**Вопросы к экзамену по дисциплине «Функциональный анализ» 2ч**

01.03.02 Прикладная математика и информатика

Преподаватель: к.ф.-м.н., доцент Фоменко С.И.

**ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

Требуется дать определения и рассказать суть предмета вопроса.

1. Определение сходящейся последовательности, фундаментальной последовательности в метрическом пространстве.
2. Полное пространство и компактное пространство.
3. Линейное пространство.
4. Норма, аксиома нормы.
5. Линейного нормированное пространство. Банахово пространство.
6. Скалярное произведение, аксиомы скалярного произведения. Гильбертово пространство.
7. Пространства *m, с* и *С*[a,b]. Норма в этих пространствах.
8. Пространства и *L*[a,b]. Норма в этих пространствах.
9. Пространства и Норма и скалярное произведение в этих пространствах.
10. Ряд Фурье в H-пространстве. Экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье.
11. Ряды Фурье в H-пространстве. Неравенство Бесселя и тождество Парсеваля.
12. Линейный оператор (ЛО).
13. Ограниченность и норма ЛО.
14. Сжимающее отображение. Принцип неподвижной точки.
15. Обратный оператор. Ядро ЛО. Критерий обратимости ЛО.
16. Собственное значение ЛО.
17. Резольвента, регулярное множество и спектр ЛО.

**ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ.**

Требуется дать развёрнутый ответ на вопрос.

1. Метрические пространства. Принцип вложенных шаров.
2. Критерий полноты метрического пространства на основе системы вложенных шаров.
3. Компактность. Ограниченность компактного множества.
4. Компактность. Замкнутость компактного множества.
5. Компактность. Полнота компактного множества.
6. Понятие эпсилон-сети и вполне ограниченного множества. Теорема Хаусдорфа.
7. Полнота метрического пространства С[a,b].
8. Сепарабельность С[a,b].
9. Критерий Арцела компактности подпространств из С[a,b].
10. Линейные пространства над полем чисел. Линейная зависимость, базис и размерность пространства.
11. Норма и линейные нормированные пространства (ЛНП), примеры. Свойства нормы как функционала: непрерывность, однородность, выпуклость.
12. Последовательность в линейных нормированных пространствах. Банаховые пространства. Теорема о полноте конечномерного ЛНП.
13. Сравнение норм. Теорема об эквивалентности норм конечномерного ЛНП.
14. Ряды в банаховых пространствах, абсолютная сходимость, теорема об абсолютно сходящихся рядах.
15. Понятие всюду плотных множеств и сепарабельного пространства. Теорема о существовании базиса в сепарабельных банаховых пространствах.
16. Скалярное произведение. Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства. Примеры.
17. Норма в гильбертовом пространстве.
18. Тождество параллелограмма, теорема о порождении гильбертова пространства из банахова.
19. Ортогональность. Теорема Пифагора.
20. Ортогональное дополнение. Теорема о разложении гильбертова пространства. Расстояние от элемента до подпространства.
21. Ортогональная система элементов. Линейная независимость ортогональной системы.
22. Ортогонализация Гильберта-Шмидта.
23. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Теорема об экстремальном свойстве частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя.
24. Критерии полноты ортогональной системы элементов. Теорема о нуле.
25. Критерии полноты ортогональной системы элементов. Теорема о разложении нормы элемента.
26. Теорема о полноте ортогональной системы в сепарабельном пространстве.
27. Отображения в метрических пространствах. Сжимающие отображения. Теорема о непрерывности сжимающих отображений.
28. Принцип неподвижной точки для сжимающих отображений.
29. Линейный оператор (ЛО). Непрерывность и критерий непрерывности ЛО.
30. Ограниченность линейного оператора, необходимый и достаточный признак непрерывности.
31. Норма линейного оператора. Вычисление нормы.
32. Пространство линейных операторов. Сходимость линейных операторов.
33. Обратный линейный оператор. Единственность.
34. Ядро оператора. Критерий существования обратного ЛО.
35. Теорема о норме обратного оператора.
36. Интегральное уравнения Фредгольма. Решение интегрального уравнения Фредгольма II рода с вырожденным ядром.
37. Принцип неподвижной точки. Теорема о существовании оператора .
38. Собственные значения линейного оператора, линейная независимость собственных решений.
39. Резольвента, регулярное множеств и спектр линейного оператора.
40. Спектр, спектральный радиус линейного оператора. Критерий обратимости оператора .

Литература для самоподготовки

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, т. 3
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.
3. Дерр. В.Я. Функциональный анализ: лекции и упражнения.—М: КНОРУС, 2013

**ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Полное пространство и компактное пространство.
2. Определение сходящейся последовательности, фундаментальной последовательности в метрическом пространстве.
3. Линейный оператор (ЛО).
4. Ограниченность и норма ЛО.
5. Сжимающее отображение. Принцип неподвижной точки.
6. Обратный оператор. Ядро ЛО. Критерий обратимости ЛО.
7. Собственное значение ЛО.
8. Резольвента, регулярное множество и спектр ЛО.
9. Линейный функционал в ЛНП. Теорема Рисса.
10. Сопряжённое пространство. Слабая и сильная сходимости.
11. Линейное пространство.
12. Норма, аксиома нормы.
13. Линейного нормированное пространство. Банахово пространство.
14. Скалярное произведение, аксиомы скалярного произведения. Гильбертово пространство.
15. Пространства и *L*[a,b]. Норма в этих пространствах.
16. Пространства *m, с* и *С*[a,b]. Норма в этих пространствах.
17. Пространства и Норма и скалярное произведение в этих пространствах.
18. Ряд Фурье в H-пространстве. Экстремальное свойство частичных сумм ряда Фурье.