

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

*Сборник научных трудов
молодых ученых, аспирантов и студентов*

ВЫПУСК 20

Ярославль
ЯрГУ
2020

УДК 51+004(060.55)
ББК В1я43+3973.2я43
С 56

*Рекомендовано
редакционно-издательским советом ЯрГУ
в качестве научного издания. План 2020 года*

Современные проблемы математики и информатики :

С 56 сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов
/ Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2020.
— Вып. 20. — 56 с.
ISBN 978-5-8397-1203-4

В сборнике представлены работы молодых ученых, аспирантов и студентов.

В статьях рассматриваются различные проблемы теории динамических систем, информационных технологий, разработки программных средств и вычислительной математики.

Сборник подготовлен с использованием издательской системы ЛАТ_EX.

ББК В1я43+3973.2я43
УДК 51+004(060.55)

Редакционная коллегия:

канд. физ.-мат. наук Д. В. Глазков (отв. редактор)
д-р физ.-мат. наук И. С. Кащенко
канд. физ.-мат. наук П. Н. Нестеров

Содержание

<i>Костерин Д. С.</i> Оценка устойчивости одного класса разрывных решений краевой задачи специального вида . . .	4
<i>Маслеников И. Н.</i> Локальная динамика модифицированного уравнения Икеды	14
<i>Погребняк М. А.</i> Моделирование движения транспортного потока	21
<i>Татанова Е. М.</i> Локальная динамика уравнения с запаздыванием и периодическими коэффициентами . . .	36
<i>Федотова О. Н.</i> Реализация алгоритма Винограда на языке Python	44
<i>Федулов Д. Д.</i> Использование глубокого обучения для автоматического контроля восстановления мелкой моторики после пареза лёгкой и средней степени вследствие инсульта или черепно-мозговой травмы	49

И. Н. Маслеников

Локальная динамика модифицированного уравнения Икеды

Для модифицированного уравнения Икеды, описываемого дифференциально-интегральным уравнением, изучена устойчивость состояния равновесия. В зависимости от значений параметров определена устойчивость состояния равновесия. Построена асимптотика корней характеристического уравнения при критических значениях параметров, при которых состояние равновесия меняет свою устойчивость. Построены аналоги нормальных форм, решения которых определяют главное асимптотическое приближение исходной задачи. Приведены результаты численных исследований исходного уравнения.

1. Введение

Рассмотрим дифференциально-интегральное уравнение с запаздыванием [1], которое представляет собой реализацию модифицированного уравнения Икеды с задержкой по времени:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} + x + \delta \int_{t_0}^t x(s) ds = F(x(t - \tau)). \quad (1)$$

Замена $x = \dot{y}$ приводит систему (1) к виду (2):

$$\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = F(\dot{y}(t - 1)). \quad (2)$$

Здесь τ — время запаздывания, вещественное и положительное. Функция F достаточно гладкая, не ограничивая общности можно считать, что $F(0) = 0$. Таким образом, уравнение (2) имеет нулевое состояние равновесия, если это не так, то можно сделать соответствующую замену.

В работе [1] уравнение исследовалось численными методами, подбирались параметры, начальные условия, строились сложные квазипериодические режимы, так называемые химеры, при этом рассматривался случай, когда параметры $\varepsilon = 0.005$ и $\delta = 0.016$. В силу этого будем предполагать, что параметры ε и δ малы ($0 < \varepsilon \ll 1$, $0 < \delta \ll 1$) и пропорциональны: $\varepsilon = k\delta$, $k > 0$.

Поставим задачу исследовать локальную динамику в окрестности состояния равновесия. В работах [5], [6], [7] исследованы характеристические корни уравнения (2) и построены аналоги нормальных форм уравнения (2) при критических значениях параметров.

Отметим, что в статье [2] рассмотрено похожее уравнение оптоэлектронного осциллятора, в котором параметр δ не является малым. В работе [2] построены конечномерные и специальные бесконечномерные уравнения, которые играют роль нормальных форм. Приведены асимптотические на промежутке $[t_0, \infty]$ формулы для решений.

2. Исследование устойчивости состояния равновесия

В работе [5] проведено исследование расположения корней характеристического квазиполинома линеаризованного уравнения (2).

$$\varepsilon\lambda^2 + \lambda + k\varepsilon = \lambda\beta_1 e^{-\lambda}. \quad (3)$$

Для уравнения (3) справедливы теоремы, доказанные в [5]. Показано, что ноль устойчив при $-1 < \beta < 1$, и не устойчив при $\beta < -1$ и $\beta > 1$.

