r⃗\vec{r}r 当作位移，那么不同的 ttt 则对应了我们在曲线上移动的速度 dr⃗dt\frac{d\vec{r}}{dt}dtdr​ 不同。

  为了解决这一问题，我们引入新的一个参数 dsdsds，定义 ds=dx12+dx22+...+dxn2ds = \sqrt{dx\_1^2+dx\_2^2+...+dx\_n^2}ds=dx12​+dx22​+...+dxn2​​ ，s=∫ds+C s= \int{ds} + C s=∫ds+C。

  为了简化讨论，我们将讨论范围局限于 **正则曲线**[2]，即满足 r⃗\vec{r}r 对于 ttt 处处可微的曲线。此时，将 r(t)⃗\vec{r(t)}r(t)​ 可写作 r(s)⃗\vec{r(s)}r(s)​。由复合函数求导公式， dr⃗ds=dr⃗/dtds/dt\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt}dsdr​=ds/dtdr/dt​ 。而注意到 ∣dr⃗∣=dx12+dx22+...+dxn2|d\vec{r}| = \sqrt{dx\_1^2+dx\_2^2+...+dx\_n^2}∣dr∣=dx12​+dx22​+...+dxn2​​，因此 ∣dr⃗ds∣=1|\frac{d\vec{r}}{ds}| = 1∣dsdr​∣=1。该参数与曲线本身密切相关，用前面的现实意义去分析，sss 就可以理解为固定速度为1的在曲线上移动。

  我们将上述参数定义为**弧长参数**，其是一个只与曲线本身相关的曲线的参数表示，其中曲线需要满足正则曲线的性质。

#### 切线

  在最开始发展微分理论的时候，导数就是用来求出函数在一个点的切线方向的工具。在平面直角坐标系中，函数一点的切线的一个方向向量为 (1,dydx)(1,\frac{dy}{dx})(1,dxdy​) 。而对于任意的可弧长参数化的曲线 x⃗=x⃗(s)\vec{x} = \vec{x}(s) x=x(s) ，我们可以回到切线的定义去求出切线方向。我们设切线这条直线的参数形式为 y⃗=y⃗(s)\vec{y} = \vec{y}(s)y​=y​(s) ，在 s=s0 s = s\_0 s=s0​ 处相切，因此 y⃗(s0)=x⃗(s0)\vec{y}(s\_0) = \vec{x}(s\_0)y​(s0​)=x(s0​) ，且在 s0s\_0s0​ 附近，两条曲线要尽可能地接近。令 δs=s−s0\delta{s} =s -s\_0δs=s−s0​ ，则:

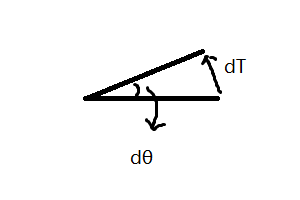
∣y⃗(s)−x⃗(s)∣=∑i=1n(yi(s)−xi(s))2=∑i=1n(dyds−dxds)2⋅δs2+o((δs)2)=∣dy⃗ds−dx⃗ds∣⋅δs+o(δs)\begin{aligned} |\vec{y}(s) - \vec{x}(s)| &= \sqrt{\sum\_{i=1}^{n}{(y\_i(s) - x\_i(s)) ^ 2}} \\ &= \sqrt{\sum\_{i=1}^{n}{(\frac{dy}{ds}-\frac{dx}{ds})^2 \cdot\delta{s}^2} + o({(δs)^2})} \\ &= |\frac{d\vec{y}}{ds} - \frac{d\vec{x}}{ds}| \cdot \delta{s} +o(\delta{s}) \end{aligned} ∣y​(s)−x(s)∣​=i=1∑n​(yi​(s)−xi​(s))2​=i=1∑n​(dsdy​−dsdx​)2⋅δs2+o((δs)2)​=∣dsdy​​−dsdx​∣⋅δs+o(δs)​

  不难看出，当切线满足 dy⃗ds=dx⃗ds(s=s0)\frac{d\vec{y}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{ds} (s=s\_0)dsdy​​=dsdx​(s=s0​) 时候，在 s0s\_0s0​ 附近两者最接近，所以曲线地切线方向地一个方向向量即为 dx⃗ds\frac{d\vec{x}}{ds}dsdx​ 。注意到 ∣dx⃗ds∣=1|\frac{d\vec{x}}{ds}| = 1∣dsdx​∣=1，所以其也是切向的单位向量。记**单位切向量**为 T⃗=dx⃗ds\vec{T} = \frac{d\vec{x}}{ds}T=dsdx​ ，满足 ∣T⃗∣=1|\vec{T}| = 1∣T∣=1。

