МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

# **Локальная динамика уравнения второго порядка с запаздыванием в производной**

Масленников Игорь Николаевич
1 курс, аспирант
Кащенко Илья Сергеевич
Доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой математического моделирования ЯрГУ

# Реферат

Работа состоит из 16 страниц. В работе 3 главы, 14 изображений, 11 источников.

**Характеристический квазиполином, асимптотическое приближение, нормальная форма, динамика**

Рассмотрена модель оптико-электронного осциллятора. Она имеет вид дифференциально - интегрального уравнения с запаздыванием вида:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} + x + \delta \int_{t_0}^{t} x\left(s\right) ds = F\left(x(t-\tau)\right).$$

Поставлена задача изучения локальной динамики в окрестности состояния равновесия уравнения. Для этого построено характеристическое уравнение и определено положение его корней. В зависимости от значений параметров определено поведение решений в окрестности состояния равновесия и его устойчивость. Выделены критические значения параметров, когда состояние равновесия меняет свою устойчивость. Получено асимптотическое приближение корней характеристического многочлена. Построен аналог нормальной формы. В результате проведенных исследований получено дифференциальное уравнение, решение которого определяет главную часть решений исходного дифференциально-интегрального уравнения.

# Содержание

# Введение

Рассмотрим модель оптико-электронного осциллятора с запаздыванием, которое представляет собой реализацию модифицированного уравнения Икеды [1] с задержкой по времени:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} + x + \delta \int_{t_0}^{t} x\left(s\right) ds = F\left(x(t-\tau)\right). \tag{1}$$

Замена $x = \dot{y}$ и нормирование времени приводит систему (1) к виду уравнения Минорского [2] (2):

$$\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} + \delta y = F(\dot{y}(t-1)). \tag{2}$$

Здесь $\tau$ — время запаздывания, вещественное и положительное, $\varepsilon$, $\delta$ малые параметры. Функция $F$ достаточно гладкая, не ограничивая общности можно считать, что $F(0) = 0$. Таким образом, уравнение (2) имеет нулевое состояние равновесия, если это не так, то можно сделать соответствующую замену.

В работе [1] уравнение исследовалось численными методами, подбирались параметры, начальные условия, строились сложные квазипериодические режимы, так называемые химеры, при этом рассматривался случай, когда параметры $\varepsilon = 0.005$ и $\delta = 0.016$. В силу этого будем предполагать, что параметры $\varepsilon$ и $\delta$ малы ($0 < \varepsilon \ll 1$, $0 < \delta \ll 1$) и пропорциональны: $k\varepsilon = \delta$, $k > 0$.

Поставим задачу исследовать локальную динамику в окрестности состояния равновесия. В качестве фазового пространства уравнения (2) выберем пространство $C^1_{[-1,0]}$, для задания начальных условий фиксируем функцию $y(s)$ и $y'(s)$ на отрезке длины запаздывания $s \in [-1, 0]$. В работах [3], [4], [5] исследованы характеристические корни уравнения (2) и построены аналоги нормальных форм уравнения (2) при некоторых критических значениях параметров.

Отметим, что в статьях [6], [7], [8] рассмотрено похожее уравнение оптико - электронного осциллятора, в котором параметр $\delta$ не является малым. В работе [6] построены конечномерные и специальные бесконечномерные уравнения, которые играют роль нормальных форм. Приведены асимптотические на промежутке $[t_0, \infty]$ формулы для решений.

# 1 Исследование устойчивости состояния равновесия

В работе [3] проведено исследование расположения корней характеристического квазиполинома линеаризованного на нулевом состоянии равновесия уравнения (2):

$$\varepsilon\lambda^2 + \lambda + k\varepsilon = \lambda\beta_1 e^{-\lambda}. \tag{3}$$

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** *При $|\beta_1| < 1$ и достаточно малом $\varepsilon$, все корни (3) имеют отрицательные вещественные части, нулевое состояние равновесия устойчиво. При $|\beta_1| > 1$ и достаточно малом $\varepsilon$, существуют корни (3), имеющие положительные вещественные части, нулевое состояние равновесия неустойчиво.*

Доказательство:

Сделаем замену в уравнении (3) $\lambda = \dfrac{\mu}{\varepsilon}$, тогда характеристическое уравнение (3) имеет вид:

$$\frac{\mu^2}{\varepsilon} + \frac{\mu}{\varepsilon} + k\varepsilon = \frac{\mu}{\varepsilon}\beta_1 e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}}. \tag{4}$$

Предположим обратное, что есть корень $\mu$ с неотрицательной вещественной частью, т.е. $\mathrm{Re}\mu \geq 0$. Разделим уравнение (4) на $\dfrac{\mu}{\varepsilon}$, это можно сделать, т.к. $\mu = 0$ не является корнем. Получим:

$$\mu + 1 + \frac{k\varepsilon^2}{\mu} = \beta_1 e^{-\frac{\mu}{\varepsilon}}. \tag{5}$$

Представим $\mu = \alpha + i\gamma$ и оценим модуль правой части:

$$|\beta_1 e^{-\frac{\alpha+i\gamma}{\varepsilon}}| = |\beta_1||e^{-\frac{\alpha+i\gamma}{\varepsilon}}| \leq |\beta_1|e^{-\frac{\alpha+i\gamma}{\varepsilon}} \leq |\beta_1|.$$