Теорема 1. При $|\beta_1| < 1$ и достаточно малом ε , все корни (3) имеют отрицательные вещественные части. При $|\beta_1| > 1$ и достаточно малом ε , существуют корни (3) имеющие положительные вещественные части.

Таким образом, в дополнительном исследовании нуждается случай $\beta_1 = \pm 1$. При таких значениях параметра β_1 у характеристического уравнения существует бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси. Их асимптотику дают следующие теоремы.

Теорема 2. При $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$ корни характеристического уравнения (3) λ , $\bar{\lambda}$ и λ_n находящиеся около мнимой оси, допускают асимптотическое представление вида:

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + o(\varepsilon^2), \quad \text{при } n \neq 0, \quad \text{где}$$

$$\lambda_{n0} = 2\pi ni, \quad \lambda_{n1} = -\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}},$$

$$\lambda_{n2} = -\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + \lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}} + \frac{\lambda_{n1}^2}{2} + \beta,$$

$$\lambda = \sqrt{\varepsilon k}i - \varepsilon\frac{k}{4} + o(\varepsilon), \quad \bar{\lambda} = -\sqrt{\varepsilon k}i - \varepsilon\frac{k}{4} + o(\varepsilon).$$

Теорема 3. При $\beta_1 = -(1 + \varepsilon^2\beta)$ корни характеристического уравнения (3) λ и λ_n , находящиеся около мнимой оси, допускают асимптотическое представление вида

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + o(\varepsilon^2), \quad n \neq 0, \quad \text{где}$$

$$\lambda_{n0} = \pi(2n+1)i, \quad \lambda_{n1} = -\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}},$$

$$\lambda_{n2} = -\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + \lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}} + \frac{\lambda_{n1}^2}{2} + \beta,$$

$$\lambda = \frac{-\varepsilon k}{2} + o(\varepsilon).$$

Траектории движений корней при $|\beta_1|$ близком к 1 по комплексной плоскости при изменении параметра ε приведены на Рис. 1.

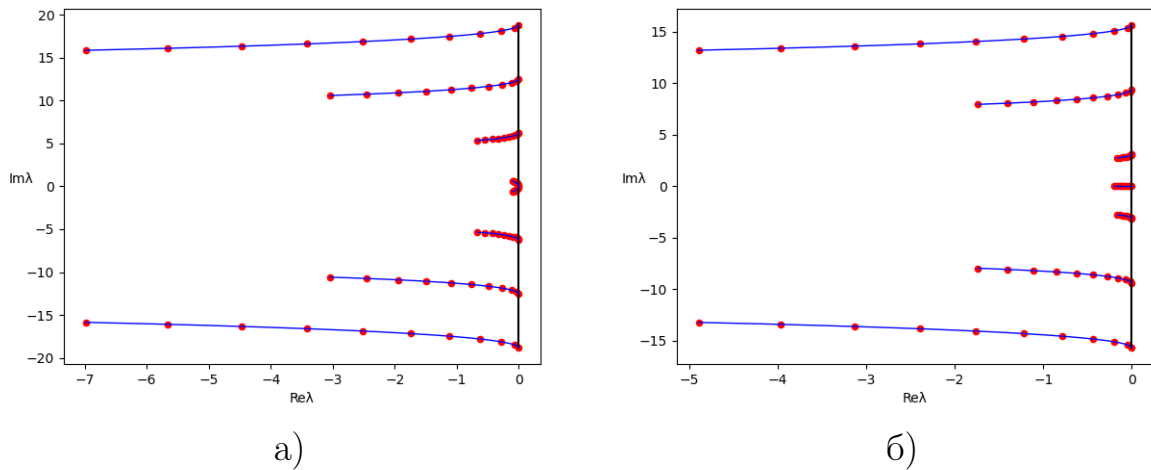


Рис. 1: Траектория движения корней при $\varepsilon \rightarrow 0$:

а) $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$, б) $\beta_1 = -(1 + \varepsilon^2\beta)$.

3. Построение нормальной формы уравнения

Изучим изменения в поведении решений уравнения (2) при переходе β_1 через ± 1 . Разложим в уравнении (2) функцию F в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = \beta_1 \dot{y}(t-1) + \beta_2 (\dot{y}(t-1))^2 + \beta_3 (\dot{y}(t-1))^3 + \dots \quad (4)$$

где β_2, β_3 – некоторые постоянные. Пусть $\beta_1 = -(1 + \varepsilon^2\beta)$.