### 二维曲线

#### 二维曲线的法向量与曲率

  为了简单起见，我们先从二维的情况开始讨论。二维曲线在一个平面内，除了切向量，其还存在恰好一个方向向量与切向量相切，记这个方向为**法向**。此时，由于 ∣T⃗∣=1|\vec{T}| = 1∣T∣=1 ，因此 T⃗⋅T⃗=1\vec{T} \cdot \vec{T} = 1T⋅T=1 。左右对 sss 求导，dT⃗ds⋅T⃗=0\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} = 0dsdT​⋅T=0 。因此可以得出，dT⃗ds⊥T⃗\frac{d\vec{T}}{ds} \perp \vec{T}dsdT​⊥T ，其沿法向。我们记**单位法向量**N⃗=dT⃗ds∣dT⃗ds∣\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{|\frac{d\vec{T}}{ds}|} N=∣dsdT​∣dsdT​​ 。

  而曲线的曲率被定义为曲线转动的快慢，即在一个点附近切向转过角度与偏离位移大小的比值的极限。对于二维的曲线，因为在弧长参数下 T⃗\vec{T}T的模长保持不变，其装过的角度 δθ=∣δT⃗∣∣T∣=∣δT⃗∣\delta \theta = \frac{|\delta{\vec{T}}|}{|T|} = |\delta{\vec{T}}| δθ=∣T∣∣δT∣​=∣δT∣ ，如下图所示。 

  因此，记**曲率的大小**为 κ\kappaκ ，由定义，κ=lim⁡δs→0δθδs=lim⁡δs→∞∣δT⃗∣δs⋅1∣T⃗∣=∣dT⃗ds∣\kappa = \lim\_{\delta s \rightarrow 0}{\frac{δθ}{δs}} = \lim\_{\delta s \rightarrow \infty}{\frac{|\delta {\vec{T}}|}{\delta s}}\cdot{\frac1{|\vec{T}|}} = |\frac{d\vec T}{ds}|κ=limδs→0​δsδθ​=limδs→∞​δs∣δT∣​⋅∣T∣1​=∣dsdT​∣ ，所以由单位法向量 N⃗\vec{N}N 的定义，dT⃗ds=κN⃗\frac{d\vec T}{ds} = \kappa \vec{N}dsdT​=κN 。 在一般情况下，我们还用记曲率半径 ρ=1κ\rho = \frac1{\kappa}ρ=κ1​ ，在对于一个特殊的曲线:圆，该曲率半径就等于圆的半径。

#### 切向量、法向量与曲率的其他性质

  由上，在二维弧长参数 r⃗=r⃗(s)\vec{r} = \vec{r}(s)r=r(s) 下 ，我们已经定义了如下三个量:

T⃗=dr⃗dsκ=∣dT⃗ds∣N⃗=1κ⋅dT⃗ds\begin{aligned} \vec{T} &= \frac{d\vec{r}}{ds} \\ \kappa &= |\frac{d\vec{T}}{ds}| \\ \vec{N} &= \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} \\ \end{aligned} TκN​=dsdr​=∣dsdT​∣=κ1​⋅dsdT​​

  而这些量之间还存在一些内在的联系。由 ∣T⃗∣=1|\vec{T}| = 1∣T∣=1，即 T⃗⋅T⃗=1\vec{T}\cdot\vec{T} = 1 T⋅T=1 ，对两边求二阶导，d2T⃗ds2⋅T+(dT⃗ds)2=0\frac{d^2\vec{T}}{ds^2} \cdot T + (\frac{d\vec{T}}{ds})^2 = 0 ds2d2T​⋅T+(dsdT​)2=0 此时由定义以及 ∣N⃗∣=1|\vec{N}| = 1∣N∣=1 ，有 d2T⃗ds2⋅T⃗=−κ2\frac{d^2\vec{T}}{ds^2} \cdot \vec{T} = -\kappa^2ds2d2T​⋅T=−κ2。记为(1)式。