Оценим левую часть:

$$|\mu + 1 + \frac{k\varepsilon^2}{\mu}| = |\alpha + i\gamma + 1 + \frac{k\varepsilon^2}{(\alpha + i\gamma)}| = |\alpha + i\gamma + 1 + \frac{k\varepsilon^2(\alpha - i\gamma)}{(\alpha^2+\gamma^2)}| =$$

$$= \sqrt{\left(\alpha + 1 + \frac{k\varepsilon^2\alpha}{(\alpha^2+\gamma^2)}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{k\varepsilon^2\gamma}{(\alpha^2+\gamma^2)}\right)^2}.$$

Рассмотрим второе слагаемое, оно всегда неотрицательно $\left(\gamma - \dfrac{k\varepsilon^2\gamma}{(\alpha^2+\gamma^2)}\right)^2 \geq 0$, а так как мы рассматриваем случай $\alpha \geq 0$, то первое слагаемое всегда будет не меньше единицы:

$$\left(\alpha + 1 + \frac{k\varepsilon^2\alpha}{(\alpha^2+\gamma^2)}\right)^2 \geq 1.$$

Отсюда следует, что при $|\beta_1| < 1$ ни на мнимой оси, ни в правой комплексной полуплоскости у характеристического уравнения (5) нет корней.

Рассмотрим случай $\beta_1 > 1$, пусть $\lambda = ln(\beta_1) + \mu$ подставим это значение в уравнение (3), получим функцию $F(\varepsilon, \mu)$:

$$F(\varepsilon, \mu) = \varepsilon(ln^2\beta_1 + 2ln\beta_1\mu + \mu^2) + \mu + ln\beta_1 + k\varepsilon - (\mu + ln\beta_1)e^{-\mu}. \tag{6}$$

При $\varepsilon = 0$ существует корень уравнение (6) $\mu = 0$, а функция $F'_\mu(0,0) \neq 0$, следовательно по теореме о неявной функции $\mu = o(1)$. Что и требовалось доказать. Случай $\beta_1 < -1$ доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Таким образом, в дополнительном исследовании нуждается случай $\beta_1 = \pm 1$. При таких значениях параметра $\beta_1$ у характеристического уравнения существует бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси.

**Теорема 2.** *При $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$ корни характеристического уравнения* (3), *находящиеся около мнимой оси, допускают асимптотическое представление вида:*

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + o(\varepsilon^2), \text{ при } n \neq 0, \text{ где}$$

$$\lambda_{n0} = 2\pi n i, \ \lambda_{n1} = -\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}},$$

$$\lambda_{n2} = -\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + \lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}} + \frac{\lambda_{n1}^2}{2} + \beta,$$

$$\lambda = \sqrt{\varepsilon k} i - \varepsilon\frac{k}{4} + o(\varepsilon), \ \bar{\lambda} = -\sqrt{\varepsilon k} i - \varepsilon\frac{k}{4} + o(\varepsilon).$$

Доказательство:

Пусть для определенности параметр $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$ при $\beta > 0$. Выделим первый член разложения асимптотического ряда:

$$\lambda = \lambda_0 + o(1).$$

Подставим в уравнение (3) и всё, что будет иметь порядок малости больше чем $o(1)$ сгруппируем:

$$\lambda_0 e^{-\lambda_0} = \lambda_0 + o(1).$$

Выделяя главную часть, получаем:

$$\lambda_0(e^{-\lambda_0} - 1) = 0.$$

У этого уравнения корнями являются:

$$\lambda_0 = 0 \ \ \lambda_{n0} = 2\pi n i, \ n \in \mathbb{Z} \ .$$

Отметим, что нулевой корень имеет кратность 2. Уточним асимптотику при

$\lambda_{n0} \neq 0$, чтобы определить вещественную часть каждого корня. Представим разложение корней уравнения (3) в виде:

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + (\varepsilon^2),\ \lambda_{n0} = 2\pi n i.$$

Подставим разложение корней в уравнение (3), получим:

$$\varepsilon\left(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1}\right)^2 + \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + k\varepsilon + (\varepsilon^2) =$$
$$= (1 + \varepsilon^2\beta)\left(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2}\right) e^{-\left(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + (\varepsilon^2)\right)}.$$

Так как $\varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2}$ мало, то разложим экспоненту в ряд Тейлора:

$$\begin{gathered}\varepsilon\left(\lambda_{n0}^2 + \varepsilon\lambda_{n0}\lambda_{n1}\right) + \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + k\varepsilon + (\varepsilon^2) = \\ = (1 + \varepsilon^2\beta)\left(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2}\right)\left(1 - \varepsilon\lambda_{n1} - \varepsilon^2\lambda_{n2} + \tfrac{\varepsilon^2}{2}\lambda_{n1}^2 + (\varepsilon^2)\right).\end{gathered} \tag{7}$$

Раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра.

При $\varepsilon^0$ имеем верное тождество:

$$\lambda_{n0} = \lambda_{n0},\ \lambda_{n0} = 2\pi n i.$$

При $\varepsilon^1$ получим:

$$\begin{gathered}\lambda_{n0}^2 + \lambda_{n1} + k = \lambda_{n1} - \lambda_{n0}\lambda_{n1},\ \text{при } n \neq 0, \\ \lambda_{n1} = \frac{(-4\pi^2 n^2 + k)\, i}{2\pi n},\ \text{при } n \neq 0.\end{gathered} \tag{8}$$