В работах [6], [7], [8] было показано, что уравнение (4), в рассматриваемом случае сводится к краевой задаче

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial^2 t} + kV - \frac{k^2}{2} J^2(V) + \beta V + \beta_2 J \left(U_1 \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \beta_3 J \left(\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^3 \right), \quad (5)$$

$$\int_0^1 V(\tau, t) dt = 0, \quad (6)$$

$$V(\tau, t) \equiv -V(\tau, t + 1).$$

Через $J(V)$ обозначена первообразная функции V с нулевым средним:

$$J^2(V) = J(J(V)), \quad (J(V))'_t \equiv V.$$

Справедлива следующая теорема [6], [7], [8]:

Теорема 4. Пусть V_* – решение (5) с краевыми условиями (6), причем $V_* = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(2n+1)it} V_n(\tau)$, тогда

$$y(t) = \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} e^{iIm(\lambda_{n0} + \varepsilon \lambda_{n1} + \varepsilon^2 \lambda_{n2} + \dots)t} V_n(\tau) + \varepsilon W(\tau),$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$ – медленное время, значения λ_{n0} , λ_{n1} , λ_{n2} определяются из асимптотического приближения корней уравнения (3) (см. Теорему 3),

$W(\tau) = \frac{\beta_2}{k} \int_0^1 \dot{V}^2(t, \tau) dt$ является асимптотическим по невязке равномерно по $t \geq 0$ решением (4).

Аналогичные результаты справедливы и при $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2 \beta$.

Таким образом, задача (5), (6) является аналогом нормальной формы для уравнения (4) при критическом значении параметра β_1 . Отметим, что коэффициенты краевой задачи не зависят от ε . В следующем разделе приведены результаты численного исследования уравнения (4).

4. Результаты численного счета

При помощи численного счета покажем, как при изменении параметров изменяется динамика решений уравнения (4).

Рассмотрим в качестве примера $F(\dot{y}(t-1)) = \beta_1 \sin(\dot{y}(t-1))$, и построим графики решений уравнения (4). Разложим функцию F в ряд Тейлора:

$$F(\dot{y}(t-1)) = \pm(1 + \varepsilon^2 \beta) \dot{y}(t-1) \pm \frac{1}{6} (1 + \varepsilon^2 \beta) \dot{y}^3(t-1).$$

Таким образом, задача (4) имеет вид:

$$\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = \pm(1 + \varepsilon^2\beta)\dot{y}(t-1) \pm \frac{1}{6}(1 + \varepsilon^2\beta)(\dot{y}(t-1))^3 + \dots \quad (7)$$

При параметре $|\beta_1| < 1$ траектория решения уравнения (7) стремится к нулю. Нулевое состояние равновесия устойчиво.

При параметре $\beta_1 < -1$ траектория решения уравнения (7) стремится к колебательному режиму. Нулевое состояние равновесия становится неустойчиво. На Рис. 2 приведены графики установившихся режимов при β_1 близком к -1 : $\beta_1 = -(1 + \varepsilon^2\beta)$.