  类似的，因为 ∣N⃗∣=1|\vec{N}| = 1∣N∣=1 即 N⃗⋅N⃗=1\vec{N}\cdot\vec{N} = 1N⋅N=1，我们对两边对 sss 求导 N⃗⋅dN⃗ds=0\vec{N}\cdot \frac{d\vec{N}}{ds} = 0N⋅dsdN​=0 ，所以可知 N⃗⊥dN⃗ds\vec{N} \perp \frac{d\vec{N}}{ds}N⊥dsdN​。又因为已经证过 T⃗⊥dT⃗ds=κ⋅N⃗\vec{T} \perp \frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\cdot{\vec{N}}T⊥dsdT​=κ⋅N ，所以 dN⃗ds\frac{d\vec{N}}{ds} dsdN​ 与 T⃗\vec{T}T 共线。再带入 N⃗{\vec N} N 的定义，以及(1)式，可知 dN⃗ds=−κT⃗\frac{d{\vec{N}}}{ds} = -\kappa \vec{T}dsdN​=−κT

  因此，我们可以总结出下面几个常用的式子。

T⃗=dr⃗dsN⃗=1κ⋅d2r⃗ds2dT⃗ds=κ⋅N⃗dN⃗ds=−κ⋅T⃗d2T⃗ds2=−κ2⋅T⃗\begin{aligned} \vec{T} &= \frac{d\vec{r}}{ds} \\ \vec{N} &= \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \\ \\ \frac{d\vec{T}}{ds} &= {\kappa} \cdot {\vec{N}} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} &= -{\kappa} \cdot {\vec{T}} \\ \\ \frac{d^2\vec{T}}{ds^2} &= - \kappa ^ 2 \cdot \vec{T} \\ \end{aligned} TNdsdT​dsdN​ds2d2T​​=dsdr​=κ1​⋅ds2d2r​=κ⋅N=−κ⋅T=−κ2⋅T​

#### 法向量与切向量的现实意义

  事实上，回到最初的含有 ttt 的参数表示形式，我们只需将每一个 dsdsds 换为 dsdt⋅dt\frac{ds}{dt} \cdot dtdtds​⋅dt 即可。而此时，dsdt\frac{ds}{dt}dtds​ 对于的是现实世界中的运动速度，而 ttt 对应的是时间。将上述式子整理化简，我们可以得到:

dsdt⋅T⃗=dr⃗dtκ⋅(dsdt)2⋅N⃗+d2sdt2⋅T⃗=d2r⃗dt2\begin{aligned} \frac{ds}{dt}\cdot\vec{T} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \kappa \cdot (\frac{ds}{dt}) ^ 2 \cdot \vec{N} + \frac{d^2s}{dt^2}\cdot\vec{T} &= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \\ \end{aligned} dtds​⋅Tκ⋅(dtds​)2⋅N+dt2d2s​⋅T​=dtdr​=dt2d2r​​

  而在物理中，两个式子的右边分别对应的是速度矢量和加速度矢量。左边的 dsdt\frac{ds}{dt}dtds​ 为速度大小，d2sdt2\frac{d^2s}{dt^2}dt2d2s​ 为速度大小的变换率。可以看出，质点在曲线上运动的时候，除了切线方向速度大小改变带来切向加速度，由曲率还会带来一项法向的加速度，这便是人们常说的向心加速度。而通过二维曲线切向量法向量相关的知识，我们便能很容易地研究二维曲线上的质点运动问题。

### 三维曲线

#### 三维曲线的法向与曲率

  对于三维曲线，其切线方向的单位向量依然可以由 T=dr⃗dsT = \frac{d\vec{r}}{ds}T=dsdr​ 得出。而对于三维的曲线，与其垂直的方向构成了一个平面。因此，我们不能像二维那样将法向定义为与切向垂直的方向，因为这样的方向有无数个。然而，我们依然可以从法线的另外一个性质“切向量变化的方向”入手，来定义法向量。类似二维曲线，通过切向量转过的角度的大小与通过距离的比值，我们依然可以定义**曲率**κ=lim⁡δs→0δθδs=lim⁡δs→∞∣δT⃗∣δs⋅1∣T⃗∣=∣dT⃗ds∣\kappa = \lim\_{\delta s \rightarrow 0}{\frac{δθ}{δs}} = \lim\_{\delta s \rightarrow \infty}{\frac{|\delta {\vec{T}}|}{\delta s}}\cdot{\frac1{|\vec{T}|}} = |\frac{d\vec T}{ds}|κ=limδs→0​δsδθ​=limδs→∞​δs∣δT∣​⋅∣T∣1​=∣dsdT​∣ 。而我们将切向量变化的方向定义为 **法向**，则可以得到与二维情况下相同的形式 N⃗=1κ⋅dT⃗ds\vec{N} = \frac1{\kappa}\cdot\frac{d\vec{T}}{ds}N=κ1​⋅dsdT​。