При $\varepsilon^2$ получим:

$$\begin{gathered}2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + \lambda_{n2} = \lambda_{n2} - \lambda_{n1}^2 - \lambda_{n0}\left(\lambda_{n2} - \frac{\lambda_{n1}^2}{2}\right) \\ \lambda_{n2} = -\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + \lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}} + \frac{\lambda_{n1}^2}{2} + \beta, \\ \lambda_{n2} = \left(4\pi n - \frac{k}{\pi n} - \frac{4\pi^2 n^2 - 2k + \dfrac{k^2}{4\pi^2 n^2}}{2\pi n}\right) i - \\ -\frac{1}{2}\left(4\pi^2 n^2 - 2k + \frac{k^2}{4\pi^2 n^2}\right) + \beta,\ \text{при } n \neq 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Проделаем аналогичные действия при $\beta = 1 + \varepsilon^2\beta_1$ и $n = 0$. Представим разложение корней уравнения (3) в виде:

$$\lambda = \sqrt{\varepsilon}\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\lambda_3 + o(\varepsilon^{\frac{3}{2}}).$$

По аналогии выполняем те же действия, в результате получаем:

$$\lambda_1 = \pm\sqrt{k}i, \quad \lambda_2 = \frac{-k}{4}.$$

Теорема доказана.

Траектория движения корней характеристического уравнения (3) при $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$, $\varepsilon \to 0$ и фиксированном значении параметров $k = 2$, $\beta = 1$ показана на Рис. 1 :

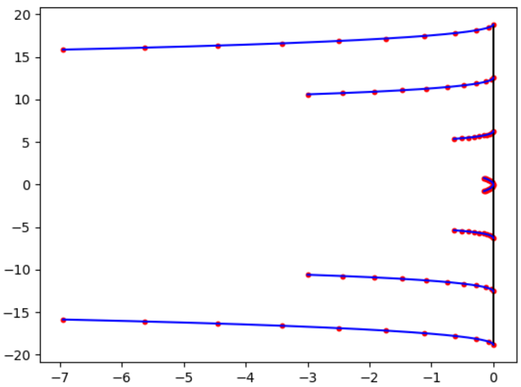


Рис. 1: Траектория движения корней при $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2$, $\varepsilon \to 0$.

Аналогичные построения можно провести и при $\beta_1 = -(1 + \varepsilon^2\beta)$.

**Теорема 3.** *При $\beta_1 = -(1 + \varepsilon^2\beta)$корни характеристического уравнения (3) $\lambda$ и $\lambda_n$, находящиеся около мнимой оси, допускают асимптотическое представление вида:*

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + o(\varepsilon^2), \text{ при } n \neq 0, \text{ где}$$

$$\lambda_{n0} = \pi(2n+1)i, \ \lambda_{n1} = -\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}},$$

$$\lambda_{n2} = -\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + \lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}} + \frac{\lambda_{n1}^2}{2} + \beta,$$

$$\lambda = \frac{-\varepsilon k}{2} + o(\varepsilon).$$

Траектория движения корней характеристического уравнения (3) при $\beta_1 = -(1 + \varepsilon^2\beta)$, $\varepsilon \to 0$ и фиксированном значении параметров $k = 2$, $\beta = 1$ показаня на Рис. 2 :

Таким образом, при $|\beta_1|$ близком к 1 характеристическое уравнение имеет счетное число корней, вещественная часть которых стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Далее изучим поведение решений уравнения (2) в окрестности нуля при $|\beta_1|$ близком к 1 и малых $\varepsilon$.

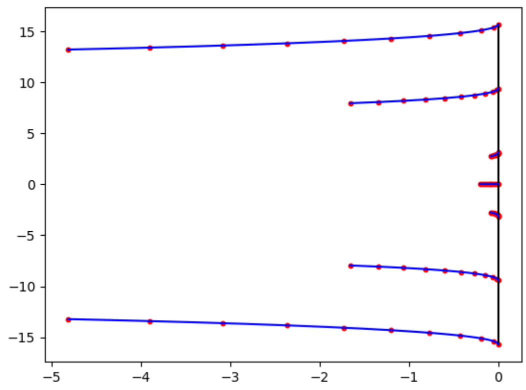


Рис. 2: Траектория движения корней при $\beta_1 = -(1+\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$.

# 2 Построение нормальной формы уравнения

Изучим изменения в поведении решений уравнения (2) при переходе $\beta_1$ через $\pm 1$. Разложим в уравнении (2) функцию $F$ в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = \beta_1 \dot{y}(t-1) + \beta_2(\dot{y}(t-1))^2 + \beta_3(\dot{y}(t-1))^3 + \ldots, \tag{10}$$

где $\beta_2, \beta_3$ некоторые постоянные, а $\beta_1$ близка к $\pm 1$: $\beta_1 = \pm(1+\varepsilon^2\beta)$.

## 2.1 Построение нормальной формы при $\beta_1 = -(1+\varepsilon^2\beta)$

Рассмотрим задачу построения нормальной формы для уравнения (10) при параметре $\beta_1 = -(1+\varepsilon^2\beta)$. При таком $\beta_1$ характеристическое уравнение имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси, таким образом, реализуется критический случай бесконечной размерности. Представим функцию $y$ в виде асимптотического ряда:

$$y = \varepsilon V(\tau, t) + \varepsilon W(\tau) + \varepsilon^2 U_1(\tau, t) + \varepsilon^3 U_2(\tau, t) + \ldots, \tag{11}$$

где $U_1$, $U_2$ периодические с периодом 1: $U_1(\tau, t) \equiv U_1(\tau, t+1)$, $U_2(\tau, t) \equiv U_2(\tau, t+1)$. Функция $W$ такая, что среднее значение $\beta_2 \dot{V}^2 - kW$ равняется 0, то есть:

$$W(\tau) = \frac{\beta_2}{k} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 (\tau, t) dt.$$

Функция $V(\tau, t)$ представляется в виде ряда Фурье:

$$V(\tau, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{iIm(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \ldots)t} V_n(\tau), \text{ где } \tau = \varepsilon^2 t.$$

Значения $\lambda_{n0}$, $\lambda_{n1}$, $\lambda_{n2}$ определяются из асимптотического приближения корней уравнения (3) (см. Теорему 3).