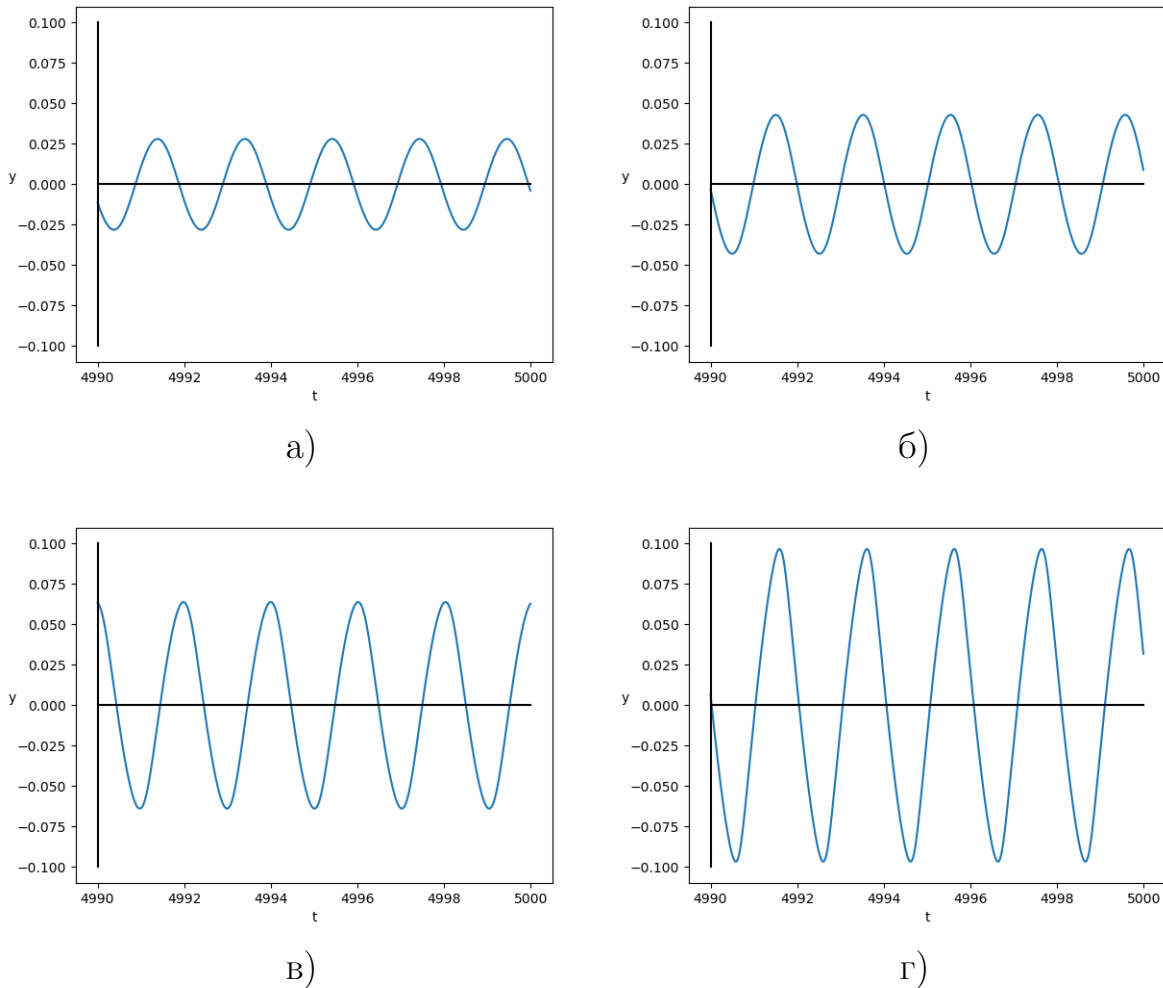


Рис. 2: График решения уравнения (2) при $\beta_1 = -(1 + \varepsilon^2\beta)$, $\varepsilon = 0.01$, $k = 2$, а) $\beta = 12.5$, б) $\beta = 25$, в) $\beta = 50$, г) $\beta = 100$.

Аналогично на Рис. 3 приведены графики установившихся режимов при β_1 близком к 1: $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$.