#### 三维曲线的副法向与曲率

  由此，我们可以得到相互正交的两个方向:切向和法向。但在一个三维空间中，任何一组标准正交基应当存在三个互相垂直单位向量。因此，我们可以通过叉乘给出第三个单位向量，记**副法向的单位向量**B⃗=T⃗×N⃗\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}B=T×N 。此时，T⃗,N⃗,B⃗\vec{T},\vec{N},\vec{B}T,N,B 构成了该三维空间中的一组标准正交基。

  由正交性，N⃗⋅T⃗=0\vec N \cdot \vec T = 0N⋅T=0 。两边对 sss 求导，并带入 N⃗=1κ⋅dT⃗ds\vec N = \frac1{\kappa} \cdot \frac{d\vec T}{ds} N=κ1​⋅dsdT​，可得 dN⃗ds⋅T⃗=−κ\frac{d\vec N}{ds} \cdot \vec T = -\kappadsdN​⋅T=−κ 。记为(1)式。   由于 ∣N⃗∣=1|\vec{N}| = 1∣N∣=1 即 N⃗⋅N⃗=1\vec N \cdot \vec N = 1N⋅N=1 ，两边对 sss 求导有 N⃗⋅dN⃗ds=0\vec N\cdot \frac{d\vec N}{ds} = 0N⋅dsdN​=0 可知 N⃗⊥dN⃗ds\vec N \perp \frac{d\vec N}{ds}N⊥dsdN​ 。因此，可在标准正交基框架下设 dN⃗ds=αT⃗+βB⃗\frac{d\vec N}{ds} = \alpha \vec T + \beta \vec B dsdN​=αT+βB。记为(2)式。

  将(2)带入(1),可知 α=−κ\alpha = -\kappaα=−κ 。

  而类似(2)式，我们可以设 dB⃗ds=γT⃗+ξN⃗\frac{d\vec B}{ds} = \gamma \vec T + \xi \vec N dsdB​=γT+ξN ; 类似(1) 式，我们也能写出 dB⃗ds⋅T⃗=−B⃗⋅dT⃗ds\frac{d\vec B}{ds} \cdot \vec T = -\vec{B} \cdot \frac{d\vec T}{ds} dsdB​⋅T=−B⋅dsdT​ 以及 dB⃗ds⋅N⃗=−B⃗⋅dN⃗ds \frac{d\vec B}{ds} \cdot \vec N = -\vec{B} \cdot \frac{d\vec N}{ds} dsdB​⋅N=−B⋅dsdN​ 。容易求出，γ=0,ξ=−β\gamma = 0,\xi = -\betaγ=0,ξ=−β。

  汇总一下，我们可以得到如下这些式子。

T⃗=dr⃗dsdT⃗ds=κ⋅N⃗dN⃗ds=−κ⋅T⃗+β⋅B⃗dB⃗ds=−β⋅N⃗\begin{aligned} \vec{T} &= \frac{d\vec{r}}{ds}\\ \\ \frac{d\vec T}{ds} &= \kappa \cdot \vec N \\ \frac{d\vec N}{ds} &= -\kappa \cdot \vec T + \beta \cdot \vec B\\ \frac{d\vec B}{ds} &= -\beta \cdot \vec N \\ \end{aligned} TdsdT​dsdN​dsdB​​=dsdr​=κ⋅N=−κ⋅T+β⋅B=−β⋅N​

  其中，B⃗\vec BB 是由 T⃗×N⃗\vec T \times \vec NT×N 定义得到，β\betaβ 是一个曲线相关的常数，其绝对值大小等于 ∣dN⃗ds+κ⋅T⃗∣|\frac{d\vec N}{ds} + \kappa \cdot \vec T|∣dsdN​+κ⋅T∣，称为**挠率**。

#### 挠率的几何直观

  至今为止，我们只是从理论上推导出了挠率的值，却没有给出其背后的意义。

## 参考资料

[1]维基百科:曲线 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9B%B2%E7%BA%BF [2]维基百科:曲线的微分几何。 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9B%B2%E7%BA%BF%E7%9A%84%E5%BE%AE%E5%88%86%E5%87%A0%E4%BD%95 [3]维基百科:弗莱纳公式。 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BC%97%E8%8E%B1%E7%BA%B3%E5%85%AC%E5%BC%8F