Подставим (11) в уравнение (10), будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра $\varepsilon$.

При $\varepsilon$ получаем верное тождество:

$$\lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t} = \lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t}.$$

При $\varepsilon^2$ получаем:

$$\begin{gathered}\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{n0}^2 V_n(\tau)e^{\xi_n t} + \sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{n1}V_n(\tau)e^{\xi_n t} + \dot{U}_1 + \sum_{-\infty}^{\infty}kV_n(\tau)e^{\xi_n t} + \\ +kW(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)(-\lambda_{n1}V_n(\tau) + \lambda_{n1}\lambda_{n0}V_n(\tau))e^{\xi_n t} - \dot{U}_1(t-1) + \beta_2\dot{V}^2.\end{gathered} \tag{12}$$

После сокращений из уравнения (12) определяется $\dot{U}_1$:

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{2}(\beta_2\dot{V}^2 - kW(\tau)).$$

$U_1$ находится в виде:

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_0^r \beta_2\dot{V}^2(s,\tau) - W(\tau)ds.$$

Обратим внимание, что $U_1$ периодическая, т.к. среднее значение подинтегральной функции равно нулю.

При $\varepsilon^3$ получаем:

$$\begin{gathered}\sum_{-\infty}^{\infty}e^{\xi_n t}2\lambda_{n0}\lambda_{n1}V_n(\tau) + \ddot{U}_1 + \sum_{-\infty}^{\infty}(\lambda_{n2}V_n(\tau) + V_n'(\tau))e^{\xi_n t} + \dot{U}_2 + \\ +kU_1 + W'(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)e^{\xi_n t}((-1)(\lambda_{n2}V_n(\tau) - \lambda_{n0}V_n'(\tau) + V_n'(\tau)) + \\ +\lambda_{n1}^2V_n(\tau) + (-\lambda_{n2} + \frac{1}{2}\lambda_{n1}^2)\lambda_{n0}V_n(\tau)) - (\dot{U}_2(t-1) + W'(\tau)) + \\ +\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{n0}\beta V_n(\tau)e^{\xi_n t} + \dot{U}_1(t-1) + \beta_2\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi_{2n}(V)e^{(\pi(2n+1)i+o(\varepsilon))t} + \\ +\beta_2\sum_{-\infty}^{\infty}f_{2n}(V)e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t} + \beta_3\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi_{3n}(V)e^{(\pi(2n+1)i+o(\varepsilon))t},\end{gathered} \tag{13}$$

где $\varphi_{2n}(V)$ коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$-2\dot{U}_1(t-1)\sum_{-\infty}^{\infty}\pi(2n+1)iV_n(\tau)e^{\xi_n t};$$

$\varphi_{3n}(V)$ коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$-\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\pi(2n+1)iV_n(\tau)\right)^3;$$

$f_{2n}(V)$ коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$-2\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t}\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{m0}\lambda_{m1}V_m(\tau)e^{\xi_m t}.$$

Уравнение (13) упрощается до вида:

$$\begin{gathered}\ddot{U}_1+2\dot{U}_2+kU_1+2W'(\tau)-\beta_2\sum_{-\infty}^{\infty}f_{2n}(V)e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t}=\\ \sum_{-\infty}^{\infty}(-\lambda_{n0}V_n'(\tau)+\frac{1}{2}\lambda_{n1}^2\lambda_{n0}V_n(\tau)+\lambda_{n0}\beta V_n(\tau)+\\ +\beta_2\varphi_{2n}(V)+\beta_3\varphi_{3n}(V))e^{(\pi(2n+1)i+o(\varepsilon))t}.\end{gathered}\tag{14}$$

В уравнении (14) левая часть периодическая, а правая антипериодическая, равенство возможно тогда и только тогда, когда левая и правая часть равны 0.

$\dot{U}_2$ определяется в виде:

$$\dot{U}_2=\frac{1}{2}(\beta_2\sum_{-\infty}^{\infty}f_{2n}(V)e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t}-\ddot{U}_1-kU_1-2W'(\tau)).$$

Рассмотрим антипериодическую часть уравнения (14) и разложим её на соответствующие степени $e^{\xi_n t}$:

$$\lambda_{n0}V_n'(\tau)=\frac{1}{2}\lambda_{n1}^2\lambda_{n0}V_n(\tau)+\lambda_{n0}\beta V_n(\tau)+\beta_2\varphi_{2n}(V)+\beta_3\varphi_{3n}(V).\tag{15}$$

Подставим значения $\lambda_{n1}$ и $\lambda_{n0}$ в уравнение (15):

$$\begin{gathered}V_n'(\tau)=-\frac{1}{2}\left(\pi^2(2n+1)^2-2k+\frac{k^2}{\pi^2(2n+1)^2}\right)V_n(\tau)+\\ +\beta V_n(\tau)+\frac{\beta_2}{\pi(2n+1)i}\varphi_{2n}(V)+\frac{\beta_3}{\pi(2n+1)i}\varphi_{3n}(V).\end{gathered}\tag{16}$$

В работах [4], [5] было показано, что уравнение (10) в рассматриваемом случае сводится к дифференциальному уравнению в частных производных (17) с краевыми условиями:

$$\frac{\partial V}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial^2 t}+kV-\frac{k^2}{2}J^2(V)+\beta V+\beta_2 J\left(U_1\frac{\partial V}{\partial t}\right)+\beta_3 J\left(\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3\right),\tag{17}$$

$$\int_0^1 V(\tau,t)dt=0,\ V(\tau,t)\equiv -V(\tau,t+1).\tag{18}$$

Через $J(V)$ обозначена первообразная функции $V$ с нулевым средним:

$$J^2(V)=J(J(V)),\ (J(V))_t'\equiv V.$$

Справедлива следующая теорема [4], [5]:

**Теорема 4.** *Пусть* $V_*$ *ограниченное решение* (17) *с краевыми условиями* (18), *причем* $V_* = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(2n+1)it} V_n(\tau)$, *тогда*

$$y(t) = \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} e^{iIm(\lambda_{n0}+\varepsilon\lambda_{n1}+\varepsilon^2\lambda_{n2}+\dots)t} V_n(\tau) + \varepsilon\frac{\beta_2}{k}\int\limits_0^1 \dot{V}^2(t,\tau)dt,$$

*где* $\tau = \varepsilon^2 t$ *- медленное время, значения* $\lambda_{n0}$, $\lambda_{n1}$, $\lambda_{n2}$ *определяются в Теореме 3, является асимптотическим по невязке с точностью* $O(\varepsilon^3)$ *равномерно по* $t \geq 0$ *решением* (10).

Таким образом, задача (17), (18) является аналогом нормальной формы для уравнения (10), при критическом значении параметра $\beta_1 = -(1+\varepsilon^2\beta)$. Отметим, что коэффициенты краевой задачи не зависят от параметра $\varepsilon$.

## 2.2 Построение нормальной формы при $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$

Рассмотрим уравнение (2) при параметре $\beta_1 = 1+\varepsilon^2\beta$, тогда уравнение (2) имеет вид (19):

$$\varepsilon y'' + y' + k\varepsilon y = \beta_1 y'(t-1) + \beta_2 y'^2(t-1) + \beta_3 y'^3(t-1)\cdots. \tag{19}$$

Представим функцию $y$ в виде ряда:

$$y = \varepsilon^{\frac{1}{4}}(W(\tau)e^{is} + C.C.) + \varepsilon^2 V(\eta, t) + U(\eta,\tau,s,t) + \dots, \tag{20}$$

где $\tau = \varepsilon t,\ \eta = \varepsilon^2 t,\ s = \sqrt{\varepsilon k}t$ медленные времена, $U(\tau,\eta,s,t) = U(\tau,\eta,s,t-1)$ периодическая функция по $t$. Функция $V(\eta,t)$ имеет вид:

$$V = \sum_{n\neq 0} V_n(\tau)e^{iIm(\lambda_{n0}+\varepsilon\lambda_{n1}+\varepsilon^2\lambda_{n2}+\dots)t} = \sum_{n\neq 0} V_n(\tau)e^{\xi_n t}.$$

Значения $\lambda_{n0}$, $\lambda_{n1}$, $\lambda_{n2}$ определяются из асимптотического приближения корней уравнения (3) (см. Теорему 2).

Функция $U(\eta,\tau,s,t)$ представима в виде суммы рядов:

$$U(\eta,\tau,s,t) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{n}{4}}H_n(\tau,s) + \varepsilon^{\frac{9}{4}}(\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{n}{4}}D_n(\eta,\tau,s,t)) + \varepsilon^3(\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{\frac{n}{4}}R_n(\eta)).$$

Подставим (20) в уравнение (19), раскроем скобки, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра $\varepsilon$. Функции из $U(\tau,\eta,s,t)$ будут последовательно определяться из $W(\tau)e^{is} + C.C.$ и $V(\eta,t)$.

При $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$ определяется функция $H_0$:

$$0 = kH_0(\tau,s) + kH_0^{ss}(\tau,s) + \beta_2 k(e^{2is}W^2(\tau) + e^{-2is}\overline{W}^2(\tau) - 2W(\tau)\overline{W}(\tau)),$$

$$H_0(\tau,s)=\frac{\beta_2}{3}(2ie^{2is}W^2(\tau)+e^{-2is}\overline{W}^2(\tau))+2\beta_2W(\tau)\overline{W}(\tau).$$

Функция $W$ определяется при $\varepsilon^{\frac{7}{4}}$:

$$\begin{gathered}0=kH_1(\tau,s)+kH_1^{ss}(\tau,s)+\\ \frac{1}{2}ie^{is}k^{\frac{3}{2}}W(\tau)-\varepsilon\beta ie^{is}\sqrt{k}W(\tau)+2ie^{is}\sqrt{k}W^{\tau}(\tau)-\\ -(\frac{1}{2}ie^{-is}k^{\frac{3}{2}}\overline{W}(\tau)-\varepsilon\beta ie^{-is}\sqrt{k}\overline{W}(\tau)+2ie^{-is}\sqrt{k}\overline{W}^{\tau}(\tau))+\\ 2\frac{\beta_2^2}{3}(2i\sqrt{k}e^{2is}W^2(\tau)-2i\sqrt{k}e^{-2is}\overline{W}^2(\tau))(-i\sqrt{k}e^{is}W(\tau)+i\sqrt{k}e^{-is}\overline{W}(\tau)).\end{gathered}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых $e^{is}$ и $e^{-is}$:

$$\begin{gathered}2ie^{is}\sqrt{k}W^{\tau}(\tau)=-\frac{1}{2}ie^{is}k^{\frac{3}{2}}W(\tau)+\varepsilon\beta ie^{is}\sqrt{k}W(\tau)+\\ +4\frac{\beta_2^2}{3}ke^{is}W^2(\tau)\overline{W}(\tau)+3i\beta_3\varepsilon^{\frac{1}{2}}k^{\frac{3}{2}}e^{is}W^2(\tau)\overline{W}(\tau),\\ 2ie^{-is}\sqrt{k}\overline{W}^{\tau}(\tau)=-\frac{1}{2}ie^{-is}k^{\frac{3}{2}}\overline{W}(\tau)+\varepsilon\beta ie^{-is}\sqrt{k}\overline{W}(\tau)-\\ -4\frac{\beta_2^2}{3}ke^{-is}W(\tau)\overline{W}^2(\tau)-3i\beta_3\varepsilon^{\frac{1}{2}}k^{\frac{3}{2}}e^{-is}W(\tau)\overline{W}^2(\tau),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}W^{\tau}(\tau)=(\frac{\varepsilon\beta}{2}-\frac{k}{4})W(\tau)-\frac{2}{3}\beta_2^2\sqrt{k}iW^2(\tau)\overline{W}(\tau)+\frac{3}{2}\beta_3\varepsilon^{\frac{1}{2}}kW^2(\tau)\overline{W}(\tau),\\ \overline{W}^{\tau}(\tau)=(\frac{\varepsilon\beta}{2}-\frac{k}{4})\overline{W}(\tau)+\frac{2}{3}\beta_2^2\sqrt{k}iW(\tau)\overline{W}^2(\tau)-\frac{3}{2}\beta_3\varepsilon^{\frac{1}{2}}kW(\tau)\overline{W}^2(\tau).\end{gathered}\tag{21}$$

Отметим, что при $\varepsilon\beta<\dfrac{k}{2}$ решение уравнения (21) стремится к нулю. Функция $V_n$ определяется из выражения:

$$\begin{gathered}\sum_{n\neq0}V_n^{\eta}(\eta)e^{\xi_nt}\lambda_{n0}=\sum_{n\neq0}V_n(\eta)e^{\xi_nt}\frac{1}{2}\lambda_{n1}^2\lambda_{n0}+\beta\sum_{n\neq0}V_n(\eta)e^{\xi_nt}\lambda_{n0}+\\ +\beta_3(\sum_{n\neq0}V_n(\eta)e^{\xi_nt}\lambda_{n0})^3.\end{gathered}$$

Уравнение (19) в рассматриваемом случае сводится к рассмотрению дифференциального уравнения в частных производных (22) с краевыми условиями (23):

$$\frac{\partial V}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2V}{\partial^2t}+kV-\frac{k^2}{2}J^2(V)+\beta V+\beta_3J\left(\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^3\right),\tag{22}$$

$$\int\limits_0^1V(\eta,t)dt=0,\ V(\eta,t)\equiv V(\eta,t+1).\tag{23}$$

Через $J(V)$ обозначена первообразная функции $V$ с нулевым средним:

$$J^2(V)=J(J(V)),\ (J(V))'_t\equiv V.$$

**Теорема 5.** *Пусть* $\varepsilon\beta < \dfrac{k}{2}$, *тогда* $V_*(\eta, t)$ *- ограниченное вместе со своими производными, решение* (22) *с краевыми условиями* (23), *причем* $V_*(\eta, t) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi nit} V_n(\eta)$, *тогда*

$$y(t) = \varepsilon^2 \sum_{-\infty}^{\infty} e^{iIm(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \ldots)t} V_n(\eta),$$

*где* $\eta = \varepsilon^2 t$, $\tau = \varepsilon t$, $s = \sqrt{\varepsilon k} t$, *является асимптотическим по невязке с точностью* $O(\varepsilon^3)$ *равномерно по* $t \geq 0$ *решением* (19).

Отметим, что если $\varepsilon\beta$ немало, то на решение исходного уравнения влияет решение уравнения (21), меняется амплитуда и период колебаний.

# 3 Результаты численного счета

При помощи численного счета покажем, как при изменении параметров изменяется динамика решений уравнения (10).

Рассмотрим в качестве примера $F(\dot{y}(t-1)) = \beta_1 \sin(\dot{y}(t-1))$, и построим графики решений уравнения (10). Разложим функцию $F$ в ряд Тейлора:

$$F(\dot{y}(t-1)) = \pm(1+\varepsilon^2\beta)\dot{y}(t-1) \pm \frac{1}{6}(1+\varepsilon^2\beta)\dot{y}^3(t-1).$$

Таким образом, задача (10) имеет вид:

$$\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = \pm(1+\varepsilon^2\beta)\dot{y}(t-1) \pm \frac{1}{6}(1+\varepsilon^2\beta)(\dot{y}(t-1))^3 + \dots . \tag{24}$$

При параметре $|\beta_1| < 1$ траектория решения уравнения (24) стремится к нулю. Нулевое состояние равновесия устойчиво.

При параметре $\beta_1 < -1$ траектория решения уравнения (24) стремится к колебательному режиму. Нулевое состояние равновесия становится неустойчиво. На Рис. 3 приведены графики установившихся режимов при $\beta_1$ близком к $-1$: $\beta_1 = -(1+\varepsilon^2\beta)$.

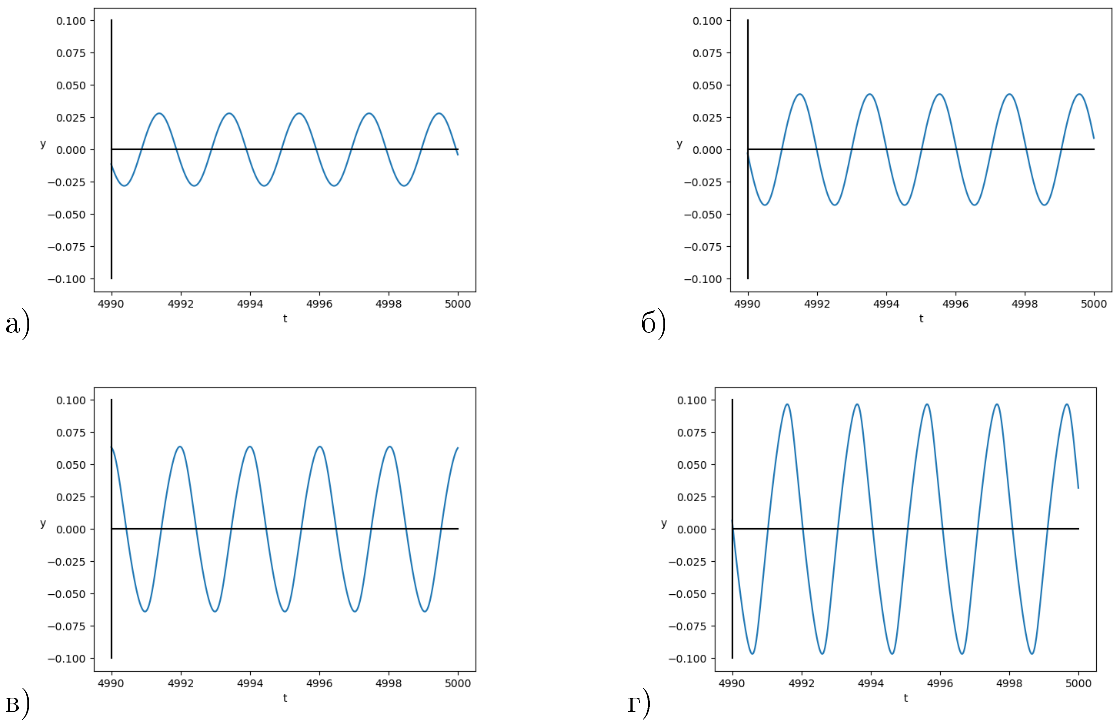


Рис. 3: График решения уравнения (24) при $\beta_1 = -(1+\varepsilon^2\beta)$, $\varepsilon = 0.01$, $k = 2$, а) $\beta = 12.5$, б) $\beta = 25$, в) $\beta = 50$, г) $\beta = 100$.

Аналогично, на Рис. 4 приведены графики установившихся режимов при $\beta_1$ близком к 1: $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$.

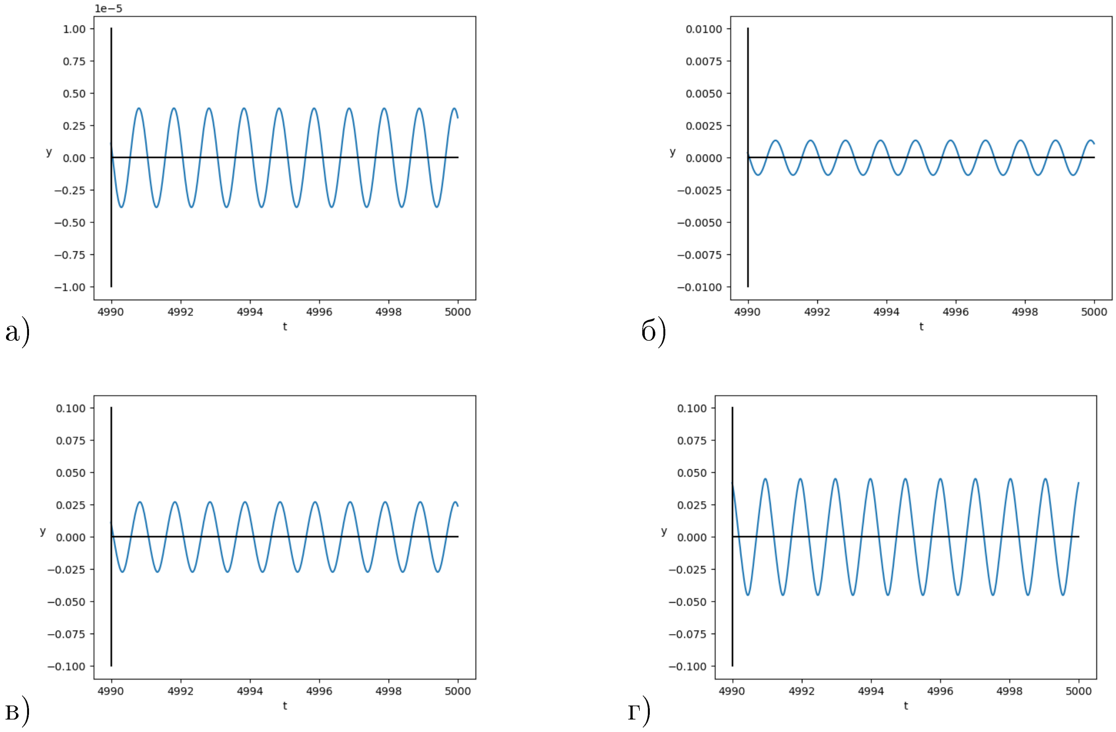


Рис. 4: График решения уравнения (24) при $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$, $\varepsilon = 0.01$, $k = 2$, а) $\beta = 12.5$, б) $\beta = 25$, в) $\beta = 50$, г) $\beta = 100$.

Отметим, что при значительном увеличении параметра $\beta$ изменяется колебательный режим, а именно длинна периода и амплитуда становятся больше. Численные исследования показаны на Рис. 5:

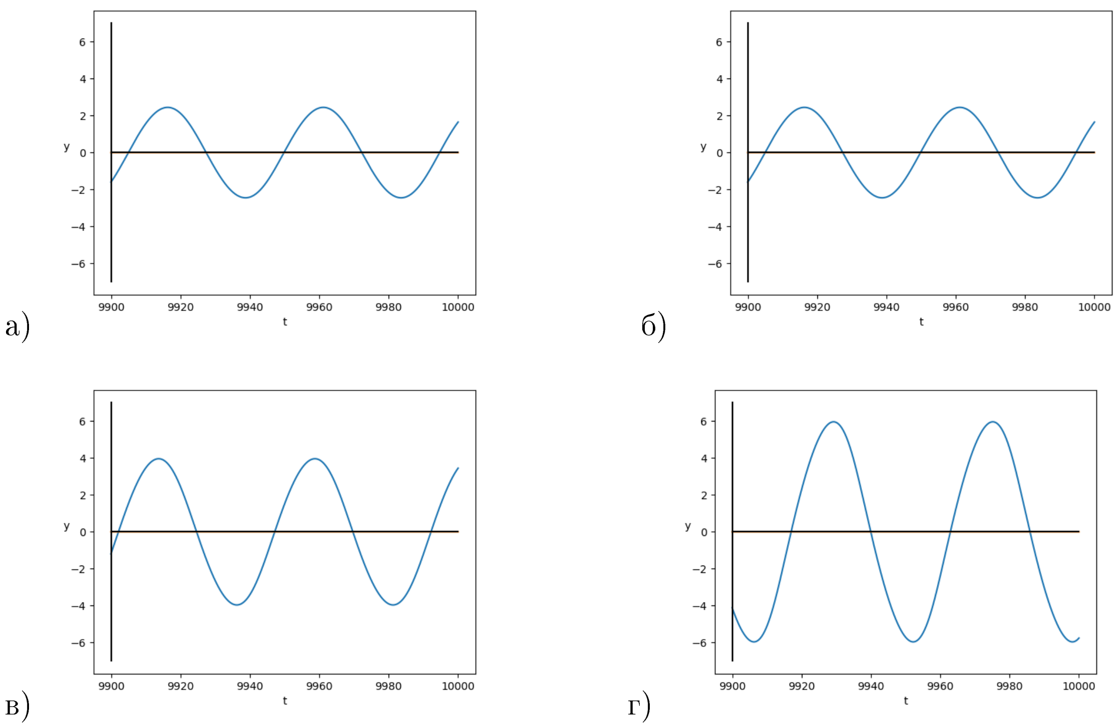


Рис. 5: График решения уравнения (24) при $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$, $\varepsilon = 0.01$, $k = 2$, а) $\beta = 200$, б) $\beta = 250$, в) $\beta = 500$, г) $\beta = 1000$.

# Заключение

Было рассмотрено уравнение второго порядка с запаздыванием в производной, найдено его состояние равновесия. Для изучения локальной динамики уравнения был рассмотрен характеристический квазиполином. Выделены критические значения параметра $\beta_1$, при котором состояние равновесия меняет свою устойчивость. Найдено асимптотическое представление корней характеристического квазиполинома при критическом значении параметра $\beta_1$. Интересным оказывается то, что кроме основной бесконечной «цепочки» стремящихся к мнимой оси корней, существует еще один близкий к нулю корень характеристического уравнения или пара таких корней. Построено асимптотическое представление корней при малом изменении параметра $\beta_1$. Построен аналог нормальной формы решения уравнения (10) при критических параметрах $\beta_1$. Представлены соответствующие численные решения исходной системы в случаях, когда значения параметров близки к критическим.

# Список литературы


1. *Larger L., Maistrenko Y., Penkovskyi B.*. Virtual Chimera States for Delayed-Feedback Systems// Physical Review Letters, 2013. Vol. 111. pp. 054103.

2. *Минорский В.П.* Уравнение Минорского. // Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: 1961. с. 191- 210 с.

3. *Маслеников И.Н.* Исследование локальной динамики дифференциально - интегрального уравнения с запаздыванием. // Современные проблемы математики и информатики. Выпуск 18, 2018, с. 39-45.

4. *Маслеников И.Н.* Локальная динамика опто-электронного осциллятора. // Современные проблемы математики и информатики. Выпуск 19, 2019, с. 44-52.

5. *Маслеников И.Н.* Исследование локальной динамики модели оптоэлектронного осциллятора.// Державинский форум. Тамбов, 2019, с. 157-166.

6. Григорьева Е.В., Кащенко С.А., Глазков Д.В.. Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием. // Моделирование и анализ информационных систем. Т.25, №1, 2018, с. 71-82.

7. Григорьева Е.В., Кащенко С.А..Нормализованные краевые задачи в модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием. // Прикладные задачи нелинейной теории колейбаний и волн. Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, вып. 4. С. 361-382.

8. Grigorieva E. V., Kashchenko S. A.. Rectangular structures in themodel of an optoelect - ronic oscillator with delay. // Physica D: Nonlinear Phenomen. 2021.

   URL: www.elsevier.com/locate/physd

9. *Кащенко И.С.* Асимптотическое разложение решений уравнений: методические указания. Ярославль: ЯрГУ, 2011.

10. *Кащенко И.С.* Метод квазинормальных форм в уравнениях с запаздыванием: методические указания. Ярославль: ЯрГУ, 2011.

11. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.