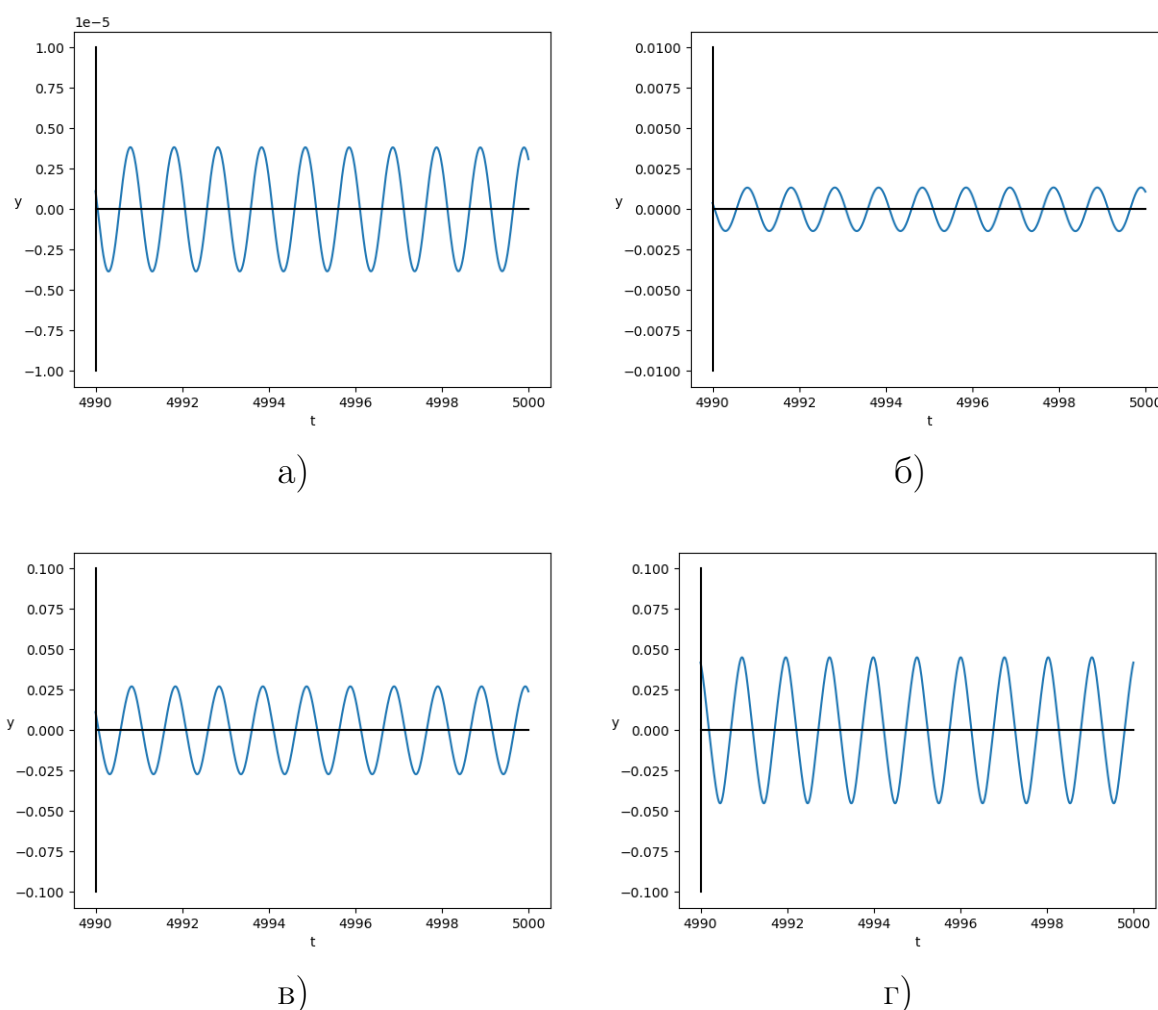


Рис. 3: График решения уравнения (2) при $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2 \beta$, $\varepsilon = 0.01$, $k = 2$, а) $\beta = 12.5$, б) $\beta = 25$, в) $\beta = 50$, г) $\beta = 100$.

5. Заключение

Рассмотрена модель оптико-электронного осциллятора, найдено его состояние равновесия. Для изучения локальной динамики уравнения рассмотрен характеристический квазиполином. Выделены критические значения параметра β , при которых состояние равновесия меняет свою устойчивость. Найдено асимптотическое представление корней характеристического квазиполинома при критическом значении параметра β . Интересным оказывается то, что кроме основной бесконечной «цепочки» стремящихся к мнимой оси корней существует еще один близкий к нулю корень характеристического уравнения или пара таких корней. Построено асимптотическое представление корней при малом изменении параметра β_1 . Построена нормальная форма решения уравнения (4) при критических параметрах β_1 . Представлены соответствующие численные

решения исходной системы в случаях, когда значения параметров близки к критическим.

Литература

1. *Larger L., Maistrenko Y., Penkovskyi B.* Virtual Chimera States for Delayed-Feedback Systems // *Physical Review Letters*, 2013. Vol. 111. P. 054103.
2. *Григорьева Е. В., Кащенко С. А., Глазков Д. В.* Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием // *Моделирование и анализ информационных систем*. Т.25, №1, 2018. С. 71-82.
3. *Кащенко И. С.* Асимптотическое разложение решений уравнений: методические указания. Ярославль : ЯрГУ, 2011.
4. *Кащенко И. С.* Метод квазинормальных форм в уравнениях с запаздыванием: методические указания. Ярославль : ЯрГУ, 2011.
5. *Маслеников И. Н.* Исследование локальной динамики дифференциально-интегрального уравнения с запаздыванием // *Современные проблемы математики и информатики*. Выпуск 18, 2018. С. 39-45.
6. *Маслеников И. Н.* Локальная динамика оптико-электронного осциллятора // *Современные проблемы математики и информатики*. Выпуск 19, 2019. С. 44-52.
7. *Маслеников И. Н.* Исследование локальной динамики модели оптико-электронного осциллятора // *Державинский форум*. Тамбов, 2019. С. 157-166.
8. *Маслеников И. Н.* Асимптотическое исследование уравнения второго порядка с запаздыванием // *Сборник материалов конференции: Семьдесят третья всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием*. Ярославль, 2020. С. 321-322.
9. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова