



Конференция  
международных  
математических центров  
мирового уровня  
2021



Образовательный Фонд «Талант и успех»  
Научно-технологический университет «Сириус»  
Математический центр

---

Конференция международных  
математических центров  
мирового уровня

9–13 августа 2021

*Программа и тезисы докладов*

ФТ «Сириус», 2021

## **Организационный комитет**

Сопредседатели: В.А. Садовничий, А.А. Лаптев

Заместители: Д.В. Трещёв, А.В. Щуплев

Н.Ю. Анисимов, М.М. Арсланов, В.А. Васильев, Е.П. Вдовин  
А.Ю. Веснин, М.А. Всемиров, А.А. Заварзин, А.Н. Карапетянц  
Б.С. Кашин, С.А. Кащенко, С.В. Кисляков, А.Г. Кузнецов  
Н.Ю. Лукоянов, Д.К. Мамий, Ю.В. Матиясевич, А.В. Михайлов  
Е.А. Мшагская, Д.О. Орлов, В.Е. Подольский, Г.М. Полотовский  
С.К. Смирнов, В.Н. Ушаков, А.К. Цих, И.В. Яценко

## **Программный комитет**

Председатель: И.А. Тайманов

Заместитель: К.М. Ханин

А.Ю.Алексеев, А.И. Аптекарев, А.П. Веселов  
Д.Ю. Григорьев, Д.Н. Запорожец, Ю.М. Кабанов  
Л.В. Кацарков, С.К. Ландо, Н.С. Надирашвили  
А.А. Разборов, Н.А. Рожковская, А.Г. Сергеев  
М.Л. Содин, И.Л. Софронов, Т.А. Суслина  
А.С. Холево, Н.В. Цилевич, Д.С. Челкак

## **Локальные организаторы**

А.В. Щуплев  
И.С. Клевцова, Н.Р. Токарева

# Содержание

Московский центр фундаментальной и прикладной математики	4
Математический центр мирового уровня МИАН	8
Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера	11
Математический центр в Академгородке	12
Программа конференции	14
Пленарная сессия	16
Программа секции финалистов Премии молодым математикам России	26
Программа секции «Комплексный анализ»	33
Программа секции «Математическая физика»	47
Программа секции «Математический анализ»	65
Программа секции «Нелинейные задачи с поверхностями раздела»	72
Программа секции «Математическое моделирование в геофизике»	98
Программа секции «Теория функций»	109
Программа секции «Комбинаторика и геометрия»	125
Программа секции «Теория вычислимости и математическая логика»	134
Программа секции «Обратные задачи и искусственный интеллект»	145
Программа секции «Теория операторов и гармонический анализ»	153
Программа секции «Прикладная математика и математическое моделирование»	169
Программа секции «Нелинейная динамика и управление»	192
Программа секции «Теория узлов»	213
Программа секции «Группы и графы»	228
Программа секции «Интегрируемые и динамические системы»	260

# Московский центр фундаментальной и прикладной математики









Московский центр фундаментальной и прикладной математики — математический научный центр мирового уровня, представляющий собой консорциум из трех организаций: МГУ имени М.В.Ломоносова, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН и Институт вычислительной математики имени Г.И. Марчука.

В течение 2020 года ученые, работающие в центре, получили ряд наград, среди которых: Премия Правительства Москвы для молодых ученых, Премия имени М.В. Ломоносова за научные работы I степени и так далее.



На текущий момент в рамках центра реализуется **48 научно-технологических проектов**, отобранных комиссией с участием международных экспертов. Среди наиболее прорывных результатов, достигнутых в 2020 году, можно выделить:

завершенную разработку эффективных алгоритмов децентрализованного управления роем наноспутников	
получено разложение числа RSA-232 (данный результат может быть использован в криптографии и других областях математики)	
подробно исследовано влияние асимметрии геометрии слоев резонатора ПН, на интенсивность ближнего поля и сечение поглощения	
был разработан метод моделирования процессов фильтрации и переноса в трещиноватых пористых средах, не требующий модификации расчетной сетки (данный подход был верифицирован на численных экспериментах в задачах однофазной фильтрации и переноса, а также расширен и протестирован для задачи двухфазной фильтрации в трещиноватой пористой среде)	

<p>проведен поиск ингибиторов главной протеазы <math>M^{pro}</math> коронавируса SARS-CoV-2 в базах данных существующих лекарственных соединений (на основании проведенных расчетов отобрано 21 соединение, молекулы которых наиболее сильно связываются с активным центром главной протеазы коронавируса и блокируют работу её каталитического центра. Отобранные лекарственные соединения переданы в ГНЦ ВБ «Вектор» для дальнейшей экспериментальной проверки их ингибирующей активности)</p>	
<p>создана модель костно-мышечного аппарата верхнего плечевого пояса в программном пакете OpenSim (полученные результаты позволяют оценивать биомеханику человека, что в дальнейшем даст возможность решать такие проблемы как повышение производительности труда и безопасности рабочего места, снижения рисков заболеваний, связанных с нарушениями опорно-двигательного аппарата, их лечения и профилактики)</p>	

271

Научных статей  
опубликовано за 2019-2020 г.

 <b>Фундаментальные исследования</b>	 <b>Прикладные исследования</b>	 <b>Образовательная деятельность</b>	 <b>Внешнее взаимодействие</b>
<p><b>48</b> Научно-технологических проекта, отобранных комиссией с участием международных экспертов, реализуется Центром на текущий момент</p> <p><b>6</b> Направлений реализации научно-технологических проектов существует в Центре</p> <p><b>3</b> Научно-технологических проекта реализуются под руководством молодых исследователей</p>		<p><b>105</b> Курсов разработано/прочитано в рамках направлений работы Центра</p> <p><b>70</b> программ в филиалах МГУ</p> <p><b>8</b> программ в формате дистанционных курсов</p>	<p><b>40</b> Научных мероприятий проведено Центром за 2020 г.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Регулярная коммуникация с научным сообществом</li> <li>Вовлечение зарубежных исследователей в проекты</li> <li>Привлечение молодых специалистов к участию в научно – практических мероприятиях</li> </ul>

## Конкурсный отбор проектов 2020 г.

Первая волна	Вторая волна
<p><b>8</b> <b>Направления исследований:</b></p> <p><b>п о б е д и т е л ь</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Прямые и обратные задачи оптики тонких пленок и <u>нанопокровий</u>;</li> <li>Особенности интегрируемых систем;</li> <li>Аналитическая теория меры и ее приложения к стохастическому анализу;</li> <li>Методы решения задач управления и оптимизации в условиях неопределенности и реальной информации;</li> <li>Обратные и некорректные задачи математической физики и их приложения.</li> </ol>	<p><b>26</b> <b>Направления исследований:</b></p> <p><b>п о б е д и т е л ь</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Граничные интегральные уравнения и краевые задачи математической физики;</li> <li>Разработка аналитического метода решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами;</li> <li>Оценки <u>сложностей</u> характеристик булевых функций и графов;</li> <li>Современные методы некоммутативной геометрии;</li> <li>Однородные пространства с транзитивным действием групп, аппроксимируемых почти <u>метризуемыми</u> группами.</li> </ol>

## Конкурсный отбор проектов 2021 г.

МГУ	ИВМ РАН	Проведение исследований	ИПМ им. М.В.Келдыша РАН
<p>Проведен новый конкурсный отбор проектов</p> <p>Подано заявок - <b>77</b></p> <p>Отобрано заявок - <b>44</b></p> <p>Коллективы приступили к работе</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Исследование и математическое моделирование процессов агрегации и дробления вещества;</li> <li>2. Разработка и калибровка математической модели мультифизических процессов иммунного реагирования при вирусных инфекциях человека;</li> <li>3. Математические методы классификации локальных атмосферных явлений по данным прямых и дистанционных измерений.</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Получено новое доказательство теоремы Джонса-Рушевея;</li> <li>2. Найдены распределения случайных величин, получающихся суммированием по модулю 3 произвольного количества независимых бернуллиевских случайных величин с произвольными распределениями;</li> <li>3. Получены явные оценки сверху размерности аттрактора для регуляризованного уравнения Эйлера с периодическими краевыми условиями в трехмерном случае.</li> </ol>	

### Первая волна

**44**

#### Направления исследований:

п  
о  
б  
е  
д  
и  
т  
е  
л  
я

1. Сверх- и гиперзвуковой турбулентный пограничный слой. Асимптотическая структура и законы подобия;
2. Геометрия диофантовых приближений;
3. Газодинамические и магнитогидродинамические модели в задачах астрофизики;
4. Математические и программные модели квантовых систем;
5. Спектральная теория общих и дифференциальных операторов и ее приложения.

6. Разработка высокопроизводительных методов моделирования и проектирования томографов в волновых моделях на суперкомпьютере;
7. Линейно-алгебраические и комбинаторные методы исследования в алгебре;
8. Применение суперкомпьютерного докинга для поиска новых противовирусных препаратов прямого действия для подавления коронавируса SARS-CoV2;
9. Нелинейные задачи теории активных сред;
10. Аппроксимация, экстремальные задачи и приложения.

## Показатели развития образовательной деятельности Центра

**105**

Курсов разработано и прочитано в 2020 году

**40+**

Научных мероприятий по направлениям исследований Центра проведено за 2020 г.

**25**

Образовательных программ разработаны и планируются к внедрению

**7**

Филиалов (включая г. Баку, г. Нур-Султан, г. Душанбе, г. Ташкент)

Развитие данного направления позволяет реализовывать уникальный потенциал МГУ в части образования и обеспечивает непрерывную цепочку обучения и становления специалистов в математике и смежных дисциплинах.

#### Планы по развитию направления



Организация более ста образовательных программ по математике и смежным наукам к 2024 г.



Развитие программ разного типа, в том числе программ специалитета, бакалавриата, магистратуры, аспирантуры, дополнительного, второго высшего образования, летних школ, курсов и т.д.



Ориентация на обучение и высокий уровень вовлеченности молодых исследователей в деятельность Центра



**Плановые показатели Центра на 2021-2023 гг.**

<b>Наименование целевых показателей</b>	<b>Ед. изм.</b>	<b>2021</b>	<b>2022</b>	<b>2023</b>
Количество российских и зарубежных ведущих ученых, работающих в центре	чел.	95	97	99
в том числе: Количество исследователей, принятых на работу в центр и ранее не работавших исследователями в организации, на базе которой создан центр, или в организациях, являющихся участниками центра	чел.	6	8	8
Доля иностранных исследователей центра в общей численности исследователей центра	%	5	7	8
Доля исследователей центра в возрасте до 39 лет в общей численности исследователей центра	%	47	48,2	49,3
Численность российских и иностранных ученых, являющихся работниками центра и опубликовавших статьи в научных изданиях первого и второго квартилей, индексируемых в международных базах данных «Scopus» и (или) Web of Science Core Collection	чел.	24	24	26
Доля исследований, проводимых центром под руководством молодых (в возрасте до 39 лет) перспективных исследователей	%	9	11	13

# Математический центр мирового уровня МИАН



Steklov International Mathematical Center

## База МЦМУ МИАН – Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (МИАН)

МИАН был создан в 1934 году, в дальнейшие годы из МИАН выделился ряд отделов, ставших самостоятельными институтами РАН.

В МИАН работают 133 научных сотрудника, включая 31 члена РАН, 85 докторов наук, а также лауреатов Филдсовской премии, премии Неванлинны, премии Клода Шеннона, премии Европейского математического общества, Государственной премии РФ (СССР), премии Президента Российской Федерации в области науки и технологий для молодых ученых, премии Правительства Москвы молодым ученым. В МИАН работают 24 приглашенных докладчика на Международных математических конгрессах, причем МИАН был представлен на всех конгрессах, начиная с 1954 года.

С 2005 года в МИАН открыт Научно-образовательный центр, в котором для мотивированных студентов и аспирантов различных учебных заведений читаются вечерние курсы лекций, а также проводятся специализированные семинары.

МИАН является издателем 9 ведущих российских журналов, в том числе «Успехи математических наук» (Q1 по WoS), «Известия РАН. Серия математическая» (Q2 по WoS), «Математический сборник» (Q2 по WoS). Кроме того, МИАН – издатель научно-популярного журнала «Квант».

МИАН проводит около 30 научных конференций в год, как самостоятельно, так и совместно с российскими и зарубежными научными организациями. В течение года в МИАН приезжает в среднем около 60 иностранных ученых.

На базе МИАН функционирует крупнейший общероссийский математический портал Math-Net.Ru, содержащий подробную информацию о математиках, публикациях, конференциях, семинарах, а также предоставляющий доступ к многочисленным видеозаписям докладов на различных мероприятиях по математике.

С 2010 года в МИАН существует Лаборатория популяризации и пропаганды математики, проекты которой пользуются большой популярностью среди школьников, учителей и всего общества. По материалам проектов сотрудниками лаборатории прочитано более 1000 лекций по всей России.

## Цели МЦМУ МИАН

Формирование МИАН как известной в мире площадки для проведения конференций, школ, тематических семестров и других форм сотрудничества ученых. Обеспечение постоянного присутствия в МИАН заметного числа иностранных ученых. Интеграция МИАН в мировую систему ведущих математических организаций.

Создание в МИАН привлекательных условий для работы молодых ученых, в том числе, иностранных постдоков.

Создание базы для подготовки будущих кадров, в том числе усиление работы аспирантуры и Научно-образовательного центра МИАН.

## Структура МЦМУ МИАН

МЦМУ МИАН управляется Советом центра, опирающимся на кадровую, программную и научно-образовательную комиссии. Отчеты и планы рассматриваются Международным наблюдательным советом, состоящим из 9 ученых мирового уровня, включая 6 зарубежных ученых. Коллектив Центра насчитывает 122 исследователя, более половины исследователей — молодые ученые в возрасте до 39 лет, около четверти исследователей не являются постоянными сотрудниками МИАН.

Научные исследования ведутся по 7 направлениям: «Алгебра, алгебраическая геометрия и алгебраическая теория чисел», «Геометрия, топология и теоретическая физика», «Анализ и аналитическая теория чисел», «Механика, теория управления и теория динамических систем», «Теория вероятностей, статистика и математическая физика», «Дискретная математика и математическая логика», «Математические методы для задач квантовых технологий».

## Деятельность МЦМУ МИАН в 2019–2021 гг.

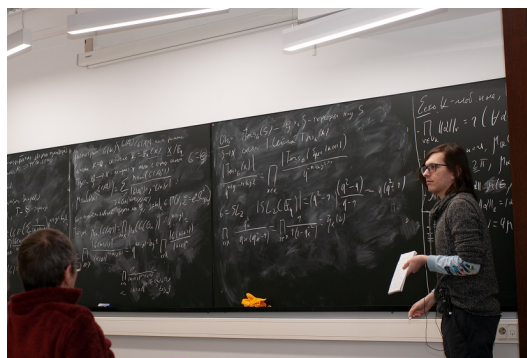
Созданы позиции постдоков с конкурентноспособными зарплатами. На основе открытого конкурса на работу в МЦМУ МИАН были взяты 5 иностранных постдоков и 7 российских постдоков.

Сотрудниками МЦМУ МИАН опубликовано более 270 статей в журналах Q1 и Q2 по WoS и Scopus и в трудах конференций из CORE A, в том числе 28 статей за счет средств МЦМУ МИАН.

Сотрудники МЦМУ МИАН стали лауреатами престижных премий: премия Европейского математического общества, орден Александра Невского, Большая золотая медаль имени М.В. Ломоносова РАН, премия имени И.Г. Петровского РАН, премия имени И.М. Виноградова РАН, медаль РАН с премией для молодых ученых России, премия Московского математического общества, премия Правительства Москвы молодым ученым.

Реализованы 3 масштабные международные тематические программы: «Holography: from high-energy physics to quantum information», «New Trends in Mathematical Physics», «Logical Perspectives 2021». Проведены 40 конференций (школ), часть из которых прошли в формате онлайн. Организованы 30 визитов российских и зарубежных ученых. Проводились 6 международных онлайн семинаров с многочисленными зарубежными докладчиками и участниками. В частности, за 2020 год число иностранных участников онлайн мероприятий МЦМУ МИАН составило порядка 800 человек.

Существенно интенсифицирована деятельность Научно-образовательного центра: число курсов и семинаров в год возросло с 20 до 35. Создана и начала активно работать базовая кафедра МИАН в МФТИ, в рамках которой сотрудники МИАН читают лекции, ведут семинары и руководят научной работой студентов МФТИ на площадке МИАН.





Созданы дополнительные ставки для сотрудников Лаборатории популяризации и пропаганды математики, открыт новый современный сайт проекта «Математические этюды», введены в работу новые серверы, проводится оцифровка выпусков журнала «Квант».

Открыты 2 новых конференц-зала на 40-50 человек с колонными досками и полным мультимедийным оснащением, позволяющим проводить мероприятия в смешанном формате (очно и онлайн). Аналогично оснащены 4 семинарские аудитории. Созданы 7 новых офисов для визитеров МЦМУ МИАН и постдоков и 2 компьютерных зала.



# Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера



*Санкт-Петербургский  
международный математический  
институт имени Леонарда Эйлера*

Международный математический институт имени Леонарда Эйлера (ММИ им. Л. Эйлера) был основан в 1988 году по инициативе директора Ленинградского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Л. Д. Фаддеева. Идея создания института была принята АН СССР и поддержана ЮНЕСКО и международными математическими организациями. Основным направлением деятельности института с момента его основания является развитие международного научного сотрудничества и создание необходимых условий для проведения совместных исследований отечественными и зарубежными учёными.

## 1990–2007

Первая международная конференция в ММИ им. Л. Эйлера была проведена в октябре 1990 года в здании ЛОМИ (ПОМИ РАН), а в 1992 году институт переехал в здание, которое занимает и поныне – двухэтажный особняк сестёр Новинских, построенный в 1913-1914 гг. по проекту Н. Е. Лансере на Песочной набережной. В 1995 году институт был включён в состав ПОМИ РАН на правах структурного подразделения, сохранив своё наименование. В 2007 году в рамках международного конгресса, посвящённого 300-летию со дня рождения Леонарда Эйлера, перед зданием института был открыт первый и пока единственный в Санкт-Петербурге памятник Леонарду Эйлеру.

## ММИ им. Л.Эйлера сегодня

Ежегодно на базе ММИ им. Л. Эйлера проводится около 20 научных мероприятий по актуальным проблемам современной теоретической математики и физики, в том числе тематические программы, конференции, воркшопы и летние школы, участие в которых принимают более 600 российских и зарубежных учёных. Мероприятия разных лет поддерживались многими организациями и фондами, в том числе РАН, правительством РФ, INTAS, фондом «Династия», РФФИ, РНФ, лабораторией им. П. Л. Чебышёва СПбГУ, грантом фонда Саймонса и другими. ММИ им. Л. Эйлера входит в число ведущих математических научных центров сети ERCOM, которая объединяет 27 ведущих исследовательских институтов Европы и является частью Европейского математического общества.

## Математический центр мирового уровня

В 2019 году развитие ММИ им. Л. Эйлера получило новый импульс в ходе реализации национального проекта «Наука», предусматривающего создание и развитие в России международных математических центров мирового уровня. В Санкт-Петербурге такой центр был создан на базе ММИ им. Л. Эйлера в рамках консорциума ПОМИ РАН и СПбГУ. С созданием центра спектр организуемых институтом мероприятий существенно расширился и дополнился долгосрочными тематическими научными программами с приглашением зарубежных учёных, также появилась возможность привлекать к проводимым исследованиям постдоков, аспирантов и студентов.

# Математический центр в Академгородке



Математический центр в Академгородке (МЦА) создан в 2019 году на базе консорциума Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН и Новосибирского государственного университета.

Главная цель МЦА — достижение прорывных результатов мирового уровня в области математики и искусственного интеллекта, которые позволят обеспечить лидирующее положение исследований, инноваций и промышленности РФ в этих областях. Для достижения поставленной амбициозной цели МЦА проектирует и имплементирует новые формы управления исследованиями и образованием. Центр работает над тем, чтобы найти свое место в глобальной системе разделения труда — стать своеобразным хабом, объединяющим компетенции институтов Новосибирского научного центра, Новосибирского государственного университета, а также компаний реального сектора экономики для решения научно-технологических задач и ответов на глобальные вызовы.

Задачи по интеграции в мировую систему разделения труда в области математики и других смежных отраслях реализуются за счет формирования культуры и механизмов работы с внешними научными и индустриальными запросами. Создание платформы для подобного научного диалога влечет инициирование исследовательских, технологических и образовательных проектов, а также сборку междисциплинарных команд под конкретные проекты с участием студентов всех уровней обучения.

В настоящее время в МЦА работает 13 исследовательских групп, выполняющих исследования мирового уровня в области фундаментальной и прикладной математики в рамках трех годичных исследовательских программ: «Физико-математическое моделирование технологических процессов», «Задачи классификации в математике и теоретической информатике» и «Математические основания физики». Формирование портфеля проектов Центра происходит также за счет заказов НИОКР компаниями реального сектора экономики, к реализации которых привлекаются исследователи НГУ, а также математических институтов Новосибирского научного центра, среди которых ИМ СО РАН, ИСИ СО РАН, ИВМиМГ СО РАН и др. Ведется несколько проектов с компаниями-партнерами: ПАО «Газпром нефть», АО «Силовые машины», Госкорпорация «Росатом», Huawei Technologies Co. Ltd. и т.д. Получен ряд результатов, интересных как с точки зрения развития фундаментальных исследований, так и с точки зрения применения при решении задач реального сектора экономики.

Исследования проводятся по проектному принципу. Международная экспертиза проектов является одним из принципов функционирования Центра. В состав Международного экспертного совета МЦА входят ведущие ученые мирового уровня, известные международные специалисты в области управления университетскими и академическими организациями, ведущими научными изданиями в области математики и смежных областях, государственные и общественные деятели, ответственные за стратегическое развитие в области мировой математической науки и мирового математического образования.

Развитие кадрового потенциала Центра проводится, в частности, за счет привлече-

ния молодых международных исследователей: в 2020 году был проведен первый конкурс на позиции постдоков Центра, который привлек исследователей из Италии, Китая, Великобритании и Уругвая. В настоящее время Центр проводит второй конкурс на позиции постдоков. В рамках конкурсов участникам предлагается как включиться в один из исследовательских коллективов Центра, так и предложить собственную исследовательскую программу.

В настоящее время команда Математического центра в Академгородке экспериментирует с новыми форматами организации научно-образовательной деятельности. Например, летом 2021 года Центр проводит масштабный интенсив — Большую математическую мастерскую — совместно с Международным математическим институтом им. Леонарда Эйлера, Международным научно-методическим центром НИУ ВШЭ и Региональным научно-образовательным математическим центром Томского государственного университета. Мастерская объединила более 170 студентов, молодых ученых и школьников для работы над 29 проектами. Заказчиками этих проектов стали представители научных и образовательных организаций, а также бизнес-сообщества: в основе каждого проекта лежит открытая задача или проблема. После нескольких недель работы в рамках Мастерской участники планируют представить результат, определяющий образ решения предлагаемой проблемы или даже воплощающий этот образ в реальность.

Центр запускает амбициозные пилотные программы на уровне бакалавриата. Так, профиль «Исследовательская группа» на направлении «Математика», курсы которого призваны совмещать в себе фундаментальные основы и современные результаты в области чистой математики, направлен на вовлечение обучающихся в исследовательскую деятельность с первого курса. Данное вовлечение обеспечивается включением в образовательный процесс постоянно действующего семинара и написанием курсовых работ под руководством ведущих ученых Математического центра в Академгородке. Профили «Искусственный интеллект» и «Прикладной инжиниринг» (вместе – Инженерная школа НГУ) на соответствующих направлениях подготовки «Прикладная математика и информатика» и «Механика и математическое моделирование» направлены на подготовку инженеров нового типа. В связи с ростом сложности инженерных решений и высокими требованиями к компетенциям в сфере IT, «воспитание» высококвалифицированных исследователей, способных выстраивать технологические процессы и работать с инженерией знаний, является приоритетным направлением для успешного развития технологических инициатив Российской Федерации. Ключевой особенностью вышеописанных профилей бакалавриата является отбор наиболее мотивированных и подготовленных студентов посредством портфолио (олимпиад, проектов, конкурсов, конференций), кратких биографий и эссе из числа поступивших на определенное направление.

Сотрудниками Центра были разработаны материалы для создания трех открытых онлайн-курсов для платформы Coursera: «Cryptography: Boolean functions and related problems», «Алгебраическая теория графов» и «Линейная алгебра: матрицы и отображения».

При участии сотрудников Центра были организованы и проведены программы дополнительного образования: как для преподавателей высшей школы, так и для школьников, в том числе в сотрудничестве с СУНЦ НГУ, Региональным центром выявления и поддержки одарённых детей «Альтаир», а также школами РАН.

# ПРОГРАММА КОНФЕРЕНЦИИ

## ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

08 <sup>00</sup> – 09 <sup>00</sup>	Регистрация участников	Парк науки и искусства
09 <sup>00</sup> – 09 <sup>50</sup>	Пленарная сессия	Зал пленарных заседаний
10 <sup>00</sup> – 10 <sup>45</sup>	Открытие конференции	Зал пленарных заседаний
10 <sup>45</sup> – 11 <sup>10</sup>	Кофе-брейк	галерея 2-го этажа
11 <sup>10</sup> – 13 <sup>00</sup>	Пленарная сессия	Зал пленарных заседаний
13 <sup>00</sup> – 14 <sup>30</sup>	Обед	ресторан «Вега», ПНиИ ресторан «Атлас», Омега Сириус
14 <sup>30</sup> – 18 <sup>30</sup>	Работа секций кофе 15 <sup>30</sup> – 17 <sup>30</sup>	Зал пленарных заседаний, зона 5.2 галерея 2-го этажа
18 <sup>30</sup> – 19 <sup>30</sup>	Приветственный фуршет	галерея 2-го этажа

## ВТОРНИК, 10 АВГУСТА

09 <sup>30</sup> – 10 <sup>20</sup>	Пленарная сессия	Зал пленарных заседаний
10 <sup>30</sup> – 11 <sup>00</sup>	Кофе-брейк	галерея 2-го этажа
11 <sup>00</sup> – 12 <sup>50</sup>	Пленарная сессия	Зал пленарных заседаний
13 <sup>00</sup> – 14 <sup>30</sup>	Обед	ресторан «Вега», ПНиИ ресторан «Атлас», Омега Сириус
14 <sup>30</sup> – 20 <sup>00</sup>	Работа секций кофе 15 <sup>30</sup> – 17 <sup>30</sup>	Зал пленарных заседаний, зона 5.2 галерея 2-го этажа

## СРЕДА, 11 АВГУСТА

09 <sup>30</sup> – 10 <sup>20</sup>	Пленарная сессия	Зал пленарных заседаний
10 <sup>30</sup> – 11 <sup>00</sup>	Кофе-брейк	галерея 2-го этажа
11 <sup>00</sup> – 12 <sup>50</sup>	Пленарная сессия	Зал пленарных заседаний
13 <sup>00</sup> – 14 <sup>30</sup>	Обед	ресторан «Вега», ПНиИ ресторан «Атлас», Омега Сириус

## ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

09 <sup>30</sup> – 10 <sup>20</sup>	Пленарная сессия	Зал пленарных заседаний
10 <sup>30</sup> – 11 <sup>00</sup>	Кофе-брейк	галерея 2-го этажа
11 <sup>00</sup> – 12 <sup>50</sup>	Пленарная сессия	Зал пленарных заседаний
13 <sup>00</sup> – 14 <sup>30</sup>	Обед	ресторан «Вега», ПНиИ ресторан «Атлас», Омега Сириус
14 <sup>30</sup> – 20 <sup>00</sup>	Работа секций кофе 15 <sup>30</sup> – 17 <sup>30</sup>	Зал пленарных заседаний, зона 5.2 галерея 2-го этажа



## ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА

09 <sup>30</sup> – 10 <sup>20</sup>	Пленарная сессия	Зал пленарных заседаний
10 <sup>30</sup> – 11 <sup>00</sup>	Кофе-брейк	галерея 2-го этажа
11 <sup>00</sup> – 12 <sup>50</sup>	Пленарная сессия	Зал пленарных заседаний
13 <sup>00</sup> – 14 <sup>30</sup>	Обед	ресторан «Вега», ПНИИ ресторан «Атлас», Омега Сириус
14 <sup>00</sup> – 15 <sup>00</sup>	Круглый стол по взаимодействию математических центров	переговорная 4.1
14 <sup>30</sup> – 18 <sup>00</sup>	Работа секций кофе 15 <sup>30</sup> – 17 <sup>30</sup>	Зал пленарных заседаний, зона 5.2 галерея 2-го этажа
18 <sup>00</sup> – 19 <sup>00</sup>	Заккрытие конференции	Зал пленарных заседаний

## Пленарная сессия

### Зал пленарных заседаний

#### ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

09<sup>00</sup> — 09<sup>50</sup> Александр Ефимов (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН). *Алгебраическая K-теория больших категорий*

10<sup>00</sup> — 10<sup>45</sup> Открытие конференции

#### ПЕРЕРЫВ

11<sup>10</sup> — 12<sup>00</sup> Денис Кротов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Совершенные коды и их обобщения: проблема существования*

12<sup>10</sup> — 13<sup>00</sup> Эдуард Гирш (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН). *Сложность (полу)алгебраических доказательств*

#### ВТОРНИК, 10 АВГУСТА

09<sup>30</sup> — 10<sup>20</sup> Вадим Горин (Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН). *Сложение матриц при высоких и низких температурах*

#### ПЕРЕРЫВ

11<sup>00</sup> — 11<sup>50</sup> Владимир Подольский (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН). *Макс-плюс многочлены и их корни*

12<sup>00</sup> — 12<sup>50</sup> Александр Логунов (Санкт-Петербургский государственный университет / Princeton University). *Zero sets of Laplace eigenfunctions*

#### СРЕДА, 11 АВГУСТА

09<sup>30</sup> — 10<sup>20</sup> Александр Буряк (Высшая школа экономики). *От теорий подсчёта кривых к интегрируемым системам*

#### ПЕРЕРЫВ

11<sup>00</sup> — 11<sup>50</sup> Сергей Зелик (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН / University of Surrey). *Inertial manifolds and finite-dimensional reduction in dissipative PDEs*

12<sup>00</sup> — 12<sup>50</sup> **Специальный доклад от Университета «Сириус»:** Николай Замарашкин (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Факторизация числа RSA-232: решения и нерешенные вопросы в задачах отображения алгоритмов на реальные вычислительные системы*

## ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

09<sup>30</sup> — 10<sup>20</sup> Фёдор Петров (Санкт-Петербургский государственный университет). *Многочлены и групповые алгебры в комбинаторике*

ПЕРЕРЫВ

11<sup>00</sup> — 11<sup>50</sup> Дмитрий Фроленков (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН). *Аддитивная проблема делителей и ее приложения*

12<sup>00</sup> — 12<sup>50</sup> Семён Дятлов (Clay Mathematics Institute). *Control of eigenfunctions on negatively curved surfaces*

## ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА

09<sup>30</sup> — 10<sup>20</sup> Юрий Трахинин (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Локальная разрешимость задачи со свободной границей для магнитогидродинамического контактного разрыва*

ПЕРЕРЫВ

11<sup>00</sup> — 11<sup>50</sup> Александра Скрипченко (Высшая школа экономики). *Задача Новикова: как игра на бильярде помогает в физике металлов*

12<sup>00</sup> — 12<sup>50</sup> Станислав Шапошников (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Проблема Колмогорова о единственности вероятностных решений эллиптических и параболических уравнений*

## От теорий подсчёта кривых к интегрируемым системам

А.Ю. Буряк

Высшая школа экономики  
aburyak@hse.ru

Первым результатом, указавшим на тесную связь топологии пространств модулей стабильных алгебраических кривых с теорией интегрируемых систем уравнений в частных производных, была знаменитая теорема Виттена-Концевича, утверждающая, что производящий ряд чисел пересечений на пространствах модулей является решением иерархии Кортвега-де Фриза. Этот результат даёт существенную информацию о топологии пространств модулей. Оказывается, что связь топологии пространств модулей и интегрируемых систем работает и в другом направлении, позволяя строить широкий класс таких систем. Это было впервые замечено Дубровиным и Жангом и реализовано ими в рамках конструкции так называемых иерархий топологического типа. Я расскажу про альтернативную конструкцию иерархий, схожих с иерархиями Дубровина-Жанга, но гораздо более явную и общую, и кроме того эти иерархии обладают богатой алгебраической структурой. Если позволит время, то я расскажу про приложения к некоторым классификационным задачам в теории интегрируемых систем.

## Сложность (полу)алгебраических доказательств

Э.А. Гирш

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН  
edward.a.hirsch@gmail.com

Как можно доказать, что многочлены  $f_1, \dots, f_m$  от  $n$  переменных не имеют общих корней? (В алгебраически замкнутом поле) при помощи теоремы Гильберта о нулях можно построить многочлены  $g_1, \dots, g_m$ , которые дадут тождество

$$\sum f_i g_i = 1.$$

Почти тридцать лет назад Р. Beame, R. Impagliazzo, J. Krajíček, Т. Pitassi и Р. Pudlák предложили рассматривать такой способ как систему доказательств для пропозициональной логики.

Однако какова будет длина таких доказательств? Можно ли их записать столь компактно, что длина будет небольшой? Можно ли сэкономить, если использовать неравенства? Ответы на эти вопросы — часть «программы С.А. Кука» для теории сложности пропозициональных доказательств, плана по получению экспоненциальных нижних оценок для всё более мощных системы доказательств.

В докладе будет рассказано о нескольких вариантах (полу)алгебраических систем доказательств и их связи с гипотезами М.Шуба и С.Смейла.

## Сложение матриц при высоких и низких температурах

В.Е. Горин

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН  
vadicgor@gmail.com

В теории случайных матриц важную роль играет параметр бета, который принимает значения 1, 2 или 4, в зависимости от того, работаем ли мы с вещественными, комплексными или кватернионными матрицами. В соответствии с терминологией статистической механики, бета обратно пропорциональна температуре в системе. Оказывается, что этот параметр также может принимать произвольные положительные вещественные значения. Мы обсудим, как придать смысл сложению и вырезанию подматриц из матриц над (несуществующим) полем произвольной вещественной размерности бета и что происходит с этими операциями при стремлении беты к нулю и к бесконечности.

## Control of eigenfunctions on negatively curved surfaces

С.В. Дятлов

Clay Mathematics Institute  
dyatlov@mit.edu

Given an  $L^2$ -normalized eigenfunction with eigenvalue  $\lambda^2$  on a compact Riemannian manifold  $(M, g)$  and a nonempty open set subset  $\Omega$  of  $M$ , what lower bound can we prove on the  $L^2$ -mass of the eigenfunction on  $\Omega$ ? The unique continuation principle gives a bound for any  $\Omega$  which is exponentially small as  $\lambda$  goes to infinity. On the other hand, microlocal analysis gives a  $\lambda$ -independent lower bound if  $\Omega$  is large enough, i.e. it satisfies the geometric control condition.

This talk presents a  $\lambda$ -independent lower bound for any set  $\Omega$  in the case when  $M$  is a negatively curved surface, or more generally a surface with Anosov geodesic flow. The proof uses microlocal analysis, the chaotic behavior of the geodesic flow, and a new ingredient from harmonic analysis called the Fractal Uncertainty Principle. Applications include control for Schrodinger equation and exponential decay of damped waves. Joint work with Jean Bourgain, Long Jin, and Stéphane Nonnenmacher.

## Алгебраическая $K$ -теория больших категорий

А.И. Ефимов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН  
efimov13@yandex.ru

Будет дано определение (принадлежащее докладчику) непрерывной алгебраической  $K$ -теории для некоторого класса больших триангулированных категорий. Я расскажу о результатах и гипотезах, связанных с ее вычислением: для категорий пучков на локально компактных пространствах, а также для недавно построенной (Клаузеном и Шольце) категории ядерных модулей на формальной схеме.

# Факторизация числа RSA-232: решения и нерешенные вопросы в задачах отображения алгоритмов на реальные вычислительные системы

Н.Л. Замарашкин

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

nikolai.zamarashkin@gmail.com

Пусть  $n = pq$  с большими простыми  $p$  и  $q$ , а  $x < n$  целое число, битовое представление которого является сообщением. Выберем число  $e \in \mathbb{Z}_{(p-1)(q-1)}^*$ . Число  $y \in \mathbb{Z}_n$ , получаемое по формуле,

$$y = x^d \pmod{n},$$

рассматривают как зашифрованное сообщение. Дешифровка (восстановление  $x$ ) не вызывает трудностей, если известен обратный к  $e$  элемент  $d \in \mathbb{Z}_{(p-1)(q-1)}^*$ . В этом случае

$$x = y^d \pmod{n}.$$

В системе шифрования RSA параметры  $n$  и  $e$  считаются общедоступными. Определить  $d$  не сложно, зная  $p$  и  $q$ , но именно информация о делителях  $n$  является закрытой, а нахождение  $p$  и  $q$  относится к сложным задачам.

Между научными группами ведется соревнование по разложению больших RSA-чисел. За последние 15 лет все рекорды получены с помощью *общего метода решета числового поля* (*Generalized Number Field Sieve, GNFS*). Сложность алгоритма GNFS экспоненциально растет с  $n$ .

В ИБМ РАН создание программной реализации ключевого шага этого алгоритма осуществлялось более 10 лет. Существующий программный код уникален. Парадоксальный выбор в пользу формально последовательного алгоритма Ланцоша-Монтгомери решения линейных систем над полем из двух элементов был компенсирован детальным изучением внутреннего параллелизма метода. Реализация ИБМ РАН использует практически все известные параллельные технологии (многопоточность, распределенные вычисления, специализированные ускорители), масштабируется на вычислительные системы с десятками тысяч ядер. Структуры данных и методы вычислений оптимизированы под эффективное использование современных вычислительных систем и современной оперативной памяти. Отказ от применения любой из вышеназванных технологий приводит к многократным потерям в производительности.

Таким образом, программный код ИБМ РАН является одновременно высоко технологичным продуктом и решением математической задачи эффективного отображения алгоритмов на реальные вычислительные системы.

17 февраля 2020 года в ИБМ РАН была закончена факторизация числа RSA-232 (число с 232 десятичными знаками). На момент получения этот результат делил второе место в мире. Рекордным было число RSA-240 (результат опубликован 9 декабря 2019 года).

## **Inertial manifolds and finite-dimensional reduction in dissipative PDEs**

С.В. Зелик

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН / University of Surrey  
s.zelik@surrey.ac.uk

The aim of this talk is to review the classical and recent achievements in the theory of infinite-dimensional dissipative dynamical systems. The main attention will be paid to inertial manifolds (IMs) which are the most natural tools for justifying the finite dimensionality of the associated limit dynamics and for constructing the reduced system of ODEs describing this dynamics.

Various methods of verifying the existence of IMs (including the classical spectral gap conditions, spatial and spatio-temporal averaging technique, etc.) will be discussed and illustrated on concrete classes of PDEs. The examples of natural dissipative PDEs which have global attractors with finite and small box-counting dimensions, but do not possess any finite dimensional IMs will be considered and the infinite dimensionality of the limit dynamics in these equations will be demonstrated. Finally, the recent results on smoothness of IMs will be also presented.

## **Совершенные коды и их обобщения: проблема существования**

Д.С. Кротов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
krotov@math.nsc.ru

Совершенным код в дискретном метрическом пространстве эквивалентен разбиению пространства на шары фиксированного радиуса. Хорошо известна проблема существования совершенных кодов в пространствах, связанных с теорией кодирования. Для некоторых важных случаев (например, пространство Хэмминга над конечным полем, пространство матриц с ранговой метрикой) задача полностью решена, в то время как для других пространств (например, пространство Джонсона и пространство Хэмминга над неполовым алфавитом) она остается открытой, несмотря на значительные усилия исследователей. В докладе будут рассмотрены последние достижения в вопросах, связанных с существованием совершенных кодов и их обобщений, полностью регулярных кодов и трейдов, которые наследуют многие комбинаторные и алгебраические свойства совершенных кодов.

## **Zero sets of Laplace eigenfunctions**

А.А. Логунов

Санкт-Петербургский государственный университет / Princeton University  
log239@yandex.ru

In the beginning of the 19th century Napoleon set a prize for the best mathematical explanation of Chladni's resonance experiments. Nodal geometry studies the zeroes of solutions to elliptic differential equations such as the visible curves that appear in these physical

experiments. We will discuss geometrical and analytic properties of zero sets of harmonic functions and eigenfunctions of the Laplace operator. For harmonic functions on the plane there is an interesting relation between local length of the zero set and the growth of harmonic functions. The larger the zero set is, the faster the growth of harmonic function should be and vice versa. Zero sets of Laplace eigenfunctions on surfaces are unions of smooth curves with equiangular intersections. Topology of the zero set could be quite complicated, but Yau conjectured that the total length of the zero set is comparable to the square root of the eigenvalue for all eigenfunctions. We will start with open questions about spherical harmonics and explain some methods to study nodal sets.

## **Многочлены и групповые алгебры в комбинаторике**

Ф.В. Петров

Санкт-Петербургский государственный университет  
fedyapetrov@gmail.com

Полиномиальный метод в комбинаторике применяется давно и плодотворно. В 1990-х годах новый импульс ему был дан в работах Алона, предложившего нашедшую множество приложений *комбинаторную теорему о нулях*. Около десяти лет назад в нескольких независимых работах (Шауз, Ласон, Карасёв – Петров) была предложена её явная форма — формула, восстанавливающая коэффициент многочлена по его значениям на конечной решётке подходящего размера. Она привела к ряду новых приложений в перечислительной и аддитивной комбинаторике. В частности, была доказана (Каройи, Надь, Волков, Петров) гипотеза Форрестера о значении интеграла типа Сельберга, возникающего в квантовой электродинамике.

Основанный на сочетании схожих идей, линейно-алгебраических и вероятностных аргументов метод Крута, Льва и Паха (2016) позволил принципиально улучшить ряд оценок в комбинаторике аддитивных групп, являющихся произведениями большого числа небольших сомножителей. Выяснилось, что принципиальное свойство группы, отвечающей за эти эффекты — наличие большого количества делителей нуля в её групповой алгебре. В докладе я хотел бы обсудить эти явления и остающиеся вопросы.

## **Макс-плюс многочлены и их корни**

В.В. Подольский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН  
podolskii@mi-ras.ru

Вопросы макс-плюс алгебры возникают в ряде направлений математики, таких как алгебраическая геометрия, математическая физика, комбинаторная оптимизация. Отчасти востребованность этой алгебраической структуры связана с тем, что она помогает сделать различные параметры математических объектов доступными для вычислений. Важную роль в этом играют макс-плюс многочлены, однако многие вопросы о свойствах макс-плюс многочленов остаются открытыми. В докладе мы обсудим некоторые недавние результаты



о макс-плюс многочленах (многих переменных) и их корнях. В частности, мы обсудим макс-плюс аналоги комбинаторной теоремы о нулях, леммы Шварца-Зиппеля, теоремы Гильберта о нулях и универсального тестового множества.

## **Задача Новикова: как игра на бильярде помогает в физике металлов**

А.С. Скрипченко  
Высшая школа экономики  
askripchenko@hse.ru

Я расскажу историю одной задачи, которую С. П. Новиков сформулировал в 1982 году в связи с изучением полуклассического движения электрона в кристаллической решетке. Эта задача сначала представлялась топологической, а впоследствии оказалась тесно связанной со многими важными вопросами из теории динамических систем (прежде всего, с тейхмюллеровой динамикой). Мы поговорим об этих связях, а еще — о свежих результатах и пока недоказанных гипотезах.

## **Локальная разрешимость задачи со свободной границей для магнитогидродинамического контактного разрыва**

Ю.Л. Трахинин  
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
trakhin@math.nsc.ru

Граничные условия для контактных разрывов в магнитной гидродинамике (МГД) идеальной сжимаемой жидкости – наиболее типичные в астрофизической плазме. Контактные разрывы наблюдаются, например, за ударными волнами, ограничивающими остатки сверхновой. С математической точки зрения контактный разрыв, как и МГД тангенциальный разрыв [1], является свободной характеристической поверхностью для системы гиперболических законов сохранения. В докладе обсуждается локальная по времени разрешимость соответствующей задачи со свободной границей. Для двумерного случая доказана теорема существования и единственности гладкого решения этой задачи при условии, что в начальный момент времени в каждой точке контактного разрыва выполнено условие Рэлея–Тейлора на знак скачка производной давления по направлению нормали к разрыву.

При МГД моделировании крупномасштабных явлений, например, в астрофизической плазме обычно пренебрегают эффектами поверхностного натяжения и вязкости. Однако даже для таких явлений иногда полезно учитывать поверхностное натяжение, как стабилизирующий механизм в численном моделировании магнитной неустойчивости Рэлея–Тейлора, предотвращающий некорректность задачи. Для общего трехмерного случая удастся доказать локальное существование МГД контактного разрыва при любом ненулевом коэффициенте поверхностного натяжения и без предположения выполнения условия Рэлея–Тейлора. Доказательство базируется на адаптации методов (в частности, метода Нэша–Мозера), использованных в [1–4] для задач со свободными границами без учета

поверхностного натяжения, но принципиальным его отличием является преодоление некоторой трудности, связанной с доказательством существования решений соответствующей линеаризованной задачи. Результаты, которые обсуждаются в докладе, получены совместно с Алессандро Морандо и Паолой Требески [3] (Брешианский университет, Италия), а также с Тао Ван [5] (Уханьский университет, Китай).

## Список литературы

- [1] Trakhinin Y. The existence of current-vortex sheets in ideal compressible magnetohydrodynamics. Arch. Ration. Mech. Anal. 191 (2009), 245-310.
- [2] Trakhinin Y. Local existence for the free boundary problem for nonrelativistic and relativistic compressible Euler equations with a vacuum boundary condition. Comm. Pure Appl. Math. 62 (2009), 1551-1594.
- [3] Morando A., Trakhinin Y. Trebeschi P. Local existence of MHD contact discontinuities. Arch. Ration. Mech. Anal. 228 (2018), 691-742.
- [4] Trakhinin Y., Wang T. Well-posedness of free boundary problem in non-relativistic and relativistic ideal compressible magnetohydrodynamics. Arch. Rational Mech. Anal. 239 (2021), 1131-1176.
- [5] Trakhinin Y., Wang T. Nonlinear stability of MHD contact discontinuities with surface tension. Submitted.

## Аддитивная проблема делителей и ее приложения

Д.А. Фроленков

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

frolenkov@mi-ras.ru

Аддитивной проблемой делителей (АПД) называют задачу получения асимптотической формулы для суммы  $\sum_{n < X} d(n)d(n+a)$ , где  $d(n) = \sum_{d|n} 1$  — функция числа делителей. Оказывается, АПД естественным образом возникает при решении совершенно различных задач теории чисел. Например, она связана с изучением 4-го момента дзета-функции Римана, 2-го момента  $L$ -функций автоморфных форм, с изучением среднего значения длин цепных дробей. В докладе речь пойдет как о самой аддитивной проблеме делителей, так и о ее приложениях.

# **Проблема Колмогорова о единственности вероятностных решений эллиптических и параболических уравнений**

**С.В. Шапошников**

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
starticle@mail.ru

A survey of recent results related to uniqueness problems for Kolmogorov equations will be given. Several long-standing problems will be discussed and solutions for some of them will be presented. In particular, we will demonstrate that in the one-dimensional case always there holds uniqueness of probability solutions to the Cauchy problem for the Fokker-Planck-Kolmogorov equation with an unbounded drift coefficient and the unit diffusion coefficient and in all other dimensions it fails. Moreover, we will give several examples when the Kolmogorov equation has infinitely many linearly independent probability solutions. Finally we will discuss close problem on distances between stationary measures and transition probabilities of diffusion process.

**Программа секции финалистов  
Премии молодым математикам России**

**ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА**

**Зал № 3. Секция «Теория узлов»**

17<sup>00</sup> — 17<sup>20</sup> Илья Алексеев (Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера). *Новые классы минимальных диаграмм узлов*

**ВТОРНИК, 10 АВГУСТА**

**Зал № 2**

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Ярослав Алексеев (Санкт-Петербургский государственный университет). *Нижние оценки для расширений системы Polynomial Calculus*

14<sup>55</sup> — 15<sup>15</sup> Вячеслав Боровицкий (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН). *Гауссовские процессы на неевклидовых областях: построение и эффективные алгоритмы*

15<sup>20</sup> — 15<sup>40</sup> Иван Бочков (Санкт-Петербургский государственный университет). *Нули и полюса дзета-функции Хелсона*

15<sup>45</sup> — 16<sup>05</sup> Александр Калмынин (Высшая школа экономики). *Положительность сумм характеров и случайные мультипликативные функции*

16<sup>10</sup> — 16<sup>30</sup> Тихон Красовицкий (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *О размерности пространства вероятностных решений уравнения Колмогорова*

16<sup>35</sup> — 16<sup>55</sup> Михаил Овчаренко (Высшая школа экономики). *О двойственности Долгачева–Никулина для слоев моделей Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано*

17<sup>00</sup> — 17<sup>20</sup> Кристина Оганесян (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Некоторые оценки сумм Вейля и их приложения в теории функций*

**Зал № 3. Секция «Теория узлов»**

17<sup>30</sup> — 17<sup>50</sup> Максим Иванов (Новосибирский государственный университет). *Связные суммы виртуальных узлов и инварианты плоских виртуальных узлов*

## ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

### Зал № 10. Секция «Комплексный анализ»

16<sup>40</sup> — 17<sup>00</sup> Алексей Куликов (Санкт-Петербургский государственный университет). *Интерполяция Фурье и частотно-временная локализация*

17<sup>10</sup> — 17<sup>30</sup> Юлия Зайцева (Высшая школа экономики). *Коммутативные алгебраические моноиды на аффинных поверхностях*

### Зал № 4. Секция «Интегрируемые и динамические системы»

18<sup>10</sup> — 18<sup>30</sup> Владислав Кибкало (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Реализация топологии слоений интегрируемых систем в классе бильярдов*

# Нижние оценки для расширений системы Polynomial Calculus

Я.Ю. Алексеев

Санкт-Петербургский государственный университет  
tolstreg@gmail.com

Изучение сложности пропозициональных доказательств началось со статьи С. А. Кука и Р. Рекхоу [1]. Поскольку общий вопрос о существовании системы доказательств, в которой у каждой формулы есть доказательство полиномиальной длины, эквивалентен  $NP = coNP$ , исследования ведутся для определенных систем. С тех пор было изучено множество систем, некоторые из них – логические (работающие с дизъюнкциями, конъюнкциями и другими булевыми операциями), некоторые из них – алгебраические (работающие с произвольными полиномами).

В нашей работе мы рассмотрим расширения двух систем, одна из которых алгебраическая, а другая – логическая.

Мы рассмотрим следующее полиномиальное равенство, называемое Binary Value Principle ( $BVP_n$ ) [2,3]:

$$1 + x_1 + 2x_2 + \dots + 2^{n-1}x_n = 0,$$

и докажем условную нижнюю оценку на размер опровержения  $BVP_n$  в системе  $IPS_{\mathbb{Q}}$ .

**Теорема** ([2]). *Если выполняется гипотеза Шуба-Смейла, то не существует опровержения  $BVP_n$  размера  $poly(n)$  в системе  $IPS$  над полем  $\mathbb{Q}$ .*

Также мы дадим частичный ответ на другой открытый вопрос, поставленный в [?], доказав экспоненциальную нижнюю оценку для системы доказательств Polynomial Calculus с правилом расширения еще более сильным, чем в системе  $\Sigma\P\S$ -PC.

**Теорема** ([4]). *Любое  $Ext-PC_{\mathbb{Q}}^{\vee}$  опровержение для  $BVP_n$  должно иметь размер хотя бы  $2^{\Omega(n)}$ .*

Также мы рассмотрим систему доказательств Res-Lin и покажем, что  $Ext-PC_{\mathbb{Q}}^{\vee}$  полиномиально моделирует Res-Lin, и, следовательно, получим альтернативную нижнюю оценку на размер опровержения в Res-Lin.

**Теорема** ([4]). *Любое опровержение в  $Res-Lin_{\mathbb{Q}}$  может быть преобразовано в  $Ext-PC_{\mathbb{Q}}^{\vee}$  с лишь полиномиальным увеличением размера.*

## Список литературы

- [1] Cook, Stephen A. and Reckhow, Robert A., The relative efficiency of propositional proof systems, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 44, 1, 36–50, 1979.
- [2] Alekseev Ya., Grigoriev D., Hirsch E.A., and Tzameret I., Semi-Algebraic Proofs, IPS Lower Bounds and the  $\tau$ -Conjecture: Can a Natural Number be Negative?, in Proceedings of the 52nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2020), 54–67, 2020.
- [3] Fedor Part and Iddo Tzameret, Resolution with Counting: Different Moduli and Dag-Like Lower Bounds, in 12th Innovations in Theoretical Computer Science Conference, ITCS, January, 2020.

- [4] Alekseev, Ya. A Lower Bound for Polynomial Calculus with Extension Rule, in 36th Computational Complexity Conference (CCC 2021), 21:1–21:18, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), 2021.

## Гауссовские процессы на неевклидовых областях: построение и эффективные алгоритмы

В.А. Боровицкий

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН  
viacheslav.borovitskiy@gmail.com

Техники, основанные на гауссовских процессах, широко применяются в задачах машинного обучения, в которых количественная оценка неопределенности играет ключевую роль: в робототехнике, геостатистике, естественнонаучных приложениях.

При использовании этих техник неизвестная функция моделируется стохастическим процессом, среднее которого соответствует предсказанию, а дисперсия служит оценкой неопределенности. Вначале, в качестве модели рассматривается какой-то гауссовский случайный процесс общего характера, который затем, по мере наблюдения данных, обуславливается этим данными. В качестве «гауссовского процесса общего характера» на практике обычно используются гауссовские процессы из семейства Матерна, определенные лишь на евклидовых пространствах.

В докладе я продемонстрирую как обобщить класс Матерна на случай римановых многообразий и графов таким образом, чтобы полученное семейство можно было эффективно применять на практике. Я также упомяну о некоторых приложениях и об эффективных алгоритмах для обуславливания и получения траекторий условного процесса, применимых как для евклидовых пространств, так и для многообразий.

## Нули и полюса дзета-функции Хелсона

И.А. Бочков

Санкт-Петербургский государственный университет  
bv1997@ya.ru

Рассмотрим класс функций  $F(s) = \sum_1^\infty \chi(n)n^{-s}$ , где  $\chi$  — унимодулярная вполне мультипликативная (так называемые дзета-функции Хелсона). Дзета-функция Римана соответствует  $\chi(n) = 1$ . Такая функция определена при  $\Re s > 1$ , но мы хотим понять что-то про продолжимость левее.

Пусть  $F$  продолжается мероморфно хотя бы до прямой  $\Re s = \frac{1}{2}$ . К. Сейпом было доказано, что

**Теорема.** Для любого локально конечного множества  $\mathfrak{D}$  в полосе  $\frac{1}{2} < 1 - \Re s < 1 - \epsilon$ ,  $\epsilon = \frac{1}{40}$ , существует дзета-функция Хелсона, множество нулей которой свпадает с  $\mathfrak{D}$ .

В конструкции существенно использовалось, что полюса мы можем выбирать сами. Соответственно К. Сейпом был поставлен вопрос, верен ли аналог этой теоремы с одновременно нулями и полюсами.

В докладе будет представлен план доказательства того, что это действительно верно.

## **Положительность сумм характеров и случайные мультипликативные функции**

А.Б. Калмынин

Высшая школа экономики  
alkalb1995cd@mail.ru

Квадратичные характеры и их  $L$ -функции занимают особое место в аналитической теории чисел, поскольку их поведение оказывается тесно связано с общими вопросами о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях с большой разностью. В данном докладе мы представим результаты о положительности сумм вида

$$S_p(N) = \sum_{n \leq N} \left( \frac{n}{p} \right),$$

где  $p$  — большое простое число. В частности, для некоторых значений  $\alpha$  мы покажем, что суммы  $S_p(\alpha p)$  неотрицательны для большинства простых чисел  $p$ , а также поговорим о свойствах множества  $\mathcal{L}^+$  таких простых  $p$ , что  $S_p(N) \geq 0$  для всех  $N$ . Получающиеся результаты будут связаны со свойствами случайных мультипликативных функций и их рядов Дирихле на границе и в центре критической полосы, а также с распределением нулей  $L$ -функций Дирихле.

## **О размерности пространства вероятностных решений уравнения Колмогорова**

Т.И. Красовицкий

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
tik714@yandex.ru

В докладе рассматривается стационарное уравнение Колмогорова:

$$\Delta \rho - \operatorname{div}(b\rho) = 0.$$

Вероятностным называется решение  $\rho$ , имеющее единичный интеграл по всему пространству. Известно, что в одномерном случае уравнение Колмогорова имеет не более одного вероятностного решения. В размерности два и выше известны примеры уравнений, имеющих бесконечно много линейно независимых вероятностных решений. Проблема неединственности вероятностного решения уравнения Колмогорова сводится к проблеме существования отличного от константы решения  $v$  уравнения

$$\operatorname{div}(\rho \nabla v - av) = 0,$$



где  $a = b\rho - \nabla\rho$ . В настоящем докладе исследуется двумерный случай. С помощью представления бездивергентного поля  $a$  в виде  $(\partial_{x_2}H, -\partial_{x_1}H)$ , где  $H$  — некоторая гладкая функция, получены достаточные условия существования бесконечного числа линейно независимых вероятностных решений. Полученные результаты показывают, что при некоторых дополнительных условиях из существования двух различных вероятностных решений следует бесконечномерность симплекса вероятностных решений. Также в докладе будет представлен новый подход к построению примеров неединственности, основанный на применении теории вырожденных эллиптических уравнений. Данный доклад основан на результатах, полученных в следующих работах.

## Список литературы

- [1] Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Шапошников С.В.// Докл. АН. 2018. Т. 482. N 5. С. 489–493.
- [2] Красовицкий Т.И.// Докл. АН. 2019. Т. 487. N 4. С. 361–364.

## **О двойственности Долгачева–Никулина для слоев моделей Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано**

М.А. Овчаренко

Высшая школа экономики

mikhail.a.ovcharenko@gmail.com

Зеркальная симметрия сопоставляет многообразиям Фано некоторые одномерные семейства, называемые моделями Ландау–Гинзбурга. Ожидается, что элементы этих семейств являются многообразиями Калаби–Яу, зеркально двойственными к антиканоническим сечениям многообразий Фано.

Существуют различные формы зеркальной двойственности, но естественно ожидать, что все они так или иначе согласованы между собой. В трехмерном случае одна из форм зеркальной гипотезы для многообразий Фано может быть сформулирована в терминах т.н. двойственности Долгачева–Никулина — зеркальной двойственности  $K^3$ -поверхностей.

В работе мы проверяем согласованность двойственности Долгачева–Никулина с теорией торических моделей Ландау–Гинзбурга. Данная гипотеза была доказана Илтеном–Льюисом–Пржиялковским в случае ранга Пикара 1. В докладе мы обсудим полученные результаты для высших рангов Пикара

# Некоторые оценки сумм Вейля и их приложения в теории функций

К.А. Оганесян

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

oganchris@gmail.com

Получены оценки сумм Вейля в зависимости от параметров рациональных приближений старшего коэффициента многочлена. Эти оценки используются для решения двух задач теории функций: усиления неравенства Джона-Ниренберга для рядов типа Римана и получения критерия равномерной сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k^{\alpha} x$  при натуральном  $\alpha$  и  $\{c_k\} \in RBVS$ . Критерий равномерной сходимости последнего ряда получен также при  $\alpha \in (0, 2)$  и  $c_k \searrow 0$ , а при нечетном  $\alpha$  результат остается справедливым при замене  $k^{\alpha}$  на любой многочлен степени  $\alpha$  по нечетным степеням с рациональными коэффициентами.

## Программа секции «Комплексный анализ»

Координаторы: А.Г. Сергеев, С.К. Водопьянов, А.К. Цих

### ВТОРНИК, 10 АВГУСТА

#### Зал № 1

14<sup>30</sup> — 15<sup>20</sup> Николай Кружилин (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН). *Локальный вариант фундаментальной теоремы проективной геометрии в теории CR-многообразий*

15<sup>30</sup> — 16<sup>20</sup> Юрий Кордюков (Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН). *Квантование по Березину-Тёплицу и спектральный анализ лапласианов Бохнера*

#### ПЕРЕРЫВ

16<sup>40</sup> — 17<sup>30</sup> Алексей Солодов (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Области однолистности на классах голоморфных отображений круга в себя с неподвижными точками*

17<sup>40</sup> — 18<sup>00</sup> Ольга Кудрявцева (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Точные оценки производных произвольного порядка на классах голоморфных отображений круга в себя с граничными неподвижными точками*

18<sup>00</sup> — 18<sup>20</sup> Сергей Феклистов (Сибирский федеральный университет). *Феномен Гартогса в торических многообразиях*

### ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

#### Зал № 10

14<sup>30</sup> — 15<sup>20</sup> Владимир Лысов (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН). *Многоуровневая интерполяция системы Никишина*

15<sup>30</sup> — 16<sup>20</sup> Александр Комлов (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН). *Полиномиальная  $m$ -система Эрмита-Паде и конструктивное восстановление значений алгебраических функций*

#### ПЕРЕРЫВ

16<sup>40</sup> — 17<sup>00</sup> Алексей Куликов (Санкт-Петербургский государственный университет). *Интерполяция Фурье и частотно-временная локализация*

17<sup>10</sup> — 17<sup>30</sup> Юлия Зайцева (Высшая школа экономики). *Коммутативные алгебраические моноиды на нормальных аффинных поверхностях*

## ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА

### Зал № 1

14<sup>30</sup> — 15<sup>20</sup> Александр Шлапунов (НТУ «Сириус»). *An open mapping theorem for nonlinear operator equations associated with the Dolbeault complex*

15<sup>30</sup> — 16<sup>20</sup> Мария Карманова (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Аппроксимация прообразов в сублоренцевой геометрии и формула коплощади*

### ПЕРЕРЫВ

16<sup>40</sup> — 17<sup>10</sup> Дарья Исангулова (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Топологические свойства отображений с конечным искажением на группе Гейзенберга*

17<sup>20</sup> — 17<sup>40</sup> Матвей Дураков (Сибирский федеральный университет). *О многомерной интерполяции и множителях Бляшке в полидиске*

## **Локальный вариант фундаментальной теоремы проективной геометрии в теории $CR$ -многообразий**

Н.Г. Кружилин

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

kruzhil@mi-ras.ru

Исследуется структура локально заданных голоморфных отображений  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , переводящих комплексные прямые, проходящие через область определения отображения в некоторых направлениях, снова в комплексные прямые. Полученные результаты естественно рассматривать как локальный голоморфный вариант классической фундаментальной теоремы проективной геометрии. Они находят приложения к двум задачам  $CR$ -геометрии: к решению проблемы эквивалентности вырожденных по Леви трубчатых гиперповерхностей и к исследованию  $CR$ -отображений вещественных квадрик.

## **Квантование по Березину-Тёплицу и спектральный анализ лапласианов Бохнера**

Ю.А. Кордюков

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН

yurikor@matem.anrb.ru

Доклад посвящен теории квантования по Березину-Тёплицу симплектических многообразий. Мы опишем конструкции квантований по Березину-Тёплицу, для которых пространствами квантования являются собственные подпространства лапласианов Бохнера, ассоциированных с большими тензорными степенями предквантового линейного расслоения на заданном компактном симплектическом многообразии. Мы также обсудим обобщения на некомпактные многообразия и орбифолды.

## **Области однолиственности на классах голоморфных отображений круга в себя с неподвижными точками**

А.П. Солодов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

apsolodov@mail.ru

Нахождение областей однолиственности индивидуальной функции или на классе функций является классической задачей геометрической теории функций. Интерес к этой задаче обусловлен тем, что однолиственность в области влечет целый ряд других геометрических и аналитических свойств функции. В приложениях однолиственность часто связана с физической реализуемостью математической модели. Настоящая работа посвящена развитию классических результатов Ландау, Валирона и недавних результатов В.В. Горяйнова об областях однолиственности на важных в теории и практике классах голоморфных отображений круга в себя с неподвижными точками.

Найдены точные области однолистности на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками в зависимости от значений угловой производной в граничной неподвижной точке и расположения внутренней неподвижной точки. также получены асимптотически точные двусторонние оценки областей однолистности на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с неподвижными точками и инвариантным диаметром в зависимости от значения произведения угловых производных в граничных неподвижных точках.

## **Точные оценки производных произвольного порядка на классах голоморфных отображений круга в себя с граничными неподвижными точками**

О.С. Кудрявцева

Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
kudryavceva\_os@mail.ru

Классические внутренняя и граничная леммы Шварца характеризуют поведение производной на классах голоморфных отображений круга в себя с внутренней, а также с внутренней и граничной неподвижными точками, соответственно. Эти результаты играют огромную роль в геометрической теории функций, являясь богатым источником глубоких по содержанию следствий с многочисленными приложениями. Этим обусловлен неистощаемый интерес к разнообразным уточнениям и обобщениям лемм Шварца.

В настоящей работе разработан метод, позволяющий на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и произвольным набором граничных неподвижных точек получать точные оценки производной любого порядка во внутренней неподвижной точке.

## **Феномен Гартогса в торических многообразиях**

С.В. Феклистов

Сибирский федеральный университет  
sergeyfe2017@yandex.ru

Пусть  $(X, \mathcal{O})$  — связное приведенное комплексное аналитическое пространство.

**Определение.** Будем говорить, что  $X$  допускает феномен Гартогса, если для любой области  $D \subset X$  и любого компактного множества  $K \subset D$ , такого что  $D \setminus K$  связно, гомоморфизм ограничения  $H^0(D, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(D \setminus K, \mathcal{O}_X)$  является изоморфизмом.

**Гипотеза.** [1] Пусть  $X_\Sigma$  — гладкое торическое многообразие. Если  $\mathbb{R}^n \setminus |\Sigma|$  имеет по крайней мере одну вогнутую компоненту связности, то  $X_\Sigma$  допускает глобальный феномен Гартогса.

Первый результат — это теорема об обращении в нуль группы когомологий.

**Теорема 1.** Пусть  $X_{\Sigma'}$  — торическое многообразие с веером  $\Sigma'$ , и  $C := \mathbb{R}^p \setminus |\Sigma'|$  — связно. Тогда  $H_c^1(X_{\Sigma'}, \mathcal{O}) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\text{conv}(\overline{C}) = \mathbb{R}^n$ .

Второй результат — это когомологический критерий Серра для феномена Гартогса, восходящий к работе [2].

**Теорема 2.** Пусть  $X_{\Sigma}$  — некомпактное торическое многообразие с веером  $\Sigma$ , причем  $\mathbb{R}^n \setminus |\Sigma|$  — связно. Тогда  $H_c^1(X_{\Sigma}, \mathcal{O}) = 0$  тогда и только тогда, когда  $X_{\Sigma}$  допускает феномен Гартогса.

Полученные результаты позволяют дать точное определение понятия вогнутости компоненты в дополнении к носителю веера. Пусть  $\Sigma$  — веер в  $\mathbb{R}^n$ , тогда дополнение  $\mathbb{R}^p \setminus |\Sigma|$  может иметь несколько компонент связности:  $\mathbb{R}^p \setminus |\Sigma| = \bigsqcup_j C_j$ .

**Определение.** Компонента  $C_j$  называется вогнутой, если

$$\text{conv}(\overline{C_j}) = \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, уточняя гипотезу Марчиняк, получаем следующий результат.

**Следствие.** Пусть  $X_{\Sigma}$  — некомпактное торическое многообразие с веером  $\Sigma$ , причем  $\mathbb{R}^p \setminus |\Sigma| = \bigsqcup_{j=1}^n C_j$ . Тогда

- Если по крайней мере одна  $C_j$  является вогнутой, то  $X_{\Sigma}$  допускает феномен Гартогса;
- Если  $n = 1$ , то верно и обратное.

## Список литературы

- [1] Marciniak, M. A.: Holomorphic extensions in toric varieties: Doctoral Dissertations, Ph. D. in Mathematics. Missouri University of Science and Technology (2009)
- [2] Serre, J. P.: Quelques problemes globaux relatifs aux varietes de Stein. Coll. Plus. Var. Bruxelles, 57–68 (1953)

## Многоуровневая интерполяция системы Никишина

В.Г. Лысов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

vlysov@mail.ru

Система Никишина строится по набору генерирующих борелевских мер  $(\sigma_1, \dots, \sigma_d)$  с носителями на отрезках  $\text{supp } \sigma_j = \Delta_j$ ,  $\Delta_j \cap \Delta_{j+1} = \emptyset$ . Пусть  $s_{j,j} := \sigma_j$ , далее, индукция по

$|k-j|$ :  $ds_{j,k} := \widehat{s}_{j+1,k} d\sigma_j$  при  $k > j$  и  $ds_{j,k} := \widehat{s}_{j-1,k} d\sigma_j$  при  $k < j$ , где  $\widehat{s}(z) := \int (z-x)^{-1} ds(x)$  — преобразование Коши.

Рассмотрим [1, 2] следующие интерполяционные задачи: для произвольного мультииндекса  $\vec{n} \in \mathbb{Z}_+^d$  найти многочлены  $q_{\vec{n},0}, q_{\vec{n},1}, \dots, q_{\vec{n},d}$  и  $p_{\vec{n},0}, p_{\vec{n},1}, \dots, p_{\vec{n},d}$  такие, что  $\deg q_{\vec{n},j} < |\vec{n}| := n_1 + \dots + n_d$  и выполнены интерполяционные условия при  $z \rightarrow \infty$  и  $j = 1, \dots, d$ :

$$q_{\vec{n}} := q_{\vec{n},0} + \sum_{k=1}^d \widehat{s}_{1,k} q_{\vec{n},k} = z^{-|\vec{n}|}(1 + o(1)), \quad q_{\vec{n},j} + \sum_{k=j+1}^d \widehat{s}_{j+1,k} q_{\vec{n},k} = O(z^{n_j-1}), \quad (1)$$

$$p_{\vec{n}} := p_{\vec{n},0} = z^{|\vec{n}|}(1 + o(1)), \quad \sum_{k=1}^j p_{\vec{n},k-1} \widehat{s}_{j,k} + p_{\vec{n},j} = O(z^{-n_j-1}). \quad (2)$$

Задачи (1), (2) двойственны друг другу и определяют *многоуровневые аппроксимации Эрмита–Паде*. Для любого  $\vec{n}$  решение каждой из задач существует и единственно. Частные случаи были рассмотрены в связи с интегрируемыми системами [3, 4] и биортогональными многочленами [5].

Мы обсудим алгебраические и аналитические свойства этих интерполяций. В частности, покажем, что решения удовлетворяют рекуррентным соотношениям на решетке индексов при  $k = 1, \dots, d$ :

$$zq_{\vec{n}}(z) = q_{\vec{n}-\vec{e}_k}(z) + b_{\vec{n}-\vec{e}_k,k} q_{\vec{n}}(z) + \sum_{j=1}^d a_{\vec{n},j} q_{\vec{n}+\vec{e}_j}(z), \quad (3)$$

$$zp_{\vec{n}}(z) = p_{\vec{n}+\vec{e}_k}(z) + b_{\vec{n},k} p_{\vec{n}}(z) + \sum_{j=1}^d a_{\vec{n},j} p_{\vec{n}-\vec{e}_j}(z), \quad (4)$$

где  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$  — стандартный базис в  $\mathbb{R}^d$ , а  $b_{\vec{n}-\vec{e}_k,k} := c_{\vec{n}} - c_{\vec{n}-\vec{e}_k}$ ,  $a_{\vec{n},j} := c_{\vec{n},j} / c_{\vec{n}-\vec{e}_j,j}$ :

$$c_{\vec{n}} := \int x^{|\vec{n}|} \sum_{k=1}^d q_{\vec{n},k}(x) ds_{1,k}(x), \quad c_{\vec{n},j} := \int x^{n_j} \sum_{k=1}^j p_{\vec{n},k-1}(x) ds_{j,k}(x).$$

Современные приложения связаны с теорией матриц Якоби на графах [6]. Для каждого узла  $\vec{n}$  решетки рассмотрим набор всевозможных путей в  $\mathbb{Z}_+^d$ , ведущих из  $\vec{0}$  в  $\vec{n}$ . Совокупность всех путей образует  $d$ -однородное дерево. Определена каноническая *проекция* с дерева на решетку, которая отображает путь в его концевой узел. Обратная операция *поднятия* соотношений (3) и (4) на дерево путей определяют [7] спектральные задачи с матрицами Якоби на однородных деревьях. Мы рассмотрим вопрос ограниченности соответствующего оператора.

## Список литературы

- [1] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Многоуровневая интерполяция системы Никишина и ограниченность матриц Якоби на бинарном дереве. УМН, **76** (2021).
- [2] В. Г. Лысов, Аппроксимации Эрмита–Паде смешанного типа для системы Никишина, Анализ и математическая физика. Сборник статей. К 70-летию со дня рождения профессора Армена Глебовича Сергеева. Труды МИАН, **311** (2020), 213–227



- [3] H. Lundmark, J. Szmigielski, Degasperis–Procesi peakons and the discrete cubic string. IMRP, 2005, No. 2.
- [4] G. Lopez Lagomasino, S. Medina Peralta, J. Szmigielski, Mixed type Hermite-Padé approximation inspired by the Degasperis–Procesi equation, Adv. Math., **349** (2019), 813–838.
- [5] M. Bertola, M. Gekhtman, J. Szmigielski, Cauchy biorthogonal polynomials. J. Approx. Theory, **162** (2010), 832–867.
- [6] N. Avni, J. Breuer, B. Simon, Periodic Jacobi matrices on trees. Adv. Math. **370** (2020), 107241.
- [7] A. I. Aptekarev, S. A. Denisov and M. L. Yattselev, Self-adjoint Jacobi matrices on trees and multiple orthogonal polynomials. Trans. Amer. Math. Soc., **373** (2020), 875–917.

## Полиномиальная $m$ -система Эрмита-Паде и конструктивное восстановление значений алгебраических функций

А.В. Комлов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН  
komlov@mi-ras.ru

Для произвольного набора из  $m + 1$  ростков аналитических функций  $1, f_1, \dots, f_m$  в одной фиксированной точке вводится в рассмотрение полиномиальная  $m$ -система Эрмита–Паде, включающая в себя полиномы Эрмита–Паде 1-го и 2-го типов. Показывается, что если  $f_j = f^j$  для некоторой алгебраической функции  $f$  степени  $m + 1$ , то с помощью отношений полиномов  $m$ -системы Эрмита–Паде восстанавливаются значения функции  $f$  на первых  $m$  листах так называемого разбиения Наттолла римановой поверхности  $f$ .

## Интерполяция Фурье и частотно-временная локализация

А.И. Куликов

Санкт-Петербургский государственный университет, NTNU  
lyosha.kulikov@mail.ru

Недавно Д. Радченко и М. Вязовская показали, что любая шварцева функция  $f$  может быть восстановлена из её значений и значений её преобразования Фурье в точках  $\pm\sqrt{n}$  с помощью интерполяционной формулы

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)f(\sqrt{n}) + b_n(x)f(-\sqrt{n}) + c_n(x)\hat{f}(\sqrt{n}) + d_n(x)\hat{f}(-\sqrt{n}).$$

Если мы рассмотрим соответствующие интерполяционные множества  $\Lambda = M = \{\pm\sqrt{n}\}$  и их считающие функции  $n_{\Lambda}(R) = |\Lambda \cap [-R, R]|$ , мы можем легко заметить, что  $n_{\Lambda}(W) + n_M(T) \geq 4WT - O(1)$  для любых  $W, T > 0$ , что идеально соотносится с известной  $4WT$ -теоремой Слепиана.

Нам удалось показать, что это не совпадение, и что похожая оценка

$$n_{\Lambda}(W) + n_M(T) \geq 4WT - C \log^2(4WT)$$

верна для всех интерполяционных формул такого вида. Доказательство основано на оценках на собственные функции и собственные числа операторов частотно-временной локализации, которые могут быть интересны сами по себе.

## Коммутативные алгебраические моноиды на нормальных аффинных поверхностях

Ю.И. Зайцева

Высшая школа экономики  
yuliazaitseva@gmail.com

Доклад основан на совместных работах с И.В. Аржанцевым и С.Д. Брагиным [1] и Сергеем Джунусовым [2].

Говорят, что на аффинном пространстве  $\mathbb{A}^n$  задана структура коммутативного алгебраического моноида, если есть полиномиальная коммутативная ассоциативная бинарная операция  $\mu: \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ ,  $(x, y) \mapsto x * y$ , обладающая нейтральным элементом. Например, можно доказать, что с точностью до изоморфизма любая структура коммутативного алгебраического моноида на  $\mathbb{A}^2$  над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль задается одной из следующих операций:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) * (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ (x_1, x_2) * (y_1, y_2) &= (x_1 y_1, x_2 y_2) \\ (x_1, x_2) * (y_1, y_2) &= (x_1 y_1, x_2 y_1^k + y_2 x_1^k), \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\end{aligned}$$

Аналогичным образом определяются моноиды на произвольном алгебраическом многообразии  $X$ . Я расскажу про полученные классификации структур коммутативных моноидов на аффинных пространствах и нормальных аффинных поверхностях.

## Список литературы

- [1] Ivan Arzhantsev, Sergey Bragin, and Yulia Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine spaces. *Commun. in Cont. Math.* 22 (2020), no. 8, 1950064: 1-23
- [2] Sergey Dzhunusov and Yulia Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine surfaces. *Forum Math.* 33 (2021), no. 1, 177-191

# An open mapping theorem for nonlinear operator equations associated with the Dolbeault complex

А.А. Шлапунов

Научно-технологический университет «Сириус»

Сибирский федеральный университет

ashlapunov@sfu-kras.ru

Let  $\{\bar{\partial}^{p,q}, \Lambda^{p,q}\}$ ,  $n \geq 1$ , be the Dolbeault complex over the complex space  $\mathbb{C}^n$  where  $\Lambda^{p,q}$  be the trivial vector bundle of the exterior differential forms of bidegree  $(p, q)$ . Denote by  $(\bar{\partial}^{p,q})^*$  the formal adjoint differential operator for the Dolbeault differential  $\bar{\partial}^{p,q}$  related to the standard Hermitian structure of the Lebesgue space  $L^2_{\Lambda^{p,q}}(\mathbb{C}^n)$  consisting of the forms of the corresponding bi-degree. Then the Laplacians  $\Delta^{p,q} = (\bar{\partial}^{p,q})^* \bar{\partial}^{p,q} + \bar{\partial}^{p,q-1} (\bar{\partial}^{p,q-1})^*$  of the complex are strongly elliptic and, with any fixed number  $\mu > 0$ , the operators  $\partial_t + \mu \Delta^{p,q}$ , acting on the induced bundle  $\Lambda^{p,q}(t)$  consisting of differential forms with coefficients, depending on the variable  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ , as a parameter, are parabolic. We consider the following initial problem: given section  $f$  of the induced bundle  $\Lambda^{p,q}(t)$  and  $(p, q)$ -form  $u_0$ , find sections  $u, v$  of the bundles  $\Lambda^{p,q}(t)$  and  $\Lambda^{p,q-1}(t)$ , respectively, such that

$$\begin{cases} \partial_t u + \mu \Delta^{p,q} u + N^{p,q}(u) + \bar{\partial}^{p,q-1} v = f & \text{in } \mathbb{C}^n \times (0, T), \\ (\bar{\partial}^{p,q-1})^* u = 0, (\bar{\partial}^{p,q-2})^* v = 0, & \text{in } \mathbb{C}^n \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0 & \text{in } \mathbb{C}^n, \end{cases} \quad (1)$$

where the non-linearity  $N^{p,q}u = M_{p,q,1}(\bar{\partial}^{p,q}u, u) + \bar{\partial}^{p,q-1}M_{p,q,2}(u, u)$  is generated by a rather wide class of linear bi-differential operators  $M_{p,q,j}$  of zero order, in specially constructed Bochner-Sobolev type spaces over  $\mathbb{C}^n$ . Using the standard technique adapted to study Navier-Stokes' type equations (the energy type estimates, the interpolation Gagliardo-Nirenberg inequalities and the Faedo-Galerkin method), see, for instance, [2], we prove that, under reasonable assumptions regarding the nonlinear term, the Frechét derivative  $\mathcal{A}'_{p,q}$  of the nonlinear mapping  $\mathcal{A}_{p,q}$ , induced by (1), is continuously invertible and the mapping  $\mathcal{A}_{p,q}$  itself is open and injective in chosen spaces. However for an Existence Theorem related to even weak (distributional) solutions to (1) one should necessarily assume that the bilinear operators  $M_{p,q,1}$  have additional rather restrictive but natural properties.

*The thesis is based on the joint results with A.N. Polkovnikov (Siberian Federal University). The work was supported by the Foundation for the Advancement of Theoretical Physics and Mathematics "BASIS".*

## Список литературы

- [1] Dolbeault, P. *Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes*. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 236 (1953), 175–277.
- [2] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire*, 588. Dunod/Gauthier-Villars, Paris, (1969).

# Аппроксимация прообразов в сублоренцевой геометрии и формула коплощади

М.Б. Карманова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

maryka84@gmail.com

Мы доказываем формулу коплощади нового типа на сублоренцевых структурах. Основным инструментом при решении задачи является свойство аппроксимируемости поверхностей уровня относительно сублоренцева аналога расстояния. Сублоренцевы структуры являются субримановым обобщением известной геометрии Минковского. Следующий результат является базовым, он новый и для классических структур геометрии Минковского. Здесь и далее мера Хаусдорфа  $\mathcal{H}_\delta^{\nu-1}$  на множествах уровня построена по расстоянию  $\mathfrak{d}_2^2$ , согласованному с сублоренцевой структурой.

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — функция класса  $C^1$  такая, что

$$(X_1\varphi)^2 - \sum_{i=2}^{\dim V_1} (X_i\varphi)^2 \geq c > 0,$$

а  $\Omega \subset \mathbb{G}$  — открытое множество. Тогда множества уровня функции  $\varphi$  пространственноподобны, и, кроме того, справедлива формула коплощади

$$\int_{\Omega} \sqrt{(X_1\varphi)^2 - \sum_{i=2}^{\dim V_1} (X_i\varphi)^2} d\mathcal{H}^\nu = \int_{\mathbb{R}} dz \int_{\varphi^{-1}(z)} d\mathcal{H}_\delta^{\nu-1}.$$

Справедливы обобщения и на классы отображений групп Карно  $\varphi : (\mathbb{G}, V_1, \dots, V_M) \rightarrow (\widetilde{\mathbb{G}}, \widetilde{V}_1, \dots, \widetilde{V}_{\widetilde{M}})$ ,  $M \geq \widetilde{M}$ , когда на каждом  $V_k$  вводятся соответственно  $\dim V_k^-$  полей, квадрат расстояния вдоль которых отрицателен,  $0 \leq \dim V_k^- \leq \dim \widetilde{V}_k < \dim V_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Для всех  $k = 1, \dots, \widetilde{M}$  обозначим символом  $\widehat{D}^k\varphi$  часть  $(\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k)$ -блока матрицы  $\widehat{D}\varphi$ , состоящую из первых  $\dim \widetilde{V}_k$  его столбцов, и содержащую  $\dim V_k^-$  столбцов, соответствующих векторным полям, квадратное расстояние  $\mathfrak{d}_2^2$  вдоль которых отрицательно  $x \in \Omega$ , а символом  $(\widehat{D}_k \setminus \widehat{D}^k)\varphi$  — часть, состоящую из оставшихся  $\dim V_k - \dim \widetilde{V}_k$  столбцов.

**Теорема 5.** Пусть отображение  $\varphi$  принадлежит классу  $C^1$ , является контактным, и длины строк  $(\widehat{D}^k\varphi)^{-1}(\widehat{D}_k \setminus \widehat{D}^k)\varphi$  не превосходят  $\frac{1}{\dim \widetilde{V}_k} - c$  всюду,  $c > 0$ . Тогда множества уровня  $\varphi^{-1}(z)$  являются пространственноподобными, аппроксимируются касательными поверхностями относительно  $\mathfrak{d}_2^2$ , и справедлива формула коплощади

$$\int_{\Omega} \prod_{k=1}^{\widetilde{M}} \sqrt{\det(\widehat{D}^k\varphi(\widehat{D}^k\varphi)^* + (\widehat{D}^k\varphi)E_k^-(\widehat{D}^k\varphi)^{-1}(\widehat{D}_k \setminus \widehat{D}^k)\varphi((\widehat{D}_k \setminus \widehat{D}^k)\varphi)^*)} d\mathcal{H}^\nu = \int_{\mathbb{R}^{\widetilde{n}}} d\mathcal{H}^{\widetilde{\nu}} \int_{\varphi^{-1}(z)} d\mathcal{H}_\delta^{\nu-\widetilde{\nu}},$$

где  $E_k^-$  обозначает диагональную матрицу размерности  $\dim \widetilde{V}_k$ , первые  $\dim V_k^-$  элементов которой равны  $-1$ , а остальные равны  $+1$ .

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

## Топологические свойства отображений с конечным искажением на группе Гейзенберга

Д.В. Исангулова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

d.isangulova@g.nsu.ru

Ю. Г. Решетняк установил основополагающие топологические свойства отображений с ограниченным искажением в евклидовом пространстве: непрерывность, открытость и дискретность [1]. В последнее время большое количество работ посвящено тому, чтобы найти более слабые условия, при выполнении которых отображения с конечным искажением будут непрерывными, открытыми и дискретными, см. например [2], где открытость и дискретность отображений с конечным искажением в области в  $\mathbb{R}^n$  доказаны при условиях  $K_O \in L^{n-1}$  и  $K_I \in L^1$ .

На двухступенчатых группах Карно в работах [3] и [4] разными методами доказано, что отображения с ограниченным искажением непрерывны, открыты и дискретны. Цель нашей работы — исследовать топологические свойства отображений с конечным искажением на модельном примере двухступенчатых групп Карно — группе Гейзенберга. В докладе будет показано при каких дополнительных условиях на суммируемость внутреннего и внешнего коэффициентов искажения отображения с конечным искажением групп Гейзенберга открыты и дискретны.

Результаты основаны на совместной работе с Водопьяновым С.К. Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, номер 075-15-2019-1613.

## Список литературы

- [1] *Reshetnyak Yu. G.* Space mappings with bounded distortion. Transl. Math. Monographs, Amer. Math. Soc., V. 73, 1989.
- [2] *Rajala K.* Remarks on the Iwaniec–Sverak Conjecture // Indiana University Mathematics Journal, 2010, V. 59, No. 6, pp. 2027–2039.
- [3] *Dairbekov N. S.* Mapping with bounded distortion of two-step Carnot groups, Proceedings on Analysis and Geometry (S. K. Vodopyanov, ed.), Sobolev Institute Press, Novosibirsk, 2000, pp. 122–155.
- [4] *Vodopyanov S. K.* Foundations of the Theory of Mappings with Bounded Distortion on Carnot Groups // Contemporary Mathematics, 2007, V. 424, pp. 303–344.

## О многомерной интерполяции и множителях Бляшке в полидиске

М.Е. Дураков

Сибирский федеральный университет

durakov\_m\_1997@mail.ru

Если  $p(z)$  — полином переменного  $z \in \mathbb{C}$  с простыми нулями  $\{w_1, \dots, w_m\}$ , то интерполяционный многочлен Лагранжа допускает представление

$$f(z) = p(z) \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{z - w_j} \operatorname{res}_{w_j} \left( \frac{1}{p} \right).$$

Таким образом, задание узлов интерполяции в виде нулевого множества полинома  $p$ , вместе с исчислением вычетов, дают эффективный инструментарий для интерполяционной теории. В недавних статьях Алпая и Ижера [1], [2] указанный инструментарий был привлечен для интерполяции функций многих переменных. Если узлы  $\{w_j\} \subset \mathbb{C}^n$  интерпретировать в качестве нулевого множества идеала  $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$ , порожденного системой  $n$  полиномов, то для соответствующей  $n$ -мерной интерполяции типа Эрмита необходимо вычислять нётеровские операторы для примарных компонент идеала  $\mathbf{p}$ .

В докладе речь пойдет о построении нётеровских операторов на основе алгоритмов вычисления локального вычета Гротендика в нуле  $a$  идеала  $\langle \mathbf{p} \rangle$ . В основной теореме получен локальный вариант известного результата Гельфонд-Хованского о сумме локальных вычетов в комплексном торе, причем с новой интерпретацией комбинаторных коэффициентов.

Для интерполяции функций из пространства Харди в полидиске мы строим аналог множителя Бляшке в пространстве  $\mathbb{C}^3$ , используя многочлен Ли-Янга из статистической физики.

## Список литературы

- [1] *D. Alpay, A. Yger*, About a Non-Standard Interpolation Problem // *Comput. Methods Funct. Theory* 19 (2019), no. 1, 97-115.
- [2] *D. Alpay, A. Yger*, Cauchy-Weil formula, Schur-Agler type classes, new Hardy spaces of the polydisk and interpolation problems // *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 504 (2021), no. 2, 29 pp.

# О представлении рядами экспонент в нормированных пространствах аналитических функций

Р.А. Башмаков<sup>1</sup>, К.П. Исаев<sup>2</sup>, А.А. Махота<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Башкирский государственный университет; <sup>2</sup> Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН  
bashmakov\_rustem@mail.ru; orbit81@list.ru; allarum@mail.ru

Пусть  $D$  — ограниченная выпуклая область комплексной плоскости. В данной работе рассматривается задача о представлении функций в пространстве

$$A_0(D) = \left\{ f \in H(D) \cap C(\overline{D}) : \|f\| := \sup_{z \in \overline{D}} |f(z)| \right\}$$

рядами экспонент

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \quad z \in D, \quad f \in A_0(D).$$

Обозначение  $A_0(D)$  в контексте данной работы удобнее, чем традиционное  $A(D)$ , поскольку будет рассматриваться параметризованное семейство нормированных пространств  $A_n(D)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Возможность такого представления следует из классической теоремы А.Ф. Леонтьева (см. [1, Теорема 5.3.2]), но ряды в этой теореме сходятся в топологии пространства  $H(D)$ , то есть равномерно на компактах из  $D$ . Мы намерены доказать возможность представления функций из  $A_0(D)$  рядами экспонент, сходящимися к своей сумме в существенно более сильной топологии, чем топология равномерной сходимости на компактах, но несколько более слабой, чем нормированная топология  $A_0(D)$ . Будут также получены формулы для коэффициентов ряда. Примеров нормированных пространств, в которых возможны разложения в ряды экспонент, сходящихся в норме пространства, то есть в которых существует базис из экспонент, известно немного. Это пространство  $L_2$  на отрезке, пространство Соболева на отрезке ([2]) и пространства Смирнова и Бергмана на выпуклых многоугольниках ([3], [4]). В работах [5] и [6] доказано, что в пространствах Смирнова и Бергмана на выпуклых областях с гладкой границей экспоненциальных базисов не существует.

Основным в данной работе является утверждение:

Существует такое целое число  $s > 0$ , что

1) для любой ограниченной выпуклой области  $D$  найдется система экспонент  $e^{\lambda_k z}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , такая что каждая функция  $f \in H(D) \cap C^{(s)}(\overline{D})$  представляется в виде ряда по этой системе, сходящегося в норме пространства  $A_0(D)$ ;

2) для любой ограниченной выпуклой области  $D$  найдется система экспонент  $e^{\lambda_k z}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , такая что каждая функция  $f \in A_0(D)$  представляется в виде ряда по этой системе, сходящегося в норме

$$\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)| (d(z))^s,$$

где  $d(z)$  — расстояние от точки  $z$  до границы области  $D$ . Число  $s$  связано с существованием целых функций с максимально точной асимптотической оценкой.

В частных случаях, когда  $D$  — многоугольник или область с гладкой границей и кривизной границы, отделенной от нуля, можно считать  $s = 4$ .

## Список литературы

- [1] А.Ф. Леонтьев *Ряды экспонент*. М.: Наука, 1976.
- [2] D.L. Russell *On exponential bases for the Sobolev spaces over an interval* // J. Math. Anal. Appl. **87**:2, 528–550 (1982).
- [3] Б.Я. Левин, Ю.И. Любарский *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. мат. **39**:3, 657–702 (1975).
- [4] К.П. Исаев *Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках* // Уфимск. матем. журн. **2**:1, 71–86 (2010).
- [5] В.И. Луценко *Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 1992.
- [6] К.П. Исаев, Р.С. Юлмухаметов *Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками* // Изв. РАН. Сер. матем. **71**:6, 69–90 (2007).



## Программа секции «Математическая физика»

Координатор: Д.И. Борисов

### ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

#### Зал № 1

14<sup>30</sup> — 15<sup>05</sup> Григорий Чечкин (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Об оценках Мейерса для задачи в области, перфорированной вдоль границы*

15<sup>10</sup> — 15<sup>45</sup> Татьяна Суслина (Санкт-Петербургский государственный университет). *Усреднение стационарной системы Максвелла с периодическими коэффициентами*

15<sup>50</sup> — 16<sup>25</sup> Михаил Сурначев (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН). *Newtonian estimates of the fundamental solution for stationary convection-diffusion equations*

#### ПЕРЕРЫВ

16<sup>50</sup> — 17<sup>25</sup> Владимир Бобков (Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН). *О нетривиальной множественности положительных решений одного класса уравнений с  $(p, q)$ -Лапласом*

17<sup>30</sup> — 18<sup>05</sup> Денис Борисов (Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН). *О спектре тонкого РТ-симметричного волновода*

18<sup>10</sup> — 18<sup>30</sup> Артем Николаев (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН). *Предельные теоремы о сходимости к обобщенным процессам типа Коши*

### ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

#### Зал № 1

14<sup>30</sup> — 15<sup>05</sup> Михаил Игнатьев (Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского). *Задача рассеяния для систем дифференциальных уравнений с особенностью*

15<sup>10</sup> — 15<sup>45</sup> Игорь Шейпак (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Уравнение струны с некомпактным мультипликатором в качестве веса и периодические матрицы Якоби*

15<sup>50</sup> — 16<sup>10</sup> Екатерина Злобина (Санкт-Петербургский государственный университет). *Высокочастотная дифракция на импедансных контурах с негладкой кривизной*

16<sup>15</sup> — 16<sup>35</sup> Мария Делова (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Об условиях опрокидывания одномерных плазменных колебаний при учете электронных соударений*

ПЕРЕРЫВ

17<sup>05</sup> — 17<sup>40</sup> Александр Федотов (Санкт-Петербургский государственный университет). *On evolution generated by a one-dimensional Schrödinger with a potential slowly depending on time and having both discrete and continuous spectrum*

17<sup>45</sup> — 18<sup>20</sup> Нурмухамет Валеев (Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН). *Оптимизационные обратные спектральные задачи с неполными данными и нелинейные дифференциальные операторы*

18<sup>25</sup> — 19<sup>00</sup> Антон Трушечкин (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН). *Доказательство стойкости квантовой криптографии с неидеальными детекторами*

**ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА**

**Зал № 2**

14<sup>30</sup> — 15<sup>05</sup> Сергей Бутерин (Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского). *О равномерной устойчивости восстановления функций типа синуса по их нулям*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Анна Белова (Башкирский государственный университет). *Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем*

15<sup>35</sup> — 15<sup>55</sup> Анастасия Стасенко (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *О второй начально-краевой задаче для параболической системы в плоской негладкой области*

16<sup>00</sup> — 16<sup>25</sup> Сергей Сахаров (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Об одной задаче сопряжения для параболической системы второго порядка в полосе с негладкой кривой раздела сред*

16<sup>30</sup> — 16<sup>50</sup> Константин Федоров (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *О первой начально-краевой задаче для параболических систем в негладкой области на плоскости*

# Методы теории возмущений в задаче о параметрическом резонансе для линейных периодических гамильтоновых систем

А.С. Белова

Башкирский государственный университет

89177662488@mail.ru

Рассматривается линейная периодическая гамильтонова система (ЛГПС)

$$\frac{dx}{dt} = JA_0(t)x, \quad x \in R^{2N}, \quad (1)$$

где  $A_0(t)$  – вещественная симметрическая матрица, элементы которой являются непрерывными и  $T$ -периодическими функциями, а матрица  $J$  определена равенством:  $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ ; здесь  $I$  – единичная  $(N \times N)$  матрица.

В докладе обсуждаются вопросы о сильной устойчивости системы (1), а также связанные с ними вопросы о поведении дефинитных и индефинитных мультипликаторов этой системы при переходе от (1) к возмущенной ЛПГС вида:

$$\frac{dx}{dt} = JA(t, \varepsilon)x, \quad x \in R^{2N}, \quad (2)$$

зависящей от скалярного или векторного параметра  $\varepsilon$ . Здесь  $A(t, \varepsilon)$  – вещественная симметрическая матрица, элементы которой являются непрерывными и  $T$ -периодическими по  $t$  функциями и непрерывно дифференцируемо зависят от малого параметра  $\varepsilon$ . При этом выполнено равенство:  $A(t, 0) \equiv A_0(t)$ .

Основное внимание в докладе будет уделено вопросу о построении формул первого приближения для возмущений кратных мультипликаторов системы (1) в следующих основных случаях, когда эта система имеет:

- 1) кратный (кратности 2) полупростой мультипликатор  $\mu_0$  так, что  $|\mu_0| = 1$  и  $\mu_0 \neq \pm 1$ ;
- 2) кратный (кратности 2) неполупростой мультипликатор  $\mu_0$  так, что  $|\mu_0| = 1$  и  $\mu_0 \neq \pm 1$ ;
- 3) мультипликатор 1 или  $-1$  кратности 2.

Полученные формулы первого приближения для возмущения мультипликатора  $\mu_0$  будут использованы для изучения задачи анализа устойчивости по Ляпунову ЛПГС (2). Исследование системы (1) базируется на методах теории возмущения [1] и развитием некоторых результатов, полученные в [2].

## Список литературы

- [1] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1975.
- [2] Yumagulov M.G., Ibragimova L.S., Belova A.S. Approximate research of problems on perturbation of periodic and autonomous Hamiltonian systems in critical cases. Lobachevskii J Math. 41 (2020), 1924–1931.

## О нетривиальной множественности положительных решений одного класса уравнений с $(p, q)$ -Лапласом

В.Е. Бобков

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН

bobkov@matem.anrb.ru

Мы обсудим некоторые недавние результаты из работ [1–3], связанные с разрешимостью задачи Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \alpha |u|^{p-2} u + \beta |u|^{q-2} u & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

где  $\Delta_r u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{r-2} \nabla u)$  при  $r = p, q > 1$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  - параметры,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  - гладкая ограниченная область, и мы считаем, без ограничения общности, что  $q < p$ . Данную задачу можно интерпретировать как нелинейную задачу на собственные значения оператора  $(p, q)$ -Лапласа. Мы покажем, что соотношение между значениями  $p$  и  $q$  влияет на существование и множественность положительных решений. В частности, если  $p > 2q$ , то в определённой окрестности точки  $(\alpha, \beta) = (\|\nabla \varphi_p\|_p^p / \|\varphi_p\|_p^p, \|\nabla \varphi_p\|_q^q / \|\varphi_p\|_q^q)$  положительные решения задачи формируют  $S$ -образную бифуркационную диаграмму, т.е. задача имеет по крайней мере три положительных решения. Здесь  $\varphi_p$  обозначает первую собственную функцию  $p$ -Лапласа. С другой стороны, если при заданных  $p$  и  $q$  выполнено неравенство

$$(q-1)s^p + qs^{p-1} - (p-q)s + (q-p+1) \geq 0 \quad \text{для всех } s \geq 0,$$

то задача не имеет положительных решений при  $\alpha = \|\nabla \varphi_p\|_p^p / \|\varphi_p\|_p^p$  и всех  $\beta > \|\nabla \varphi_p\|_q^q / \|\varphi_p\|_q^q$ .

## Список литературы

- [1] Bobkov, V., Tanaka, M. Remarks on minimizers for  $(p, q)$ -Laplace equations with two parameters. Communications on Pure and Applied Analysis. 17(3) (2018), 1219-1253.
- [2] Bobkov, V., Tanaka, M. Generalized Picone inequalities and their applications to  $(p, q)$ -Laplace equations. Open Mathematics. 18 (2020), 1030-1044.
- [3] Bobkov, V., Tanaka, M. Multiplicity of positive solutions for  $(p, q)$ -Laplace equations with two parameters. Communications in Contemporary Mathematics, (2021) *ahead of print*.

## О спектре тонкого РТ-симметричного волновода

Д.И. Борисов

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН

borisovdi@yandex.ru

В работе рассматривается тонкий волновод, моделируемый тонкой двумерной полосой или тонким трехмерным слоем, в котором рассматривается эллиптический оператор

с переменными коэффициентами. Основная особенность – краевые условия третьего типа с чисто мнимым коэффициентом. Дифференциальное выражение и краевые условия устроены таким образом, что рассматриваемый оператор оказывается РТ-симметричным. Детально исследуется поведение спектра такого оператора при уменьшении ширины волновода. В частности показано, что в определенных ситуациях возможно появление изолированных собственных значений из края существенного спектра.

## О равномерной устойчивости восстановления функций типа синуса по их нулям

С.А. Бутерин

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
buterinsa@info.sgu.ru

В работе [4] получен новый тип результатов для классической обратной задачи Штурма–Лиувилля, относящийся к вопросу ее равномерной устойчивости. Впоследствии в [1, 2] была получена равномерная устойчивость обратных задач и для некоторых классов интегро-дифференциальных операторов, причем использовался иной подход, нежели в [4], неотъемлемой частью которого стало доказательство равномерной устойчивости восстановления характеристической функции рассматриваемого оператора по ее нулям, т.е. по собственным значениям этого оператора. Проиллюстрируем подобные результаты на примере краевой задачи Штурма–Лиувилля:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad q(x) \in L_2(0, \pi). \quad (1)$$

Собственные значения задачи (1) с учетом кратности совпадают с нулями  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ее характеристической функции  $\Delta(\lambda) = S(\pi, \lambda)$ , где функция  $S(x, \lambda)$  является решением уравнения в (1) с начальными условиями  $S(0, \lambda) = 0$  и  $S'(0, \lambda) = 1$ . Без ущерба для общности считаем, что среднее значение  $q(x)$  на интервале  $(0, \pi)$  равно нулю. Тогда

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin \rho \pi}{\rho} + \int_0^\pi w(x) \frac{\cos \rho x}{\rho^2} dx, \quad w(x) \in L_2(0, \pi), \quad \rho^2 = \lambda, \quad (2)$$

откуда, в частности, вытекает известная асимптотика  $\{\lambda_n - n^2\} \in l_2$ .

Наряду с  $\Delta(\lambda)$  рассмотрим еще одну функцию  $\tilde{\Delta}(\lambda)$  вида (2) с нулями  $\{\tilde{\lambda}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  и подынтегральной функцией  $\tilde{w}(x) \in L_2(0, \pi)$ . Следующая теорема (см. [1]) дает равномерную устойчивость восстановления функции  $w(x)$  по нулям  $\Delta(\lambda)$ .

**Теорема.** Для всякого  $r > 0$  существует такое  $C_r > 0$ , что справедлива оценка

$$\|w - \tilde{w}\|_{L_2(0, \pi)} \leq C_r \|\{\lambda_n - \tilde{\lambda}_n\}\|_{l_2}, \quad (3)$$

когда скоро  $\|\{\lambda_n - n^2\}\|_{l_2} \leq r$  и  $\|\{\tilde{\lambda}_n - n^2\}\|_{l_2} \leq r$ .

Аналогичные оценки можно получать и в равномерной норме [2]. Кроме того, согласно равенству Парсеваля для преобразования Фурье, оценка (3) равносильна следующей оценке для разности функций  $\Delta(\lambda)$  и  $\tilde{\Delta}(\lambda)$ :

$$\|\theta\|_{L_2(-\infty, \infty)} \leq C_r \|\{\lambda_n - \tilde{\lambda}_n\}\|_{l_2}, \quad \theta(x) := x^2(\Delta - \tilde{\Delta})(x^2).$$

В заключение отметим, что  $f(\rho) = \rho\Delta(\rho^2)$  является функцией типа синуса (см., например, [3]), а ее нули асимптотически просты и отделены. В докладе обсуждается возможность получения аналогичных результатов и для других классов операторов, характеристические функции которых в комплексной плоскости надлежащей степени спектрального параметра обладают аналогичными свойствами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-31-70005).

## Список литературы

- [1] Buterin S. Uniform full stability of recovering convolutional perturbation of the Sturm–Liouville operator from the spectrum. J. Diff. Eqns. **282** (2021) 67–103.
- [2] Buterin S. Uniform stability of the inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator. Appl. Math. Comput. **390** (2021), Art. no. 125592, 11pp.
- [3] Левин Б.Я. Целые функции. М.: МГУ, Мех-мат. факультет, Курс лекций. (1971).
- [4] Савчук А.М., Шкаликов А.А. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость. Функц. анализ и его прил. **44:4** (2010) 34–53.

## Об оценках Мейерса для задачи в области, перфорированной вдоль границы

Г.А. Чечкин<sup>а</sup>, Т.П. Чечкина<sup>б</sup>

<sup>а</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

<sup>б</sup> Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ  
 chechkin@mech.math.msu.su, chechkina@mail.ru

Работа посвящена интегральным оценкам решений уравнения Пуассона для задачи в плоской области, перфорированной вдоль границы. На границе полостей выставляется однородное условие Дирихле, а на внешней границе области — условие Неймана. Устанавливается повышенная суммируемость градиента решений такой задачи. Рассмотрим модельный случай области  $D \subset \mathbb{R}^2$ , такой, что  $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ . Рассматриваются открытые круги  $B_j$  с центрами в точках  $(\varepsilon j, \varepsilon)$  и радиуса  $\frac{1}{2}\varepsilon$ . Здесь  $j \in J := \{k : 0 < \varepsilon k < 1\}$ , а  $\varepsilon$  — малый положительный параметр. Обозначим  $B_\varepsilon = \bigcup_{j \in J} B_j$ .

Рассмотрим в области  $D_\varepsilon := D \setminus \overline{B_\varepsilon}$  задачу вида

$$\Delta u_\varepsilon = \operatorname{div} f \text{ в } D_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ на } \partial B_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial D. \quad (1)$$

С помощью теоремы Рисса нетрудно показать, что если вектор-функция  $f = (f_1, f_2)$  имеет компоненты из  $L_2(D)$ , то существует единственное решение  $u_\varepsilon$  задачи (1) из соболевского пространства функций  $W_2^1(D_\varepsilon)$ , имеющих нулевой след на  $\partial B_\varepsilon$ .

Основной результат состоит в следующем утверждении.

**Теорема** Если  $f \in L_{2+\delta_0}(D)$ , где  $\delta_0 > 0$ , то существуют положительные постоянные  $\delta < \delta_0$  и  $C$ , зависящие только от  $\delta_0$ , такие, что для решения задачи (1) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u_\varepsilon|^{2+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{2+\delta} dx. \quad (2)$$

Работа поддержана грантом РНФ (проект 20-11-20272).

## Список литературы

- [1] Алхутов Ю.А., Чечкин Г.А. Повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы для уравнения Пуассона. Доклады РАН. 497 No 2 (2021), 6-9.
- [2] Боярский Б.В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами. Матем. сб. 43 (85) (1957), No 4. 451-503.
- [3] Meyers N.G. An  $L^p$ -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e série. 17 (1963), 189-206.

## Об условиях опрокидывания одномерных плазменных колебаний при учете электронных соударений

О.С. Розанова, Е.В. Чижонков, <sup>1</sup>М.И. Делова

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова  
mashadelova@yandex.ru

Рассмотрим систему уравнений, возникающую при описании колебаний холодной электронной плазмы при учете электронных соударений

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + E + \nu(n)V = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} + V \frac{\partial E}{\partial x} - V = 0. \quad (1)$$

Здесь функции  $V(x, t)$ ,  $E(x, t)$ ,  $n(t, x) = 1 - \frac{\partial E}{\partial x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , имеют смысл скорости электронов, напряженности электрического поля и плотности,  $\nu$  - коэффициент интенсивности электронных соударений. В теории холодной плазмы важно найти условия на начальные данные, при которых решение потеряет гладкость в течение конечного времени, так как после этого времени модель становится неприменимой. Рассмотрим задачу Коши

$$(V(x, 0), E(x, 0)) = (V_0(x), E_0(x)) \in C^2(\mathbb{R}). \quad (2)$$

**1.** Случай  $\nu = \text{const}$ . Обозначим  $q = V_x$ ,  $s = E_x$ ,  $q_0(x) = q(x, 0)$ ,  $s_0(x) = s(x, 0)$ . Величины  $q, s$  подчиняются интегрируемой системе уравнений, при этом выделяются три различных случая, соответствующие значениям  $0 < \nu < 2$ ,  $\nu = 2$ ,  $\nu > 2$ . Для каждого из



этих случаев найден критерий потери гладкости в терминах начальных данных. Смысл его состоит в том, что на плоскости  $(s_0, q_0)$  строится кривая  $\Phi_\nu(s_0, q_0) = 0$ , строго разделяющая начальные данные на две связные части, одна из которых содержит начало координат.

**Теорема 1.** Если начальные данные (2) таковы, что при всех  $x_0 \in \mathbb{R}$  точка  $(s_0(x_0), q_0(x_0))$  лежит в той части полуплоскости  $s_0 < 1$ , разделенной кривой  $\Phi_\nu(s_0, q_0) = 0$ , куда попадает начало координат, то классическое решение задачи (1), (2) существует при всех  $t > 0$ . В противном случае в течение некоторого конечного времени производные решения задачи (1), (2) обращаются в бесконечность.

Область на плоскости  $(s_0, q_0)$ , соответствующая глобально гладкому решению, расширяется с увеличением  $\nu$ . При этом добиться того, что решение останется гладким при любых начальных данных не удастся ни при каком постоянном  $\nu$ . Результаты подтверждены численно и служат основой для высокоточных разностных методов.

2. В случае  $\nu = \nu(n)$  ситуация совершенно меняется.

**Теорема 2.** Пусть коэффициент интенсивности  $\nu(n) = \epsilon f(n)$ ,  $\epsilon = \text{const} > 0$ ,  $f(n) \in A(\mathbb{R}_+)$  - неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\eta f'(\eta)}{f(\eta)} = \text{const}$ , и  $\int_{\eta_0}^{+\infty} \frac{f(\eta)}{\eta^2} d\eta = \infty$ ,  $\eta_0 > 0$ . Тогда при любых начальных данных существует гладкое решение задачи (1), (2) при всех  $t > 0$ . В противном случае существуют такие начальные данные, что в течение некоторого конечного времени производные решения задачи (1), (2) обращаются в бесконечность.

Если  $f(n) = n^\gamma$ , то решение остается гладким при любых начальных данных при  $\gamma \geq 1$ .

## Список литературы

- [1] Rozanova O. S. Suppression of singularities of solutions of the Euler-Poisson system with density-dependent damping On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma; arXiv:2102.07176
- [2] Rozanova O., Chizhonkov E., Delova M. Exact thresholds in the dynamics of cold plasma with electron-ion collisions. AIP Conference Proceedings, 2302 (2020) 060012
- [3] Rozanova O., Chizhonkov E., Delova M. High precision methods for solving a system of cold plasma equations taking into account electron-ion collisions. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 36 (2021) 139-155.
- [4] Фролов А. А., Чижонков Е. В. Влияние соударений электронов на опрокидывание плазменных колебаний. Физика плазмы. 44 № 4 (2018), 347–354.



# О первой начально-краевой задаче для параболических систем в негладкой области на плоскости

К.Д. Федоров

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

konstantin-dubna@mail.ru

Пусть  $D = \mathbb{R} \times (0, T)$ ,  $0 < T < \infty$ . Рассматривается область  $\Omega = \{(x, t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t)\}$  с «боковыми» границами  $\Sigma_k = \{(x, t) \in \bar{D} : x = g_k(t)\}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $g_2(t) - g_1(t) \geq d > 0$ ,  $t \in [0, T]$ . Функции  $x = g_k(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $k = 1, 2$  – непрерывны и имеют непрерывную производную  $g'_k$  на  $(0, T]$  с условием  $|g'_k(t)| \leq \omega(t^{\frac{1}{2}})t^{-\frac{1}{2}}$ ,  $t \in (0, T]$ , где  $\omega$  – модуль непрерывности.

В  $D$  рассматривается параболический по Петровскому матричный оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u = (u_1, u_2, \dots, u_m), m \geq 1,$$

где  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^m$  –  $m \times m$ -матрица, элементы которой являются вещественными числами и для её собственных чисел  $\mu_k$  выполнено:

$$\operatorname{Re} \mu_r > 0, r = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Введем пространства:  $C[0, T]$  – пространство непрерывных (вектор-)функций  $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  с нормой  $\|\psi; [0, T]\|^0 := \max_{t \in [0, T]} |\psi(t)|$ ,  $C_0^1[0, T] = \{\psi \in C[0, T] : \psi(0) = 0\}$ ,  $C^1[0, T] = \{\psi \in C[0, T] : \psi' \in C[0, T]\}$  с нормой  $\|\psi; [0, T]\|^1 := \|\psi; [0, T]\|^0 + \|\psi'; [0, T]\|^0$  и  $C_0^1[0, T] = \{\psi \in C^1[0, T] : \psi(0) = \psi'(0) = 0\}$ .

Через  $C^{2,1}(\bar{\Omega})$  обозначим пространство (вектор-)функций  $u$ , непрерывных вместе со своими первыми по  $x$ ,  $t$  и второй производной по  $x$  в  $\bar{\Omega}$ , с нормой

$$\|u; \Omega\|^{2,1} := \sum_{k=0}^2 \sup_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t) \right| + \sup_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|.$$

Пусть  $\widehat{C}^{2,1}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^{2,1}(\bar{\Omega}) : \|u; \Omega\|^{(2)} < \infty\}$ , где

$$\|u; \Omega\|^{(2)} := \|u; \Omega\|^{2,1} + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in \Omega, \\ |\Delta t| \neq 0}} \frac{|\Delta_t u_x(x, t)|}{|\Delta t|^{\frac{1}{2}}}.$$

$$\widehat{C}_0^{2,1}(\bar{\Omega}) = \{u \in \widehat{C}^{2,1}(\bar{\Omega}) : u(x, 0) = u_x(x, 0) = u_{xx}(x, 0) = u_t(x, 0) = 0\}.$$

Ставится первая начально-краевая задача:

$$Lu = 0, (x, t) \in \Omega, \quad u \Big|_{t=0} = 0, g_1(0) \leq x \leq g_2(0), \quad u \Big|_{\Sigma_k} = \psi_k, k = 1, 2. \quad (2)$$

**Теорема.** Пусть выполнено условие (1). Тогда для любых  $\psi_1, \psi_2 \in C_0^1[0, T]$  существует решение задачи (2) из класса  $\widehat{C}_0^{2,1}(\overline{\Omega})$  и для него справедлива оценка:

$$\|u; \Omega\|^{(2)} \leq C(\|\psi_1\|^1 + \|\psi_2\|^1).$$

**Утверждение.** Если  $u \in \widehat{C}_0^{2,1}(\overline{\Omega})$ , то  $\psi_k \in C_0^1[0, T]$ , где  $\psi_k(t) = u(g_k(t), t)$ ,  $k = 1, 2$ .

## On evolution generated by a one-dimensional Schrödinger with a potential slowly depending on time and having both discrete and continuous spectrum

А.А. Федотов

Санкт-Петербургский государственный университет  
a.fedotov@spbu.ru

We study a one-dimensional non-stationary Schrödinger equation with a potential slowly depending on time. The corresponding stationary operator depends on time as on a parameter. It has a finite number of negative eigenvalues and absolutely continuous spectrum filling the positive semiaxis. The eigenvalues move with time to the edge of the continuous spectrum and, having reached it, disappear one after another. We describe the asymptotic behavior of a solution close at some moment to an eigenfunction of the stationary operator, and, in particular, the phenomena occurring when the corresponding eigenvalue approaches the absolutely continuous spectrum and disappears.

## Задача рассеяния для систем дифференциальных уравнений с особенностью

М.Ю. Игнатьев

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
ignatievmu@sgu.ru

Пусть  $\Psi = \Psi(x, \rho)$  – матрица, составленная из решений типа Вейля [1] следующей системы дифференциальных уравнений

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y \quad (1)$$

со спектральным параметром  $\rho$ , где  $A$  и  $B$  – постоянные  $n \times n$ ,  $n > 2$  матрицы,  $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ , причем никакие три из чисел  $b_1, \dots, b_n$  не лежат на одной прямой.

Относительно матриц  $A$  и  $B$  мы будем предполагать выполненными те же условия, что в работе [1]. Предположим, кроме того, что дискретный спектр отсутствует, или, более точно, что  $q(\cdot) \in G_0^p(\mathcal{S})$ ,  $p > 2$  [1] для любого открытого сектора  $\mathcal{S} \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ , где:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j): j \neq k} \{\rho : \text{Re}(\rho b_j) = \text{Re}(\rho b_k)\}.$$

При выполнении указанных условия в каждой точке  $\rho \in \Sigma' := \Sigma \setminus \{0\}$  существуют пределы  $\Psi^\pm(x, \rho) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Psi(x, \rho \pm i\rho\varepsilon)$ . Данными рассеяния назовем матрицу-функцию  $v = v(\rho)$  такую, что  $\Psi^+(x, \rho) = \Psi^-(x, \rho)v(\rho)$  при  $\rho \in \Sigma'$ . Рассмотрим обратную задачу рассеяния, состоящую в восстановлении потенциала  $q(\cdot)$  по заданным данным рассеяния. Справедлива следующая теорема единственности.

**Теорема 1.** *Предположим, что потенциалы  $q(\cdot)$  и  $\tilde{q}(\cdot)$  таковы, что соответствующие им данные рассеяния  $v(\rho)$  и  $\tilde{v}(\rho)$  совпадают для всех  $\rho \in \Sigma'$ . Тогда  $q(x) = \tilde{q}(x)$  п.в.*

Решение обратной задачи рассеяния может быть найдено с помощью конструктивной процедуры, центральную роль в которой играет решение при каждом  $x \in (0, \infty)$  некоторого линейного уравнения в пространстве  $L_2(\Sigma)$ . В докладе также будет рассмотрен вопрос характеристики данных рассеяния, т.е., нахождении условий, при выполнении которых заданная матрица-функция  $v(\cdot)$  является данными рассеяния для некоторой системы вида (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты nos. 19-01-00102, 20-31-70005).

## Список литературы

- [1] Ignatiev M.Yu. On Weyl-type Solutions of Differential Systems with a Singularity. The Case of Discontinuous Potential /M.Yu. Ignatiev. Mathematical Notes. 108 (6) (2020), 814-826.

## Предельные теоремы о сходимости к обобщенным процессам типа Коши

А.К. Николаев

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН  
nikolaiev.96@bk.ru

В докладе будет рассмотрен вопрос, связанный с вероятностным представлением решения задачи Коши для эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^m \mathcal{A}_m u, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad (1)$$

где оператор  $\mathcal{A}_m$  определяется на гладких функциях  $f \in C^\infty(\mathbf{R})$  как

$$\mathcal{A}_m f(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbf{R}} \left( f(x+y) - \sum_{j=0}^m \frac{f^{(2j)}(x)y^{2j}}{(2j)!} \right) \frac{dy}{y^{2m+2}},$$

а начальная функция  $\varphi(x)$  принадлежит соболевскому классу  $W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$ .

Известно, что, если  $m = 0$ , то для решения задачи Коши (1) справедливо вероятностное представление

$$u(t, x) = \mathbf{E} \varphi(x + \xi(t)), \quad (2)$$

где  $\xi(t)$  — стандартный процесс Коши.

Если  $m \geq 1$ , то получить в точности вероятностное представление вида (2) невозможно, потому что фундаментальное решение соответствующего уравнения не будет вероятностной плотностью. Нами будет построено вероятностное представление для произвольного  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , а также доказаны предельные теоремы о сходимости математических ожиданий функционалов от сумм независимых одинаково распределенных случайных величин со степенной асимптотикой хвостового распределения к решению задачи Коши.

## Об одной задаче сопряжения для параболической системы второго порядка в полосе с негладкой кривой раздела сред

С.И. Сахаров

Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
ser341516@yandex.ru

Полоса  $D = \mathbb{R} \times (0, T)$  разделена на области  $\Omega^{(1)} = \{(x, t) \in D : x < g(t)\}$  и  $\Omega^{(2)} = \{(x, t) \in D : x > g(t)\}$  негладкой кривой  $\Sigma$ . Пусть  $\omega_{1(0)}$  — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (дважды). Предполагается, что  $|\Delta_t g(t)| \leq C|\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2})$ . В  $\Omega^{(s)}$  рассматриваются равномерно параболические операторы  $L^{(s)}u = \partial_t u - \sum_{l=0}^2 A_l^{(s)}(x, t)\partial_x^l u$ , где  $A_l^{(s)} = \|a_{ijl}^{(s)}\|_{i,j=1}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , причем для собственных чисел  $\mu_r^{(s)}$  матриц  $A_2^{(s)}$  выполнены неравенства  $\operatorname{Re} \mu_r^{(s)}(x, t) \geq \delta > 0$ ,  $(x, t) \in \overline{D}$ , и  $|\Delta_{x,t} a_{ijl}^{(s)}(x, t)| \leq \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$  в  $\overline{D}$ .

Ставится следующая задача

$$L^{(s)}u^{(s)} = 0 \text{ в } \Omega^{(s)}, \quad u^{(s)}|_{t=0} = 0, \quad \partial_x^l u^{(1)}|_{\Sigma} - \partial_x^l u^{(2)}|_{\Sigma} = \psi_{l+1}, \quad l = 0, 1, \quad (1)$$

где  $\psi_l \in C[0, T]$ ,  $\psi_1$  имеет дробную производную  $\partial^{1/2}\psi_1 \in C[0, T]$ .

**Теорема 1.** При заданных условиях на операторы  $L^{(s)}$  и функцию  $g$  существует регулярное решение  $u^{(s)} \in C^{1,0}_0(\overline{\Omega}^{(s)})$ ,  $s = 1, 2$ , задачи (1) и выполнены оценки

$$\|u^{(s)}; \Omega^{(s)}\|^{1,0} \leq C(\|\psi_1; [0, T]\|^{1/2} + \|\psi_2; [0, T]\|^0),$$

$$|\Delta_t u^{(s)}(x, t)| \leq C(\|\psi_1; [0, T]\|^{1/2} + \|\psi_2; [0, T]\|^0)|\Delta t|^{1/2}, \quad (x, t), (x, t + \Delta t) \in \overline{\Omega}^{(s)}.$$

Если, кроме того,  $\partial^{1/2}\psi_1, \psi_2 \in H_0^{\omega_2}[0, T]$ , где  $\omega_2$  — некоторый модуль непрерывности, для которого существует такое  $\varepsilon_2 \in (0, 1)$ , что функция  $\omega_2(z)z^{-\varepsilon_2}$  почти убывает, то

$$|\partial_x^2 u^{(s)}(x, t)| \leq C[\|\psi_1; [0, T]\|^{1/2, \omega_2} + \|\psi_2; [0, T]\|^{\omega_2}] \omega_3(d(x, t))d^{-1}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega^{(s)},$$

где  $d(x, t) = |x - g(t)|$ ,  $\omega_3 = \tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1 + \omega_2$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,  $|\Delta_{x,t} \partial_x^k a_{ijl}^{(s)}(x, t)| \leq \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$  в  $\overline{D}$ ,  $0 \leq k \leq l$ . Тогда регулярное решение задачи (1) единственно в классе функций

$$u = (u^{(1)}, u^{(2)}) \in C^{1,0}_0(\overline{\Omega}^{(1)}) \times C^{1,0}_0(\overline{\Omega}^{(2)}),$$

удовлетворяющих условиям

$$|\Delta_t u^{(s)}(x, t)| \leq C|\Delta t|^{1/2}, \quad (x, t), (x, t + \Delta t) \in \bar{\Omega}^{(s)},$$
$$|\partial_x^2 u^{(s)}(x, t)| \leq C\omega(d(x, t))d^{-1}(x, t), \quad (x, t) \in \Omega^{(s)},$$

где  $\omega$  — некоторый модуль непрерывности.

## Уравнение струны с некомпактным мультипликатором в качестве веса и периодические матрицы Якоби

И.А. Шейпак

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

iasheip@yandex.ru

Рассматривается спектральная задача, соответствующая уравнению колебания сингулярной струны с дискретным весом, порожденным самоподобным  $n$ -звенным мультипликатором в пространство Соболева с отрицательным показателем гладкости. Показано, что в случае некомпактного мультипликатора задача для струны равносильна спектральной задаче для  $(n - 1)$ -периодической матрицы Якоби. В случае  $n = 3$  дано полное описание спектра задачи — он состоит из двух отрезков непрерывного спектра и, может быть, одного собственного значения между этими отрезками. Получен критерий появления собственного значения в лакуне непрерывного спектра.

Доклад основан на совместной работе с Е. Б. Шаровым.

## О второй начально-краевой задаче для параболической системы в плоской негладкой области

А.А. Стасенко

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

stasenko.aa@yandex.ru

В полосе  $D \equiv \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T\}$ ,  $0 < T < +\infty$ , рассматривается параболический по И.Г. Петровскому матричный оператор 2-го порядка с постоянными коэффициентами  $Lu = \partial_t u - A\partial_x^2 u$ ,  $u = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $m \geq 1$ , где  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$ ,  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^m$  — матрица размерности  $m \times m$ . Предполагается, что собственные числа  $\mu_k$  матрицы  $A$  удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \mu_k > 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (1)$$

В  $D$  выделяется полуограниченная область  $\Omega \equiv \{(x, t) \in D : x > g(t)\}$  с «боковой» границей  $\Sigma \equiv \{(x, t) \in \bar{\Omega} : x = g(t)\}$ , где функция  $g$  удовлетворяет условию

$$|g(t + \Delta t) - g(t)| \leq K|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}, \quad K > 0, 0 < \alpha < 1, t, t + \Delta t \in [0, T]. \quad (2)$$

Пусть  $\partial^{1/2}\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} \psi(\tau) d\tau, t \in [0, T]$ , —оператор дробного дифференцирования порядка  $1/2$ . Введем следующие функциональные пространства: через  $C_0(\overline{\Omega})$  обозначаем пространство непрерывных и ограниченных (вектор)-функций  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , для которых  $u(x, 0) = 0$ , причем  $\|u; \Omega\|^0 = \sup_{\Omega} |u|$ ,  $C_0^{1/2}[0, T] = \{\psi : \psi, \partial^{1/2}\psi \in C_0[0, T]\}$ , и  $\|\psi; [0, T]\|^{1/2} = \max_{[0, T]} |\psi| + \max_{[0, T]} |\partial^{1/2}\psi|$ ,  $C_0^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u : u, \partial_x u \in C_0(\overline{\Omega})\}$ ,  $C_0^{2,1}(\overline{\Omega}) = \{u : u, \partial_x u, \partial_x^2 u, \partial_t u \in C_0(\overline{\Omega})\}$ , причем  $\|u; \Omega\|^{2,1} = \sum_{i=0}^2 \|\partial_x^i u; \Omega\|^0 + \|\partial_t u; \Omega\|^0$ ,  $\widehat{C}_0^{2,1}(\overline{\Omega}) = \{u \in C_0^{2,1}(\overline{\Omega}) : \|u; \Omega\|^{(2)} < \infty\}$ , где  $\|u; \Omega\|^{(2)} = \|u; \Omega\|^{2,1} + \sup_{\Omega} \frac{|\Delta_t \partial_x u|}{|\Delta t|^{1/2}}$ . Рассмотрим задачу: найти функцию  $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$ , являющуюся решением второй начально-краевой задачи

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \quad u(x, 0) = 0, x \geq g(0), \quad \partial_x u(g(t), t) = \psi(t), 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

**Теорема.** Пусть выполнены условия (1), (2) и  $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$ —решение задачи (3) при условии  $\psi \equiv 0$ . Тогда  $u \equiv 0$ .

**Теорема.** Пусть выполнены условия (1), (2), и  $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$ —решение задачи (3). Тогда для любой  $\psi \in C_0^{1/2}[0, T]$  это решение принадлежит пространству  $\widehat{C}_0^{2,1}(\overline{\Omega})$  и верна оценка  $\|u; \Omega\|^{(2)} \leq C \|\psi; [0, T]\|^{1/2}$ .

**Теорема.** Пусть  $D_+ = \{(x, t) \in D : x > 0\}$ . Рассмотрим вторую начально-краевую задачу

$$Lu = 0 \text{ в } D_+, \quad u(x, 0) = 0, x \geq 0, \quad \partial_x u(0, t) = \psi(t), 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Тогда решение  $u \in C^{2,1}(D_+) \cap C^{1,0}(\overline{D_+})$  задачи (4) принадлежит классу  $C_0^{2,1}(\overline{D_+})$  тогда и только тогда, когда  $\psi \in C_0^{1/2}[0, T]$ .

## Newtonian estimates of the fundamental solution for stationary convection-diffusion equations

М.Д. Сурначев

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
peitsche@yandex.ru

This is a joint work with Yu.A. Alkhutov (Vladimir State University). In the  $n$ -dimensional Euclidian space  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ , we consider the equation

$$Lu = \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u = 0 \quad (1)$$

with measurable symmetric matrix  $a(x)$  satisfying the uniform ellipticity condition

$$\alpha^{-1}|\xi|^2 \leq (a\xi \cdot \xi) \leq \alpha|\xi|^2 \quad (2)$$

for all  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ . We establish natural conditions on the drift  $b = (b_1(x), \dots, b_n(x))$  that guarantee the existence of a fundamental solution  $\Gamma(x, y)$  of equation (1) satisfying

$$C_1|x - y|^{2-n} \leq \Gamma(x, y) \leq C_2|x - y|^{2-n} \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

with some positive constants  $C_1$  and  $C_2$ .

By  $B_r^x$  we denote the open ball of radius  $r$  centered at  $x$ ,  $Q_r = B_r \setminus B_{r/2}$ . We assume that for all  $r \geq 1$  and  $t \in (0, 1/8)$  there holds

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{tr}^x \cap Q_r} \frac{|b(y)|^2}{|x - y|^{n-2}} dy \leq \omega^2(r)\psi^2(t), \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B_t^x \cap B_1^0} \frac{|b(y)|^2}{|x - y|^{n-2}} dy \leq \omega^2(1)\psi^2(t), \quad (4)$$

where  $\psi$  is a continuous nondecreasing function, concave on  $[0, 1/8]$ , satisfying the Dini condition at zero:

$$\int_0^{1/8} \psi(\tau)\tau^{-1} d\tau < \infty, \quad (5)$$

and  $\omega$  is a nonincreasing on  $[1, \infty)$  function satisfying the Dini condition at infinity:

$$\int_1^\infty \omega(\rho)\rho^{-1} d\rho < \infty. \quad (6)$$

**Теорема.** Assume that the coefficients  $a_{ij}$ ,  $b$  satisfy (2) and (4)–(6). Then there exists a fundamental solution of equation (1) satisfying (3) where the constants  $C_1$ ,  $C_2$  depend only on  $n$ ,  $\alpha$ ,  $\psi$ , and  $\omega$ .

The dependence of constants on  $\psi$  and  $\omega$  can be expressed quantitatively. A simple example with  $b_i = x_i f(|x|)|x|^{-1}$  demonstrates the accuracy of condition (6).

## Список литературы

- [1] Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 17 (1963), 45-79.
- [2] Aizenman M., Simon B. Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators. Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982), 209-273.
- [3] Simon B. Schrödinger semigroups. Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982), no. 3, 447-526.
- [4] Pinchover Y. On the equivalence of Green functions of second order elliptic equation in  $\mathbb{R}^n$ . Differential and Integral Equations 5 (1992), no. 3, 481-493.
- [5] Zhang Qi, A Harnack inequality for the equation  $\nabla(a\nabla u) + b\nabla u = 0$ , when  $|b| \in K_{n+1}$ , Manuscripta Math. 89 (1995), 61-77.
- [6] Zhang Qi S. Gaussian bounds for the fundamental solutions of  $\nabla(A\nabla u) + B\nabla u - u_t = 0$ . Manuscripta Math. 93 (1997), 381-390.

# Усреднение стационарной системы Максвелла с периодическими коэффициентами

Т.А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет  
t.suslina@spbu.ru

Граничные условия для контактных разрывов в магнитной гидродинамике (МГД) идеальной сжимаемой жидкости – наиболее типичные в астрофизической плазме. Контактные разрывы наблюдаются, например, за ударными волнами, ограничивающими остатки сверхновой. С математической точки зрения контактный разрыв, как и МГД тангенциальный разрыв [1], является свободной характеристической поверхностью для системы гиперболических законов сохранения. В докладе обсуждается локальная по времени разрешимость соответствующей задачи со свободной границей. Для двумерного случая доказана теорема существования и единственности гладкого решения этой задачи при условии, что в начальный момент времени в каждой точке контактного разрыва выполнено условие Рэлея–Тейлора на знак скачка производной давления по направлению нормали к разрыву.

Пусть  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  — решетка;  $\varepsilon > 0$  — малый параметр. Диэлектрическая и магнитная проницаемости заданы  $(3 \times 3)$ -матрицами  $\eta^\varepsilon(\mathbf{x}) = \eta(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$  и  $\mu^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mu(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , где  $\eta(\mathbf{x})$  и  $\mu(\mathbf{x})$  — симметричные матрицы-функции с вещественными элементами,  $\Gamma$ -периодические, ограниченные и равномерно положительно определенные.

Пусть  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная область с границей класса  $C^{1,1}$ . Мы изучаем стационарную систему Максвелла с коэффициентами  $\eta^\varepsilon(\mathbf{x})$  и  $\mu^\varepsilon(\mathbf{x})$  в  $\mathbb{R}^3$ , а также в области  $\mathcal{O}$  при условиях идеальной проводимости. Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$ ,  $\mathbf{v}_\varepsilon$  — напряженности электрического и магнитного полей;  $\mathbf{w}_\varepsilon = \eta^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$ ,  $\mathbf{z}_\varepsilon = \mu^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon$  — векторы электрической и магнитной индукций.

Приведем постановку задачи в случае ограниченной области:

$$\begin{cases} i \operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon - i \mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{q}, & \operatorname{div} \mathbf{z}_\varepsilon = 0, \\ -i \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon - i \mathbf{z}_\varepsilon = \mathbf{r}, & \operatorname{div} \mathbf{w}_\varepsilon = 0, \\ ((\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon)_\tau|_{\partial \mathcal{O}} = 0, & (\mathbf{z}_\varepsilon)_n|_{\partial \mathcal{O}} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$  — заданные соленоидальные поля, причем  $\mathbf{r}_n|_{\partial \mathcal{O}} = 0$ . В случае задачи в  $\mathbb{R}^3$  краевые условия не нужны.

Пусть  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{w}_0$ ,  $\mathbf{z}_0$  — *эффективные поля*, то есть, решения системы Максвелла с эффективными коэффициентами  $\eta^0$  и  $\mu^0$ .

Классические результаты утверждают, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения системы Максвелла (??) слабо сходятся в  $L_2$  к эффективным полям. Мы же находим аппроксимации решений с оценками погрешности по норме в  $L_2$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon - (\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leq C\varepsilon^{1/2} (\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}), \\ \|\mathbf{w}_\varepsilon - (\mathbf{w}_0 + \tilde{\mathbf{w}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leq C\varepsilon^{1/2} (\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}), \\ \|\mathbf{v}_\varepsilon - (\mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leq C\varepsilon^{1/2} (\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}), \\ \|\mathbf{z}_\varepsilon - (\mathbf{z}_0 + \tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leq C\varepsilon^{1/2} (\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}). \end{aligned}$$

Аппроксимации содержат *корректоры нулевого порядка* — поля  $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_\varepsilon$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_\varepsilon$ , слабо сходящиеся к нулю. В случае задачи в  $\mathbb{R}^3$  справедливы аналогичные оценки порядка  $O(\varepsilon)$ .

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект 17-11-01069).



## Список литературы

- [1] Suslina T. A. Homogenization of the stationary Maxwell system with periodic coefficients in a bounded domain. *Archive Ration. Mech. Anal.* 234 (2019), 453-507.
- [2] Суслина Т. А. Усреднение стационарной периодической системы Максвелла с учетом корректора. *Алгебра и анализ.* 19 (2007), вып. 3, 183-235.

## Доказательство стойкости квантовой криптографии с неидеальными детекторами

А.С. Трушечкин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН  
trushechkin@mi-ras.ru

Квантовая криптография – современное направление науки, в котором изучаются методы обеспечения секретной связи, основанные на принципах квантовой механики. Строгое доказательство стойкости протоколов квантовой криптографии потребовало построения сложной и красивой математической теории, в основе которой лежат математические методы квантовой теории информации и теории открытых квантовых систем, в частности квантовые энтропийные характеристики и энтропийные соотношения неопределенностей. В настоящее время стоит задача доказательства стойкости квантовой криптографии с неидеальными устройствами, что важно при практической реализации. В докладе будут представлены теоремы о стойкости наиболее известного и широко используемого протокола квантовой криптографии BB84 при однофотонных детекторах с несовпадающими эффективностями. Различия квантовых эффективностей детекторов (вероятностей регистрации ими фотона) разрушает определенные симметрии в задаче, что делает недостаточными методы доказательств, существовавшие до этого. Будет рассказано о новых методах аналитического решения задачи минимизации выпуклого функционала (квантовой относительной энтропии) и методы ограничения размерности оптимизационного пространства, что являлось одной из ключевых проблем для решения данной задачи.

## Список литературы

- [1] Bochkov M. K., Trushechkin A. S. “Security of quantum key distribution with detection-efficiency mismatch in the single-photon case: Tight bounds”. *Phys. Rev. A* 99 (2019), 32308.
- [2] Trushechkin A. S. Security of quantum key distribution with detection-efficiency mismatch in the multiphoton case. *arXiv: 2004.07809*.
- [3] Трушечкин А. С. “Об операционном смысле и практических аспектах использования параметра стойкости в квантовом распределении ключей”. *Квантовая электроника.* 50 (2020), 426-439.

## Оптимизационные обратные спектральные задачи с неполными данными и нелинейные дифференциальные операторы

Н.Ф. Валеев, Я.Ш. Ильясов  
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН  
valeevnf@yandex.ru

В докладе рассматривается новая постановка обратной спектральной задачи для самосопряженных полуограниченных дифференциальных операторов (как в частных, так и обычных производных) – оптимизационная обратная спектральная задача.

В рассматриваемой постановке в качестве спектральных данных с.с. оператора  $L(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , (где  $q_1, q_2, \dots, q_n$  коэффициенты соответствующего дифференциального выражения) берется лишь часть спектра – конечное число собственных значений:  $\lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ . По этим спектральным данным требуется найти новые коэффициенты  $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_n$  наименее удаленные (в какой-либо метрике) от заданных  $q_1, q_2, \dots, q_n$  так, чтобы

$$\lambda_k(L(\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_n)) = \lambda_k^*, k = 1, \dots, m.$$

Нами разработан и обоснован подход к решению оптимизационных обратных спектральных задач с неполными данными для широких классов эллиптических дифференциальных операторов, опирающийся на нетривиальную связь между оптимизационными обратными спектральными задачами и свойствами (разрешимость, гладкость решений, единственность и др.) нелинейных дифференциальных операторов.

Мы показываем, что существование решений оптимизационной обратной спектральной задачи с неполными данными эквивалентно разрешимости вполне определенного нелинейного дифференциального уравнения.

Излагаются некоторые общие результаты исследований: теоремы о существовании и изолированности решений оптимизационной обратной спектральной задачи; теоремы о свойствах нелинейных дифференциальных операторов. Также рассматриваются несколько примеров связи оптимизационных обратных спектральных задач с операторами математической физики (системы НУШ, р-Лапласа и др.)

## Высокочастотная дифракция на импедансных контурах с негладкой кривизной

Е.А. Злобина  
Санкт-Петербургский государственный университет  
ezlobina2@yandex.ru

В рамках последовательного метода пограничного слоя рассматривается дифракция коротких некасательных волн на контуре с пассивным импедансом и негладкой кривизной. Целью является построение асимптотических формул, описывающих влияние негладкости контура на волновое поле как в лучевой, так и в переходной зоне. Согласно Геометрической Теории Дифракции Келлера, в лучевой зоне уходящая волна является суммой геометрически отраженной и дифрагированной волн. В переходной зоне эти волны сливаются, и для описания поля требуется спецфункция. Для цилиндрической дифрагированной волны получено выражение со степенной особенностью. Поле в переходной зоне на небольших расстояниях от контура описано в терминах функций параболического цилиндра.

## Программа секции «Математический анализ»

### Зал № 5

Координатор: Ю.С. Белов

#### ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>20</sup> Константин Федоровский (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Approximation by solutions of elliptic equations and systems*

15<sup>30</sup> — 16<sup>20</sup> Антон Целищев (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН). *Неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для систем Уолша и Виленкина*

16<sup>30</sup> — 17<sup>20</sup> Астамур Багапш (Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана). *Геометрические свойства и конструкции решений сильно эллиптических систем на плоскости*

17<sup>30</sup> — 18<sup>20</sup> Николай Осипов (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН). *Метод функции Беллмана для общих операторов на мартингалах*

#### ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>20</sup> Павел Мозоляко (Санкт-Петербургский государственный университет). *Hardy operator on the poly-tree and some unexpected combinatorial properties of planar measures*

15<sup>30</sup> — 16<sup>20</sup> Дмитрий Столяров (Санкт-Петербургский государственный университет). *О новых направлениях в гармоническом анализе на  $L_1(\mathbb{R}^d)$*

16<sup>30</sup> — 17<sup>20</sup> Rami Ayoush (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН). *Microlocal approach to the Hausdorff dimension of measures*

17<sup>30</sup> — 18<sup>00</sup> Андрей Лишанский (Международный математический институт им. Л. Эйлера). *Гиперцикличность операторов Тёплица*

#### ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>20</sup> Дмитрий Горбачев (Тульский государственный университет). *Задача Чебышева о наименее уклоняющихся от нуля многочленах и неравенства Маркова, Бернштейна, Никольского*

15<sup>30</sup> — 16<sup>20</sup> Артем Радомский (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН). *Последовательные простые числа на коротких интервалах и смежные вопросы*

16<sup>30</sup> — 17<sup>00</sup> Иван Проскурнин (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Вещественные морсификации аналитических функций*

17<sup>10</sup> — 17<sup>40</sup> Никита Шульга (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Rational approximations to two irrational numbers*

## Microlocal approach to the Hausdorff dimension of measures

R. Ayoush

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН  
Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера  
`rami.m.ayoush@gmail.com`

During the talk I will discuss the proof of a generalization of the Aleksandrov-Forelli theorem about regularity of pluriharmonic measures. This result is established via modification of the method of microlocalizing spectral properties of measures due to R.G.M. Brummelhuis: in our case the properties of the so-called s-Riesz sets are expressed in terms of the wave front set. This is joint work with Michael Wojciechowski.

## Список литературы

- [1] R. Ayoush, M. Wojciechowski, Microlocal approach to the Hausdorff dimension of measures, <https://arxiv.org/abs/2004.01626>

## Approximation by solutions of elliptic equations and systems

К.Ю. Федоровский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
`kfedorovs@yandex.ru`

We will deal with problems of uniform and  $C^m$ -approximations by solutions of second order homogeneous elliptic equations with constant complex coefficients and by solutions of systems of such equations on compact sets in the complex plane. We will start with recent results due to M. Mazalov on uniform approximation by solutions of equations in question with singularities located outside compact sets where the approximation is considered. Later on we will concentrate on the problem of uniform approximation by polynomial solutions of our equations. For instance, we plan to discuss the important open conjecture that the classical Walsh–Lebesgue criterion for uniform approximation by harmonic polynomials remains valid in the case of uniform approximation by polynomial solution of general strongly elliptic equation of the type in question. We also plan to touch upon the case of approximation by polynomial solutions on not strongly elliptic equations, when the possibility of approximation is controlled by certain special analytic characteristics of sets where approximation is considered (the concepts of Nevanlinna and  $L$ -special domains). At the rest of the talk we will briefly discuss some recent results about approximation by solutions of equations in question in  $C^m$ -norms.

## **Hardy operator on the poly-tree and some unexpected combinatorial properties of planar measures**

П.А. Мозоляко

Санкт-Петербургский государственный университет  
pmzlcroak@yandex.ru

We consider embeddings of various spaces of analytic functions on the polydisc into Lebesgue spaces with respect to a measure on the polydisc. These problems can often be moved to a discrete setting by considering weighted Dirichlet spaces on (poly-)trees and weighted dyadic multi-parameter Hardy operators. We find necessary and sufficient conditions for this operator to be bounded in the  $n$ -parameter case, when  $n$  is 1, 2, or 3. The answer is quite unexpected – it is a certain combinatorial property of all measures in dimension 2 and 3 – and seemingly goes against the well known difference between box and Chang–Fefferman condition that was given by Carleson quilts counterexample of 1974.

## **Геометрические свойства и конструкции решений сильно эллиптических систем на плоскости**

А.О. Багапш

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН  
a.bagapsh@gmail.com

Обсуждаются интегральные представления типа Пуассона для решений сильно эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами на плоскости и метод построения решения задачи Дирихле для таких систем в виде функционального ряда по степеням малых параметров, задающих отклонение оператора системы от оператора Лапласа. Будут рассмотрены отображения решениями указанных систем с кусочно постоянными граничными данными, а также некоторые геометрические свойства отображений, включая принцип аргумента.

## **Задача Чебышева о наименее уклоняющихся от нуля многочленах и неравенства Маркова, Бернштейна, Никольского**

Д.В. Горбачев

Тульский государственный университет  
dvgmail@mail.ru

В 2021 году исполняется 200 лет со дня рождения выдающегося русского математика и механика, основоположника теории приближений П.Л. Чебышёва. Им была поставлена и решена ставшая знаменитой задача о многочлене, наименее уклоняющимся от нуля в равномерной метрике. Данная задача и ее весовые варианты в других метриках относятся к классическому направлению теории приближений, включающему точные неравенства Маркова и Бернштейна для производных, неравенства разных метрик Никольского для

полиномов и целых функций экспоненциального типа. Все эти проблемы оказываются взаимосвязанными, они находят интересные приложения в теории чисел, метрической геометрии. В докладе пойдет речь о недавнем прогрессе в данной проблематике, достигнутом в работах авторов, В.В. Арестова и М.В. Дейкаловой, Е. Levin и D. Lubinsky, M.I. Ganzburg, F. Dai, S. Tikhonov и других авторов.

## **Гиперцикличность операторов Тёплица**

А.А. Лишанский

Международный математический институт им. Л. Эйлера  
lishanskiyaa@gmail.com

Мы изучаем гиперцикличность операторов Тёплица в пространстве Харди  $H^2(\mathbb{D})$  с символами вида  $\Phi(z) = R(\frac{1}{z}) + \varphi(z)$ , где  $R$  — рациональная функция. В 2016 году А.Д. Баранов и А.А. Лишанский нашли некоторые необходимые, а также достаточные условия гиперцикличности операторов Тёплица с полиномиальной антианалитической частью. В 2021 году этот результат дополнен некоторыми достаточными условиями для операторов с рациональной антианалитической частью с использованием глубоких результатов Б.М. Соломяка.

## **Метод функции Беллмана для общих операторов на мартингалах**

Н.Н. Осипов

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН  
nicknick@pdmi.ras.ru

Мы покажем, что метод Функции Беллмана можно применить для исследования  $L^p$ -норм общих операторов на мартингалах, т.е. операторов, которые не обязательно являются мартингальными преобразованиями. Неформально говоря, мы предъявим функцию беллмановского типа, которая будет «кодировать»  $L^p$ -ограниченность «почти всех» операторов из экстраполяционной теоремы Ганди. В качестве примеров таких операторов мы рассмотрим преобразования Хаара и оператор, чья  $L^p$ -ограниченность позволила доказать неравенство Рубио де Франсиа для системы Уолша.

## **Вещественные морсификации аналитических функций**

Проскурнин И.А.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
dazai131@yahoo.com

Известно, что топологические характеристики вещественных алгебраических многообразий как правило вычисляются сложнее, чем соответствующие характеристики комплексных. Так, по теореме Гильберта, гладкая комплексная проективная кривая степени

$d$  является компактной ориентируемой поверхностью рода  $(d-1)(d-2)/2$ , т.е. её топология полностью определяется степенью задающего уравнения. С другой стороны, для вещественных кривых данной степени теорема Харнака дает только неравенства на число связных компонент вещественной кривой.

В теории особенностей аналогичная проблема связана с подсчетом критических точек, возникающих при деформации особенности функции: число комплексных невырожденных критических точек одинаково при любой деформации и легко вычисляется через дискретные инварианты особенности, а задача о возможном числе вещественных критических точек на данный момент решена только в некоторых простейших случаях. Будет рассказано о замечательных работах А'Кампо, Васильева, Гусейн-Заде, Шустина и других, посвященных этой задаче, контексте, в котором эта задача возникает, а также о результатах автора в этой области.

## Последовательные простые числа на коротких интервалах и смежные вопросы

А.О. Радомский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН  
artyom.radomskii@mi-ras.ru

Доклад будет состоять из трех частей, связанных друг с другом.

1) Мы планируем рассказать про оценку суммы

$$\sum_{n \in A} \left( \frac{n}{\varphi(n)} \right)^s,$$

где  $\varphi(n)$  — функция Эйлера,  $s$  — натуральное число,  $A$  — конечное мультимножество, состоящее из натуральных чисел. Полученные результаты мы применяем к аддитивным задачам теории чисел.

2) В 1934 г. Н.П. Романов доказал следующую теорему. Пусть  $a$  — произвольное натуральное число, большее 1. Тогда существует число  $c(a) > 0$ , зависящее только от  $a$ , такое, что для любого вещественного числа  $x \geq 4$  имеем

$$\#\{1 \leq n \leq x : \text{существуют простое число } p \text{ и неотрицательное целое число } j \text{ такие, что } p + a^j = n\} \geq c(a)x.$$

Мы планируем рассказать про некоторые результаты, связанные с теоремой Романова.

3) Мы получаем оценку снизу для

$$\#\{x/2 < p_n \leq x : p_n \equiv \dots \equiv p_{n+m} \equiv a \pmod{q}, p_{n+m} - p_n \leq y\},$$

где  $p_n$  —  $n$ -е простое число.

## **О новых направления в гармоническом анализе на $L_1(\mathbb{R}^d)$**

Д.М. Столяров

Санкт-Петербургский государственный университет  
d.m.stolyarov@icloud.com

Сингулярные интегральные операторы не действуют непрерывно на пространстве  $L_1$ . Как известно с 70-х годов, для того, чтобы действие стало непрерывным, следует заменить  $L_1$  на вещественный класс Харди. Я расскажу об одной теореме такого типа, которая описывает аналогичный феномен для интегральных операторов дробного порядка. Оказывается, что здесь класс допустимых пространств существенно богаче, а различаются они, например, геометрическими свойствами зарядов, принадлежащих этим пространствам. С одной стороны, эти результаты существенно обобщают и усиливают так называемые неравенства Бургейна–Брезиса, а с другой – имеют важные связи с задачами современной геометрической теории меры.

## **Неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсия для систем Уолша и Виленкина**

А.С. Целищев

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН  
Санкт-Петербургский государственный университет  
celis-anton@yandex.ru

Пусть  $\{I_j\}$  — набор попарно непересекающихся отрезков в  $\mathbb{Z}$ , а  $f$  — функция, заданная на  $\mathbb{T}$ . Через  $P_j$  обозначим мультипликаторы Фурье, соответствующие этим отрезкам:  $P_j f = (\chi_{I_j} \widehat{f})^\vee$ . В 1985 году Рубио де Франсия доказал следующее неравенство:

$$\left\| \left( \sum_j |P_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \lesssim \|f\|_p.$$

Сильно позднее, в 2016 году, Н. Н. Осипов доказал аналог неравенства Рубио де Франсия, в котором вместо системы экспонент рассматривается другая система ортогональных функций — функции Уолша. Мы обсудим обобщение этого неравенства на случай более общих систем Виленкина, а также несколько вопросов, связанных с подобным неравенством для функций со значениями в банаховых пространствах.

## **Рациональные приближения к двум иррациональным числам**

Н.А. Шульга

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
nikita1279@yandex.ru

Для вещественного числа  $\xi$  мы рассматриваем функцию меры иррациональности  $\psi_\xi(t) = \min_{1 \leq q \leq t, q \in \mathbb{Z}} \|q\xi\|$ , где  $\|\cdot\|$  — расстояние до ближайшего целого. В 2009 году Кан



и Мошевитин доказали, что если  $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$ , то разность  $\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$  меняет свой знак бесконечно много раз при  $t \rightarrow \infty$ . В 2017 году Дубицкасу удалось показать, что если  $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$ , то последовательность значений

$$d(n) = \left| \frac{1}{\psi_\alpha(n)} - \frac{1}{\psi_\beta(n)} \right|$$

является неограниченной. Наконец, в 2019 году Мошевитин получил следующий результат:

$$|\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)| \geq K \cdot \min(\psi_\alpha(t), \psi_\beta(t)) \quad \text{для бесконечно многих } t,$$

где  $K = \sqrt{\tau} - 1 = 0.2720^+$ , а  $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  — золотое сечение. Было также показано, что константа  $K$  является оптимальной. Используя классическую оценку  $\psi_\xi(t) \leq \frac{1}{t}$ , Мошевитин получил улучшение результата Дубицкаса о последовательности  $d(n)$ , а именно

$$d(t) = \left| \frac{1}{\psi_\alpha(t)} - \frac{1}{\psi_\beta(t)} \right| \geq Kt \quad \text{для бесконечно многих } t.$$

Данный результат оптимальным не является, поэтому в нашем докладе мы докажем оптимальную оценку

$$\left| \frac{1}{\psi_\alpha(t)} - \frac{1}{\psi_\beta(t)} \right| \geq Ct \quad \text{для бесконечно многих } t.$$

Константа  $C$  связана с  $K$  соотношением  $C = K(\sqrt{\tau} + \tau^{-3/2}) = \sqrt{5}(1 - \sqrt{\phi}) = 0.47818^+$ , где  $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

## Программа секции «Нелинейные задачи с поверхностями раздела»

Секция проводится онлайн

Координатор: В.Б. Бекежанова

### ВТОРНИК, 10 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>00</sup> Владимир Садовский (Институт вычислительного моделирования СО РАН). *Субдифференциальные формулировки уравнений механики упругопластических, сыпучих и пористых сред*

15<sup>00</sup> — 15<sup>20</sup> Оксана Садовская (Институт вычислительного моделирования СО РАН). *Постановка и численная реализация условий контактного взаимодействия на поверхностях раздела в блочных средах*

15<sup>20</sup> — 15<sup>40</sup> Михаил Филимонов (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УО РАН). *Моделирование температурного поля мерзлого грунта под зданиями в г. Салехарде с учетом данных мониторинга*

15<sup>40</sup> — 16<sup>00</sup> Артур Кром (Институт вычислительного моделирования СО РАН). *Исследование ионной проводимости мембраны с проводящей поверхностью: сравнение одномерной и двумерной моделей*

16<sup>00</sup> — 16<sup>20</sup> Анна Любанова (Сибирский федеральный университет). *Моделирование теплообмена в процессе непрерывного литья-прессования*

### ПЕРЕРЫВ

16<sup>40</sup> — 17<sup>00</sup> Владимир Шайдуров (Институт вычислительного моделирования СО РАН). *Численное решение задачи оптимального ценообразования для опциона продаж*

17<sup>00</sup> — 17<sup>20</sup> Ирина Денисова (Институт проблем машиностроения РАН). *Глобальная разрешимость задачи о вращении двухфазной капли*

17<sup>20</sup> — 17<sup>40</sup> Кирилл Смирнов (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Эволюция гидравлического прыжка под действием массовой силы в продольном направлении*

17<sup>40</sup> — 18<sup>00</sup> Василий Голубев (Московский физико-технический институт). *Схемы повышенного порядка для расчета динамики слоистых и блочных сред*

18<sup>00</sup> — 18<sup>20</sup> Евгений Могилевский (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Влияние микрорельефа на твердой поверхности на устойчивость стекающей жидкой пленки*

## ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>00</sup> Илья Никитин (Институт автоматизации проектирования РАН). *Применение непрерывных и дискретных маркеров к расчету течений в областях переменной геометрии*

15<sup>00</sup> — 15<sup>20</sup> Максим Фролов (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого). *Апостериорные оценки точности решений и адаптивные алгоритмы в задачах с микроструктурой*

15<sup>20</sup> — 15<sup>40</sup> Кирилл Гадыльшин (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Восстановление верхней части геологического разреза в сложных условиях Восточной Сибири на основе обращения полного волнового поля с учётом топографии сред*

15<sup>40</sup> — 16<sup>00</sup> Виктория Бекежанова (Институт вычислительного моделирования СО РАН). *Моделирование динамики локально нагреваемой двухфазной системы с деформируемой границей раздела*

16<sup>00</sup> — 16<sup>20</sup> Ирина Степанова (Институт вычислительного моделирования СО РАН). *Анализ применимости некоторых точных решений уравнений термодиффузионной конвекции для моделирования течений бинарных смесей в протяженных горизонтальных каналах*

## ПЕРЕРЫВ

16<sup>40</sup> — 17<sup>00</sup> Софья Козлова (Институт вычислительного моделирования СО РАН). *О конвективной устойчивости бинарной смеси с аномальным эффектом Соре в цилиндрической термодиффузионной колонне*

17<sup>00</sup> — 17<sup>20</sup> Евгений Магденко (Институт вычислительного моделирования СО РАН). *Нелинейная обратная задача о движении двух несмешивающихся жидкостей во вращающемся цилиндре*

17<sup>20</sup> — 17<sup>40</sup> Виктор Андреев (Институт вычислительного моделирования СО РАН). *Трёхмерное двухслойное стационарное термокапиллярное течение с полем скоростей специального вида*

17<sup>40</sup> — 18<sup>00</sup> Наталья Собачкина (Сибирский федеральный университет). *Совместное движение двух бинарных смесей в цилиндре с учётом изменения внутренней энергии поверхности раздела*

18<sup>00</sup> — 18<sup>20</sup> Илья Шефер (Сибирский федеральный университет). *Спектр характеристических возмущений и критические характеристики устойчивости двухслойного течения с испарением на границе раздела*

## **Трёхмерное двухслойное стационарное термокапиллярное течение с полем скоростей специального вида**

В.К. Андреев, Е.Н. Лемешкова

Институт вычислительного моделирования СО РАН  
andr@icm.krasn.ru, elena\_cher@icm.krasn.ru

Изучена задача о трёхмерном стационарном течении двух несмешивающихся жидкостей в канале с твёрдыми параллельными стенками, на одной из которых поддерживается заданное распределение температуры, а другая стенка теплоизолирована. Температура в жидкостях квадратично зависит от горизонтальных координат, поле скоростей имеет специальный вид. Возникающая сопряжённая задача для модели Обербека – Буссинеска является обратной и сведена к системе десяти интегро-дифференциальных уравнений.

На внутренней границе раздела задаётся условие баланса энергии, учитывающее изменение внутренней энергии межфазной поверхности (ВЭМП). Для оценки влияния этого эффекта на возникающие течения изучена модельная линейная задача, в которой единственным нелинейным членом является дополнительное слагаемое в условии баланса энергии на границе раздела, описывающее энергетический вклад термокапиллярных сил. Нелинейная задача решена тау-методом, где в качестве базисных функций выбирались смещённые полиномы Лежандра. Расчёты тестовых задач показали, что именно они обеспечивают высокую точность при небольшом их числе. Найдено два различных решения нелинейной задачи, а в случае, когда влияние ВЭМП отсутствует — одно. Установлено, что найденные решения с уменьшением числа Марангони стремятся к решениям модельной задачи о ползущем течении. Для каждого из решений построены характерные структуры течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 20-01-00234).

## **Совместное движение двух бинарных смесей в цилиндре с учётом изменения внутренней энергии поверхности раздела**

В.К. Андреев<sup>1</sup>, Н.Л. Собачкина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН

<sup>2</sup>Сибирский федеральный университет

andr@icm.krasn.ru, sobachkinanat@mail.ru

Специфика явлений, происходящих на границе раздела жидкостей, связана с существованием энергии и энтропии поверхностной фазы, избыточных по отношению к объёмным фазам в переходном слое. Однако энергетический обмен между объёмными и поверхностной фазами изучен недостаточно.

В данной работе исследуется двумерное стационарное осесимметричное течение двух несмешивающихся несжимаемых бинарных смесей в цилиндре, внешняя граница которого поддерживается при постоянной температуре. Влиянием силы тяжести можно пренебречь, так как трубка является достаточно узким капилляром. Смеси контактируют через общую поверхность раздела, на которой учитывается полное энергетическое условие. Оно

означает, что скачок теплового потока в направлении нормали к поверхности раздела компенсируется изменением внутренней энергии этой поверхности.

Решение задачи ищется в специальном виде. Это решение типа Хименца, в котором поле скоростей линейно относительно одной из координат. Что касается температуры и концентрации, то они распределены по квадратичному закону. После подстановки решения в уравнения движения возникает сопряжённая краевая задача, являющаяся нелинейной и обратной относительно градиентов давлений вдоль оси цилиндрического капилляра.

В предположении малости теплового числа Марангони рассмотрено ползущее течение бинарных смесей. Для этой задачи получено точное решение. Кроме того, показана возможность существования двух решений в зависимости от значений параметров задачи. Одно из решений характеризуется физически неправдоподобными (слишком большими) значениями продольных градиентов давлений в обоих слоях. При этом количество решений во многом зависит от энергетического параметра, характеризующего значимость процесса изменения внутренней энергии для развития конвективного движения вблизи поверхности раздела.

В результате численных расчетов для модельной задачи при малых числах Марангони установлено, что увеличение энергетического параметра приводит к изменению характерной скорости конвекции, снижению интенсивности и способствует ламинаризации течения вблизи межфазной поверхности. К нелинейной задаче применен тау-метод (модификация метода Галеркина). В качестве базисных функций взяты смещённые полиномы Якоби. В результате система интегро-дифференциальных уравнений сведена к замкнутой системе нелинейных алгебраических уравнений. Для её решения использовался метод Ньютона. Его сходимость во многом зависит от выбора начального приближения. Оказывается, что итерационная последовательность сходится только в том случае, когда в качестве начального приближения взято решение модельной задачи с малыми значениями градиентов давлений вдоль жидких слоёв. Итак, решение нелинейной задачи существует и единственно. Показано, что с уменьшением теплового числа Марангони оно сходится к решению задачи о ползущем течении бинарных смесей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 20-01-00234).

## **Моделирование динамики локально нагреваемой двухфазной системы с деформируемой границей раздела**

**В.Б. Бекежанова**

Институт вычислительного моделирования СО РАН

`vbek@icm.krasn.ru`

Исследуется динамика двухслойной системы с деформируемой границей раздела жидкость – газ в плоской кювете в условиях локальной тепловой нагрузки. Внешние границы массива – твёрдые непроницаемые стенки, при этом нагрев производится тепловыми элементами конечного размера со стороны нижней границы. Межфазная граница представляет собой термокапиллярную поверхность, допускающую массоперенос диффузионного типа за счёт испарения. Рабочие жидкости (жидкость и газопаровая смесь) считаются вязкими теплопроводными несжимаемыми средами с постоянными коэффициентами переноса. В начальный момент времени система находится в состоянии механического и локального термодинамического равновесия.

Включение нагревателей, помещённых на подложку, индуцирует движение в обеих фазах, испарение жидкости и последующую деформацию границы раздела. Для описания движения каждой из сред используются уравнения Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска. Изменение температуры в обоих слоях описывается уравнением переноса тепла, а изменение концентрации пара в газовом слое — уравнением конвективной диффузии. При этом в газовой фазе учитывается влияние взаимообратных эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности. На внешних границах кюветы выполняются условия вязкого прилипания для скорости, заданы условия первого рода для температуры (при этом учтено наличие нагревателей на нижней стенке) и условия нулевого потока пара на той части границы кюветы, которая контактирует с парогазовым слоем. На внутренней границей раздела постулируется непрерывность полей скорости и температуры, задаётся кинематическое условие, формулируются соотношения, задающие баланс сил и энергии. При этом энергетическое условие получено с учётом уравнения баланса массы и содержит величину  $M$ , характеризующую массовую скорость испарения при диффузионном массопереносе через границу раздела. Кроме того, предполагается, что на межфазной поверхности концентрация насыщенного пара определяется из линеаризованного условия — следствия уравнений Клапейрона – Клаузиуса и Менделеева – Клапейрона для идеального газа. Задача формулируется в терминах функций (“функция тока – вихрь”), так что искомыми функциями являются функция тока, завихренность и температура в каждой из фаз, концентрация пара в газовом слое и положение границы раздела, которое определяется с помощью кинематического условия в процессе решения задачи.

В рамках предложенной постановки проведено численное моделирование динамики двухфазной системы бензин – воздух при нагреве двумя тепловыми элементами разной температуры, размещёнными на подложке. Исследовано влияние термодиффузионных эффектов на характеристики паросодержания в газовом слое и амплитуду деформаций межфазной границы для системы с толщинами обоих слоёв 2 мм. Показано, что эффект Соре вызывает формирование зоны с повышенной концентрацией пара вблизи верхней стенки над нагревателем с более высокой температурой. Тяжёлая примесь (пары этанола) под действием этого эффекта переносится в газовом слое от границы раздела к стенке. Для исследуемой пары рабочих сред эффект Дюфура не оказывает заметного влияния на параметры возникающих конвективных режимов. Для системы с испарением характерной особенностью являются осцилляции границы раздела даже в установившемся конвективном режиме, которые отсутствуют в системе без испарения.

Работа выполнена при поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1384).

# **Восстановление верхней части геологического разреза в сложных условиях Восточной Сибири на основе обращения полного волнового поля с учётом топографии сред**

К.Г. Гадыльшин, В.А. Чеверда  
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
Gadylshih@gmail.com

Сейсмические исследования на обширной территории Восточной Сибири проводятся в сейсмогеологических условиях разной сложности. Их основная задача состоит в получении качественного сейсмического изображения. Для достижения этой цели необходимо обеспечить качественное восстановление глубинно-скоростной модели. Её использование должно обеспечить компенсацию скоростных аномалий и корректный расчёт статических поправок. Однако, как показывает накопленный опыт, для сложной приповерхностной структуры, характеризующейся наличием интрузий, ловушек и туфогенных образований, качество скоростных моделей, полученных на основе томографического уточнения, оказывается недостаточным [1].

В работе рассматривается подход к определению приповерхностной области, основанный на обращении полного поля. Полученные результаты демонстрируют способность обращения полного волнового поля восстанавливать сложные геологические структуры приповерхностной области даже при наличии высокоскоростных аномалий, связанных с распространением трапповых интрузий.

## **Список литературы**

- [1] Tcheverda V., Gadylshin K. Elastic Full-Waveform Inversion Using Migration-Based Depth Reflector Representation in the Data Domain, Geosciences, 2021, **11**, 76.

## **Глобальная разрешимость задачи о вращении двухфазной капли**

И.В. Денисова<sup>1</sup>, В.А. Солонников<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН

<sup>2</sup>Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН  
denisovairinavlad@gmail.com, solonnik@pdmi.ras.ru

Изучается устойчивость аксиальносимметричной капли  $\mathcal{F}$ , состоящей из двух вязких несжимаемых капиллярных жидкостей  $\mathcal{F}^{\pm}$  и вращающейся вокруг оси  $x_3$  с малой угловой скоростью  $\omega$ . Предполагается, что область  $\mathcal{F}^+$  находится строго внутри области  $\mathcal{F}^-$ . Возмущение этого движения может быть описано с помощью задачи со свободной границей для отклонений векторного поля скоростей  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  и функции давления  $p$  двухфазной жидкости от стационарных скорости и давления, описывающих вращение капли как твёрдого тела. Эта задача, записанная в системе координат, вращающейся со

скоростью  $\omega$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\rho^\pm(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + 2\omega(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v})) - \mu^\pm \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla p &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } \Omega_t \equiv \Omega_t^+ \cup \Omega_t^-, \quad t > 0, \\
\mathbf{v}(x, 0) &= \mathbf{v}_0(x), \quad x \in \Omega_0 \equiv \Omega_0^+ \cup \Omega_0^- \in \mathbb{R}^3, \\
\mathbb{T}(\mathbf{v}, p)\mathbf{n} &= (\sigma^- H^-(x) + \rho^- \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + p_0^-)\mathbf{n}, \quad x \in \Gamma_t^- \equiv \partial\Omega_t^-, \\
[\mathbf{v}]|_{\Gamma_t^+} &\equiv \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \in \Gamma_t^+, \\ x \in \Omega_t^+}} \mathbf{v}(x, t) - \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \in \Gamma_t^+, \\ x \in \Omega_t^-}} \mathbf{v}(x, t) = 0, \quad \Gamma_t^+ \equiv \partial\Omega_t^+, \\
V_n &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma_t \equiv \Gamma_t^- \cup \Gamma_t^+, \\
[\mathbb{T}(\mathbf{v}, p)\mathbf{n}]|_{\Gamma_t^+} &= \left( \sigma^+ H^+(x) + [\rho^\pm]|_{\Gamma_t^+} \frac{\omega^2}{2} |x'|^2 + p_0^+ \right) \mathbf{n}, \quad x \in \Gamma_t^+, \quad x' = (x_1, x_2, 0),
\end{aligned}$$

где  $V_n$  — скорость движения объединённой границы  $\Gamma_t$ ,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $\Gamma_t$ ;  $\nu^\pm$ ,  $\rho^\pm$  — ступенчатые функции вязкости и плотности соответственно,  $\mathbf{v}_0$  — начальное распределение скоростей,  $\mathbb{T}$  — это тензор напряжений с элементами  $T_{ik} = -\delta_i^k p + \mu^\pm (\partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i)$ ,  $i, k = 1, 2, 3$ ;  $\mu^\pm = \nu^\pm \rho^\pm$ ,  $\delta_i^k$  — символ Кронекера,  $\sigma^\pm \geq 0$  — коэффициенты поверхностного натяжения,  $p_0^\pm$  — заданные функции внешнего давления на  $\Gamma_t^\pm$  соответственно,  $H^\pm$  — удвоенные средние кривизны этих поверхностей,  $\mathbf{e}_3$  — орт в направлении оси  $x_3$ . Точка означает декартово скалярное произведение, “ $\times$ ” — векторное. Предполагается выполнение законов сохранения объёма:  $|\Omega_t| = |\mathcal{F}|$ ,  $|\Omega_t^+| = |\mathcal{F}^+|$ , центра тяжести обеих жидкостей, количества движения и углового момента. Здесь  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}^+$  — осесимметричные фигуры равновесия, имеющие также симметрию по  $x_3$ .

Получена глобальная однозначная разрешимость задачи при малых начальных данных и скорости вращения, а также близости заданных начальных поверхностей к некоторым аксиальносимметричным фигурам равновесия. Доказано, что если вторая вариация функционала энергии положительна, то малое возмущение осесимметричной фигуры равновесия экспоненциально стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , а движение капли переходит во вращение жидкой массы как твёрдого тела. Мы развиваем методику, использованную для доказательства устойчивости медленного движения двухслойной капли, близкой к шару [1]. Некоторые предварительные соображения по этой задаче были даны в [2]. В частности, было доказано существование осесимметричных фигур равновесия, близких к соответствующим шарам.

## Список литературы

- [1] Денисова И. В., Солонников В. А.,  $L_2$ -теория для двухфазной несжимаемой жидкости с учётом поверхностного натяжения, Препринт ПОМИ, **12/2017**, СПб., 2017. 29 с.
- [2] Солонников В. А. Задача о нестационарном движении двух вязких несжимаемых жидкостей, Проб. мат. анализа, 2006, **34**, 103-121.



# О конвективной устойчивости бинарной смеси с аномальным эффектом Соре в цилиндрической термодиффузионной колонне

С.В. Козлова<sup>1</sup>, И.И. Рыжков<sup>1,2</sup>, М.М. Боу-Али<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Институт вычислительного моделирования СО РАН

<sup>2</sup> Сибирский федеральный университет, Красноярск

<sup>3</sup> Университет Мондрагона, Испания

sonique@icm.krasn.ru

Термодиффузия (эффект Соре) — перенос массы компонентов смеси под действием разности температур. Данный эффект имеет место во многих природных и технологических процессах. Термодиффузионная колонна — это экспериментальная установка для измерения коэффициентов термодиффузии. Корректные измерения возможны только при устойчивом конвективном движении смеси в колонне. Математическое моделирование позволяет наиболее полно описать термодиффузионный процесс, а также объяснить некоторые экспериментальные наблюдения [1].

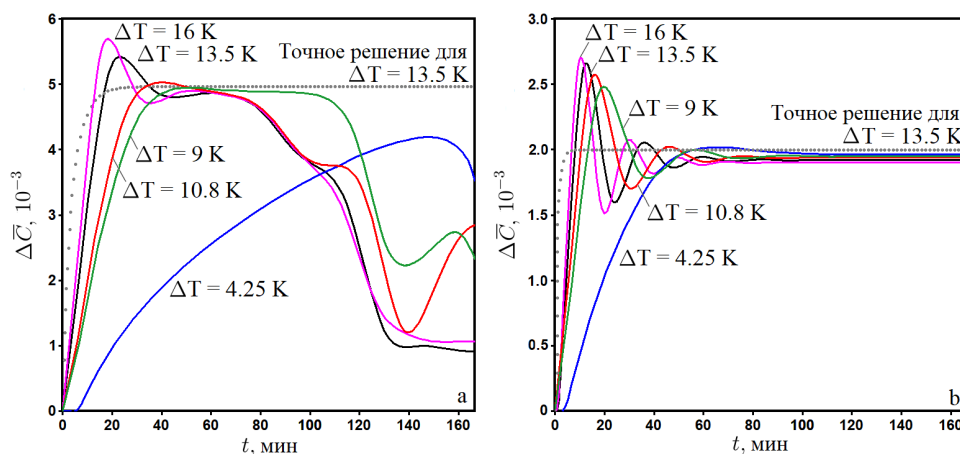


Рис. 1: Эволюция разности средней концентрации этанола между нижним и верхним концами колонн (результаты численного моделирования): (а) — колонна I, (б) — колонна II

В работе выполнено численное 3D-моделирование разделения смеси этанол – вода в цилиндрической термодиффузионной колонне. Средняя массовая доля этанола равна 0.2204. При данной концентрации смесь обладает аномальным эффектом Соре (более тяжелый компонент — вода — накапливается вверху колонны). Расчёт выполнен для двух колонн с разными зазорами между стенками и одинаковой высотой. Параметры колонн, физические свойства смеси и приложенные разности температур взяты из эксперимента в университете Мондрагона (Испания) [1]. Установлено, что разделение смеси зависит от параметров колонны (ширина зазора, отношение радиусов цилиндров). Согласно численному расчёту, конвективное течение смеси в колонне I (Рис. 1а) всегда неустойчиво. Эксперимент для колонны II показывает, что конвективное течение и разделение смеси в ней устойчиво при достижении разности температур между стенками критического значения. Согласно численному расчету для колонны II (Рис. 1б), разделение смеси устойчиво при всех разностях температур [2].

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1384).

## Список литературы

- [1] Bou-Ali M. M., Ecenarro O., Madariaga J. A., et al. Stability of convection in a vertical binary fluid layer with an adverse density gradient, *Phys. Rev. E*, 1999, **59(1)**, 1250-1252.
- [2] Kozlova S. V., Ryzhkov I. I., Bou-Ali M. M. Modeling of separation in a binary mixture with negative Soret effect in a cylindrical thermogravitational column, *J. Non-Equil. Thermodyn*, 2021, **46(2)**, 109-120.

## Исследование ионной проводимости нанопористых мембран с электропроводящей поверхностью

А.И. Кром<sup>1</sup>, И.И. Рыжков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт вычислительного моделирования СО РАН

<sup>2</sup> Сибирский федеральный университет, Красноярск

kai@icm.krasn.ru

Мембранные технологии активно развиваются благодаря большому количеству промышленных приложений (обессоливание и очистка воды, разделение смесей, электрохимическое преобразование энергии, химическая сенсорика и др.). Одной из важных задач является повышение ионной проводимости мембран. Если мембрана имеет электропроводящую поверхность, то увеличение ионной проводимости может быть достигнуто путём изменения потенциала поверхности. В настоящей работе рассмотрены двумерная (2D) модель пространственного заряда и одномерная (1D) модель однородного потенциала [1] для описания движения водного электролита через мембрану с электропроводящей поверхностью под действием внешнего электрического поля. С помощью построенных моделей был проведён анализ зависимости проводимости мембраны от радиуса пор, проницаемости слоя Штерна, поверхностного потенциала и концентрации соли (KCl). Результаты численных расчётов для случая зависимости от проницаемости слоя Штерна представлены на рисунке 2, где сплошные кривые соответствуют 2D модели, а пунктирные — 1D модели (алгоритм численной реализации моделей см. в [2, 3]).

Можно видеть, что увеличение проницаемости слоя Штерна повышает ионную проводимость раствора за счёт уменьшения экранирующего эффекта поверхностного заряда. Для меньших радиусов пор этот эффект заметен сильнее, в следствие чего значения проводимости выше, чем для пор с большим радиусом. Отклонения одномерной модели от двумерной объясняются осреднением всех величин по радиусу поры. Этот эффект становится более заметным при увеличении радиуса поры и проницаемости слоя Штерна.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1384).

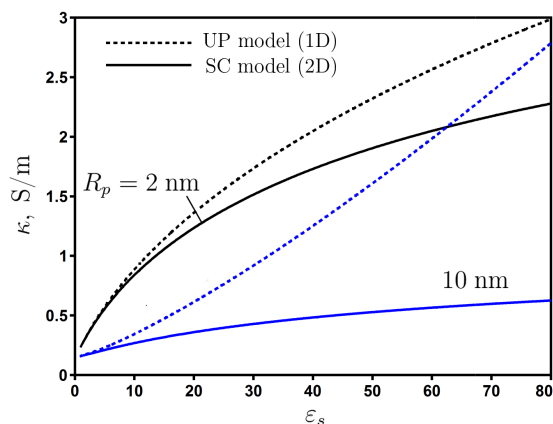


Рис. 2: Зависимость проводимости мембраны от диэлектрической проницаемости слоя Штерна

## Список литературы

- [1] Peters P.B., van Roij R., Bazant M.Z. Analysis of electrolyte transport through charged nanopores, *Physical Review E*, 2016, **93**, 053108.
- [2] Ryzhkov I.I., Vyatkin A.S., Mikhлина E.V. Modelling of conductive nanoporous membranes with switchable ionic selectivity, *Membranes and Membrane Technologies*, 2020, **2**, 10-19.
- [3] Krom A.I., Medvedeva M.I., Ryzhkov I.I. Modelling the ionic conductivity of nanopores with electrically conductive surface, *J. Siber. Fed. Univer.: Mathematics & Physics*, 2021, **14**, 74-86.

## Моделирование тепломассообмена в процессе непрерывного литья-прессования

А.Ш. Любанова, И.В. Солопко

Сибирский федеральный университет

lubanova@mail.ru, isolopko@sfu-kras.ru

В современной металлургической промышленности широко применяются различные модификации машин и установок, позволяющих совмещать ряд процессов путем реализации единой технологической схемы «жидкий металл» → «кристаллизация» → «обработка металлов давлением» → «готовое изделие». Наибольшее применение в прессовом производстве получили устройства, действие которых основано на использовании сил контактного трения между заготовкой и подвижной частью разъёмного контейнера для выдавливания металла в отверстие матрицы. Эта технология известна как способ Конформ.

Пластическая деформация всегда сопровождается выделением тепла, причем, необратимо. Повышение температуры может достигать нескольких десятков и даже сотен градусов в зависимости от величины деформации и свойств металла. Калориметрические опыты показали, что свыше 90% всей механической работы, затраченной на пластическую деформацию, переходит в тепло.

В работе предлагается математическая модель теплообмена, которая включает в себя уравнения теплопереноса в очаге пластической деформации, учитывающие тепловыделение и конвекцию в процессе пластической деформации, в инструменте и в ручье вращающегося колеса-кристаллизатора. Распределение температуры в очаге деформации зависит от скорости движения металла, которая является решением краевой задачи для уравнений пластического течения.

Задача теплообмена в ручье колеса-кристаллизатора представляет собой задачу для нелинейного уравнения теплопроводности со свободными границами между зоной жидкого металла и зоной кристаллизации, а также между зоной кристаллизации и зоной твёрдого металла. Теплообмен описывается нелинейным уравнением теплопроводности, которое в цилиндрических координатах имеет вид

$$\psi(\theta) \frac{d\theta}{dt} = \lambda \left( \frac{1}{r} \theta_r + \theta_{rr} \frac{1}{r^2} \theta_{\varphi\varphi} + \theta_{zz} \right)$$

где  $\theta$  – текущая температура;  $\psi(\theta)$  постоянна при  $\theta > T_L$  и  $\theta < T_S$  (в зонах жидкого и твёрдого сплава),

$$\psi(\theta) = 1 + \frac{Q}{c(k-1)(T_L - T_K)} \left( \frac{T_L - T_K}{\theta - T_K} \right)^{\frac{2-k}{1-k}}$$

при  $T_S \leq \theta \leq T_L$  (в зоне кристаллизации);  $T_S$  – температура солидус сплава;  $T_L$  – температура ликвидус сплава;  $T_K$  – температура кристаллизации чистого металла ( $T_S > T_K$ );  $Q$  – скрытая теплота кристаллизации чистого металла;  $c$  – коэффициент теплоёмкости;  $\lambda$  – коэффициент температуропроводности;  $k$  – коэффициент сегрегации примеси между твёрдой и жидкой фазой ( $k > 1$ ).

Краевые условия включают в себя начальное распределение текущей температуры

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(r, \varphi, z)$$

и условия теплообмена по закону Ньютона на поверхностях контакта металла с инструментом и воздухом. На свободных поверхностях раздела между зоной жидкого сплава и зоной кристаллизации ( $S_{lq}$ ) и между зоной кристаллизации и зоной твёрдого сплава ( $S_{cr}$ ) задаются условия

$$\theta|_{S_{lq}} = T_L, \quad \theta|_{S_{cr}} = T_S.$$

## **Нелинейная обратная задача о движении двух несмешивающихся жидкостей во вращающемся цилиндре**

Е.П. Магденко

Институт вычислительного моделирования СО РАН

magdenko\_evgeniy@icm.krasn.ru

Исследуется сопряжённая стационарная краевая задача, описывающая трёхмерное двухслойное осесимметрическое движение двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей во вращающемся цилиндре с твёрдой внешней стенкой и общей изотермической недеформируемой поверхностью раздела. При этом массовые силы отсутствуют, а

на границе раздела поверхностное натяжение линейно зависит от температуры. Рассматривается поле скоростей типа Хименца. Особенностью рассматриваемой задачи является учёт полных условий для температуры на поверхности раздела, когда берётся в расчёт и энергия, затрачиваемая на деформацию этой поверхности. Как было показано ранее в работе [1], для обычных жидкостей при комнатной температуре значение параметра внутренней поверхностной энергии мало, и изменения характерной скорости конвекции за счёт его приращений незначительны. Однако при достаточно высоких температурах, в условиях, когда вязкость и теплопроводность обычных жидкостей существенно уменьшается, а также для жидкостей с пониженной вязкостью (например, для некоторых криогенных жидкостей, таких как жидкий  $\text{CO}_2$ ) эффекты, связанные с теплотой образования межфазной поверхности, согласно [2], могут оказать значительное воздействие на динамику жидкостной системы. В цитируемых работах было установлено, что максимальное значение параметра внутренней поверхностной энергии достигается вблизи критических точек. Отметим, что влияние на конвективную устойчивость термокапиллярных систем механизма локального изменения внутренней энергии межфазной поверхности, который следует принимать во внимание для жидкостей при повышенных температурах и малой вязкостью, описано в главе VI монографии [3].

Поставленная задача была решена с помощью модифицированного метода Галёркина и метода Ньютона. В результате было установлено, что при увеличении значения числа Марангони течение жидкостей становится интенсивней. Также на движение жидкости оказывает воздействие значение угловой скорости вращения цилиндра. Получено, что температура внутри жидкостей увеличивается с уменьшением значения параметра межфазной энергии. В случае ползущего течения, то есть когда физические параметры жидкости и толщины каналов могут быть небольшими, установлено, что жидкости вращаются как твёрдые тела [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1384).

## Список литературы

- [1] Harper J.F., Moore D.W., Pearson J.R.A. The effect of the variation of surface tension with temperature on the motion of drops and bubbles, *J. Fluid Mech.*, 1967, **27(2)**, 361-366.
- [2] Torres F.E., Helborzheimer E. Temperature gradients and drag effects produced by convection of interfacial internal energy around bubbles, *Phys. Fluids. A.*, 1993, **5(3)**, 537-549.
- [3] Андреев В.К., Захватаев В.Е., Рябицкий Е.А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000.
- [4] Magdenko E.P. Three-dimensional stationary flow of two immiscible liquids in a rotating cylinder with an isothermal interface, *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2020, **8(4)**, 345-355.

# Влияние микрорельефа на твёрдой поверхности на устойчивость стекания жидкой плёнки

Е.И. Могилевский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

evgeny.mogilevskiy@math.msu.ru

Рассматривается задача о течении тонкого слоя нелинейно-вязкой жидкости по наклонной плоскости под действием силы тяжести. На плоскость нанесён периодический рельеф, высота которого много меньше периода и сравнима или мала по сравнению с характерной толщиной плёнки. Предполагается, что поверхностное натяжение жидкости достаточно велико, так что на масштабе неровностей гравитационные, вязкие и капиллярные силы имеют один порядок. Выводятся общие уравнения для произвольного периодического рельефа и произвольного обобщенно-ньютоновского реологического закона. Вычисления проведены для течения степенной жидкости по синусоидальному рельефу.

Для описания течения используется метод Шкадова, который предполагает наличие фиксированного профиля скорости в каждом сечении в каждый момент времени. Данный метод приводит к системе уравнений относительно интегральных характеристик течения: локальной толщины плёнки и расхода. Форма рельефа определяет неоднородность в уравнениях, которая линейна относительно функции, описывающей отклонение твёрдой поверхности от плоскости.

Форма свободной поверхности получена численно. Кроме того, в предположении о малости амплитуды рельефа, получено приближенное аналитическое выражение. Показано, что при доминировании инерционных членов над самоиндуцированным градиентом гидростатического давления имеет место резонанс свободной поверхности — максимум зависимости амплитуды свободной поверхности от периода рельефа. Отмечается, что соотношение тех же физических факторов определяет неустойчивость течения по гладкой плоскости. Обнаружено, что резонанс при условии устойчивости течения может наблюдаться только для дилатантных жидкостей.

Устойчивость стационарного течения исследована методом нормальных мод для периодических по времени малых возмущений. Пространственное развитие таких возмущений описывается обыкновенным дифференциальным уравнением четвёртого порядка с периодическими коэффициентами, которые зависят от стационарного решения. Исследование проводится методами теории Флоке. Получено приближенное выражение для поправок к параметрам неустойчивости за счёт рельефа при малом значении амплитуды рельефа. Показано, что они пропорциональны второй степени амплитуды рельефа.

Рассмотрена эволюция топологии нейтральной кривой при увеличении амплитуды рельефа. Показано, что коротковолновый рельеф дестабилизирует течение вне зависимости от реологии, при этом уменьшается значение критического числа Рейнольдса. Значение периода рельефа, при которой критическое число Рейнольдса не изменяется, нормированное на капиллярную длину, для дилатантных жидкостей меньше, чем для псевдопластических и монотонно зависит от реологического показателя.

Моделирование развития малых периодических по времени возмущений на большом пространственном интервале в рамках уравнений для интегральных характеристик подтвердило выводы линейного анализа устойчивости. Показано, что в спектрах развитых нелинейных волн наблюдаются частоты, соответствующие вносимым возмущениям,

а также волнам с частотами, которые наблюдаются на гладкой плоскости у возмущений с периодом, равным периоду рельефа.

Работа выполнена в рамках госбюджетного плана МГУ имени М. В. Ломоносова

## **Эволюция гидравлического прыжка под действием массовой силы в продольном направлении**

Е.И. Могилевский, К.В. Смирнов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

evgeny.mogilevskiy@math.msu.ru

При осесимметричном растекании тонкого слоя вязкой жидкости от источника по горизонтальной поверхности на некотором расстоянии от оси симметрии, как правило, имеет место резкое увеличение толщины слоя — гидравлический прыжок. Он образуется, если скорость жидкости вблизи источника превосходит скорость распространения гравитационных волн. При отсутствии капиллярных сил положение прыжка определяется балансом вязких, гравитационных и инерционных сил. Рассматривается задача о влиянии подвода импульса на положение прыжка и структуру течения, в качестве механизма подвода импульса используется массовая сила, действующая в направлении течения.

Рассматривается следующая модель, которая использовалась в [1]: пусть тонкая струя вязкой жидкости с постоянным расходом падает на вершину полусферы достаточно большого радиуса, ось которой вертикальна и совпадает со струей. Течение осесимметрично и стационарно. Для описания динамики жидкости используются уравнения тонкого слоя, капиллярные силы не учитываются. Предельным случаем для рассматриваемой задачи является классическая задача о гидравлическом прыжке на горизонтальном диске. В рассматриваемой постановке к имеющемуся безразмерному параметру, характеризующему толщину слоя в некоторой точке вблизи оси симметрии, добавляется ещё один, соответствующий кривизне твёрдой поверхности, и описывающий плотность продольной компоненты массовой силы. Предполагается, что кривизна твёрдой поверхности достаточно мала, так что используется линейная зависимость массовой силы от расстояния до оси симметрии.

В отличие от течения по плоскому диску, при наличии продольной силы имеется асимптотическое решение, соответствующее балансу вязких и массовых сил. В случае малой массовой силы это течение докритическое, то есть его скорость меньше скорости гравитационных волн: имеет место переход от сверхкритического к докритическому течению. Проведён качественный анализ уравнений тонкого слоя, осреднённых в предположении о постоянстве формы профиля скорости (уравнений Бора [2]). Получена оценка на плотность массовой силы, при которой существует гидравлический прыжок. Показано, что при больших значениях кривизны твёрдой поверхности имеет место непрерывный переход от сверхкритического к докритическому течению. Получена оценка наибольшего радиуса прыжка.

Отмечается, что в разных точках расчётной области по-разному устроен баланс сил: вблизи оси симметрии вязкие силы компенсируются инерционными, вдали от неё — гравитационными, соответственно, предположение о неизменности профиля скорости имеет ограничения. Проведено моделирование в рамках более общих уравнений, содержащих

дополнительную переменную, описывающую форму профиля. Показано, что переход от решений с прыжком к непрерывным в рамках уравнений Бора соответствует исчезновению отрывной зоны при описании течения уравнениями, содержащими параметр формы. Проводится сравнение полученных результатов с данными экспериментов и прямого численного моделирования [1].

Работа выполнена в рамках госбюджетного плана МГУ имени М. В. Ломоносова

## Список литературы

- [1] Saberi A., Teymourash A.R., Mahpeykar, M.R. Experimental and numerical study of circular hydraulic jumps on convex and flat target plates, *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 2020, **80**, 32-41.
- [2] Bohr T., Dimon P., Putkaradze V. Shallow-water approach to the circular hydraulic jump, *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, **254**, 635-648.

## Схемы повышенного порядка для расчета динамики слоистых и блочных сред

И.С. Никитин<sup>1</sup>, В.И. Голубев В.И.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт автоматизации проектирования РАН

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт

w.golubev@mail.ru

Сейсмическая разведка является стандартным методом поиска и разведки месторождений углеводородов и активно используется множеством сервисных компаний нефтегазового комплекса. Она основывается на распространении сейсмических волн в неоднородных средах, их отражении от контрастных границ, при регистрации которых может быть восстановлена внутренняя структура подповерхностного пространства. Важную роль при этом играют вычислительные методы, позволяющие рассчитывать волновые поля в заданной геологической модели. С развитием современных компьютерных систем происходит их усовершенствование и развитие.

В настоящей работе рассмотрена задача динамического нагружения деформируемой упругой среды с дискретным набором плоскостей скольжения и с нелинейными условиями проскальзывания на контактных границах структурных элементов. Для описания её поведения использована континуальная модель [1]. Для устойчивого численного решения определяющей системы дифференциальных уравнений использована явно- неявная схема с явной аппроксимацией уравнений движения и неявной аппроксимацией определяющих соотношений, содержащих малый параметр в знаменателе нелинейных свободных членов. Для согласования порядков аппроксимации явного упругого и неявного корректировочного шагов построена неявная аппроксимация второго порядка для определяющих уравнений и получены уточненные корректировочные формулы после упругого шага расчета. Для расчета «упругого» шага использован сеточно-характеристический метод на



прямоугольных сетках [2]. Использование метода согласованной аппроксимации позволило увеличить точность расчётов и провести численный расчёт нестационарных задач о рассеянии упругих волн и формировании отклика от ориентированного слоистого трещиноватого кластера в неоднородном вмещающем массиве (см. Рис. 3).

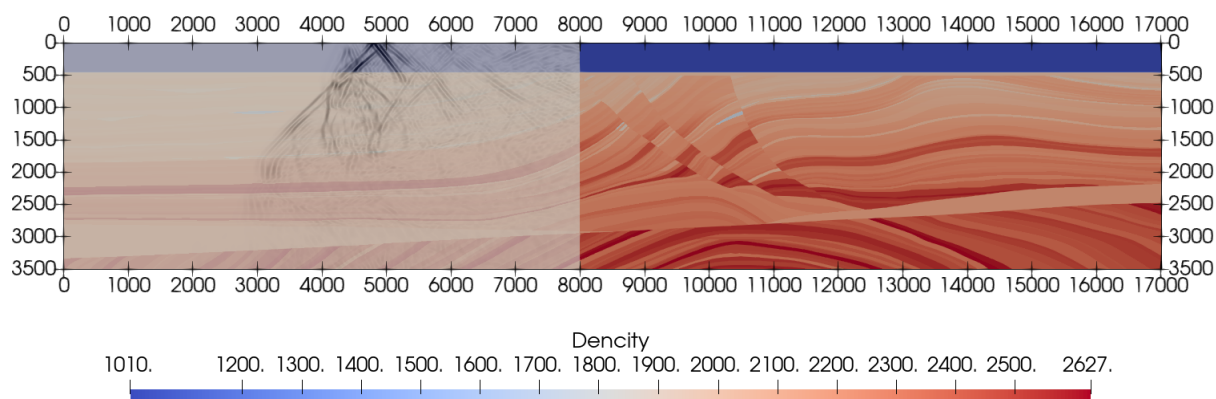


Рис. 3: Волновое поле, наложенное на плотностную модель среды

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 19-71-10060).

## Список литературы

- [1] Nikitin I. Dynamic models of layered and block media with slip, friction, and separation, *Mechanics of Solids*, 2008, **43(4)**, 652-661.
- [2] Golubev V., Nikitin I., Golubeva Y., Petrov I. Numerical simulation of the dynamic loading process of initially damaged media, *AIP Conference Proceedings*, 2020, **2309**, 0033949.

## Применение непрерывных и дискретных маркеров к расчёту течений в областях переменной геометрии

Н.Г. Бураго Н.Г.<sup>1,2</sup>, И.С. Никитин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

<sup>2</sup>Институт автоматизации проектирования РАН

i\_nikitin@list.ru

В работе описаны алгоритмы и результаты применения методов непрерывных и дискретных маркеров для расчёта течений тяжелой жидкости со свободными границами. Использована вариационная формулировка трёхмерных нестационарных уравнений Навье – Стокса и метод конечных элементов. Сквозной счёт течений проведён на окаймляющих переменную область течения регулярных лагранжево-эйлеровых адаптивных сетках [1] в трёх вариантах. В первом варианте область, занятая тяжёлой жидкостью, определяется

наложенной подвижной лагранжевой сеткой. Во втором варианте применены подчинённые уравнению переноса непрерывные маркер-функции, равные единице всюду, где есть жидкость, и нулю там, где жидкости нет. Изоповерхность со значением маркер-функции 0.5 представляет подвижную границу. Из-за диффузии граница размывается и определяется приближённо, что влечёт нарушение консервативности. Для исправления в алгоритм введена процедура антидиффузии с корректировкой, поддерживающей глобальное сохранение массы в области решения. В третьем варианте движение жидкости отслеживается дискретными лагранжевыми маркерами. Реализован алгоритм порождения маркеров на входных границах и уничтожения маркеров на выходных границах, что позволило рассматривать задачи с открытыми границами на больших временах. Предложена улучшенная интерполяция решения на границах.

Представлены результаты моделирования ряда задач: 1) о падении капли в бассейн, заполненный водой, 2) о стекании воды с этажа на этаж через отверстие; 3) об обрушении водяной колонны и о колебаниях жидкости в замкнутом бассейне; 4) о фонтане и луже от вертикальной струи; 5) о падении горизонтальных струй в бассейн с жидкостью и др. Представлены сравнения результатов с имеющимися решениями других авторов. Рассмотрен набор специфических тестовых задач для отладки алгоритмов, использующих непрерывные и дискретные маркеры, а также дополняющих стандартные тесты для методов расчёта задач Навье – Стокса. Например, дополнительно проверялась правильность расчёта гидростатики в условиях частично заполненной тяжёлой жидкостью области решения, сохранение массы во времени в покоящейся и в свободно падающей жидкости со свободными границами (капли). Эти тесты нетривиальны и позволяют эффективно отсеять неудачные варианты алгоритмов.

## Список литературы

- [1] Бураго Н. Г., Никитин И. С., Якушев В. Л. Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток, Журнал вычислительной математики и математической физики, 2016, **56(6)**, 1082-1092.

### **Постановка и численная реализация условий контактного взаимодействия на поверхностях раздела в блочных средах**

О.В. Садовская, В.М. Садовский

Институт вычислительного моделирования СО РАН  
o\_sadov@icm.krasn.ru, sadov@icm.krasn.ru

Горные породы имеют блочно–слоистое строение. Массив горных пород можно представить как совокупность вложенных друг в друга блоков разного масштабного уровня; блоки соединены между собой прослойками, состоящими из более слабых трещиноватых пород. На начальном этапе разрушения блочной среды с податливыми прослойками возникают трещины, которые распространяются по прослойкам, не нарушая целостности блоков.

В простейшем варианте трещин отрыва разрушение моделируется на основе деформационного критерия:  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^*$ , где  $\varepsilon_{11}^*$  — предельная нормальная деформация. До разрушения, пока  $\varepsilon_{11} < \varepsilon_{11}^*$ , и в месте соприкосновения берегов уже сформировавшейся трещины деформация прослойки происходит по упругопластическому или вязкопластическому закону. Нормальные напряжения  $\sigma_{11}$  в прослойке непрерывны и удовлетворяют контактными условиям: в раскрытой трещине они равны нулю, а в случае контакта — не положительны. Касательные напряжения в зоне трещины отсутствуют, если не учитывать трение.

В более общем случае используются интегральные критерии разрушения, которые учитывают процесс накопления повреждений [1].

При численной реализации модели условия контактного взаимодействия берегов трещины формулируются в виде вариационного неравенства [2, 3]:

$$\delta\sigma_{11} \left( \frac{1}{\rho c_1^2} \sigma_{11} - \varepsilon_{11} \right) \geq 0, \quad \dot{\varepsilon}_{11} = \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1}, \quad (2)$$

с ограничениями  $\sigma_{11} \leq 0$  и  $\tilde{\sigma}_{11} \equiv \sigma_{11} + \delta\sigma_{11} \leq 0$  ( $\delta_1$  — толщина прослойки в горизонтальном направлении,  $\rho$  и  $c_1$  — плотность и скорость продольных волн в прослойке,  $v_1^+$  и  $v_1^-$  — скорости на границах взаимодействующих блоков). Если  $\sigma_{11} < 0$ , то знак вариации напряжения  $\delta\sigma_{11}$  может быть произвольным; поэтому неравенство (2) превращается в закон Гука для прослойки. Если  $\sigma_{11} = 0$ , то с учётом  $\delta\sigma_{11} \leq 0$  выполняется условие  $\varepsilon_{11} \geq 0$ , соответствующее состоянию открытой трещины.

Для численного исследования процессов распространения волн в блочных средах с податливыми трещиноватыми прослойками разработан параллельный вычислительный алгоритм и компьютерная программа, ориентированная на многопроцессорные системы кластерной архитектуры. Проведены расчеты формирования и распространения системы межблочных трещин под действием импульсной нагрузки на части границы блочного массива.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1384).

## Список литературы

- [1] Морозов Н.Ф., Петров Ю.В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 132 с.
- [2] Sadovskaya O., Sadovskii V. Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials, Vol. **21** of *Advanced Structured Materials*. Heidelberg – New York – Dordrecht – London: Springer, 2012. 390 p.
- [3] Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Supercomputer Modeling of Wave Propagation in Blocky Media Accounting Fractures of Interlayers. In: Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures. Vol. **122** of *Advanced Structured Materials*. Cham: Springer, 2020. P. 379-398.

# Субдифференциальные формулировки уравнений механики упругопластических, сыпучих и пористых сред

В.М. Садовский

Институт вычислительного моделирования СО РАН

sadov@icm.krasn.ru

При разработке математических моделей природных явлений, относящихся к механике, физике, химии и биологии, важную роль играют потенциальные представления. В моделях равновесной термодинамики задаются скалярные потенциалы  $\Phi(U)$  и  $\Psi(Y)$ , зависящие от вектора макроскопических параметров состояния  $U$  и вектора термодинамических функций состояния  $Y$ , которые подчиняются определяющим уравнениям:

$$Y = \frac{\partial \Phi(U)}{\partial U}, \quad U = \frac{\partial \Psi(Y)}{\partial Y}. \quad (1)$$

Размерность  $n$  обоих векторов равна числу термодинамических степеней свободы. Потенциалы связаны между собой преобразованием Лежандра  $\Psi(Y) = U \cdot Y - \Phi(U)$ , или, более строго, преобразованием Юнга

$$\Psi(Y) = \sup_{U \in \mathbb{R}^n} (U \cdot Y - \Phi(U)).$$

В случае выпуклых потенциалов преобразование Юнга инволютивно, поэтому потенциал  $\Phi(U)$  выражается через  $\Psi(Y)$  по такой же формуле с точностью до замены  $U$  и  $Y$ .

В случае недифференцируемых выпуклых потенциалов производные в уравнениях (1) заменяются субдифференциалами, и тогда определяющие уравнения принимают вид:

$$Y \in \partial \Phi(U), \quad U \in \partial \Psi(Y). \quad (2)$$

Соотношения (1), (2) гарантируют выполнение термодинамического принципа Гиббса–Дюгема, из которого следует, что производимая работа зависит от начального и конечного состояния системы и не зависит от процесса, поскольку элементарная работа  $Y \cdot dU = d\Phi$  – полный дифференциал.

В неравновесной термодинамике под  $U$  и  $Y$  понимаются векторы термодинамических сил и потоков. В этом случае потенциалы представляют собой диссипативные функции Рэлея.

В механике упругопластических, сыпучих и пористых сред применяются недифференцируемые термодинамические потенциалы типа индикаторных функций выпуклых множеств в пространствах деформаций и напряжений [1]. Возникают субдифференциальные формулировки, которые можно представить в обобщенной форме вариационного неравенства [2]:

$$(\tilde{U} - U) \cdot \mathcal{D}\langle U \rangle \geq 0, \quad U \in F, \quad \tilde{U} \in F. \quad (3)$$

Здесь  $F$  – выпуклое и замкнутое множество допустимых вариаций решения  $\tilde{U}$ , а  $\mathcal{D}$  – дифференциальный оператор модели, термодинамически согласованный по С.К. Годунову.

В предлагаемом докладе обсуждаются вопросы применения формулировки (3) к анализу обобщенных решений задач с сильными разрывами и к конструированию алгоритмов сквозного счета для численного решения динамических задач.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1384).

## Список литературы

- [1] Sadovskaya O., Sadovskii V. *Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials*. Vol. **21** of *Advanced Structured Materials*. Heidelberg – New York – Dordrecht – London: Springer, 2012. 390 p.
- [2] Садовский В.М. О термодинамической согласованности и математической корректности в теории упругопластических, сыпучих и пористых сред, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2020, **60(4)**, 738-751.

### **Анализ применимости некоторых точных решений уравнений термодиффузионной конвекции для моделирования течения бинарных смесей в протяжённых горизонтальных каналах**

И.В. Степанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН  
stepiv@icm.krasn.ru

Развитие наукоёмких технологий требует наиболее полного и точного описания явлений тепломассообмена. Это ведёт к постоянному расширению набора задач математического моделирования конвекции вязких теплопроводных жидкостей и бинарных смесей. При этом, несмотря на интенсивное развитие вычислительной гидродинамики и теплофизики, не теряет своей актуальности проблема построения точных решений уравнений математических моделей тепломассообмена. Процессы, о которых идёт речь, описываются уравнениями Навье – Стокса, дополненными уравнениями переноса тепла и примеси. Данная система имеет высокий порядок и смешанный тип, что само по себе делает актуальной задачу поиска её точных решений.

Предположение о течении смеси в протяжённом горизонтальном канале (отношение длины канала к его ширине  $\sim 100$ ) даёт возможность считать течение однонаправленным, полагая, что вектор скорости имеет вид  $\mathbf{u} = (0, u(y))$ , где  $y$  – вертикальная координата. Остальные искомые функции – давление, температура, концентрация одной из компонент смеси – зависят от двух пространственных переменных  $x, y$ . Исследование совместности получившейся в результате этих предположений системы стационарных уравнений приводит к трём существенно различным решениям, не переходящим друг в друга ни при каких дополнительных допущениях. За наиболее изученным из этих решений закрепилось название “решение Остроумова-Бириха” [1]. Оно успешно применяется для моделирования испарительной конвекции в двухслойных системах, давая качественное совпадение расчётных характеристик с результатами экспериментов (см., например, [2]).

Данная работа посвящена изучению второго из возможных решений описанной системы. Оно характеризуется квадратичной зависимостью функций температуры и концентрации от горизонтальной координаты. Зависимости всех искомых параметров от переменной  $y$  в этом случае достаточно сложны, они представляют собой линейные комбинации произведений экспоненциальных и тригонометрических функций. Следует заметить, что данное решение не найдено автором в литературе и не сводится к известным в предельных случаях. Анализ построенного решения проводился в применении к описанию

однослойного течения в зазоре с теплоизолированной твёрдой стенкой и для исследования двухслойного течения со слабым испарением на границе раздела между жидкой бинарной смесью, заполняющей нижний слой, и смесью, состоящей из испаряющегося из жидкости компонента и газа и заполняющей верхний слой. Обнаружено, что в обоих случаях решение поставленных краевых задач даёт физически правдоподобное описание процесса тепломассообмена: отражает влияние толщины слоя, гравитационного воздействия, расхода смеси/газа. Полученные характеристики течения качественно соответствуют результатам эксперимента [3] и теоретического анализа [2].

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1384).

## Список литературы

- [1] Бирих Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости, ПМТФ, 1966, **3**, 69-72.
- [2] Гончарова О. Н., Резанова Е. В., Люлин Ю. В., Кабов О. А. Изучение конвективных течений жидкости и спутного потока газа с учётом испарения, ТВТ, 2017, **55(6)**, 720-732.
- [3] Lyulin Y., Kabov O. Evaporative convection in a horizontal liquid layer under shear-stress gas flow, J. Heat Mass Transfer, 2014, **70**, 599-609.

## Моделирование температурного поля мёрзлого грунта под зданиями в г. Салехарде с учётом данных мониторинга

М.Ю. Филимонов<sup>1,2</sup>, Н.А. Ваганова<sup>1,2</sup>, Я.К. Камнев<sup>3</sup>, А.Н. Шеин<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

<sup>2</sup>Уральский федеральный университет

<sup>3</sup>Арктический научный центр Ямало-Ненецкого автономного округа

fmy@imm.uran.ru

Территории Западной Сибири и северных широт России, на которые распространяется вечная мерзлота, чрезвычайно важны для российской экономики. В стратегии развития северных территорий значительное место отводится сбалансированному развитию экономики, промышленности, социальной инфраструктуры с сохранением природных экосистем. Более 75 % всех зданий и сооружений в зоне вечной мерзлоты построено и эксплуатируется по принципу сохранения мерзлого состояния грунтов оснований [1]. Мониторинг устойчивости за такими объектами основан на проведении температурных измерений в грунте оснований и анализе динамики их изменений. Долгосрочное прогнозирование таких изменений и влияние их на несущие свойства грунтов оснований под зданиями является актуальной задачей [2]. Оттаивание насыщенных льдом пород из-за изменения климата, или различных техногенных воздействий, будет сопровождаться просадками земной поверхности и развитием опасных мерзлотных геологических процессов,

называемым термокарстом, приводящих к авариям, возможными последствиями которых могут быть разрушения скважин, различных опор, сооружений, зданий и серьезные техногенные катастрофы [3].

Цель данного исследования состоит в разработке как новых трёхмерных нестационарных математических моделей теплопереноса в зоне свайного фундамента с учётом данных из термометрических скважин от различных инженерных объектов в мёрзлом грунте со сложной литологией, ориентированных на конкретные здания в городе Салехард, так и в разработке высокоточных численных алгоритмов для проведения долгосрочных прогнозов по динамике изменениям температурного поля под зданиями.

Численный алгоритм, реализованный на основании этой модели, учитывает данные мониторинга за температурой грунта и технические особенности конкретного свайного фундамента. Полученные результаты, основанные на сочетании данных мониторинга температуры грунта и компьютерного моделирования, позволяют оценить безопасность эксплуатации жилых зданий в городах, расположенных в зонах распространения вечной мерзлоты. Наличие информации о температурном режиме вдоль свай фундамента позволяет оценить их несущие способности и сделать выводы о возможных шагах для исправления ситуации в случае необходимости. Например, предложить варианты по термостабилизации грунта с помощью дополнительных сезоннодействующих охлаждающих устройств [4]. Приведены результаты численных расчётов по динамике изменения температурного поля под конкретным зданием в городе Салехарде.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 19-07-00435).

## Список литературы

- [1] Vaganova N., Filimonov M. Simulation of freezing and thawing of soil in Arctic regions, IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci, 2017, **72**, 012005.
- [2] Ваганова Н.А., Филимонов М.Ю. Прогнозирование изменений в вечной мерзлоте и оптимизация эксплуатации инженерных систем, Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, 2013, **13(4)**, 37-42.
- [3] Vaganova N., Filimonov M. Different Shapes of Constructions and their Effects on Permafrost, AIP Conference Proceedings, 2016, **1789**, 020019.
- [4] Vaganova N.A., Filimonov M.Yu. Simulation of Cooling Devices and Effect for Thermal Stabilization of Soil in a Cryolithozone with Anthropogenic Impact, Lecture Notes in Computer Science, 2019, **11386**, 580-587.

## Апостериорные оценки точности решений и адаптивные алгоритмы в задачах с микроструктурой

М.Е. Фролов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
frolov\_me@spbstu.ru



В докладе рассматриваются апостериорные оценки, полученные при помощи функционального подхода [1, 2], дающего возможность контролировать точность любых конформных аппроксимаций точного решения исследуемых краевых задач. Рассматриваются плоские и пространственные задачи теории упругости Коссера, и при этом их решение понимается в обобщённом (слабом) смысле. Для плоских задач представлены численные результаты, связанные с адаптацией сеток метода конечных элементов в пакете MATLAB [3]. Такая процедура позволяет вычислять приближённые решения той же точности, что и на равномерно измельчаемых сетках, но количество узлов адаптивной сетки при этом отличается более чем на порядок уже после 5 шагов равномерного дробления начальной сетки (около 70000 узлов против примерно 6000). Реализация вычисления апостериорной оценки основана на привлечении конечных элементов, характерных для двойственных смешанных формулировок метода (аппроксимации Равьяра-Тома и Арнольда-Бюффи-Фалка).

Для пространственных задач представлена мажоранта из работы [4], позволяющая вычислять гарантированные верхние оценки точности приближенных решений, что означает, что теоретические неравенства не нарушаются при их алгоритмической реализации. Неравенство имеет вид (1), в котором контролируется пара  $(\vec{u}, \vec{\theta}) \in U \times \Theta$  – компоненты точного решения (3 перемещения и 3 поворота) в расчётной области  $\Omega$

$$U := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \quad \Theta := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

где  $H_0^1$  – одно из стандартных обозначений соответствующего пространства Соболева. В оценке (1) используется энергетическая норма  $\epsilon$  погрешности  $\vec{\xi}_u := \vec{u} - \vec{u}_a$ ,  $\vec{\xi}_\theta := \vec{\theta} - \vec{\theta}_a$ , где нижним индексом  $a$  отмечены компоненты приближенного решения

$$\epsilon^2 \leq M^2 = (1 + \beta)D^2 + (1 + \beta^{-1})C^2R^2, \quad \forall \beta > 0. \quad (1)$$

Правая часть оценки – мажоранта  $M$  – это функционал, состоящий из двух частей. Первое слагаемое с функционалом  $D$  при достаточных вычислительных ресурсах может быть приближено сколь угодно к истинной погрешности  $\epsilon$ , а второе – к нулю, поскольку представляет собой взвешенную сумму квадратов норм невязок дифференциальных соотношений (уравнения равновесия и т.п.), соответствующих задаче. Константа  $C$  не зависит от конкретного разбиения области. Параметр  $\beta$  возникает из неравенства Коши с параметром, необходимым, чтобы получить сумму квадратов величин, что предпочтительно для практической реализации подхода.

## Список литературы

- [1] Repin S. A posteriori estimates for partial differential equations. Berlin: de Gruyter, 2008.
- [2] Mali O., Neittaanmaki P., Repin S. Accuracy Verification Methods. Theory and algorithms. Springer, 2014, Vol. 32.
- [3] Frolov M. Reliable a posteriori error control with mesh adaptations for Cosserat elasticity theory. ENUMATH 2019.
- [4] Frolov M.E. Reliable a posteriori error estimation for Cosserat elasticity in 3D, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, **42(1)**, 96-103.



## **Численное решение задачи оптимального ценообразования для опциона продаж**

В.В. Шайдуров, Л.В. Гилева, А.А. Ефремов  
Институт вычислительного моделирования СО РАН  
shaidurov04@mail.ru

В области стохастической финансовой математики развито моделирование ценообразования срочных опционов (договоров на право покупки или продажи каких-то активов).

Искомая функция такой модели зависит от двух переменных (времени и пространственной переменной, описывающей цену), а её область определения делится на две части заранее неизвестной внутренней границей. В одной подобласти функция является решением начально-краевой задачи для параболического уравнения (в докладе это уравнение Блэка – Шоулса); а в другом — линейчатой функцией пространственной переменной. Положение внутренней границы в произвольный момент времени определяется условиями непрерывности решения и его производной по пространственной переменной.

Поскольку для таких моделей невозможно получить точное аналитическое решение, используются численные методы. Перед их применением мы производим две замены переменных. Первая замена вызвана тем, что в исходной постановке решение задачи имеет разрыв первой производной в начальной точке внутренней границы. Эта особенность снижает порядок точности используемых разностных схем. Растяжение координат в окрестности этой точки позволяет устранить такую сингулярность. Вторая замена переменных переводит задачу с параболическим уравнением в области со свободной границей к другому параболическому уравнению с некоторым неизвестным коэффициентом, но в области с фиксированной границей. Такая постановка оказывается алгоритмически более удобной для численного решения. Неизвестный коэффициент определяется последовательно по времени путем итерации метода секущих на каждом временном слое с использованием дополнительного граничного условия, вытекающего из условия сопряжения решения вдоль внутренней границы, перешедшей в прямую линию.

Наряду с традиционными конечно-разностными и конечно-элементными методами для параболических уравнений в настоящее время разработан класс гибридных приближений, в которых подход Лагранжа используется для аппроксимации оператора движения, а метод конечных разностей в переменных Эйлера используется для эллиптического оператора. В настоящем докладе описывается численный метод, основанный на комбинации лагранжевой аппроксимации с методом конечных элементов, который применяется для решения сформулированной задачи ценообразования американского опциона на продажу (пут-опциона).

Работа поддержана Российским научным фондом (проект 20-61-46017).

## **Спектр характеристических возмущений и критические характеристики устойчивости двухслойного течения с испарением на границе раздела**

И.А. Шефер  
Сибирский федеральный университет

Рассматривается установившееся течение испаряющейся жидкости и парогазового потока в плоском бесконечном зазоре между твёрдыми непроницаемыми стенками, на которых приложена распределённая тепловая нагрузка по линейному относительно продольной координаты закону. Среды контактируют вдоль термокапиллярной поверхности, которая остаётся недеформированной и допускает перенос массы за счёт слабого испарения (конвективный перенос массы через межфазную границу не рассматривается). Основными характеристиками системы являются вектор скорости  $\mathbf{v} = (u, v)$ , температура  $T$  и давление  $p$  каждой из сред, а также концентрация пара  $C$  в газовом слое. Краевая задача для искомых функций содержит два набора определяющих уравнений Обербека – Буссинеска, каждый из которых включает уравнения движения и переноса тепла, а система уравнений для моделирования течений в газовой фазе дополнена уравнением диффузии. Кроме того, в уравнениях для парогазового слоя учитывается влияние прямого и обратного термодиффузионных эффектов. На твёрдых стенках задаются условие вязкого прилипания для скорости, линейное распределение тепловой нагрузки для температуры и условие нулевого потока пара на верхней стенке. На поверхности раздела жидкость – газ граничные соотношения включают условия непрерывности общего вектора скорости и температуры, кинематическое, динамическое и энергетическое условия и задают концентрацию насыщенного пара. Заметим, что под испарением в настоящей постановке понимается и конденсация, как процесс с отрицательным потоком массы. Для определения характера массопереноса выделяется величина  $M$  — массовая скорость испарения, которая определяется с помощью уравнения баланса массы на межфазной поверхности; положительные значения  $M$  соответствуют испарению, отрицательные — конденсации.

Двухслойное течение описывается точным решением уравнений термоконцентрационной конвекции, позволяющим корректно учесть массоперенос через границу раздела. В двумерном случае используемое точное решение имеет специальную структуру: вектор скорости в  $j$ -ом слое ( $j = 1$  соответствует жидкому слою,  $j = 2$  — газовому) имеет только одну ненулевую компоненту, зависящую только от поперечной координаты  $u_j(y)$ , функции температуры и концентрации линейно зависят от продольной координаты  $x$  и содержат аддитивные члены, зависящие только от  $y$ , функция  $p_j$  определяет отклонение давления от гидростатического. Данное решение является частично инвариантным решением ранга 1 дефекта 3 и точно удовлетворяет определяющим уравнениям и всем граничным условиям. В зависимости от значений параметров задачи это решение может описывать существенно разные конвективные режимы (чисто термокапиллярные, пуазейлевские течения и течения смешанного типа), каждый из которых характеризуется особой структурой гидродинамического и теплового полей. Для всех типов режимов встаёт вопрос об их устойчивости и влиянии различных параметров на критические характеристики и тип возникающих неустойчивостей.

В настоящей работе исследуется линейная устойчивость двухслойного течения в системе сред HFE-710 – азот относительно плоских нормальных возмущений в случаях, когда толщина газового слоя составляет 5 мм. Изучается влияние расхода газа  $R$  на топологию структур, порождённых возмущениями, и пороговые значения тепловой нагрузки, приложенной на внешних твёрдых стенках канала, для систем с высотой жидкого слоя  $h_1$  равной 3 и 5 мм. Показано, что увеличение  $R$  приводит к расширению области неустойчивости, определяемой нейтральной кривой. Для обоих рассмотренных геометрических

конфигураций характерна коротковолновая неустойчивость, т. е. всегда существуют коротковолновые возмущения, вызывающие кризис течения при положительных значениях температурного градиента  $A$ , характеризующего интенсивность внешней тепловой нагрузки.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2021-1384).

## Программа секции «Математическое моделирование в геофизике»

Координатор: Е.И. Роменский

### ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

#### Зал № 8

14<sup>30</sup> — 14<sup>55</sup> Владимир Чеверда (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Многопараметрическая обратная задача сейсмологии в вязкоупругих средах*

14<sup>55</sup> — 15<sup>20</sup> Виктор Костин (Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН). *Опыт разработки прямого кластерного решателя для трехмерных уравнений упругости в частотной области*

15<sup>20</sup> — 15<sup>45</sup> Дмитрий Ключинский (Новосибирский государственный университет). *Использование двумерных решателей в конструкции предобуславливателей для трехмерных краевых задач*

15<sup>45</sup> — 16<sup>10</sup> Михаил Новиков (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Численный анализ влияния микромасштабной анизотропии на сейсмическое затухание, вызванное индуцированными волной флюидопотоками, в трещиновато-пористых флюидонасыщенных средах*

#### ПЕРЕРЫВ

16<sup>40</sup> — 17<sup>05</sup> Евгений Ланда (Tel Aviv University). *Сейсмическое зеркало обращенного времени*

17<sup>05</sup> — 17<sup>30</sup> Виталий Койнов (Новосибирский государственный университет). *Восстановление положения сейсмических источников в случайно-неоднородных средах методом зеркального обращения времени*

17<sup>30</sup> — 17<sup>55</sup> Евгений Ефимов (Институт вычислительного моделирования СО РАН). *Численное моделирование воздействия импульсного сейсмоисточника «Енисей» на геосреду с вязкоупругими свойствами*

17<sup>55</sup> — 18<sup>20</sup> Вадим Лисица (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН). *Применение машинного обучения для подавления численной дисперсии при сейсмическом моделировании*

**ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА**

**Зал № 10**

14<sup>30</sup> — 14<sup>55</sup> Евгений Роменский (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Термодинамически согласованная гиперболическая модель деформируемой пористой среды насыщенной многофазной жидкостью*

14<sup>55</sup> — 15<sup>20</sup> Галина Решетова (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Гиперболическая двухфазная модель пористой среды, насыщенной вязкой жидкостью, и ее применение для моделирования волновых полей*

15<sup>20</sup> — 15<sup>45</sup> Michael Dumbser (University of Trento). *On structure-preserving schemes for continuum mechanics*

15<sup>45</sup> — 16<sup>10</sup> Can Evren Yarman (Schlumberger Clamart Center). *A spatiotemporal ghost model and its action on the spatiotemporal special function C-Gaussian*

ПЕРЕРЫВ

16<sup>40</sup> — 17<sup>05</sup> Alice-Agnes Gabriel (Munich University). *A unified first order hyperbolic model for nonlinear dynamic rupture processes in diffuse fracture zones*

17<sup>05</sup> — 17<sup>30</sup> Максим Яковлев (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Об одном варианте численной оценки эффективных свойств горных пород на цифровой модели керна с учётом порового давления при больших разрешениях сетки по пространству*

17<sup>30</sup> — 17<sup>55</sup> Илья Пешков (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Акустические волны в упругих средах с дефектами*

# **Численное моделирование воздействия импульсного сейсмоисточника «Енисей» на геосреду с вязкоупругими свойствами**

Е.А. Ефимов

Институт вычислительного моделирования СО РАН

eugene6467@mail.ru

Разработанная вычислительная технология используется для моделирования сейсмических волновых полей в слоистых геологических средах с различными механическими характеристиками слоёв. Рассматривается плоскостная структура грунта с однородными изотропными слоями. Для описания волновых процессов применяются математические модели динамики упругих и вязкоупругих сред. Численный алгоритм основан на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным и физическим процессам. Проведён ряд численных экспериментов на многопроцессорных системах кластерной архитектуры.

## **Использование двумерных решателей в конструкции предобуславливателей для трехмерных краевых задач**

Д.В. Ключинский<sup>1</sup>, В.И. Костин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН

dmitriy\_klyuchinskiy@mail.ru

Использование частотной области для описания волновых процессов в неоднородных средах ведет к необходимости решать численно возникающие краевые задачи. Вследствие значительных размеров матриц систем линейных уравнений, которые требуется решить, задача может представлять немалую трудность. При применении итерационных методов требования к объему оперативной памяти значительно слабее, чем для прямых методов [1], но скорость сходимости метода сильно зависит от предобуславливания. Конструкция нашего предобуславливателя похожа на описанные в [2, 3]. Пользуясь тем, что для современных компьютеров и соответствующего программного обеспечения численное решение двумерных краевых задач не представляет затруднений, для предобуславливания мы строим искусственную краевую задачу, в которой параметры среды постоянны только вдоль одной оси координат. Таким образом, предобуславливатель получается ближе к исходному оператору и, соответственно, ожидаемая скорость сходимости выше. В [4] можно найти предварительные результаты по нашей конструкции предобуславливания.

## **Список литературы**

- [1] Kostin V., Solov'yev S., Bakulin A., Dmitriev M. Direct frequency-domain 3D acoustic solver with intermediate data compression benchmarked against time-domain modeling for FWI applications. *Geophysics*. 2019; 84(4):T207-T219.

- [2] Belonosov M., Kostin V., Neklyudov D., Tcheverda V. 3D numerical simulation of elastic waves with a frequency-domain iterative solver. *Geophysics*. 2018; 83(6):T333-T44.
- [3] Belonosov M., Dmitriev M., Kostin V., Neklyudov D., Tcheverda V. An Iterative Solver for the 3D Helmholtz Equation *Journal of Computational Physics*. 2017; 345:330-344.
- [4] Klyuchinskiy D., Kostin V., Landa E. New Efficient Preconditioner for Helmholtz Equation. *Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy*: Springer; 2020. p. 243-251.

## **Опыт разработки прямого кластерного решателя для трехмерных уравнений упругости в частотной области**

В.И. Костин, С.А. Соловьев

Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН

KostinVI@ipgg.sbras.ru

Идея использования малоранговой аппроксимации для сжатия промежуточных данных в конструкциях прямых решателей направлена на снижение нагрузки на оперативную память и сокращение числа арифметических операций [1]. Наибольший эффект от этой идеи достигается при численном решении двумерных краевых задач [2] со знакоопределенными матрицами коэффициентов систем линейных уравнений, но и в задачах распространения волн в трехмерных средах удается достичь определенных успехов [?, 3]. Наш проект нацелен на разработку решателя для систем линейных уравнений, возникающих при аппроксимации трехмерных уравнений упругости в частотной области. Решатель предназначен для использования на вычислительных системах с распределенной памятью (вычислительных кластерах), поскольку промышленные требования к размерам решаемых задач не оставляют альтернативы. В своем докладе мы рассказываем о трудностях, возникающих при разработке решателя и о способах их преодоления, приводим примеры трехмерных расчетов.

## **Список литературы**

- [1] Martinsson P.-G. A fast direct solver for a class of elliptic partial differential equations. *Journal of Scientific Computing*. 2009; 38(3):316-330.
- [2] . Li S., Gu M., Wu C.J., Xia J. New efficient and robust HSS Cholesky factorization of SPD matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2012; 33(3):886-904.
- [3] Kostin V., Solovyev S., Bakulin A., Dmitriev M. Direct frequency-domain 3D acoustic solver with intermediate data compression benchmarked against time-domain modeling for FWI applications. *Geophysics*. 2019; 84(4):T207-T219.

- [4] Wang S., de Hoop M.V., Xia J., Li X.S. Massively parallel structured multifrontal solver for time-harmonic elastic waves in 3-D anisotropic media. *Geophysical Journal International*. 2012; 191(1):346-366.

## Сейсмическое зеркало обращенного времени

Е. Ланда<sup>1</sup>, В.А. Чеверда<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Университет Тель-Авива, Израиль

<sup>2</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

elanda@post.tau.ac.il

Обращение времени (Time Reversal или TR в дальнейшем) определяется как метод фокусирования волнового поля в исходное положение источника путём продолжения волнового поля в обратном времени через среду распространения. Сейсмическое зеркало обратного времени опирается на Обоснование фокусировки TR основано на симметрии по времени волнового уравнения. Волновая энергия будет фокусироваться на исходное местоположение источника независимо от сложности модели среды. В отличие от механизма частиц, распространение волн является менее чувствительным к небольшому изменению исходного состояния. Это означает, что волна обратного распространения приводит к воссозданию исходного состояния с относительно небольшими ошибками. Time Reversal Mirror (TRM) — это физический процесс, который возвращает (фокусирует) расходящуюся волновую энергию назад к исходному источнику. Это достигается за счет физического обратного распространения записанного волнового поля в среду после разворота времени. Знание распространяемой среды не является необходимым. Если в среде нет поглощения энергии, волна будет распространяться и в прямом и в обратном времени без изменения. В этом случае записанное волновое поле в точности обеспечит возвращение волны в источник. Численные эксперименты показали, что неоднородность среды повышает разрешающую способность, так как многократное рассеяние обеспечивает освещение объекта с различных направлений. В этой статье мы представляем первые результаты эксперимента Физического TRM в сейсмике. В эксперименте первый шаг состоит из применения исходного источника в точке глубины и записи его сигнала на некоторой поверхности. На втором этапе TRM записанные данные были обращены по времени и «запущены» назад в среду. Группа контрольных приемников, расположенных внутри среды, подтвердила фокусировку сейсмической энергии в месте расположения источника.



## **Об одном варианте численной оценки эффективных свойств горных пород на цифровой модели керна с учётом порового давления при больших разрешениях сетки по пространству**

В.А. Левин, А.В. Вершинин, М.Я. Яковлев, И.Д. Быстров

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

yakovlev@cae-fidesys.com

Описывается метод и приводятся некоторые результаты оценки эффективных механических характеристик горных пород путём проведения численных расчётов на цифровой (воксельной) модели керна. На представительном объёме керна с помощью метода конечных элементов решается ряд краевых задач теории упругости с различными граничными условиями с учётом предварительного нагружения горной породы в виде порового давления. Результаты решения каждой задачи (поля тензоров напряжения) осредняются по объёму, после чего эффективные свойства (на основе осреднённых результатов) оцениваются в виде обобщённого закона Гука. Приведены результаты расчётов эффективных свойств для двух видов кернов: песчаника и известняка. Расчёты проводились на моделях размером до 400х400х400 вокселей.

## **Применение машинного обучения для подавления численной дисперсии при сейсмическом моделировании**

В.В. Лисица, К.Г. Гадыльшин, Д.М. Вишневский

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

LisitsaVV@ipgg.sbras.ru

Численное моделирование требует большого объема вычислительных ресурсов. В этом смысле оно является одной из самых тяжелых процедур сейсмической обработки. Обычно создание набора сейсмических данных требует приблизительно  $10^8$  ядро-часов на типичном вычислительном кластере. Такие высокие требования возникают из-за необходимости использовать в расчетах пространственные сетки с мелким шагом с целью уменьшения численной дисперсии. В этой работе представлен новый подход к сейсмическому моделированию, в котором волновые поля для всех источников моделируются на грубой сетке с относительно большим шагом по пространству. Небольшое количество синтетических сейсмограмм рассчитывается на сетке с шагом по пространству, достаточным для получения корректного результата моделирования. Эти данные используются для обучения искусственной нейронной сети (ИНС). Обученная ИНС используется далее для уменьшения численной дисперсии для волновых полей, рассчитанных на грубой сетке.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

## **Численный анализ влияния микромасштабной анизотропии на сейсмическое затухание, вызванное индуцированными волной флюидопотоками, в трещиновато-пористых флюидонасыщенных средах**

М.А. Новиков, В.В. Лисица

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
novikovma@ipgg.sbras.ru

В работе представлен численный алгоритм оценки затухания сейсмической волны для исследования влияния микромасштабной анизотропии на затухание в трещиновато-пористой флюидонасыщенной среде, вызванное индуцированными волной флюидопотоками. Алгоритм основан на численном решении уравнений Био пороупругой анизотропной среды в динамической постановке. Для численного решения уравнений Био используется конечно-разностная схема на разнесенных сетках. Проведен ряд численных экспериментов по распространению сейсмической волны в трещиноватых средах различной степени связности трещин, заполненных анизотропным материалом, обеспечивающим флюидопотоки между связанными трещинами. По зарегистрированным сигналам получены численные оценки величины, обратной добротности, свидетельствующие о влиянии анизотропии наполнителя трещин на частотно-зависимое затухание.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

## **Акустические волны в упругих средах с дефектами**

И.М. Пешков<sup>1,2</sup>, Е.И. Роменский<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
<sup>2</sup>Университет Тренто, Италия  
ilya.peshkov@unitn.it

В докладе рассматриваются моделирование акустических волн в средах с геометрическими дефектами. Упругая среда трактуется как многообразие с заданной на ней неевклидовой геометрией с нулевой кривизной, но не нулевым кручением (torsion). Пространственные компоненты поля кручения трактуются как тензор плотности дефектов, а временные компоненты представляют микроинерцию дефектов среды. Построенная модель имеет три типа волн: стандартные продольные и поперечные волны, а так же волны кручения, характеризующие микроскопический угловой момент дефектов.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

## **Восстановление положения сейсмических источников в случайно-неоднородных средах методом зеркального обращения времени**

Г.В. Решетова<sup>1</sup>, В.В. Койнов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет  
koynov95@gmail.com

Во многих важных приложениях, таких как ультразвуковая медицинская визуализация, неразрушающий контроль материалов, сейсмическая инверсия и т. д., возникает задача обнаружения и локализации объектов, встроенных в некоторую случайно-неоднородную среду.

В работе рассматривается задача восстановления положений источников в геологических случайно-неоднородных средах по записям сейсмограмм на свободной поверхности. Для восстановления источников применяется метод зеркального обращения времени (Time Reversal Mirror) к набору статистически эквивалентных сред, моделируемых случайной функцией пространства. Приводятся результаты численных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

## **Гиперболическая двухфазная модель пористой среды, насыщенной вязкой жидкостью, и ее применение для моделирования волновых полей**

Г.В. Решетова<sup>1</sup>, Е.И. Роменский<sup>1</sup>, И.М. Пешков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

<sup>2</sup>Университет Тренто, Италия  
kgv@nmsf.ssc.ru

Представлена и исследована новая гиперболическая двухфазная модель пористой деформируемой среды, насыщенной вязкой жидкостью. Основные уравнения модели выводятся в рамках теории гиперболических термодинамически согласованных систем (SHTC) путем обобщения единой гиперболической модели механики сплошной среды. Модель учитывает вязкость насыщающей жидкости и дополнительно включает диссипативный механизм межфазного трения. С использованием представленной нелинейной SHTC модели с конечными деформациями, выведены уравнения распространения волн малой амплитуды в пористой среде, насыщенной вязкой жидкостью. Как и в классической теории пористых сред Био, в среде возникает три типа волн: быстрые и медленные волны сжатия и поперечная волна. Поперечная волна быстро затухает из-за вязкости насыщающей жидкости, поэтому ее трудно увидеть в типичных тестовых задачах. Однако эту волну можно наблюдать вблизи границ раздела между областями с разной пористостью.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

## **Термодинамически согласованная гиперболическая модель деформируемой пористой среды насыщенной многофазной жидкостью**

Е.И. Роменский<sup>1</sup>, Г.В. Решетова<sup>1</sup>, И.М. Пешков<sup>1,2</sup>, М. Думбсер<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

<sup>2</sup>Университет Тренто, Италия

evrom@math.nsc.ru

Представлена математическая модель деформируемой пористой среды насыщенной многофазной смесью жидкостей, основанная на теории термодинамически согласованных систем. Вывод определяющих уравнений основан на обобщении для течений жидкости в пористой среде унифицированной модели континуума, которая единой системой уравнений описывает упругое, упругопластическое и жидкое состояния среды. Определяющие дифференциальные уравнения модели являются гиперболическими, а их решения удовлетворяют законам термодинамики (сохранение энергии и возрастание энтропии). Благодаря упомянутым свойствам модель допускает применение современных высокоточных численных методов, и, кроме того, обеспечивается достоверность полученных численно решений. На основе сформулированной модели представлена модель распространения волн малой амплитуды, которая для случая упругой пористой среды насыщенной жидкостью дает качественно те же результаты, что и известная модель Био флюидонасыщенной пористой среды. Представленная модель корректна для всего диапазона изменения пористости и, с использованием метода диффузных границ, может применяться для расчета волн в пористой среде с включениями областей, состоящими только из жидкой и только упругой фаз.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

## **Оценка зависимости эффективных упругих параметров тонкослоистой среды от шероховатости границ раздела**

Т.С. Хачкова<sup>1</sup>, В.В. Лисица<sup>2</sup>, Г.В. Решетова<sup>2</sup>, Д.Р. Колюхин<sup>1</sup>

Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

KhachkovaTS@ipgg.sbras.ru

В работе представлено численное исследование зависимости эффективных упругих параметров слоистой среды от шероховатости границ раздела и предложен алгоритм построения статистически эквивалентных моделей тонкослоистых сред. Установлено, что распределение упругих параметров в моделях с плоскими границами раздела, но с параметрами, задаваемыми случайными величинами, однозначно определяется шероховатостью границ раздела в моделях с постоянными упругими параметрами, но с шероховатой границей раздела. Показано, что логарифм ковариационной матрицы линейно зависит от логарифмов длины корреляции и стандартного отклонения шероховатости, что позволяет

с высокой точностью интерполировать ковариационную матрицу по небольшому числу предварительно выполненных экспериментов.

## **Многопараметрическая обратная задача сейсмоки в вязкоупругих средах**

В.А. Чеверда<sup>1</sup>, Г.В. Решетова<sup>1</sup>, Е.С. Ефимова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

<sup>2</sup>Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН

CheverdaVA@ipgg.sbras.ru

Скопления газовых гидратов в придонных слоях представляют собой не только потенциальную угрозу для морских инженерных сооружений и судоходства. Они также могут вызвать выброс в атмосферу значительных объемов метана. Наиболее естественный способ обнаружения газовых гидратов - сейсмические методы. Технология их применения на шельфе достаточно хорошо отработана, имеется широкий спектр инструментальных и методических решений, обеспечивающих их практическое использование. Обнаружение газовых гидратов относится к классу многопараметрических обратных задач. Действительно, газовые гидраты в окружающей среде приводят к изменению скорости распространения сейсмических волн и повышенному уровню поглощения волн в этих областях. Таким образом, для правильной локализации скоплений газовых гидратов необходимо определить те области в пространстве, где одновременно изменяются как скорости распространения сейсмических волн, так и добротность. Эта работа посвящена изучению связанности между скоростями сейсмических волн и добротностью среды. А именно, при каких условиях обеспечивается устойчивое для разделения возмущений этих двух параметров путем решения динамической обратной задачи распространения сейсмических волн.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

## **A spatiotemporal ghost model and its action on the spatiotemporal special function C-Gaussian**

Can Evren Yarman

Schlumberger Clamart Center

CYarman@slb.com

The C-Gaussian function is a spatiotemporal multivariate special function whose Fourier transform is dominantly supported within a cone with its axis is centered along frequency, the dual of time with respect to Fourier transform. Its explicit analytic nature enables straight forward spatiotemporal differentiation as well as extrapolation. Unlike plane waves, which has infinite spatial extent, C-Gaussian function decays in space and time eliminating additional introduction of multiplicative windowing functions to control their support. Furthermore,

C-Gaussian function in higher spatial dimensions can be obtained using its representation in lower spatial dimensions which makes it a candidate not only for data decomposition at acquisition but also for wavefield decomposition and wave propagation. Motivated by this, we derived a time-space-domain receiver ghost modeling operator for a wavefront propagating under a flat sea surface and computed its action on the C-Gaussian function composed with a hyperbolic traveltime function. The ghost operator can be used to model the ghost wavefront on the native acquisition geometry without going into the frequency-wavenumber domain, the dual of time-space with respect to Fourier transform. We compared our results with the analytically modeled Green's functions.

## On structure-preserving schemes for continuum mechanics

S. Busto<sup>1</sup>, M. Dumbser<sup>1,2</sup>, I. Peshkov<sup>1,2</sup>, E. Romenski<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Университет Тренто, Италия

<sup>2</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

michael.dumbser@unitn.it

In this talk we present two new classes of structure-preserving schemes for symmetric hyperbolic and thermodynamically compatible (SHTC) systems with involution constraints, which have been studied for the first time by Godunov in 1961 and later in a series of papers by Godunov and Romenski. In particular, we consider the unified first order hyperbolic model of continuum mechanics proposed by Godunov, Peshkov and Romenski (GPR) that is able to describe the behavior of moving elasto-plastic solids as well as viscous and inviscid fluids within one and the same governing PDE system. The homogeneous part of the GPR model is endowed with involution constraints, namely in the absence of source terms the distortion field  $A$  and the thermal impulse  $J$  need to remain curl-free for all times. In the first part of this talk we present a new staggered semi-implicit structure-preserving scheme that is able to preserve the curl-free property of both fields exactly also on the discrete level. Furthermore, the pressure terms are discretized implicitly, in order to capture the low Mach number limit of the equations properly, while all other terms are discretized explicitly. Last but not least, the new staggered semi-implicit scheme is also able to reproduce the stiff relaxation limit of the governing PDE system properly, recovering an appropriate discretization of the compressible Navier-Stokes equations. In the second part of the talk we present a new thermodynamically compatible finite volume scheme that is exactly compatible with the overdetermined structure of the model at the semi-discrete level, making use of a discrete form of the continuous formalism introduced by Godunov in 1961. A very particular feature of our new thermodynamically compatible finite volume scheme is the fact that it directly discretizes the entropy inequality, rather than the total energy conservation law. Energy conservation is instead achieved as a mere consequence of the scheme, thanks to the thermodynamically compatible discretization of all the other equations. Computational results for several test cases are presented in order to illustrate the performance of the new schemes.

The work of M.D., I.P. and E.R. was supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2019-1613 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

## Программа секции «Теория функций»

### Зал № 9

Координатор: И.Р. Каюмов

#### ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>20</sup> Армен Сергеев (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН). *Квантовое исчисление в пространствах функций*

15<sup>30</sup> — 16<sup>20</sup> Александр Грешнов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Нильпотентная аппроксимация и горизонтальная соединимость на пространствах Карно–Каратеодори*

16<sup>30</sup> — 17<sup>00</sup> Александр Тюленев (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН). *Теоремы о следах и продолжениях для пространств Соболева  $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ . Случай  $p \in (1, n]$*

17<sup>00</sup> — 18<sup>00</sup> Aimo Hinkkanen (University of Illinois at Urbana–Champaign). *Asymptotic functions of entire functions*

18<sup>00</sup> — 18<sup>30</sup> Константин Рютин (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *О проклятии размерностей для восстановления регулярных ридж-функций*

#### ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>20</sup> Егор Косов (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Дискретизация интегральных норм по значениям в точках*

15<sup>30</sup> — 16<sup>20</sup> Сергей Водопьянов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Квазиконформный анализ и нелинейная теория упругости*

16<sup>30</sup> — 17<sup>00</sup> Никита Евсеев (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Соболевские отображения, принимающие значения в банаховом пространстве или в метрическом пространстве*

17<sup>00</sup> — 17<sup>30</sup> Павел Затицкий (Санкт-Петербургский государственный университет). *Об оценках в интегральных задачах на пространствах ВМО*

17<sup>30</sup> — 17<sup>50</sup> Денис Фуфаев (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Компактные операторы и равномерные структуры в гильбертовых  $C^*$ -модулях*

17<sup>50</sup> — 18<sup>10</sup> Юрий Захарян (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Топология, индуцированная конической псевдометрикой*

18<sup>10</sup> — 18<sup>30</sup> Степан Павлов (Новосибирский государственный университет). *Гранд-пространства Соболева на метрических пространствах с мерой*

## ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>20</sup> Юрий Белов (Санкт-Петербургский государственный университет). *Фреймы Габора для рациональных функций*

15<sup>30</sup> — 16<sup>20</sup> Булат Хабибуллин (Башкирский государственный университет). *Интегральные неравенства для мероморфных функций и разностей субгармонических*

16<sup>30</sup> — 17<sup>00</sup> Рамиль Насибуллин (Казанский федеральный университет). *Интегральные неравенства для мероморфных функций и разностей субгармонических*

17<sup>00</sup> — 17<sup>20</sup> Диана Хамматова (Казанский федеральный университет). *О дуальной гипотезе Смейла*

17<sup>20</sup> — 17<sup>40</sup> Георгий Макеев (Казанский федеральный университет). *Клейсли-подобное описание E-теории*



## Asymptotic functions of entire functions

A. Hinkkanen

University of Illinois at Urbana–Champaign

aimo@math.uiuc.edu

Let  $f(z)$  be an entire function in the complex plane  $\mathbb{C}$ . An entire function  $a(z)$  is said to be an asymptotic function for  $f$  if there exists a path  $\gamma$  in  $\mathbb{C}$  from 0 to infinity such that  $f(z) - a(z)$  tends to 0 as  $z$  tends to infinity along  $\gamma$ . If  $a(z)$  is a constant function, the value  $a$  is said to be an asymptotic value of  $f$ . The Denjoy–Carleman–Ahlfors Theorem states that if  $f$  has  $n$  distinct asymptotic values then the rate of growth of  $f$  is at least order  $n/2$ , mean type. This bound is known to be sharp. For asymptotic functions, the best general known result guaranteeing the same conclusion regarding  $f$  is that it suffices to assume that the rate of growth of each  $a(z)$  is at most order  $1/4$ , minimal type; order  $1/2$  minimal type would be best possible but this remains open. For special configurations of paths, somewhat stronger results than order  $1/4$  have been obtained by various authors.

We obtained some conditions on the function  $f$  and associated asymptotic paths that are sufficient to guarantee that  $f$  satisfies the conclusion of the Denjoy–Carleman–Ahlfors Theorem for asymptotic functions of suitable growth. In addition, we proved that for each positive integer  $n$ , and for any  $n$  distinct, prescribed asymptotic functions of order less than  $1/2$ , there exists an entire function of order  $n$  having these asymptotic functions.

This is a joint work with Joseph Miles and John Rossi.

## Интегральные неравенства для мероморфных функций и разностей субгармонических

Б.Н. Хабибуллин

Башкирский государственный университет

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН

khabib-bulat@mail.ru

Основная характеристика поведения и роста *мероморфных функций*  $f$  на *комплексной плоскости*  $\mathbb{C}$  — характеристика *Неванлинны*  $T(r, f)$ ,  $r > 0$ . С начала XX в. известно, что невозможно оценить рост *максимума модуля*  $M(r, f)$  функции  $|f|$  на окружностях радиуса  $r$  с центром в нуле через  $T(r, f)$ , как и наоборот —  $T(r, f)$  через  $M(r, f)$ . Но ряд классических и недавних результатов [1]–[2] теории Неванлинны показывают, что возможна оценка интегралов от  $\ln M(r, f)$  по мере Лебега по подмножествам на отрезках  $[0, r]$  или интегралов от функций  $\ln |f|$  по длине малых дуг на окружностях радиуса  $r$  с центром в нуле через  $T(R, f)$  при любых  $R > r$ , а также по плоской мере Лебега по малым подмножествам в  $\mathbb{C}$ .

В 2021 году нам удалось в критериальной форме полностью завершить исследования по этой тематике для мероморфных функций на  $\mathbb{C}$  и на замкнутых кругах  $\overline{D}(R)$  радиуса  $r$  с центром в нуле как для интегралов Лебега–Стилтьеса от функций  $\ln M(r, f)$  по произвольным возрастающим функциям  $m$ , так и для интегралов от  $\ln |f|$  по произвольным мерам Бореля  $\mu$  на  $\overline{D}(r)$  с  $r < R$ . Все эти результаты изначально устанавливаются нами в более общем субгармоническом обрамлении для разностей  $U = u - v$  субгармонических

функций  $u \not\equiv -\infty$  и  $v \not\equiv -\infty$ , т.е.  $\delta$ -субгармонических функций  $U \not\equiv \pm\infty$ , в шарах евклидова конечномерного пространства размерности  $\geq 2$ . При этом носители мер  $\mu$  или множеств непостоянства возрастающих функций  $m$  могут иметь фрактальную природу. В этом случае оценки приводятся в терминах  $h$ -меры или  $h$ -обхвата Хаусдорфа носителей. Особое место, важное в некоторых применениях, занимают оценки интегралов от  $\ln|f|$  по длине по спрямляемым подмножествам липшицевых кривых. Такие же оценки можно дать для интегралов от  $\delta$ -субгармонических функций по площади по спрямляемым подмножествам липшицевых гиперповерхностей.

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

## Список литературы

- [1] B.N. Khabibullin, Integrals of subharmonic functions and their differences with weight over small sets on a ray, *Matematychni Studii*, **54**:2 (2020), 121–130.
- [2] B.N. Khabibullin, Integrals with a Meromorphic Function or the Difference of Subharmonic Functions over Discs and Planar Small Sets, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:6 (2021), 1175–1182.

## Квазиконформный анализ и нелинейная теория упругости

С.К. Водопьянов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

`vodopis@math.nsc.ru`

По результатам работ [1–5] будет рассказано как решение классической задачи о замене переменной в пространствах Соболева приводит к новой парадигме в квазиконформном анализе, в рамках которой были значительно ослаблены условия существования равновесия в задачах нелинейной теории упругости.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, номер 075-15-2019-1613.

## Список литературы

- [1] С.К. Водопьянов. Операторы композиции весовых пространства Соболева и теория  $\mathcal{Q}_p$ -гомеоморфизмов // Докл. АН. 2020. Т. 494, № 5. С. 21–25.
- [2] С.К. Водопьянов. Об аналитических и геометрических свойствах отображений в теории  $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмов // Матем. заметки. 2020. Т. 108, № 6. С. 924–928.

- [3] С.К. Водопьянов. О регулярности отображений, обратных к соболевским, и теория  $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмов // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61, № 6. Р. 1257–1299
- [4] С.К. Водопьянов, А.О. Томилов. Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа // Изв. РАН. Сер. матем. 2021 Т. 85, № 5. DOI: 10.4213/im9082
- [5] S. Vodopyanov, A. Molchanova. Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // Calculus of Variations and PDE. 2020. Т. 59, 17. Р. 1–25. DOI: 10.1007/s00526-019-1671-4

## Об оценках в интегральных задачах на пространствах $BMO$

П.Б. Затицкий

Санкт-Петербургский государственный университет  
 paха239@yandex.ru

В докладе планируется рассказать о применении метода функции Беллмана для получения оценок в интегральных задачах на пространствах  $BMO$ . Под интегральными задачами мы понимаем вопросы оценок средних  $f(\phi)$  в терминах средних  $\phi$  при контроле нормы  $\phi$  в  $BMO$ , здесь  $f$  - фиксированная достаточно регулярная функция. Случай пространства  $BMO$  на отрезке изучен достаточно хорошо: точные константы в важнейших задачах такого вида были найдены в работах В. Васюнина, А. Вольберга и Л. Славина; "общий случай" решен в совместных работах с В. Васюниным, П. Иванишвили, Н. Осиповым и Д. Столяровым. В случае пространств  $BMO(\mathbb{T})$  и  $BMO(\mathbb{R})$  точные константы также были найдены, но это потребовало применения дополнительных рассуждений. В аналогичных задачах на  $BMO(\mathbb{R}^d)$  получены лишь оценки, вопрос их точности остается открытым.

## Клейсли-подобное описание $E$ -теории

Г.С. Макеев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
 makeefu@ya.ru

Как известно, основным предметом изучения  $E$ -теории является категория, в которой в качестве объектов выступают  $C^*$ -алгебры, а в качестве морфизмов – классы гомотопности асимптотических гомоморфизмов между надстройками  $C^*$ -алгебр. Композиция стрелок в такой категории – определенная с точностью до гомотопности композиция асимптотических гомоморфизмов. Мы опишем абстрактный способ построения категории, изоморфной  $E$ -теоретической, в которой композиция стрелок записывается в стиле категории Клейсли и предьявим конкретные примеры таких категорий.

## Неравенства Харди для веса Якоби

Р.Г. Насибуллин

Казанский федеральный университет  
НОМЦ Приволжского федерального округа  
NasibullinRamil@gmail.com

Предположим, что  $\rho \in (0, 1)$ ,  $q > 0$  и  $\nu \in [0, \frac{1}{q}]$ . Через  $j_\nu$  обозначим первый положительный корень функции Бесселя  $J_\nu$  порядка  $\nu$ . Мы показали, что для любой абсолютно непрерывной функции  $u$ , такой что  $u(-\rho) = u(\rho) = 0$  и  $u' \in L^2(-\rho, \rho)$  справедливо следующее одномерное неравенство типа Харди

$$P_q \int_{-\rho}^{\rho} \frac{|g(t)|^2}{(1-t^2)^{2-q}} dt < \int_{-\rho}^{\rho} g'^2(t) dt$$

где  $q_0 \approx \frac{\pi^2}{18}$ ,  $\alpha \in (0, q_0)$ ,

$$P_q = \begin{cases} 1 & , \text{ при } q = 0; \\ \lambda_q & , \text{ при } q \in (0, q_0); \\ \left(\frac{\lambda_\alpha}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q & , \text{ при } q \in (q_0, 1]; \\ 2 & , \text{ при } q = 1; \end{cases}$$

и  $\sqrt{\lambda_q}/q$  первый положительный корень уравнения

$$-q^2 \lambda^2 + q \lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu).$$

Используя это неравенство, мы получаем достаточные условия однолиственности Нехари-Покорного для аналитических в единичном круге  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  функций. Справедлива

**Теорема 1.** Пусть  $f$  — мероморфная в  $\mathbb{D}$  функция. Если  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_k, \mu_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  — положительные числа и для модуля производной Шварца функции  $f$  выполнено неравенство

$$|S_f(z)| \leq \sum_{k=1}^n \frac{b_k A(\mu_k)}{(1-|z|^2)^{\mu_k}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

где  $b_k = \frac{2P_2-\mu_k}{A(\mu_k)} a_k$ ,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1$ ,  $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq 2$  и

$$A(\mu) = \begin{cases} 2^{3\mu-1} \pi^{2(1-\mu)}, & 0 \leq \mu \leq 1, \\ 2^{3-\mu}, & 1 \leq \mu \leq 2; \end{cases}$$

то функция  $f$  однолистна в  $\mathbb{D}$ .

# Квантовое исчисление в пространствах функций

А.Г. Сергеев

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

sergeev@mi-ras.ru

Одной из целей некоммутативной геометрии является перевод основных понятий анализа на язык банаховых алгебр. Этот перевод осуществляется с помощью процедуры квантования, устанавливающей соответствие между функциональными пространствами и алгебрами ограниченных операторов в гильбертовом пространстве  $H$ . Указанное соответствие, называемое квантовым, сопоставляет дифференциалу  $df$  функции  $f$  коммутатор ее операторного образа с некоторым оператором симметрии  $S$ , являющимся самосопряженным оператором в  $H$  с квадратом  $S^2 = I$ . Образ  $df$  при этом называется квантовым дифференциалом  $d^q f$  функции  $f$  и этот дифференциал, в отличие от дифференциала  $df$ , корректно определен даже для негладких функций  $f$ . Возникающее операторное исчисление называется квантовым.

В докладе будет приведен целый ряд утверждений из этого исчисления, касающихся интерпретации идеалов Шэттена компактных операторов в гильбертовом пространстве в терминах функциональных пространств на окружности и вещественной прямой. Главное внимание уделяется случаю операторов Гильберта–Шмидта. Роль оператора симметрии  $S$  выполняет при этом преобразование Гильберта. В случае функциональных пространств нескольких вещественных переменных оператор симметрии удастся определить в терминах операторов Рисса и матриц Дирака.

## Теоремы о следах и продолжениях для пространств Соболева $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ . Случай $p \in (1, n]$

А.И. Тюленев

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

tyulenev-math@yandex.ru

Пусть  $S \subset \mathbb{R}^n$  – произвольное непустое компактное множество, у которого  $d$ -обхват по Хаусдорфу  $\mathcal{H}_\infty^d(S) > 0$  при некотором  $d \in (0, n]$ . При каждом  $p \in (\max\{1, n - d\}, n]$  мы даем почти точное внутреннее описание пространства следов  $W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S$  пространства Соболева  $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ . Более того, при каждом  $\varepsilon \in (0, \min\{p - (n - d), p - 1\})$  мы строим новый линейный ограниченный оператор продолжения  $\text{Ext}_{S,d,\varepsilon}$ , отображающий пространство  $W_p^1(\mathbb{R}^n)|_S$  в пространство  $W_{p-\varepsilon}^1(\mathbb{R}^n)$  такой, что  $\text{Ext}_{S,d,\varepsilon}$  – правый обратный оператор для соответствующего оператора следа. Конструкция оператора  $\text{Ext}_{S,d,\varepsilon}$  не зависит от  $p$  и использует новые деликатные комбинаторные методы.

## Компактные операторы и равномерные структуры в гильбертовых $C^*$ -модулях

Д.В. Фуфаев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
fufaevdv@rambler.ru

Хорошо известен критерий компактности операторов в гильбертовых пространствах: оператор компактен тогда и только тогда, когда образ единичного шара вполне ограничен. Этот критерий перестает быть верным, если рассматривать гильбертовы  $C^*$ -модули, т.е. если рассмотреть некоторую  $C^*$ -алгебру  $\mathcal{A}$  вместо поля комплексных чисел  $\mathbb{C}$  (в этом случае операторы называются  $\mathcal{A}$ -компактными). Действительно, даже в случае произвольной бесконечномерной унитарной  $C^*$ -алгебры  $\mathcal{A}$ , тождественный оператор имеет ранг, равный единице, однако единичный шар не является вполне ограниченным из-за бесконечной размерности. Поэтому встает естественный вопрос: возможно ли описать свойство  $\mathcal{A}$ -компактности операторов в геометрических терминах?

В докладе будет рассказано о полученных результатах в данном направлении. А именно, будет представлена такая равномерная структура (т.е. система полунорм), что оператор  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  между гильбертовыми  $C^*$ -модулями при условии, что  $\mathcal{N}$  — счетно-порожденный модуль,  $\mathcal{A}$ -компактен тогда и только тогда, когда образ единичного шара вполне ограничен относительно этой равномерной структуры. Также будет рассказано о возможностях обобщения этого критерия на случай несчетнопорожденных модулей.

## Нильпотентная аппроксимация и горизонтальная соединимость на пространствах Карно–Каратеодори

А.В. Грешнов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
greshnov@math.nsc.ru

Рассмотрим  $C^1$ -гладкие базисные векторные поля  $X_1, \dots, X_N$ , определенные в некоторой области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ , т.е. такие, что векторы  $X_1(g), \dots, X_N(g)$  линейно независимы в каждой точке  $g \in \mathcal{D}$ . Пусть каждому векторному полю  $X_i$  присвоено натуральное число  $\deg i$ ,  $1 \leq \deg i \leq \Upsilon \leq N$ , (*степень поля*), так что  $\deg i \leq \deg j$  в случае  $i < j$ ,  $\deg 1 = 1$ , и коммутаторы векторных полей  $X_1, \dots, X_N$  в  $\mathcal{D}$  удовлетворяют соотношениям  $[X_i, X_j] = \sum_{\deg k \leq \deg i + \deg j} C_{ij}^k X_k$ . Для каждого  $l \in \{1, \dots, \Upsilon\}$  обозначим через  $H_l$  подрасслоение векторного расслоения  $T\mathcal{D}$ , порожденное всеми векторными полями  $X_i$  такими, что  $\deg i \leq l$ . Полагаем, что размерность  $\dim(H_l(g)) = h_l$  не зависит от выбора  $g \in \mathcal{D}$ . Таким образом, мы имеем следующую фильтрацию  $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_\Upsilon = T\mathcal{D}$ . При некоторых дополнительных условиях, связанных с определением векторных полей степени большей 1, любые две точки  $u, v \in \mathcal{D}$  можно соединить горизонтальной кривой конечной длины, т.е. такой абсолютно непрерывной кривой  $\gamma(s) : [0, s_0] \rightarrow \mathcal{D}$ , что для п.в.  $s \in [0, s_0]$  выполняется  $\dot{\gamma}(s) \in H_1(\gamma(s))$ . Тогда определяется расстояние Карно–Каратеодори  $d_{cc}(u, v)$  как точная нижняя грань длин горизонтальных путей, соединяющих точки  $u, v$ ; в этом случае пара  $(\mathcal{D}, d_{cc})$  называется *локальным эквирегулярным пространством Карно–Каратеодори*.

Однородная нильпотентная аппроксимация пространства  $(\mathcal{D}, d_{cc})$ , согласованная с его фильтрацией, в некоторой окрестности  $V_g$  точки  $g$  является группой Карно  $\mathbb{G}_g$  глубины  $\Upsilon$  с базисом левоинвариантных векторных полей  $X_1^g, \dots, X_N^g$ , удовлетворяющих соотношениям  $[X_i^g, X_j^g] = \sum_{\deg k = \deg i + \deg j} C_{ij}^k(g) X_k^g$  (см. детали в [?, ?, 2]).

Рассмотрим 4-мерное эквирегулярное пространство Карно—Каратеодори такое, что  $h_1 = 2, h_2 = 1, h_3 = 1$ . В этом случае группа Карно  $\mathbb{G}_g$  представляет собой группу Энгеля. Из результатов работы [?] следует, что найдется окрестность  $U_g \subset V_g$  точки  $g$  такая, что любая точка  $w \in U_g$  соединяется с точкой  $g$  4-звенной горизонтальной ломаной  $L'_g(w)$ , определенной при помощи векторных полей  $X_1^g, X_2^g$ , причем семейство ломаных  $\{L'_g(w)\}$  непрерывно зависит от точки  $w$ . Тогда, используя методы работы [?], мы получаем, что найдется окрестность  $U'_g \subset U_g$  такая, что любая точка  $w \in U'_g$  соединяется с точкой  $g$  4-звенной горизонтальной ломаной  $L_g(w)$ , определенной при помощи векторных полей  $X_1, X_2$ , причем семейство ломаных  $\{L_g(w)\}$  непрерывно зависит от точки  $w$ .

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, номер 075-15-2019-1613.

## Соболевские отображения, принимающие значения в банаховом пространстве или в метрическом пространстве

Н.А. Евсеев

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
evseev@math.nsc.ru

Мы рассматриваем возможные определения соболевских функций, принимающих значения в семействах банаховых пространств. Потребность в таких объектах обусловлена исследованиями эволюционных задач. Например, задачи на эволюционирующих поверхностях или на нецилиндрических областях. Для фиксированного семейства  $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$  и зависящего от времени оператора  $A(t) : X_t \rightarrow X_t$  рассмотрим абстрактную задачу

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = f(t) & \text{в } X_t, \\ u(0) = u_0 & \text{в } X_0. \end{cases} \quad (1)$$

Естественно предположить, что решения принадлежат некоторому пространству Соболева  $W^{1,p}([0, T]; \{X_t\})$  функций  $u : [0, T] \rightarrow \bigcup_t X_t$  с условием  $u(t) \in X_t$ . Это пространство можно определить разными способами. В [1], при условии монотонности  $\{X_t\}$ , мы определяем  $W^{1,p}([0, T]; \{X_t\})$  как пространство функции для которых верно:  $\|u(t)\|_{X_t} \in L^p([0, T])$  и существует функция  $g \in L^p([0, T])$  такая, что

$$\|u(t) - u(t_0)\|_{X_t} \leq \int_{t_0}^t g(s) ds. \quad (2)$$

Затем мы доказываем существование производной  $u'$  такой, что в (2) в качестве функции  $g$  можно выбрать  $\|u'(t)\|_{X_t}$ . В случае тривиального семейства такое определение совпадает с определением ньютоновского пространства  $N^{1,p}([0, T]; X)$ .

Последнее обстоятельство мотивирует рассмотрение определения пространств Соболева из анализа на метрических пространствах, с целью приложения для задачи (1). Так, пространство Решетняка–Соболева  $R^{1,p}(\Omega; X)$  определяется как функции  $u \in L^p(\Omega; X)$ , для которых: (A)  $x \mapsto \langle v^*, u(x) \rangle$  принадлежит  $W^{1,p}(\Omega)$ ; (B) существует  $g \in L^p(\Omega)$ , что  $|\nabla \langle v^*, u(x) \rangle| \leq \|v^*\| \cdot g(x)$  для всех  $v^* \in X^*$ . Если банахово пространство  $X$  обладает свойством Радона–Никодима, то  $W^{1,p} = R^{1,p} = N^{1,p}$ . В частности, если  $u \in R^{1,p}$ , то существует производная  $u' \in L^p$  (см. [2]). Наличие производной позволяет поставить задачу (1).

В [3] исследован случай, когда  $X$  не обладает свойством Радона–Никодима, но является двойственным к сепарабельному пространству. Тогда производная существует только в слабом\* смысле. Также мы получаем определение пространства Соболева функций со значениями в сепарабельном метрическом пространстве.

В дальнейшем, мы рассчитываем применить аппарат анализа на метрических структурах для исследования абстрактных задач на эволюционирующих пространствах вида (1).

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, номер 075-15-2019-1613.

## Список литературы

- [1] N. Evseev, A. Menovschikov. Sobolev space of functions valued in a monotone Banach family. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 492(1), 2020.
- [2] N. Evseev. Vector-valued Sobolev spaces based on Banach function spaces. *Nonlinear Analysis*, 2021.
- [3] P. Creutz, N. Evseev. An approach to metric space valued Sobolev maps via weak\* derivatives. preprint arXiv:2106.15449, 2021.

## О критических значениях полиномов

И.Р. Каюмов<sup>1</sup>, Д.М. Хамматова<sup>1</sup>, А. Хинкканен<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup>University of Illinois at Urbana–Champaign

ikayumov@gmail.com, dianalynx@rambler.ru, aimo@math.uiuc.edu

Рассмотрим класс полиномов

$$\mathfrak{P}_n = \left\{ z + \sum_{k=2}^n c_k z^k, c_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

В 1981 году Смейл [1] выдвинул следующую гипотезу, утверждающую, что для любого полинома  $f \in \mathfrak{P}_n$  существует его критическая точка  $\zeta$ , для которой

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| \leq 1 - \frac{1}{n}.$$



В статье [2] можно найти оценки для различных частных случаев.

Целью данной работы является изучение дуальной гипотезы Смейла, сформулированной Дубининым и Сугавой в 2009 году.

**Гипотеза.** Пусть  $f \in \mathfrak{P}_n$ . Тогда существует  $\zeta$  – критическая точка  $f$ , такая, что

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| \geq \frac{1}{n}.$$

Тишлер [3] доказал, что гипотеза верна для консервативных полиномов.

Дубинин и Сугава [4] доказали, что существует такая критическая точка  $\zeta$ , для которой

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| \geq \frac{1}{n4^n}.$$

Доказательство гипотезы для  $n = 4$  было представлено Тишлером в [3].

Основным результатом представленной работы является доказательство дуальной гипотезы Смейла для случаев  $n = 5$  и  $n = 6$ . Доказана

**Теорема.** Пусть  $f \in \mathfrak{P}_6$ . Тогда существует точка  $\zeta$ , такая, что  $f'(\zeta) = 0$  и  $\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| \geq \frac{1}{6}$ . Более того, существует критическая точка  $\zeta$ , для которой  $\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right| > \frac{1}{6}$ , кроме случая, когда  $f$  представима в виде

$$f(z) = \frac{1}{6a} (1 - (1 - az)^6), \quad (1)$$

где  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Аналогичный результат получен для  $n = 5$ .

## Список литературы

- [1] Smale S., The fundamental theorem of algebra and complexity theory // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), **4** (1981), 1–36.
- [2] Beardon A.F., Minda D., Ng T.W., Smale’s mean value conjecture and the hyperbolic metric // Math. Ann., **322**:4 (2002), 623–632.
- [3] Tischler D. Critical points and values of complex polynomials // J. Complexity., **5** (1989), 438–456.
- [4] Dubinin V., Sugawa T. Dual mean value problem for complex polynomials // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **85**:9 (2009), 135–137.

# Дискретизация интегральных норм по значениям в точках

Е.Д. Косов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
ked\_2006@mail.ru

Пусть числа  $C > c > 0$  фиксированы, пусть  $\Omega$  — некоторый компакт, и пусть  $\mu$  — некоторая вероятностная мера на  $\Omega$ . Пусть  $L$  — подпространство пространства  $L^p(\mu) \cap C(\Omega)$  размерности  $N$ . В докладе рассматривается следующий вопрос: для каких  $m \in \mathbb{N}$  найдутся такие точки  $x_1, \dots, x_m \in \Omega$ , что

$$c\|f\|_p^p \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(x_j)|^p \leq C\|f\|_p^p \quad \forall f \in L.$$

Ясно, что всегда  $m \geq N$ , и основной интерес представляют условия на подпространство  $L$ , при которых можно утверждать, что  $m$  по порядку сравнимо с размерностью  $N$ . Отметим, что часто интерес представляет ситуация, когда  $c = 1 - \varepsilon$ ,  $C = 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — некоторый малый параметр.

В докладе будет обсуждаться следующий недавний результат из работы [1].

**Теорема 1.** Пусть  $p \in (1, 2) \cup (2, \infty)$ ,  $M \geq 1$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Существует такое число  $C := C(M, p, \varepsilon) > 0$ , что для каждого  $N$ -мерного подпространства  $L \subset L^p(\mu) \cap C(\Omega)$ , удовлетворяющего условию

$$\|f\|_\infty \leq MN^{\frac{1}{\max\{p, 2\}}} \|f\|_{\max\{p, 2\}} \quad \forall f \in L,$$

и для каждого натурального числа  $m \geq CN[\log N]^{\max\{p, 2\}}$  найдутся такие точки  $x_1, \dots, x_m \in \Omega$ , что

$$(1 - \varepsilon)\|f\|_p^p \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |f(x_j)|^p \leq (1 + \varepsilon)\|f\|_p^p \quad \forall f \in L.$$

Данная теорема в некотором смысле усиливает результаты предыдущих работ [2], [3], [4]. Доказательство указанной теоремы основано на случайном выборе точек  $x_1, \dots, x_m$  и применении метода чейнинга для оценки сверху ожидания супремума некоторого случайного процесса.

## Список литературы

- [1] E.D. Kosov, Marcinkiewicz-type discretization of  $L^p$ -norms under the Nikolskii-type inequality assumption, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 504:1 (2021), 125358 (to appear), 32 pp.
- [2] V.N. Temlyakov, The Marcinkiewicz-type discretization theorems, Constr. Approx., 48:2 (2018) 337–369.
- [3] F. Dai, A. Prymak, A. Shadrin, V. Temlyakov, S. Tikhonov, Sampling discretization of integral norms, Constr. Approx., (2021).

- [4] F. Dai, A. Prymak, A. Shadrin, V. Temlyakov, S. Tikhonov, Entropy numbers and Marcinkiewicz-type discretization theorem, J. Funct. Anal., 281:6 (2021) 109090.

## **О проклятии размерностей для восстановления регулярных ридж-функций**

К.С. Рютин

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

kriutin@yahoo.com

Речь идет о задаче восстановления ридж-функции, заданной с погрешностью на  $n$ -мерном шаре, с использованием полиномиального по  $n$  количества измерений.

Существованием подобных алгоритмов занимается активно развивающаяся теория Information-Based Complexity.

Ряд авторов, начиная с работы A. Cohen, I. Daubechies, R. DeVore, G. Kerkyacharian, D. Picard (2012) изучали подобные вопросы для разных классов ридж-функций. По предложению С.В. Конягина мы рассмотрели случай аналитических ридж-функций и построили достаточно эффективный по числу измерений и операций алгоритм восстановления. Используется техника теории приближений, интерполяции и экстраполяции для аналитических функций одной переменной и соображения типа концентрации меры из теории вероятностей (а также порядковые статистики).

## **Фреймы Габора для рациональных функций**

Ю.С. Белов

Санкт-Петербургский государственный университет

j\_b\_juri\_belov@mail.ru

Пусть  $g$  функция из пространства  $L^2(\mathbb{R})$ . Обозначим за  $G_\Lambda$ ,  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$  систему частотно-временных сдвигов  $g$ ,  $G_\Lambda = \{e^{2\pi i \omega x} g(x - t)\}_{(t, \omega) \in \Lambda}$ . Типичный пример  $\Lambda$  – прямоугольная решетка  $\Lambda_{\alpha, \beta} := \alpha\mathbb{Z} \times \beta\mathbb{Z}$ . Одна из главных проблем анализа Габора – описание фрейм-множества для  $g$  т.е. описание всех пар  $\alpha, \beta$  для которых система  $G_{\Lambda_{\alpha, \beta}}$  фрейм в  $L^2(\mathbb{R})$ .

Хорошо известно, что условие  $\alpha\beta \leq 1$  необходимо. Все ли такие пары  $\alpha, \beta$  лежат в фрейм-множестве  $g$ ? Как описать фрейм множества?

До 2011 года полный ответ был известен лишь для нескольких функций (с точностью до сдвигов растяжений и преобразования Фурье). В 2011 году К. Грохениг и И. Стоклер расширили этот набор до totally положительных функций конечного типа. Позднее удалось добавить сюда totally положительные функции конечного гауссовского типа.

Мы предлагаем другой подход к проблеме и доказываем что рациональные функции типа Герглотца тоже дают полное фрейм-множество. Также нам удалась доказать гипотезу Добеши (опровергнутую в общей постановке Янсенем) для рациональных функций и иррациональных плотностей. Доклад основан на совместной работе с А.Куликовым и Ю.Любарским.

# Гранд пространства Соболева на метрических пространствах с мерой

С.В. Павлов

Новосибирский государственный университет

s.pavlov2@ng.su.ru

Известно поточечное описание гранд пространств Соболева  $L^{1,q}(U)$  в случае, когда  $U = \mathbb{R}^n$  или когда  $U$  – подобласть  $\mathbb{R}^n$  с некоторым конкретным свойством (extension property): локально суммируемая функция  $f$  принадлежит  $L^{1,q}(U)$  тогда и только тогда, когда найдется  $g \in L^q(U)$ , такая, что неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y))$$

выполнено для п. вс.  $x, y \in U$ . Этот результат мотивирует определение гранд-пространства Соболева на метрических структурах с мерой.

Метрическое пространство  $(X, d, \mu)$ , обладающее конечным диаметром и снабженное конечной борелевской мерой, называется  $s$ -регулярным по отношению к мере  $\mu$ , если для любых  $x \in X$ ,  $r \leq \text{diam} X$  верно

$$\mu(B(x, r)) \geq br^s,$$

где  $b = \mu(X)/\text{diam} X^s$ .

Над  $s$ -регулярной структурой  $(X, d, \mu)$  при  $1 < q < s$  в данной работе мы получаем вложение пространства  $W^{1,q}(X, d, \mu)$  в некоторое пространство  $V$  типа Лебега посредством неравенства

$$\|f\|_V^* = \sup_{\varepsilon \in (0; q-1)} \varepsilon^{1/(q-\varepsilon)} \|f\|_{L^{q^*-\delta(\varepsilon)}} \leq C \left( \frac{\|f\|_{L^q}}{\text{diam} X} + \|f\|_{L^{1,q}} \right),$$

где  $\delta(\varepsilon) = \frac{s^2\varepsilon}{(s-q)(s-q+\varepsilon)}$ . Величина  $\|\cdot\|_V^*$  является нормой на  $V$ , эквивалентной норме

$$\|f\|_V = \sup_{0 < \delta < q^*-1} \left( \delta^{q^*/q} \int_X |f|^{q^*-\delta} d\mu \right)^{\frac{1}{q^*-\delta}}.$$

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

## Топология, индуцированная конической псевдометрикой

Ю.Н. Захарян

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

yuri.zakharyan@gmail.com

В 1937 году А. Вейль впервые дал явное определение равномерной структуры [1]. Топологическое пространство, задаваемое равномерной структурой получило название равномерного пространства. Одним из способов задания топологии равномерного пространства является способ задания с помощью семейства числовых псевдометрик (см. [2]).

Данная работа посвящена изучению связи равномерных пространств с так называемыми коническими псевдометриками, т.е. псевдометриками, принимающими значения в конусе некоторого топологического векторного пространства (см. [3,4]).

**Определение 1.** Пусть  $X$  — непустое множество,  $\mathcal{D} = \{d_a\}_{a \in \mathcal{A}}$  — семейство числовых псевдометрик на  $X$ . Пространство  $(X, \mathcal{D})$ , топология которого задается предбазой

$$\mathcal{S} := \{B_a(x, r) \mid x \in X, r > 0, a \in \mathcal{A}\}, \quad B_a(x, r) = \{y \in X \mid d_a(x, y) < r\},$$

будем называть *обобщенным калибровочным* или *равномерным* пространством. Если семейство  $\mathcal{D}$  — разделяющее, т.е. верна импликация  $(d_a(x, y) = 0, \forall a \in \mathcal{A}) \Rightarrow (x = y)$ , то  $(X, \mathcal{D})$  называется *калибровочным*.

**Определение 2.** Пусть  $X$  — непустое множество и  $(\mathcal{L}, \leq, \mathcal{P})$  — хаусдорфова локально выпуклая векторная решетка с положительным конусом  $\mathcal{C}$  (см. [5]). Отображение  $d : X \times X \rightarrow \mathcal{C}$  называется *конической псевдометрикой* на  $X$ , если оно удовлетворяет следующим условиям:

1.  $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$ , для любых  $x, y \in X$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ , для любых  $x, y \in X$ .
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , для любых  $x, y, z \in X$ .

$d$  называется *конической метрикой*, если из условия  $d(x, y) = 0$  следует, что  $x = y$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  — непустое множество и  $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$  — вещественное векторное пространство, линейные операции на котором задаются покомпонентно.

Пусть  $\leq$  — частичный порядок на  $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$ , определяемый по правилу  $c_1 \leq c_2 \Leftrightarrow c_2 - c_1 \in [0; +\infty)^{\mathcal{A}}$ . Тогда  $(\mathbb{R}^{\mathcal{A}}, \leq)$  — векторная решетка с положительным конусом  $[0; +\infty)^{\mathcal{A}}$ .

Кроме того, если  $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$  наделено тихоновской топологией, то  $(\mathbb{R}^{\mathcal{A}}, \leq, \{p_a\}_{a \in \mathcal{A}})$  — хаусдорфова локально выпуклая векторная решетка.

**Теорема 1.** Пусть  $(X, \mathcal{D})$  — обобщенное калибровочное пространство,  $\mathcal{D} = \{d_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ . Пусть  $d : X \times X \rightarrow [0; +\infty)^{\mathcal{A}}$  — прямое произведение отображений  $d_a$ ,  $a \in \mathcal{A}$ , т.е.  $d(x, y) := (d_a(x, y))_{a \in \mathcal{A}}$ . Тогда  $d$  — непрерывная по каждой переменной коническая псевдометрика такая, что для любой последовательности верна импликация  $(d(x, x_n) \rightarrow 0) \Rightarrow (x_n \rightarrow x)$ . Кроме того,  $d$  является конической метрикой тогда и только тогда, когда семейство  $\mathcal{D}$  разделяющее.

**Теорема 2.** Пусть  $(\mathcal{L}, \leq, \mathcal{P})$  — хаусдорфова локально выпуклая векторная решетка с положительным конусом  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P} = \{p_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ . Пусть  $X$  — непустое множество и  $d : X \times X \rightarrow \mathcal{C}$  — коническая псевдометрика. Пусть  $\mathcal{T}_c$  — грубейшая топология на  $X$ , относительно которой  $d$  непрерывна по каждой переменной. Тогда существует семейство  $\mathcal{D}$  числовых псевдометрик на  $X$ , порождающее топологию  $\mathcal{T}_c$ . Кроме того, семейство  $\mathcal{D}$  — разделяющее в том и только том случае, когда  $d$  — коническая метрика.

## Список литературы

- [1] Weil A. *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale* // Paris, Act. Sci. Ind. — 1937.

- [2] Бурбаки Н. *Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь* // Москва, Наука – 1975.
- [3] Huang L. G., Zhang X. *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings* // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – 332. – P. 1468–1476.
- [4] Du W. S. *A note on cone metric fixed point theory and its equivalence* // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 2010. – 72. – P. 2259--2261.
- [5] Шефер Х. *Топологические векторные пространства* // Москва, Наука – 1971.

## Программа секции «Комбинаторика и геометрия»

Координаторы: А.М. Райгородский, А.Ю. Скоркин

### ВТОРНИК, 10 АВГУСТА

#### Зал № 9

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Александр Полянский (Московский физико-технический институт). *Существование паросочетания Тверберга*

14<sup>50</sup> — 15<sup>10</sup> Николай Богачев (Сколковский институт науки и технологий). *Геометрия, комбинаторика и арифметика многогранников Кокстера*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Маргарита Ахмеджанова (Московский физико-технический институт). *Раскраски би-однородных гиперграфов*

15<sup>30</sup> — 15<sup>50</sup> Аркадий Скоркин (Адыгейский государственный университет). *Максимальные подграфы случайного графа с заданным количеством ребер*

15<sup>50</sup> — 16<sup>10</sup> Юрий Демидович (Московский физико-технический институт). *О хроматическом числе случайного гиперграфа в неразрезанном случае*

16<sup>10</sup> — 16<sup>30</sup> Анна Неопрятная (Адыгейский государственный университет). *Конструктивные оценки хроматических чисел двумерных сфер*

16<sup>30</sup> — 16<sup>50</sup> Всеволод Воронов (Адыгейский государственный университет). *Оценки хроматических чисел подмножеств плоскости с координатами из алгебраических расширений*

16<sup>50</sup> — 17<sup>10</sup> Светлана Жилина (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Графы делителей нуля вещественных алгебр Кэли-Диксона*

### ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА

#### Зал № 3

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Арменак Гаспарян (Институт программных систем им. А.К. Айламазяна). *Комбинаторные тождества и неравенства*

14<sup>50</sup> — 15<sup>10</sup> Максим Жуковский (Московский физико-технический институт). *Опровержение  $EMS_0(FO^2)$  0 – 1 закона для всех вероятностей проведения ребра*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Алексей Латышев (Университет ИТМО). *Игра Hats. Сила конструкторов*

15<sup>30</sup> — 15<sup>50</sup> Всеволод Воронов (Адыгейский государственный университет). *Разбиения многогранников в размерностях 3 и 4 на части минимального диаметра*

15<sup>50</sup> — 16<sup>10</sup> Олег Григорян (Yandex). *Покрывание тороидального куба меньшими кубами*

- 16<sup>10</sup> — 16<sup>30</sup> Юрий Яровиков (Московский физико-технический институт). *Предельные точки спектра 4-закон нуля или единицы для разреженных случайных графов*
- 16<sup>30</sup> — 16<sup>50</sup> Дарья Мазуренко (Адыгейский государственный университет). *О перманентном ранге матриц  $(A|A)$  для трехдиагональных матриц  $A$*
- 16<sup>50</sup> — 17<sup>10</sup> Ольга Калинченко (Московский физико-технический институт). *Задача о слабом насыщении для случайных графов и двудольных шаблонов*



## Раскраски би-однородных гиперграфов

М.Б. Ахмеджанова

Московский физико-технический институт  
mechmathrita@gmail.com

Рассматриваются би-однородные гиперграфы, т.е. такие гиперграфы в которых размеры ребер бывают двух типов. Для гиперграфа  $H$  пусть  $f(H)$  равно математическому ожиданию количества одноцветных ребер, когда синий и красный цвет присваивается каждой вершине независимо с вероятностью  $1/2$ . Известно, что если минимальный размер ребра в неоднородном гиперграфе равен  $k$  и  $f(H) < C \log k$ , то такой гиперграф  $H$  можно правильно раскрасить в два цвета. В работе мы улучшаем оценку на функцию  $f(H)$  рассматривая раскраску при которой в би-однородном гиперграфе  $H = (V, E_1, E_2)$  нет красных ребер из  $E_1$  и одновременно нет синих ребер из  $E_2$ .

## Геометрия, комбинаторика и арифметика многогранников Кокстера

Н.В. Богачев

Сколковский институт науки и технологий  
nvbogach@mail.ru

Многогранники Кокстера являются естественными фундаментальными областями для дискретных групп, порожденных отражениями в пространствах постоянной кривизны. Все такие многогранники конечного объема в евклидовых пространствах и на сферах были классифицированы Г.С.М. Кокстером в 1933 году, причем там они существуют во всех размерностях. В 1967 году Э.Б. Винберг развил теорию групп отражений и многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского, причем в 1981 году им же был получен удивительный результат: компактных многогранников Кокстера, а также арифметических групп отражений в больших размерностях не существует. Эти и другие фундаментальные результаты сочетают в себе геометрические, комбинаторные и теоретико-числовые методы.

Доклад посвящен недавним результатам докладчика про грани и централизаторы отражений многогранников Кокстера и их арифметические свойства (основано на совместных работах с А. Колпаковым в IMRN 2021, а также с М. Белолипецким, А. Колпаковым и Л. Славичем, см. <https://arxiv.org/abs/2105.06897> ).

## Разбиения многогранников в размерностях 3 и 4 на части минимального диаметра

В.А. Воронов

Адыгейский государственный университет  
v-vor@yandex.ru

Рассматривается задача разбиения многогранных множеств в произвольной размерности на части минимального диаметра. Представлен алгоритм, основанный на случайной

генерации начальных приближений и оптимизации разбиений при помощи стохастического градиентного спуска. В размерностях 3 и 4 получены некоторые новые численные оценки для разбиений множеств, покрывающих произвольное множество единичного диаметра.

## **Комбинаторные тождества и неравенства**

А.С. Гаспарян

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна  
armenak.gasparyan@yandex.ru

Речь пойдёт о тождествах типа Мюира и МакМагона для определителей и перманентов, их обобщении на многомерные определители, а также о применении последних для доказательства неравенств для симметрических функций, перманентов и ряда комбинаторных чисел.

## **Покрытие тороидального куба меньшими кубами**

О.Р. Григорян

Yandex

В нашей работе мы исследовали минимальное количество кубов, покрывающих трехмерный тор в зависимости от соотношения сторон кубов и тора. В результате исследования мы выяснили точный ответ для соотношений от 1 до 2, доказали эквивалентность задачи в непрерывном и дискретном случае, улучшили оценки для нескольких семейств соотношений и свели задачу поиска ответа для любого заранее заданного отношения к конечному перебору.

## **О хроматическом числе случайного гиперграфа в неразрезанном случае**

Ю.А. Демидович

Московский физико-технический институт  
yuradem9595@mail.ru

Доклад посвящен изучению предельной концентрации значений хроматического числа случайного гиперграфа в биномиальной модели  $H(n, k, p)$ . При фиксированном  $k \geq 3$  и не слишком быстро растущем значении  $pn^{k-1}$  хроматическое число  $H(n, k, p)$  с вероятностью, стремящейся к 1, принадлежит множеству из некоторых двух соседних значений. Кроме того, при чуть более сильных ограничениях на рост  $pn^{k-1}$  данные значения можно отыскать явным образом, как функции от  $n$  и  $p$ .

## **Оценки хроматических чисел подмножеств плоскости с координатами из алгебраических расширений**

В.А. Воронов, Е.А. Дергачев  
Адыгейский государственный университет  
dergachev336@gmail.com

Ряд примеров графов единичных расстояний с хроматическим числом 5, вложенных в плоскость, вкладывается также в алгебраическое расширение поля рациональных чисел, полученное присоединением трех корней из простых чисел и мнимой единицы. В докладе перечислен ряд 4-хроматических расширений и представлено доказательство существования 4-раскраски для некоторых колец, содержащихся в этих полях.

## **Графы делителей нуля вещественных алгебр Кэли-Диксона**

С.А. Жилина  
Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
zhilina0sveta@gmail.com

Один из методов визуализации бинарного алгебраического отношения  $R$  — построение соответствующего ему графа. Вершинам графа соответствуют элементы рассматриваемой алгебраической структуры, причём существует ребро из  $x$  в  $y$ , если и только если  $xRy$ . Наиболее распространённые графы отношений включают в себя графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля. Цель данного исследования — изучение графов ортогональности и делителей нуля произвольных вещественных алгебр Кэли-Диксона.

Начиная с размерности 16, алгебры Кэли-Диксона неальтернативны, поэтому в них появляются делители нуля, которые, за исключением некоторых частных случаев, тяжело поддаются изучению и классификации. На настоящий момент большая часть работ посвящена алгебрам главной последовательности, в которых все параметры процедуры Кэли-Диксона подразумеваются равными -1. Среди них стоит отметить работы Морено, где впервые были рассмотрены дважды альтернативные делители нуля, то есть такие элементы, обе компоненты которых являются альтернативными элементами предыдущей алгебры последовательности.

Доклад будет посвящён делителям нуля в произвольных вещественных алгебрах Кэли-Диксона, компоненты которых удовлетворяют некоторым дополнительным условиям на норму и альтернативность. Такие делители нуля образуют шестиугольные структуры в графах ортогональности и делителей нуля. В случае алгебр главной последовательности, эти шестиугольники могут быть продолжены до так называемых двойных шестиугольников, причём вершины каждого двойного шестиугольника имеют удобную таблицу умножения.

Доклад основан на совместной работе с Александром Эмилевичем Гутерманом.

## Опровержение $EMSO(FO^2)$ 0 – 1 закона для всех вероятностей проведения ребра

М.Е. Жуковский

Московский физико-технический институт  
zhukmax@gmail.com

В 2001 году Ле Барс доказал, что существует экзистенциальное монадическое предложение второго порядка такое, что вероятность его истинности не имеет предела на биномиальном случайном графе  $G(n, 1/2)$  и предположил, что для экзистенциальных монадических предложений с двумя переменными первого порядка выполнен 0-1 закон. В докладе речь пойдет об опровержении этой гипотезы для случайного графа  $G(n, p)$  при всех постоянных вероятностях проведения ребра. Доклад основан на совместной работе с М. Ахмеджановой.

## Задача о слабом насыщении для случайных графов и двудольных шаблонов

О.И. Калиниченко

Московский физико-технический институт  
s15b1\_kalinichenko@179.ru

Пусть  $G, H$  -- графы, а  $F$  — остовный подграф  $G$ . Будем говорить, что  $F$  слабо  $(G, H)$ -насыщаем, если в нем нет копий  $H$ , но существует перестановка  $e_1, e_2, \dots, e_m$  множества ребер  $E(G) \setminus E(H)$  такая, что  $\forall i \in (1, \dots, m)$  граф  $G_i = G \cup \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  содержит копию  $H$ , в которой присутствует ребро  $e_i$ . Числом слабой насыщенности  $wsat(G, H)$  называется минимальное количество ребер в  $(G, H)$ -насыщаемом графе. Основная цель представленной работы — изучить поведение  $wsat$  в случае случайного графа  $G$  и полных двудольных графов  $H$ .

Легко видеть, что  $wsat(K_n, K_1, s) = s(s-1)^2$ . В работе мы находим пороговую вероятность для свойства  $wsat(G(n, p), K_1, s) = wsat(K_n, K_1, s)$  с точностью до константы (у этого свойства существует точный порог). В 2020 году Кроненберг, Мартинс и Моррисон (arXiv:2004.01289) нашли значения  $wsat(K_n, K_t, t)$  и  $wsat(K_n, K_t, t+1)$  для  $t \geq 2, n \geq 3t-3$ , а также доказали, что для произвольных  $t < s$  справедливо  $wsat(K_n, K_t, s) = n(t-1) + f(t, s)$ , где  $f(t, s)$  зависит только от  $t, s$  и не зависит от  $n$ . Мы доказываем, что в случае  $p = const, t \geq 2$  а.п.н.  $wsat(G(n, p), K_t, t) = wsat(K_n, K_t, t)$  и  $wsat = wsat(K_n, K_1, t+1)$ , и что для любых  $t, s$  найдется такая константа  $C = C(t, s)$ , что а.п.н.  $|wsat(G(n, p), K_t, s) - wsat(K_n, K_t, s)| < C$ . Для доказательства этих утверждений был получен общий результат, утверждающий что  $wsat(G(n, p), H) \leq wsat(K_n, H)$  для произвольного  $H$ , если существует слабо  $(G, H)$ -насыщаемый граф с определенной структурой.

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, госзадание №075-00337-20-03, номер проекта 0714-2020-0005.

## Список литературы

- [1] Kronenberg B., Martins T., Morrison N. Weak saturation numbers of complete bipartite graphs in the clique// arXiv:2004.01289.

### Игра Hats. Сила конструкторов

А.С. Латышев  
Университет ИТМО  
alex\_700\_95@mail.ru

Игра Hats: в вершинах графа находятся мудрецы, на каждого мудреца надевают шляпу одного из  $k$  возможных цветов. Каждый мудрец видит шляпы мудрецов в соседних вершинах, но не видит свою. Каждый мудрец высказывает догадку, шляпа какого цвета надета на нем. Цель мудрецов состоит в том, чтобы хотя бы один из них угадал.

Обычно рассматривают *hat guessing number* (обозначается  $HG(G)$ ) – максимальное такое  $k$ , при котором у мудрецов есть детерминированная выигрышная стратегия, и изучают связь этого числа с другими параметрами графа (степень, диаметр, кликовое число, ...). Один из вопросов такого рода: накладывает ли планарность какое-нибудь ограничение на  $HG(G)$ .

На данный момент неизвестно ограничено ли  $HG(G)$  для планарных графов. В работе [1] показано, что для внешнепланарных графов  $HG(G) < 2^{125000}$ . С другой стороны, про нижнюю оценку тоже пока известно мало: в работе [2] доказано, что существуют планарные графы с  $HG(G) \geq 12$ .

В данном докладе, основанном на работе [3], предложен способ построения планарного графа с  $HG(G) = 14$ . Этот способ широко использует технику конструкторов, предложенную в работах [4] и [5]. Таким образом, это еще раз показывает, что теоремы-конструкторы полезны не только для решения более общей задачи с переменным числом шляп, но и для получения *state of the art* результатов в классической игре Hats.

## Список литературы

- [1] P. Bradshaw, “On the hat guessing number of a planar graph class,” arXiv:2106.01480 [math], Jun. 2021, Accessed: Jul. 30, 2021. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/2106.01480>
- [2] N. Alon and J. Chizewer, “On the Hat Guessing Number of Graphs,” arXiv:2107.05995 [cs, math], Jul. 2021, Accessed: Jul. 30, 2021. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/2107.05995>
- [3] K. P. Kokhas and A. S. Latyshev, “The Hats Game. the Power of Constructors,” J Math Sci, vol. 255, no. 2, pp. 124–131, May 2021, doi: 10.1007/s10958-021-05355-w.
- [4] K. Kokhas and A. Latyshev, “Cliques and Constructors in ‘Hats’ Game. I,” J Math Sci, vol. 255, no. 1, pp. 39–57, May 2021, doi: 10.1007/s10958-021-05348-9.
- [5] K. P. Kokhas, A. S. Latyshev, and V. I. Retinskiy, “Cliques and Constructors in ‘Hats’ Game. II,” J Math Sci, vol. 255, no. 1, pp. 58–70, May 2021, doi: 10.1007/s10958-021-05349-8.

## Конструктивные оценки хроматических чисел двумерных сфер

А.М. Неопрятная

Адыгейский государственный университет

anna.neo01@mail.ru

Представлены новые результаты, касающиеся хроматического числа двумерной сферы. При двух значениях радиуса построены 5-хроматические дистанционные графы. Кроме того, показано, что 4-хроматические дистанционные графы без треугольников, ранее построенные О'Доннеллом, допускают дистанционное вложение в сферу при значениях радиуса, для которых ранее была известна только нижняя оценка 3. Это позволяет установить, что при радиусе сферы, принадлежащем отрезку  $[0.541, 0.563]$ , хроматическое число равно 4.

## Существование паросочетания Тверберга

А.А. Полянский

Московский физико-технический институт

alexander.polyanskii@yandex.ru

Для точек  $x, y \in \mathbb{R}^d$  обозначим через  $D(x, y)$  замкнутый (евклидов) шар с диаметром  $xy$ . Граф  $G = (V(G), E(G))$ , вершинами которого являются точки в  $\mathbb{R}^d$ , называется *графом Тверберга*, если

$$\bigcap_{xy \in E(G)} D(x, y) \neq \emptyset.$$

В недавнем препринте Соберона и Танга arXiv:2011.12218 было доказано, что для любого нечётного множества точек на плоскости существует гамильтонов цикл, являющегося графом Тверберга. В той же работе был поставлен вопрос о существовании гамильтонова цикла, являющегося графом Тверберга, для произвольного конечного множества в евклидовом пространстве любой размерности. В совместной работе с моими студентами О.Пирахмадом и А.Василевским было получено несколько результатов. Самый интересный из которых состоит в том, что для любого чётного множества точек в  $\mathbb{R}^d$  существует полное паросочетание, являющееся графом Тверберга.

## Максимальные подграфы случайного графа с заданным количеством ребер

М.Е. Жуковский<sup>1</sup>, А.Ю. Скоркин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт

<sup>2</sup>Адыгейский государственный университет

zhukmax@gmail.com, arken@mail.ru

В этой работе мы изучаем некоторые предельные характеристики случайного графа  $G(n, p)$ , где  $p \in (0, 1)$  — произвольное фиксированное число, независимое от  $n$ . Напомним, что множество вершин этого графа —  $\{1, \dots, n\}$  и каждая пара вершин соединена ребром с вероятностью  $p$  независимо от всех остальных.

В [1,2] доказано, что максимальный размер множества вершин, между которыми нет ребер, с вероятностью, стремящейся к 1 принимает одно из двух значений:  $f_0(n)$  и  $f_0(n) + 1$ , где

$$f_0(n) = \log_{1/(1-p)} n - 2 \log_{1/(1-p)} \log_{1/(1-p)} n + 2 \log_{1/(1-p)} \frac{e}{2} + 0.9$$

В таких случаях говорят, что число независимости сконцентрировано в двух точках.

Нас интересует, справедлива ли концентрация в двух точках максимального размера множества с заданным числом ребер. Более формально, пусть  $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+$  — некоторая функция. Пусть  $Y_n[t]$  — максимальный размер  $k$  множества вершин в  $G(n, p)$ , индуцирующего подграф с ровно  $t(k)$  ребрами.

Дж. Балог и М. Жуковским в [5] было доказано, что при  $t$ , близких к  $p \binom{k}{2}$ , концентрации в двух точках нет. Верна ли концентрация при  $t$ , значительно меньших “среднего значения”? Нам удалось установить следующий результат.

**Теорема.** Пусть  $t = t(k) = o(k^2)$  и  $|\frac{t(k+1)}{t(k)} - 1| = O(1/k)$ . Тогда найдется такая функция  $f_t(n)$ , что с вероятностью, стремящейся к 1,  $Y_n[t] \in \{f_t(n), f_t(n) + 1\}$

Доклад основан на совместной работе с М. Жуковским.

## Список литературы

- [1] Bollobás B. and Erdős P., Cliques in random graphs, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 80 (1976), 419–427.
- [2] G.R. Grimmett, C.J.H. McDiarmid, On colouring random graphs, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77:2 (1975), 313–324.
- [3] Fountoulakis N., Kang R.J., McDiarmid C., Largest sparse subgraphs of random graphs, European Journal of Combinatorics 35 (2014), 232–244.
- [4] Janson S., Luczak T. and Ruciński A., Random Graphs, New York, Wiley, 2000.
- [5] Дж. Балог, М. Жуковский, <https://arxiv.org/pdf/1904.05307.pdf>

## Программа секции «Теория вычислимости и математическая логика»

### Зал пленарных заседаний

Координаторы: Н.А. Баженов, И.Ш. Калимуллин

#### ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>15</sup> Марат Арсланов (Казанский федеральный университет). *The theories of the Turing degrees and the bounded Turing degrees below 0'*

15<sup>20</sup> — 16<sup>05</sup> Виктор Селиванов (Математический центр в Академгородке). *Effective Wadge Hierarchy in Computable Quasi-Polish Spaces*

ПЕРЕРЫВ

16<sup>40</sup> — 17<sup>25</sup> Дмитрий Жук (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Constraint Satisfaction Problem: known results and open problems*

17<sup>30</sup> — 18<sup>15</sup> Сергей Артемов (CUNY Graduate Center, USA). *Hyperderivations for Epistemic Logic*

#### ВТОРНИК, 10 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>15</sup> Вадим Пузаренко (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Structures with Non-Standard Computability Approach*

15<sup>20</sup> — 16<sup>05</sup> Станислав Сперанский (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН). *Monadic second-order definability in weak arithmetics*

ПЕРЕРЫВ

16<sup>40</sup> — 17<sup>25</sup> Степан Кузнецов (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН). *Complexity of Theories for Structures with Kleene Star*

17<sup>30</sup> — 18<sup>15</sup> Искандер Калимуллин (Казанский федеральный университет). *Punctual structures and punctual categoricity*

#### ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>15</sup> Степан Башмаков (Сибирский федеральный университет). *Finite model property and unification for temporal logic of knowledge  $\mathcal{LTK.sl}_U$*

15<sup>20</sup> — 16<sup>05</sup> Биржан Калмурзаев (Казахский национальный университет им. аль-Фараби). *On positive preorders*

ПЕРЕРЫВ

16<sup>40</sup> — 17<sup>25</sup> Сергей Оспичев (Математический центр в Академгородке). *Rogers semilattices*



17<sup>30</sup> — 18<sup>15</sup> Марс Ямалеев (Казанский федеральный университет). *On definability of c.e. degrees in the 2-c.e. degree structures*

**ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА**

14<sup>30</sup> — 15<sup>15</sup> Алёна Степанова (Дальневосточный федеральный университет). *Generalized stability of the class of injective S-acts*

15<sup>20</sup> — 16<sup>05</sup> Евгений Ефремов (Дальневосточный федеральный университет). *Axiomatizability of the class of subdirectly irreducible acts over a commutative monoid*

ПЕРЕРЫВ

16<sup>40</sup> — 17<sup>25</sup> Максим Зубков (Казанский федеральный университет). *On categoricity of linear orders*

## **Finite model property and unification for temporal logic of knowledge $\mathcal{LTK.sl}_U$**

С.И. Башмаков, Т.Ю. Зверева

Сибирский федеральный университет

krauder@mail.ru, 3336259@gmail.com

Simultaneously with the development of computer networks and an increase in the amount of data with which they operate, there is a growing demand for the specification of systems that allow simulating their operations and internal structure.

In this regard, the popular and comfortable-to-use logical systems  $\mathcal{LTL}$  and  $\mathcal{CTL}$  demonstrate the limitations of their expressive capabilities: convenient properties of reflexivity and transitivity of the models for these logics become an obstacle in conditions of possible data loss and errors when working with them.

An alternative in this situation can be offered by logics that don't have these «good» properties. However, in this case many basic methods and approaches often become inapplicable.

In our study, we propose a semantic description for linear step-like temporal multi-agent logic with the universal modality  $\mathcal{LTK.sl}_U$  based on the idea of non-reflexive non-transitive nature of time [1]. For this system, it was possible to establish a finite model property and to obtain a projectivity — an important result from the theory of unification.

*This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2021-1388).*

## **Список литературы**

- [1] Bashmakov, S.I. Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality/ S.I. Bashmakov // J. SibFU. Mathematics and Physics. — V. 11 N. 1 — 2018 — P. 3–9.

## **The theories of the Turing degrees and the bounded Turing degrees below $0'$**

М.М. Арсланов

Казанский федеральный университет

marat.arslanov@kpfu.ru

We discuss the structures of degrees under the Turing reducibility and the bounded Turing reducibilities, when the questions asked of the oracle are bounded by some natural conditions. We survey what is known about the algebraic structure and the complexity of the decision procedure for these degree structures. Typical algebraic questions include the existence of infima, distributivity, embeddings of partial orderings or lattices and extension of embedding problems.

Finally, we discuss some results and open problems concerning definability and the complexity of the decision problems for these degree structures.

## Hyperderivations for Epistemic Logic

C.H. Артемов  
CUNY Graduate Center, USA  
sartemov@gc.cuny.edu

The existing tradition of specifying an epistemic situation by a single model covers only complete descriptions. Such descriptions require determining truth values of knowledge assertions of any nested depth, which is usually not feasible. Epistemic descriptions are often partial and cannot be adequately specified by a single model.

However, an appropriate tool for partial specifications, epistemic theory incorporated into the possible worlds environment, has been conspicuously absent. This situation can be compared with the depleted fraction of mathematical logic which considers only complete theories whereas most of the theories of interest are incomplete: arithmetic, set theory, group theory, etc.

We suggest a framework of epistemic theories, hypertheories, which fills in this void. Hypertheories and their classes of models offer a well-principled foundation for epistemic reasoning with partial information.

## Axiomatizability of the class of subdirectly irreducible acts over a commutative monoid

Е.Л. Ефремов, А.А. Степанова  
Дальневосточный федеральный университет  
efremov-el@mail.ru, step1td@mail.ru

An act  ${}_SA$  is called *subdirectly irreducible* if

$$\bigcap \{\rho_i \mid \rho_i \neq \Delta, i \in I\} \neq \Delta$$

for every family of congruences  $\rho_i$  on  ${}_SA$  ( $i \in I$ ) where  $\Delta$  is zero congruence on  ${}_SA$ . The interest in the study of such acts is caused by Birkhoff's theorem, according to which any algebra is isomorphic to a subdirect product of subdirectly irreducible algebras [1]. The question of axiomatizability of the class of subdirectly irreducible acts over an Abelian group was studied by Stepanova A.A. and Ptakhov D.O. [2]. We describe commutative monoids, the class of subdirectly irreducible acts over which is axiomatizable.

Supported by RF Ministry of Education and Science (Suppl. Agreement No. 075-02-2021-1395 of 01.06.2021).

## Список литературы

- [1] Birkhoff G. Subdirect unions in universal algebra // Bulletin of the American Mathematical Society, 50 (1944), 764–768.
- [2] Stepanova A.A., Ptakhov D.O. Axiomatizability of the class of subdirectly irreducible acts over an Abelian group // Algebra and Logic, 59:5 (2020), 395–403.

## Punctual structures and punctual categoricity

И.Ш. Калимуллин

Казанский федеральный университет  
ikalimul@gmail.com

## Punctual structures and punctual categoricity

A punctual algebraic structure  $A$  (i.e., primitive recursive structure on the universe  $\omega$ ) is punctually categorical if for every its punctual copy  $B$  there is an isomorphism from  $A$  onto  $B$  which is primitive recursive together with the inverse.

Unexpectedly, there is an dichotomy for this notion: every punctually categorical structure is either finitely generated, or locally finite. This dichotomy also holds for the structures which have a degree of punctual categoricity.

For the finitely generated structures we can describe the possible degrees of punctual categoricity. We also have some partial results relating degrees of punctual categoricity of locally finite structures.

## On positive preorders

Б.С. Калмурзаев<sup>1,2</sup>, Н.А. Баженов<sup>3</sup>, С.А. Бадаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби

<sup>2</sup>Казахстанско-Британский технический университет

<sup>3</sup>Математический центр в Академгородке

birzhan.kalmurzayev@gmail.com, bazhenov@mail.math.nsc.ru, sbadaev@gmail.com

The main object of our research is computably enumerable (positive) preorders with respect to computable reducibility. We say that a preorder  $P$  is computably reducible to a preorder  $Q$  iff there is a computable function  $f$  such that  $xPy$  iff  $f(x)Qf(y)$  for all  $x, y \in \omega$ . We investigate definable objects in the structure of positive preorders with respect to computable reducibility. We also investigate and classify the arithmetical complexity of some index sets of positive preorders and positive linear preorders. We refer to some fixed universal computable numbering  $\{P_i: i \in \omega\}$  of all positive preorders, where “computable” means that the set  $\{\langle i, x, y \rangle: xP_i y\}$  is c.e., and “universal” means that for every such computable numbering  $\{R_i: i \in \omega\}$  of all positive preorders, there exists a computable function  $f$  such

that  $R_i = P_{f(i)}$  for all  $i \in \omega$ . Unfortunately, the family of all positive linear preorders does not have a computable numbering, so we will refer to the universal computable numbering of some superfamily of all positive linear preorders.

Papers [1–4] established the complexities of the index sets of such classes of c.e. equivalence relations (ceers) as the following: universal ceers, dark ceers, light ceers, self-full ceers, precomplete ceers, weakly precomplete ceers, and  $e$ -complete ceers. In addition, they consider the  $c$ -degree of a given ceer  $E$ , its upper cone and lower cone (under computable reducibility). In the talk we will discuss complexity of index sets of analogous classes of positive preorders and linear preorders.

## Список литературы

- [1] Uri Andrews, Steffen Lempp, Joseph S. Miller, Keng Meng Ng, Luca San Mauro, and Andrea Sorbi. Universal computably enumerable equivalence relations. // *The Journal of Symbolic Logic*. 2013. Vol. 79, № 1. P. 60–88.
- [2] Uri Andrews, and Andrea Sorbi. The Complexity of index sets of classes of computably enumerable equivalence relations. // *The Journal of Symbolic Logic*. 2016. Vol. 81, № 4. P. 1375–1395.
- [3] Uri Andrews, and Andrea Sorbi. Joins and meets in the structure of ceers. // *Computability*. 2019. Vol. 8, № 3-4. P. 193–241.
- [4] Serikzhan Badaev and Andrea Sorbi. Weakly precomplete computably enumerable equivalence relations. // *Mathematical Logic Quarterly*. 2016. Vol. 62, № 1-2. P. 111–127.

## Complexity of Theories for Structures with Kleene Star

С.Л. Кузнецов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

sk@mi-ras.ru

The Kleene star is one of the most interesting algebraic operations which appear in theoretical computer science. Being of inductive nature, the Kleene star makes propositional substructural logics which involve it behave like stronger theories, like arithmetic. We give a survey of results on algorithmic complexity results for theories which include Kleene star. Most of the theories we shall discuss are (in)equational, since in richer languages complexity becomes very high (Kozen, 2002). We compare classical results by Kozen et al. on decidability of the equational theory of Kleene algebras with the new undecidability results obtained by the author, for algebras with divisions (action algebras). We shall also briefly discuss recent results, obtained in joint work with S.O. Speranski, on systems with both the Kleene star and linear logic exponential modality.

## Rogers semilattices

С.С. Оспичев

Математический центр в Академгородке  
ospichev@math.nsc.ru

Let  $S$  be a countable set. A *numbering* of  $S$  is a surjective map  $\nu$  from the set of natural numbers  $\omega$  onto  $S$ . A standard tool for comparing the complexity of different numberings is provided by the notion of *reducibility* between numberings: a numbering  $\nu$  is *reducible* to another numbering  $\mu$  if there is total computable function  $f(x)$  such that  $\nu(x) = \mu(f(x))$  for all  $x \in \omega$ . Numberings which are reducible to each other are called *equivalent* numberings.

Goncharov and Sorbi [1] started developing the theory of generalized computable numberings. One of their approaches to generalized computations can be summarized as follows. Let  $\Gamma$  be a complexity class (e.g.,  $\Sigma_1^0$ ,  $\Sigma_2^{-1}$ ,  $\Sigma_n^0$ , or  $\Pi_n^1$ ). Consider a countable family  $\mathcal{S} \subset P(\omega)$ . A numbering  $\nu$  of the family  $\mathcal{S}$  is  $\Gamma$ -*computable* if the set  $G_\nu = \{\langle n, x \rangle : x \in \nu(n)\}$  belongs to the class  $\Gamma$ . We say that a family  $\mathcal{S}$  is  $\Gamma$ -*computable* if it has a  $\Gamma$ -computable numbering. *Rogers semilattice* of a family is a quotient structure of all computable numberings of the family, modulo equivalence of the numberings, ordered by the relation induced by the reducibility of numberings.

In a way similar to the classical studies of computable numberings [2], one introduces the notion of the *Rogers semilattice* of a  $\Gamma$ -computable family  $\mathcal{S}$ . We say that an upper semilattice  $\mathcal{U}$  is a *Rogers  $\Gamma$ -semilattice* if there is a  $\Gamma$ -computable family  $\mathcal{S}$  such that the Rogers semilattice of  $\mathcal{S}$  is isomorphic to  $\mathcal{U}$ .

In this talk we will discuss some recent results on Rogers semilattices for different complexity classes.

The talk is based on joint works with Nikolay Bazhenov, Birzhan Kalmurzaev, Manat Mustafa and Mars Yamaleev.

## Список литературы

- [1] S.S. Goncharov, A. Sorbi, Generalized computable numerations and nontrivial Rogers semilattices. Algebra and Logic, 1997, v. 36, N 6, p. 359–369.
- [2] Yu. L. Ershov, Theory of numberings, Nauka, 1977, Moscow, In Russian

## Structures with Non-Standard Computability Approach

В.Г. Пузаренко

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
vagrig@math.nsc.ru

One constructs a series of computable structures which computable uncomputable sets. As a corollary, 1-computable but undecidable structures with elimination quantifiers are presented. Furthermore, a problem of the description of a fixed point structure under a jump operator is mentioned.

## Effective Wadge Hierarchy in Computable Quasi-Polish Spaces

В.Л. Селиванов

Математический центр в Академгородке

`vseliv@iis.nsk.su`

We define and study an effective version of the Wadge hierarchy in computable quasi-Polish spaces which include most spaces of interest for computable analysis. Along with hierarchies of sets we study hierarchies of  $k$ -partitions which are interesting on their own. We show that levels of such hierarchies are preserved by the computable effectively open surjections, that if the effective Hausdorff-Kuratowski theorem holds in the Baire space then it holds in every computable quasi-Polish space, and we extend the effective Hausdorff theorem to  $k$ -partitions. We establish sufficient conditions for the non-collapse of the effective Wadge hierarchy and apply them to some concrete spaces like the discrete spaces of intergers, Baire space and Cantor. We show that the proof of non-collapse in any concrete space is highly non-trivial.

## Monadic second-order definability in weak arithmetics

С.О. Сперанский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

`katze.tail@gmail.com`

I shall give a survey of monadic second-order definability in relatively weak arithmetical structures on  $\mathbb{N}$ , such as

$$\langle \mathbb{N}; \leq \rangle, \quad \langle \mathbb{N}; +, = \rangle, \quad \langle \mathbb{N}; | \rangle, \quad \langle \mathbb{N}; \perp \rangle \quad \text{and} \quad \langle \mathbb{N}; \times, = \rangle$$

where  $|$  and  $\perp$  denote the divisibility relation and the coprimeness relation respectively. Moreover, if time permits, I shall mention some related results on first-order definability. The topic of this talk may be described as ‘weak arithmetics’, broadly understood.

## Generalized stability of the class of injective $S$ -acts

А.А. Степанова

Дальневосточный федеральный университет

`stepltd@mail.ru`

One of the main characteristics of the theory is stability. T. G. Mustafin [1] proposed a generalization of this concept. The concept of  $P$ -stability [2] is a special case of generalized stability of complete theories. In [3],  $S$ -acts with a  $(P, 1)$ -,  $(P, s)$ -,  $(P, a)$ -, and  $(P, e)$ -stable theory are considered. In [4], the description of the monoids  $S$  over which the classes of free, projective, strongly flat, divisible, regular  $S$ -acts are  $P$ -stable is given.

In this paper, we prove that if the class of all injective  $S$ -acts is  $(P, 1)$ -stable then  $|S| = 1$ . Besides that, we prove that the property of being  $(P, s)$ -,  $(P, a)$ -, and  $(P, e)$ -stable for the class of all injective  $S$ -acts is equivalent to  $S$  being a group.

## Список литературы

- [1] T.G. Mustafin, On stability theory of polygons, Trudy Inst. Mat., 8 (1988), P. 92–108. Zbl 0725.03019
- [2] E. A. Palyutin,  $E^*$ -stable theories, Algebra and Logic, V. 42, No. 2, (2003) P. 112–120.
- [3] Ptakhov D.O. Polygons with a  $(P, 1)$ -stable theory, Algebra and Logic, V. 56, No. 6, (2017) P. 712–720.
- [4] A. A. Stepanova, A. I. Krasitskaya,  $P$ -stability of some classes of  $S$ -polygons, Sibirsk. Mat. Zh., V. 62, No. 2 (2021), P. 441–449.

### On definability of c.e. degrees in the 2-c.e. degree structures

М.М. Ямалеев

Казанский федеральный университет  
mars.yamaleev@kpfu.ru

In our talk we will consider the degree structures induced by various algorithmic reducibilities within the finite levels of the Ershov hierarchy. The most attention will be paid for the first two levels known as c.e. and 2-c.e. degrees. The problem of definability of c.e. Turing degrees in the partial order of 2-c.e. Turing degrees was posed by Cooper and Li in 2002. Nowadays it is one the most intriguing questions about model-theoretic properties of 2-c.e. Turing degrees. In our talk we will consider these and related questions for different settings. Thus, we will show how the problem can be solved for the finite levels of the Ershov hierarchy for  $m$ -degrees. In the setting of Turing degrees we will show how weaker versions of these questions can be solved. Additionally we review and outline possible approached for definability of c.e. degrees in the structures of 2-c.e. *wtt*-degrees and 2-c.e. Turing degrees, respectively.

### Constraint Satisfaction Problem: known results and open problems

Д.Н. Жук

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
Высшая школа экономики  
zhuk@intsys.msu.ru

The Constraint Satisfaction Problem (CSP) is the problem of deciding whether there is an assignment to a set of variables subject to some specified constraints. In general this problem is NP-complete and one of the ways to make it solvable in polynomial time (tractable) is by restricting the set of allowed constraints. For over twenty years one of the main questions was to classify constraint languages giving a tractable CSP (like system of linear equations, 2-CNF, and so on). In 2017 the conjecture describing all tractable cases on a finite set was resolved but many other questions still remain open. In the talk we will discuss the following and some other generalizations of the CSP.



1. Can we solve a system of linear equations in  $\mathbb{Z}_2$  in polynomial time if we add to it one equation modulo  $k$ ?
2. If the only predicate we can use is  $x + y \neq 2$  on  $\mathbb{Z}_3$ , then every instance of the CSP has a trivial solution  $(0, 0, \dots, 0)$ . Can we check in polynomial time whether the instance has a surjective solution (every element from the domain appears in the solution)? What is the complexity of this problem for other constraint languages?
3. Constraint satisfaction problem can be formulated as a sentence where all variables are existentially quantified. If we allow universal quantification then the problem is PSpace-complete in general but for some constraint languages it can be tractable, NP-complete, coNP-complete, and so on. What is the complexity of this problem for each constraint language?
4. Assume that we have a strong and a weak versions of every predicate in a constraint language, and we have a promise that either strong version of the instance has a solution or even weak version has no solutions. Sometimes such a promise makes an NP-hard problem tractable. But it is still not clear what is the complexity of the following problem. Given a graph which is either 3-colorable, or not even 1000-colorable. We need to distinguish between these two cases.
5. What if we additionally require every variable of an instance to appear exactly twice? This formulation covers the well-known perfect matching problem. The complexity of this problem for an arbitrary constraint language is still open.

## On categoricity of linear orders

М.В. Зубков

Казанский федеральный университет  
maxim.zubkov@kpfu.ru

We consider different notions of categoricity of linear orders. Recall that, a computable algebraic structure is called  $\Delta_\alpha^0$ -categorical if for any two computable copies of it there exists a  $\Delta_\alpha^0$ -isomorphism between them. A computable algebraic structure is called relatively  $\Delta_\alpha^0$ -categorical if for any two  $x$ -computable copies of it there exists a  $\Delta_\alpha^x$ -isomorphism between them. S.S. Goncharov and V.D. Dzgoev [1] and, independently, J.B. Remmel [2] gave a characterization of computably categorical linear orders. They proved that a computable linear order is computably categorical iff it has finitely many successors. C. McCoy [3] gave a characterization of relatively  $\Delta_2^0$  categorical linear orders. He proved, that if a linear order  $\mathcal{L}$  has a computable copy with a computable successor relation, and computable left and right limit points then  $\mathcal{L}$  is  $\Delta_2^0$  categorical iff it is relatively  $\Delta_2^0$  categorical. C. Ash [5] found levels of categoricity of constructive ordinals. Namely, C. Ash proved that if an ordinal  $\alpha$  such that  $\omega^{\delta+n} \leq \alpha < \omega^{\delta+n+1}$  then  $\alpha$  is  $\Delta_{\delta+2n}^0$  categorical, and is not  $\Delta_\beta^0$  categorical for any  $\beta < \delta + 2n$ .

In the first part of talk we consider categoricity of scattered linear orders such that ranks of them are constructive ordinals. In the second part of talk we consider bi-embeddable categoricity of scattered linear orders with finite rank. In both cases we give upper and lower bounds of categoricity levels of considered linear orders.

## Список литературы

- [1] Goncharov S. S., Dzgoev V. D. Autostability of models // Algebra and Logic. – 1980. – V. 19. – Is. 1. – P. 45–58.
- [2] Remmel J.B. Recursive categorical linear orderings // Proc. Am. Math. Soc. – 1981. – V. 83. – Is. 2. – P. 387–391.
- [3] McCoy C. F. D.  $\Delta_2^0$ -categoricity in Boolean algebras and linear orderings // Annals of Pure and Applied Logic. – 2003. – V. 119. – Is. 1–3. – P. 85–120.
- [4] McCoy C.  $\Delta_3^0$ -categoricity in linear orderings and in Boolean algebras // Algebra and Logic. – 2002. – V. 41. – Is. 5. – P. 531–552.
- [5] Ash C. J. Recursive labelling systems and stability of recursive structures in hyperarithmetical degrees // Transactions of the American Mathematical Society. – 1986. – V. 298. – Is. 2. – P. 497–514.

## Программа секции «Обратные задачи и искусственный интеллект»

### Зал № 7

Координаторы: С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин

#### ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>30</sup> Евгений Тыртышников (Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН). *Корректная постановка задачи о решении линейных систем, эквивалентных по точности*

15<sup>30</sup> — 16<sup>15</sup> Александр Гасников (Московский физико-технический институт). *Стохастическая оптимизация: онлайн и офлайн подходы*

16<sup>15</sup> — 17<sup>15</sup> Евгений Вдовин (Математический центр в Академгородке). *Проблемы при расчёте климатических моделей, влиянии на них парниковых газов и подсчёте баланса парниковых газов*

17<sup>15</sup> — 18<sup>00</sup> Yanfei Wang (Institute of Geology and Geophysics, China). *Model-driven and data-driven inverse problems with AI analysis*

18<sup>00</sup> — 18<sup>30</sup> Максим Шишленин (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН). *Электро-акустическая томография. Обратные задачи. Теория и алгоритмы*

#### ВТОРНИК, 10 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>30</sup> Игорь Болдырев (АНО «Кластер искусственного интеллекта»). *Цифровая трансформация предприятий с помощью технологий искусственного интеллекта*

15<sup>30</sup> — 16<sup>10</sup> Игорь Марчук (Новосибирский государственный университет). *Обратные задачи тепло-и-массообмена*

16<sup>10</sup> — 16<sup>40</sup> Владимир Зубов (Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН). *On one inverse coefficient problem for the heat equation*

16<sup>40</sup> — 17<sup>10</sup> Алексей Чернов (Московский физико-технический институт). *Penalty, barrier, quasi-barrier functions and functions inverse to them*

17<sup>10</sup> — 17<sup>50</sup> Денис Сидоров (Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, ИрННТУ). *Об одном решении задачи покрытия электрической нагрузки на основе моделей Вольтерра и машинного обучения*

17<sup>50</sup> — 18<sup>20</sup> Дмитрий Лукьяненко (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Особенности решения обратных задач для уравнений типа реакция-диффузия-адвекция с данными о положении фронта реакции*

18<sup>20</sup> — 18<sup>50</sup> Николай Трусков (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Numerical study into stock market crises based on Mean Field Games approach*

18<sup>50</sup> — 19<sup>20</sup> Александр Ильин (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Робастные алгоритмы обращения динамических систем*

19<sup>20</sup> — 19<sup>40</sup> Сергей Шорохов (Российский университет дружбы народов). *О калибровке функции локальной волатильности и применении глубокого обучения при оценке опционов*

#### **ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА**

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Сергей Кабанихин (Математический центр в Академгородке). *Заседание, посвященное памяти В.М. Исакова*

14<sup>50</sup> — 15<sup>20</sup> Yalchin Efendiev (Texas A&M University). *Многомасштабное моделирование и методы расщепления для машинного обучения*

15<sup>20</sup> — 15<sup>50</sup> Михаил Марченко (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН). *Математические задачи комплексного экологического мониторинга и прогнозирования*

15<sup>50</sup> — 16<sup>30</sup> Владимир Шайдуров (Институт вычислительного моделирования СО РАН). *Введение в Mean Field Games*

16<sup>30</sup> — 17<sup>10</sup> Александр Шананин (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Математическое моделирование экономического поведения домашних хозяйств в России в условиях пандемии COVID-19*

17<sup>10</sup> — 18<sup>10</sup> Александр Шапеев (Сколковский институт науки и технологий). *Машинное обучение для построения моделей материалов*

18<sup>10</sup> — 18<sup>30</sup> Жанна Тотиева (Центр геофизических исследований ВНЦ РАН). *Глобальная разрешимость двумерной обратной задачи для уравнения вязкоупругости*

18<sup>30</sup> — 18<sup>50</sup> Жоламан Бектемесов (Казахский национальный университет им. Аль-Фараби). *Метод дифференциальной эволюции в обратных задачах*

18<sup>50</sup> — 19<sup>30</sup> Иван Оселедец (Сколковский институт науки и технологий). *Методы машинного обучения для решения задач математического моделирования и обратных задач*

#### **ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА**

14<sup>30</sup> — 15<sup>00</sup> Владимир Романов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Бесфазовые задачи определения анизотропной проводимости в уравнения электродинамики*

15<sup>00</sup> — 15<sup>30</sup> Никита Новиков (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН). *Идентификация коэффициентов гиперболических уравнений на основе прямой обработки данных*

15<sup>30</sup> — 16<sup>00</sup> Ольга Криворотько (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН). *Агентные модели эпидемиологии*

16<sup>00</sup> — 16<sup>20</sup> Алексей Приходько (Новосибирский государственный университет). *Применение методов глубинного обучения в акустической томографии*

16<sup>20</sup> — 16<sup>40</sup> Николай Зятков (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН). *Прогнозирование экономических рецессий с помощью макроэкономических показателей и методов машинного обучения*

16<sup>40</sup> — 17<sup>00</sup> Никита Прохошин (Новосибирский государственный университет). *Взаимосвязи обратных задач рассеяния, спектральной и динамической*

17<sup>00</sup> — 17<sup>30</sup> Андрей Неверов (Новосибирский государственный университет). *Регуляризованный алгоритм градиентного типа решения обратной задачи для стохастических дифференциальных уравнений с использованием технологий параллельных вычислений*

## **Применение методов глубинного обучения в акустической томографии**

А.Ю. Приходько

Новосибирский государственный университет

`a.prikhodko@g.nsu.ru`

Цель работы: разработка методов и алгоритмов раннего выявления различных опухолевых тканей человека с помощью нейронных сетей.

Акустическая томография абсолютно безвредна для человеческого организма, что позволяет проводить ее регулярно. Для решения задачи акустической томографии, а именно, для определения акустических параметров среды по измерениям давления в датчиках, хорошо разработан аппарат решения обратных задач. Но этот подход требует огромного количества ресурсов для многократного решения прямых задач акустики. Не всегда есть возможность в каждую клинику поставить суперкомпьютер, или мощную вычислительную машину.

В работе исследован альтернативный подход к решению задачи восстановления акустических параметров среды с помощью нейросетевых методов. Особенность задачи состоит в необходимости по нескольким одномерным измерениям датчиков вычислить двумерную функцию (плотность среды, скорость звука в среде).

За основу нейросетевой модели выбрана архитектура автоэнкодера. Где с помощью энкодера измерения датчиков переводятся в латентное пространство. Затем с помощью сверточного декодера вычисляются искомые параметры среды. Рассмотрены полносвязный, 1D сверточный и рекуррентные энкодеры. Проведено сравнение различных архитектур для решения восстановления параметров среды.

## **Идентификация коэффициентов гиперболических уравнений на основе прямой обработки данных**

Н.С. Новиков

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

`novikov-1989@yandex.ru`

В докладе рассматриваются обратные задачи, возникающие в задачах сейсмологии и акустики. Задача заключается в определении коэффициентов соответствующих уравнений по дополнительной информации, соответствующей значениям волнового поля на дневной поверхности. Для их решения используется подход, основанный на сведении нелинейной обратной задачи к решению систем линейных интегральных уравнений. Характерной особенностью данного подхода является тот факт, что метод не требует многократного решения прямой задачи, что особенно важно при переходе к многомерным постановкам. В докладе будут рассмотрены современные модификации метода в одномерных и многомерных случаях и представлены результаты численных экспериментов.

## **Особенности решения обратных задач для уравнений типа реакция-диффузия-адвекция с данными о положении фронта реакции**

Д.В. Лукьяненко

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
lukyanenko@physics.msu.ru

Задачи для уравнений типа реакция-диффузия-адвекция возникают в газовой динамике, химической кинетике, нелинейной теории волн, медицине, экологии и других областях науки. Особенностью задач подобного типа является наличие разномасштабных процессов. Поэтому математические модели этих задач содержат нелинейные параболические уравнения с малыми параметрами при старших производных. В связи с этим решения этих задач могут содержать узкие пограничные и/или внутренние слои (стационарные и/или движущиеся фронты).

Некоторые прикладные задачи для уравнений указанного типа требуют решения обратных задач по восстановлению какого-либо коэффициента, входящего в уравнение. Для постановки обратной задачи требуется дополнительная информация, обычно измеряемая в эксперименте. Часто в постановках обратных задач для уравнений в частных производных используют дополнительную информацию о решении на части границы области. Однако, одной из возможных постановок обратных задач для уравнений такого типа является постановка с дополнительной информацией о динамике движения фронта реакции. Дополнительные данные такого типа являются востребованными на практике, так как их наиболее просто наблюдать в эксперименте (фронт является легкоразличимой контрастной структурой).

В докладе будут обсуждаться некоторые особенности решения коэффициентных обратных задач для уравнений типа реакция-диффузия-адвекция с данными о положении фронта реакции. Будут рассмотрены два основных подхода к решению. Первый является классическим и основан на минимизации целевого функционала градиентным методом. Второй основан на использовании метода асимптотического анализа, который позволяет свести исходную постановку обратной задачи для нелинейного сингулярно возмущённого уравнения в частных производных к гораздо более простой задаче относительно восстановления коэффициента.

## **Математическое моделирование экономического поведения домашних хозяйств в России в условиях пандемии COVID-19**

М.В.Тарасенко, Н.В.Трусов, А.А.Шананин

Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
alexshan@yandex.ru

Экономическое поведение домашних хозяйств описывается с помощью стохастической задачи оптимального управления рамсеевского типа. На основе концепции игр среднего поля построена модель, формализованная в виде системы уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана и Колмогорова-Фоккера-Планка. Исследована задача оптимального управления, моделирующая экономическое поведение репрезентативного домашнего хозяйства.

Доказана теорема о существовании решения, получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина-Кларка и построен синтез оптимального управления. Модель идентифицирована по данным российской статистики. С её помощью проанализирована проблема потребительского кредитования в России и влияния на экономическое положение домашних хозяйств пандемии COVID-19, обострившая проблему устойчивости рынка потребительского кредита. Представлены эффективные стратегии по сокращению объёма проблемных потребительских кредитов, связанные со снижением ключевой ставки ЦБ РФ.

## **Numerical study into stock market crises based on Mean Field Games approach**

Н.В.Трусов

Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
trunick.10.96@gmail.com

We present an approach to describe the stock market crises based on Mean Field Games and Optimal Control theory with a turnpike effect. This approach is based on a trading execution model that is an extension of Fatone, L., Mariani, F., Recchioni, M.C. and Zirilli, F. A Trading Execution Model Based on Mean Field Games and Optimal Control // Applied Mathematics, 5, 2014, P. 3091-3116. The impact of the large amount of high-frequency traders (HFTs) can be modelled via mean field term. A Mean Field Game is a coupled system of PDEs: a Kolmogorov-Fokker-Planck equation, evolving forward in time and describing evolution of the HFTs probability density function spread by the amount of asset shares; and a Hamilton–Jacobi–Bellman equation, evolving backwards in time and defining the strategy of the HFTs. These equations form a boundary value problem.

The asset share price is based on the geometric Brownian motion that is used to model stock prices in the Black–Scholes model in mathematical finance. The ill-posedness of this PDEs system comes from a turnpike effect. To avoid these difficulties we use a variational approach that is based on the reduction of a PDEs system to a special problem of maximizing the functional with restrictions on the Kolmogorov–Fokker–Planck equation. The functional in extremal problem poses in such a form that the Lagrange multipliers for the constraints satisfy the original Hamilton–Jacobi–Bellman equation and the boundary condition at the final horizon time. We apply the Mean Field Games approach to describe the Chinese stock market crash in 2015 considering the representative stock of CITIC Securities (ticker 600030). We consider the HFTs that form dominating bull and bear market. As a result, the bull strategy imitators do not make any profit.



# **Об одном решении задачи покрытия электрической нагрузки на основе моделей Вольтерра и машинного обучения**

Д.Н. Сидоров

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, ИрНИТУ

Contact.dns@gmail.com

Системы искусственного интеллекта, опирающиеся на методы машинного обучения и теорию и методы решения обратных задач, принципы функционирования интеллектуальных кибер-физических систем, проникают во все отрасли современной цифровой экономики. Сфера энергетики не является исключением. Модернизация энергосистем - сложнейших глобальных технических систем когда-либо созданных человеком, требуют глубокого понимания математических основ теории и методов моделирования нелинейных динамических систем для реализации эффективной координации функционирования целого набора независимых пространственно распределенных устройств, накопителей и различных агентов. В докладе излагаются методы анализа интегральных динамических моделей и их приложения в электроэнергетике. Приведены основы теории линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода, используемых в моделировании динамических развивающихся (эредитарных) систем. Изложены теоремы существования и единственности гладких и обобщенных решений соответствующих классов интегральных уравнений. Построены регуляризированные численные методы построения решений уравнений и их систем, в том числе дробного порядка. Для линейных систем интегральных уравнений, применяется кусочно-постоянная аппроксимация точного решения и специальные адаптивные сетки, учитывающие разрывы ядер. Приведена оценка погрешности метода. Изложенный численный подход допускает также использование более точных аппроксимаций решения в сочетании с соответствующими квадратурными формулами. Вторая часть доклада посвящена приложению нерегулярных нелинейных моделей Вольтерра в задаче покрытия нагрузки в микросетях с использованием накопителей. Предложенная модель позволяет учитывать нелинейную зависимость КПД от уровня заряда и определять ряд ключевых режимных параметров включая знакопеременную функцию мощности накопителей.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ и департамента науки и технологий Индии (DST), NoCRG/2018/004610, DST/TDT/TDP-011/2017, министерства науки и технологий Китайской Народной Республики (MOST), No2018YFE0183600; Национального исследовательского совета Бразилии (CNPq), No402849/2019-1 и Национального исследовательского фонда ЮАР (NRF), NoBRIC190321424123 в рамках научного проекта No 20-51-80001 Рамочной программы БРИКС.

## **Список литературы**

- [1] D. Sidorov, Integral Dynamical Models: Singularities, Signals & Control, Vol. 87, World Scientific Series on Nonlinear Science Series A, Edt. Leon O. Chua, World Scientific Publ. Pte Ltd, Singapore, (2015). DOI: <https://doi.org/10.1142/9278>
- [2] D. Sidorov, I. Muftahov et al. "A Dynamic Analysis of Energy Storage with Renewable and Diesel Generation using Volterra Equations", IEEE Transactions on Industrial Informatics, 16:5 (2020), 3451–3459, DOI: <https://doi.org/10.1109/TII.2019.2932453>

## **Робастные алгоритмы обращения динамических систем**

**А.В. Ильин**

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

`iline@cs.msu.su`

Обратные задачи динамики играют важную роль в современной теории управления. Эти задачи давно привлекают ученых как у нас в стране, так и за рубежом. Одной из классических обратных задач является восстановление неизвестного входа система по измерениям ее выхода, так называемая задача обращения динамической системы. Именно о таких задачах обращения и пойдет речь в докладе.

## Программа секции «Теория операторов и гармонический анализ»

### Зал № 2

Координаторы: А.Н. Карапетянц, В.В. Кравченко

#### ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>00</sup> Алексей Карапетянц (РНОМЦ Южного федерального университета). *Composition operators in generalized Hölder spaces*

15<sup>00</sup> — 15<sup>30</sup> Армен Камалян (Институт математики НАН Республики Армения). *О свойствах операторов типа  $\mathcal{L}$ -свертки*

15<sup>30</sup> — 16<sup>00</sup> Михаил Карапетянц (Московский физико-технический институт). *Dyadic generalized functions and applications: a distribution of a power series on a dyadic half-line*

16<sup>00</sup> — 16<sup>30</sup> Юрий Фарков (Российская академия народного хозяйства и государственной службы). *Применение матриц Адамара и Уолша к построению конечных жестких фреймов*

16<sup>30</sup> — 17<sup>00</sup> Lianet De la Cruz Toranzo (РНОМЦ Южного федерального университета). *A note on potentials of imaginary order in holomorphic Hölder spaces*

17<sup>00</sup> — 17<sup>30</sup> Александр Кривошеин (Санкт-Петербургский государственный университет). *Approximation by dual wavelet frames in Orlicz spaces*

17<sup>30</sup> — 18<sup>00</sup> Елена Ушакова (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН). *Всплески типа сплайнов в приложении к изучению свойств операторов интегрирования*

18<sup>00</sup> — 18<sup>30</sup> Залина Кусраева (РНОМЦ Южного федерального университета). *Проблема доминирования однородных ортогонально аддитивных полиномов*

#### ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>00</sup> Александр Солдатов (Белгородский государственный университет). *Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости*

15<sup>00</sup> — 15<sup>30</sup> Сергей Грудский (РНОМЦ Южного федерального университета). *Asymptotics of eigenvalues and eigenvectors of Toeplitz matrices*

15<sup>30</sup> — 16<sup>00</sup> Олег Авсянкин (РНОМЦ Южного федерального университета). *О многомерных интегральных операторах с биоднородными ядрами*

16<sup>00</sup> — 16<sup>30</sup> Жирайр Аветисян (РНОМЦ Южного федерального университета). *The resolvent of a first order elliptic system and spectral asymptotics*

16<sup>30</sup> — 17<sup>00</sup> Владимир Васильев (Белгородский государственный университет). *On model boundary value problems for pseudo-differential equations*

17<sup>00</sup> — 17<sup>30</sup> Никита Сеник (Санкт-Петербургский государственный университет). *On homogenization for locally periodic elliptic problems on a domain*

17<sup>30</sup> — 18<sup>00</sup> Дмитрий Рохлин (РНОМЦ Южного федерального университета). *SOLO FTRL алгоритм для назначения трансфертных цен*

18<sup>00</sup> — 18<sup>30</sup> Татьяна Андреева (Южный федеральный университет). *The surjectivity and injectivity of convolution operators on holomorphic weighted spaces in bounded convex domains*

# The surjectivity and injectivity of convolution operators on holomorphic weighted spaces in bounded convex domains

Т.М. Андреева

Южный федеральный университет

metzi@yandex.ru

Let  $G$  be a domain in  $\mathbb{C}$  and  $H(G)$  the space of all holomorphic functions in  $G$ . For a continuous function (a weight)  $v : G \rightarrow \mathbb{R}$  define the Banach space  $H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z \in G} |f(z)|e^{-v(z)} < \infty \right\}$ . For an increasing sequence of weights  $V = (v_n)$  define the inductive limit  $\mathcal{V}H(G) := \text{ind} H_{v_n}(G)$ .

Let  $\mu$  be an analytic functional on  $\mathbb{C}$  carried by a convex compact set  $K$ . With some restrictions on weight sequence which are equal to those used by V.V. Napalkov [1] the continuity and surjectivity problem is studied of the convolution operator

$$\mu * f(z) : f \mapsto \mu_w f(z + w)$$

that maps  $\mathcal{V}H(G + K)$  into (onto)  $\mathcal{V}H(G)$ . The aim of this talk is to establish the surjectivity criteria for convolution operator in terms of its Laplace (Fourier-Borel) transform  $\hat{\mu}(\zeta) := \mu_z e^{\langle z, \cdot \rangle}$  via the appropriate description of functional weighted spaces that are conjugated to  $\mathcal{V}H(G + K)$  and  $\mathcal{V}H(G)$ .

The main results are the following:

1) A criterion of continuity is obtained for the convolution operator  $\mu$  in terms of regular growth of  $\hat{\mu}$  (the lower estimate on  $|\hat{\mu}|$  outside some exceptional sets) for the special cases of weight sequences  $(v_n)$ .

Similar research was presented in [2] for the spaces of functions that are holomorphic in convex domains and have a polynomial growth near the boundary (the weight sequence  $v_n(z) = n \ln(1 + |z|)$ ).

2) A criterion of injectivity is obtained for convolution operator with some restrictions on  $\hat{\mu}$  that are equal to those used by V.M. Trutnev [3].

## Список литературы

- [1] *Napalkov V. V.* Spaces of analytic functions of prescribed growth near the boundary. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*. 1988. Vol. 30, No. 2. P. 263.
- [2] *Abanin A. V., Ishimura R., Khoi L. H.* Convolution operators in  $A^{-\infty}$  for convex domains. *Arkiv för matematik*. 2012. Vol. 50. —№ 1. —P. 1–22.
- [3] *Trutnev V. M.* Convolution Equations in spaces of Entire Functions of Exponential Type. *Journal of Mathematical Sciences* 120, 1901–1915 (2004).

# Inverse Problems for the Schrödinger Operator on Metric Graphs

С.А. Авдонин

University of Alaska Fairbanks, USA  
saavdonin@alaska.edu

Inverse spectral theory for the Schrödinger operator on intervals (finite and infinite) of the real axis has been developed in classical papers by Borg, Levinson, Gelfand, Levitan, Krein, Marchenko. The theory of dynamical inverse problems was developed starting '70-ies. Along with important applications, this theory provides more simple proofs of many key results in inverse spectral theory. One of the achievements of the dynamical inverse theory is the boundary control method, which is based on deep connections of inverse problems with control and system theory, functional analysis and operator theory.

Recent interest in inverse theory for operators on metric graphs is motivated by applications to important problems of classical and quantum physics, chemistry, biology, and engineering. For trees, i.e. graphs without cycles, various types of inverse problems were studied in the literature, but almost nothing was done for graphs with cycles. In this talk we describe identifiability results for the Schrödinger operator on general compact graphs. We prove that the properly defined Titchmarsh–Weyl matrix function (or other equivalent spectral data) uniquely determines the potential, lengths of the edges, and the topology of the graph. We develop algorithms recovering the unknown parameters of the system and establish connections between the minimal number of observers and maximal multiplicity of the spectrum of the Schrödinger operator on the graph.

Our approach combines the spectral and dynamical approaches including a new version of the recently developed leaf peeling method. It uses connections between controllability and identifiability of dynamical systems. In particular, we prove the exact controllability of the corresponding Schrödinger and wave equations on general graphs — the results presenting independent interest in control theory.

## The resolvent of a first order elliptic system and spectral asymptotics

Ж. Аветисян<sup>1</sup>, J. Sjöstrand<sup>2</sup>, Д. Васильев<sup>3</sup>

<sup>1</sup>UC Santa Barbara, USA; PHOMЦ Южного федерального университета

<sup>2</sup>IMB, Université de Bourgogne, France

<sup>3</sup>University College London, UK

jirayrag@gmail.com, johannes.sjostrand@u-bourgogne.fr, d.vassiliev@ucl.ac.uk

Weyl's law for the distribution of eigenvalues of the Laplacian on a compact domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  is widely considered as the birth of the subject of spectral asymptotics. While the spectral asymptotics of a single elliptic partial or pseudo differential operator (PDO or  $\Psi$ DO) on a compact manifold is by now well understood, and asymptotic coefficients of two-digit orders are often known explicitly, far less is known about systems of several operators beyond the original Weyl's law which is amazingly universal. The main difficulty lies in the presence of additional fiberwise degrees of freedom, if we think of the system as a single (matrix) operator acting on a vector field. There have been well known naive attempts to reduce the problem to the scalar case, which have failed dramatically.

On a compact smooth manifold without boundary we consider an elliptic first order  $\Psi DO$  acting on columns of functions or half-densities. Under suitable conditions (see here [1] for a review) this operator admits spectral asymptotic expansion, and we want to find an explicit formula for the second asymptotic coefficients (the first ones being given by Weyl's law). One of the most successful and commonly used approach, based on the heat kernel expansion, is not effective in this case since our operator is not semibounded and we need to study the positive and negative parts of the spectrum separately. Working along the lines of the wave equation method instead, the desired coefficients were finally established in 2013 in a fairly long and complicated way [2].

The most natural and elegant approach to the problem uses an approximate resolvent, which was suggested by Ivrii in 1984, but has never been accomplished due to the apparently unmanageable calculations arising on the way. Namely, a direct substitution into Ivrii's formula yields more than a hundred terms, which has left this problem open for more than 30 years. Thankfully, we succeeded in finding an algebraic identity that drastically simplifies the expression and quickly yields the desired formula. Moreover, in the course of deriving our results we came up with a novel approach for finding spectral asymptotics of pseudo-differential systems explicitly, which can potentially give further asymptotic coefficients. This work is in collaboration with Prof. D. Vassiliev and Prof. J. Sjöstrand [3].

## Список литературы

- [1] Z. Avetisyan, Y.-L. Fang, D. Vassiliev. Spectral asymptotics for first order systems. *J. Spec. Theor.*, 6, 2016
- [2] O. Chervova, R. Downes, D. Vassiliev. The spectral function of a first order elliptic system. *J. Spec. Theor.*, 3, 2013.
- [3] Z. Avetisyan, J. Sjöstrand, D. Vassiliev. The second Weyl coefficient for a first order system. *Analysis as a Tool in Mathematical Physics (In Memory of Boris Pavlov), Operator Theory: Advances and Applications*, 276, Birkhäuser 2020.

## О многомерных интегральных операторах с биоднородными ядрами

О.Г. Авсянкин

РНОМЦ Южного федерального университета  
ogavsyankin@sfedu.ru

Пусть  $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ . В пространстве  $L_2(\mathbb{B}_n)$  рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{B}_n} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{B}_n, \quad (1)$$

где функция  $k(x, y)$  определена на  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  (здесь и далее предполагается, что  $n \geq 2$ ) и удовлетворяет следующим условиям:

- 1°)  $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x, y)$  для любого  $\alpha > 0$ ;  
 2°)  $k(\omega(x), \omega(y)) = k(x, y)$  для любого  $\omega \in SO(n)$ ;  
 3°)  $\int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/2} dy < \infty$ , где  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ .

Обозначим через  $\mathfrak{K}_n$  наименьшую  $C^*$ -подалгебру  $C^*$ -алгебры  $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{B}_n))$ , содержащую все операторы вида  $\lambda I + K + T$ , где  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $K$  — оператор вида (1), а  $T$  — компактный оператор. Рассмотрим  $C^*$ -алгебру  $\mathfrak{K}_{n_1, n_2} = \mathfrak{K}_{n_1} \otimes \mathfrak{K}_{n_2}$ , которую называют алгеброй интегральных операторов с *биоднородными* ядрами. Для  $C^*$ -алгебры  $\mathfrak{K}_{n_1, n_2}$  построен операторнозначный символ, в терминах которого получен критерий нетеровости операторов и установлена топологическая формула для вычисления индекса.

В алгебре  $\mathfrak{K}_{n_1, n_2}$  выделим важный для приложений класс операторов:

$$A = \lambda(I_1 \otimes I_2) + (K_1 \otimes K_2), \quad (2)$$

где  $\lambda \in \mathbb{C}$ , а операторы  $I_j$ ,  $K_j$  действуют в пространстве  $L_2(\mathbb{B}_{n_j})$ ,  $j = 1, 2$ . Показано, что оператор  $A$  вида (2) обратим тогда и только тогда, когда он нетеров, что равносильно выполнению следующих условий

$$\lambda \neq 0, \quad \lambda + \sigma_{K_1}(m, \xi) \sigma_{K_2}(\ell, \eta) \neq 0 \quad \forall (m, \xi), (\ell, \eta) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R},$$

где  $\sigma_{K_j}(m, \xi)$  — символ оператора  $K_j$ ,  $j = 1, 2$ .

## Список литературы

- [1] Авсянкин О. Г. Об обратимости многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами // Матем. заметки. 2020. Т. 108, вып. 2. С. 291–295.

## A note on potentials of imaginary order in holomorphic Hölder spaces

L. De la Cruz Toranzo, А.Н. Карапетянц

РНОМЦ Южного федерального университета

lianetcruzt@gmail.com, karapetyants@gmail.com

In this note we study a generalization of a holomorphic Bergman-type projection, the operator of fractional integro-differentiation of imaginary order, in generalized variable Hölder spaces. We consider two definitions of variable generalized Hölder spaces of holomorphic functions: one defined directly via variable modulus of continuity, while the other is defined in terms of behavior of derivatives near the boundary. We prove boundedness results for the operator of fractional integrodifferentiation of imaginary order in the scales of these spaces.



# Применение матриц Адамара и Уолша к построению конечных жестких фреймов

Ю.А. Фарков

Российская академия народного хозяйства и государственной службы  
farkov-ya@ranepa.ru

Теория жёстких фреймов в конечномерных пространствах интенсивно развивается и применяется в таких областях как анализ сигналов, теория кодирования, теория восстановления, квантовая теория информации и теория сжатых измерений (см. библиографию в [1]). В докладе обсуждаются предложенные недавно методы построения жёстких фреймов с помощью матриц Адамара и Уолша (см., например, [2–5]).

## Список литературы

- [1] Waldron S. An Introduction to Finite Tight Frames / Applied and Numerical Harmonic Analysis. New York: Birkhauser, 2018.
- [2] Фарков Ю.А. Конечные фреймы Парсеваля в анализе Уолша // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 170, ВИНТИ РАН, М., 2019, 118–128.
- [3] Фарков Ю.А., Робакидзе М.Г. Фреймы Парсеваля и дискретное преобразование Уолша // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 3. С.457-469.
- [4] Фарков Ю.А. Жёсткие фреймы в линейной алгебре // Математика в высшем образовании. 2020. № 18. С. 51-62.
- [5] Fickus M., Jasper J., Mixon D.G., Peterson J.D. Hadamard equiangular tight frames // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2021. V. 50. P. 281-302.

## Asymptotics of eigenvalues and eigenvectors of Toeplitz matrices

С.М. Грудский

РНОМЦ Южного федерального университета  
sergeigrudsky@gmail.com

Analysis of the asymptotic behavior of the spectral characteristics of Toeplitz matrices as the dimension of the matrix tends to infinity has a history of over 100 years. For instance, quite a number of versions of Szegő's theorem on the asymptotic behavior of eigenvalues and of the so-called strong Szegő theorem on the asymptotic behavior of the determinants of Toeplitz matrices are known. Starting in the 1950s, the asymptotics of the maximum and minimum eigenvalues were actively investigated. However, investigation of the individual asymptotics of all the eigenvalues and eigenvectors of Toeplitz matrices started only quite recently: the first papers on this subject were published in 2009-2010. A survey of this new field is presented here.

## О свойствах операторов типа $\mathcal{L}$ -свертки

А.Г. Камалян

Институт математики НАН Республики Армения

kamalyan\_armen@yashoo.com

Пусть  $\mathcal{L}$  самосопряженный оператор порожденный дифференциальным выражением  $(\ell y)(x) = -y''(x) + v(x)y(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , где вещественный потенциал  $v$  удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|v(x)| dx < \infty.$$

Операторы  $J, U_{\mp}, U : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  определим по формулам:

$$(Jy)(x) = y(-x),$$

$$(U_{\mp}y)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{\mp}(x, \lambda)y(\lambda) d\lambda,$$

$$U = m(\chi_+)U_- + m(\chi_-)JU_+,$$

где функции  $u^{\mp}$  строятся с помощью соответствующей нормировки решений Йоста уравнения  $\ell y = \lambda^2 y$ ,  $m(\chi_{\pm})$  операторы умножения на характеристические функции  $\mathbb{R}_{\pm}$ .

Оператор  $U$  является частичной изометрией и в случае  $v = 0$  совпадает с преобразованием Фурье.

Заменой в определении свертки преобразования Фурье на оператор  $U$  вводится понятие оператора  $\mathcal{L}$ -свертки. Соответствующим образом вводятся также понятия оператора  $\mathcal{L}$ -Винера-Хопфа и оператора  $\mathcal{L}$ -Ганкеля. Рассматриваются вопросы связанные с фредгольмовостью и обратимостью этих операторов.

## Composition operators in generalized Hölder spaces

А.Н. Карапетянц

РНОМЦ Южного федерального университета

karapetyants@gmail.com

A new characterization of boundedness of the composition operators in generalized Hölder spaces is obtained in terms that do not use the derivative of the composition operator, but using some averaging construction which represents certain integration of the modulus of continuity involving the symbol of the composition operator. This approach also allows to recover previously known results for the standard weights  $\omega(t) = t^{\alpha}$  with  $0 < \alpha < 1$ . Certain further results on characterization of the same spaces are obtained as well.

## Dyadic generalized functions and applications: a distribution of a power series on a dyadic half-line

The spaces of distributions on a dyadic half-line, which is the positive half-line equipped with the digitwise binary addition and Lebesgue measure, are studied. We prove the non-existence of such a space of dyadic distributions which satisfies a number of natural requirements (for instance, the property of being invariant with respect to the Walsh-Fourier transform) and, in addition, is invariant with respect to multiplication by linear functions. This, in particular, allows the space of dyadic distributions suggested by S. Volosivets in 2009 to be optimal. We also show the applications of dyadic distributions to the theory of refinement equations as well as wavelets on a dyadic half-line. As an interesting application we are exploring the dyadic analogue of one of the Paul Erdős problem, namely, the existence of a probability density of a random variable (which is a power series), extended to a dyadic half-line. We consider the power series with coefficients being either zeroes or ones at the fixed point  $x$  of the  $(0, 1)$  interval. The question is whether there is a density from  $\mathbb{L}_1$ ? In classic case it is still an opened problem for  $x$  greater than one half (P. Erdős proved the non-existence of the density for lambdas equal to  $\frac{1}{p}$ , where  $p$  is the Pisot number). Moreover, we study the so called «dual problem». The same random variable, but the point  $x$  is fixed now ( $x = \frac{1}{2}$ ) and the coefficients are integer and belong to  $[0; N]$  segment for some natural  $N$ . Here we answer the same question and provide criteria of the existence of a density in terms of the solution of the refinement equation as well as in terms of the coefficients of a random variable.

## Список литературы

- [1] S.S. Volosivets, *Applications of P-adic generalized functions and approximations by a system of p-adic translations of a function*, Siberian Mathematical Journal volume 50, pages1–13 (2009).
- [2] B.I. Golubov, *Dyadic distributions*, Mat. sb., 198 (2007), no 2, 67--90
- [3] P. Erdos, *On the smoothness properties of Bernuolli convolutions*, Am. J. Math., 62, 180-186.
- [4] P. Erdos, *On a family of symmetric Bernuolli convolutions*, Am. J. Math., 61, 974-975.
- [5] V. Protasov, *Refinement equations with nonnegative coefficients*, The Journal of Fourier Analysis and Applications 6, 55–78 (2000).
- [6] Golubov B.I., Efimov A.V., Skvortsov V.A., *Series and Walsh transform. Theory and applications*, Science, 1987.
- [7] Protasov V. Yu., Farkov Yu. A., *Dyadic wavelets and refinable functions on a half-line*, Sbornik: Mathematics. 2006. Vol. 197, No. 10, pp. 129-160.

# Approximation by dual wavelet frames in Orlicz spaces

А.В. Кривошеин, М.А. Скопина

Санкт-Петербургский государственный университет

a.krivoshein@spbu.ru, skopina@ms1167.spb.edu

Dual wavelet frame decompositions in Orlicz spaces are considered. Their approximation properties are investigated. Conditions providing desired approximation order are established.

## Проблема доминирования однородных ортогонально аддитивных полиномов

З.А. Кусраева

РНОМЦ Южного федерального университета

zali13@mail.ru

В настоящем докладе будет представлено решение проблем компактного и слабо компактного доминирования для ограниченных по норме ортогонально аддитивных однородных полиномов в банаховых решетках, полученное в [8].

**Определение 1.** Проблемой *доминирования* (или *мажорации*) для полиномов, действующих в банаховых решетках, называют следующий вопрос: сохраняет ли однородный полином то или иное свойство (компактность, слабая компактность и т.д.), которым обладает его мажоранта? Точнее, если однородный полином  $P$  мажорируется однородным полиномом  $Q$  (т.е.  $|P| \leq Q$  или  $0 \leq P \leq Q$ ) и  $Q$  компактен (слабо компактен), то будет ли  $P$  также компактен (слабо компактен)? Проблема доминирования хорошо изучена для линейных операторов. Решения, полученные для различных классов линейных операторов, представлены в книгах [1, 7] и обзорных статьях [2, 4].

**Определение 2.** Пусть  $0 < p \leq q \leq \infty$  и  $p < \infty$ . Квазибанахову решетку  $E$  называют  $(p, q)$ -выпуклой, если существует константа  $C$  такая, что

$$\left\| \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^q \right)^{1/q} \right\| \leq C \left( \sum_{k=1}^m \|x_k\|^p \right)^{1/p},$$

для любого конечного набора  $\{x_1, \dots, x_m\}$  в  $E$ . При  $p = q$  говорят о  $p$ -выпуклости  $E$ . Наименьшая возможная константа  $C$  в этом неравенстве обозначается  $M^{(p,q)}(C)$ .

Далее можем сформулировать результат из [8, Теорема 1] о компактном доминировании ортогонально аддитивных полиномов в банаховых решетках.

**Теорема 3.** Пусть  $1 \leq p \in \mathbb{R}$ ,  $s \leq p$  и  $s \in \mathbb{N}$ , а  $E$  и  $F$  — банаховы решетки, причем  $E$  —  $p$ -выпукла. Равносильны следующие утверждения:

(1) для любой пары  $s$ -однородных ортогонально аддитивных полиномов  $P, Q$  из  $E$  в  $F$ , удовлетворяющих условию  $0 \leq P \leq Q$ , компактность  $Q$  влечет компактность  $P$ ;

(2) выполняется одно из следующих (не взаимоисключающих) условий:

- (a)  $E \not\supseteq$  банаховых подрешеток, изоморфных  $l_s$ , а  $F$  порядково непрерывна;
- (b)  $\mathcal{P}_o^r({}^sE, \mathbb{R})$  атомична,  $E$  не содержит банаховых подрешеток, изоморфных  $l_s$ ;
- (c)  $F$  атомична и порядково непрерывна.

**Замечание 4.** Проблему компактного доминирования поставил в 1976 году специалист по математической физике Б. Саймон в связи с исследованием резольвенты оператора Шрёдингера. В 1978 г. П. Доддс и Д. Фремлин [1, теорема 5.20] доказали импликацию  $(2)(a) \iff (1)$  теоремы 3 при  $s = 1$ , причём в  $(2)(a)$  фигурирует условие порядковой непрерывности нормы в  $E$ . Последнее равносильно тому, что  $E$  не содержит подрешеток, изоморфных  $l_1$ , [1, теорема 4.69]. Оставшуюся часть теоремы 3 при  $s = 1$  установил Э. Викстед [5]

**Теорема 5.** Пусть  $s \in \mathbb{N}$  и  $s \leq p \in \mathbb{R}$ . Предположим, что  $E$  и  $F$  — банаховы решетки, причем  $E$   $p$ -выпукла. Равносильны следующие утверждения:

(1) для любой пары  $s$ -однородных ортогонально аддитивных полиномов  $P$  и  $Q$  из  $E$  в  $F$ , удовлетворяющих условию  $0 \leq P \leq Q$ , слабая компактность  $Q$  влечет слабую компактность  $P$ ;

(2) либо  $E \not\supseteq$  банаховых подрешеток, изоморфных  $l_s$ , либо  $F$  порядково непрерывна.

**Замечание 6.** Теорема 5 для линейных операторов ( $p = s = 1$ ) установлена в [6]: для того чтобы произвольный линейный положительный оператор из  $E$  в  $F$ , мажорируемый каким-нибудь слабо компактным линейным оператором, был слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одна из банаховых решеток  $E$  и  $F$  была порядково непрерывной. Из этого факта выводится требуемое, привлекая теорему о линеаризации однородных ортогонально аддитивных полиномов [7, теорема 4].

## Список литературы

- [1] Aliprantis C.D., Burkinshaw O. Positive Operators // Orlando: Academic press, 1985.
- [2] Abramovich Y. A., Aliprantis C.D. Positive operators // In: Handbook of the geometry of Banach spaces. V. 1 /Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss/ Amsterdam a.o.: Elsevier. 2001. P. 85–122.
- [3] Meyer-Nieberg P. Banach Lattices. Berlin etc.: Springer, 1991.
- [4] Flores J., Hernández F. L., Tradacete P. Domination problems for strictly singular operators and other related classes // Positivity. 2011. V.15. P. 595-616.
- [5] Wickstead A.W. Converses for the Dodds--Fremlin and Kalton--Saab theorems // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1996. V. 120, № 1. P. 175–179.
- [6] Wickstead A. W. Extremal structure of cones of operators // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1981. V.32, № 2. P. 239-253.
- [7] Кусраева З. А. О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 315–325.
- [8] Кусраева З.А. О компактной мажорации однородных ортогонально аддитивных полиномов // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 3. С. 658-665.

# SOLO FTRL алгоритм для назначения трансфертных цен

Д.Б. Рохлин

Южный федеральный университет  
PHOMЦ Южного федерального университета  
dbrohlin@sfsedu.ru

Рассмотрим корпорацию, производящую и продающую  $d$  товаров, и состоящую из  $n$  производственных подразделений и  $m$  подразделений продаж. Менеджмент корпорации стремится стимулировать оптимальное поведение подразделений путем последовательного назначения внутренних цен  $\lambda \in \mathbb{R}^d$  товаров (трансфертных цен). Оптимальные реакции подразделений определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i(\lambda) &= \arg \max_{x_i \in X_i} (f_i(x_i) - \langle \lambda, x_i \rangle), \quad i = 1, \dots, m, \\ \tilde{y}_i(\lambda) &= \arg \max_{y_i \in Y_i} (\langle \lambda, y_i \rangle - g_i(y_i)), \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned}$$

где  $f_i : X_i \mapsto \mathbb{R}_+$ ,  $i = 1, \dots, m$  определяют доходы подразделений продаж, а  $g_i : Y_i \mapsto \mathbb{R}_+$ ,  $i = 1, \dots, n$  — затраты производственных подразделений.

В статической задаче при сильных предположениях выпуклости и компактности установлено, что алгоритм SOLO FTRL [1], примененный к двойственной задаче, обеспечивает оценки порядка  $T^{-1/4}$  по числу  $T$  итераций для отклонения суммарной прибыли корпорации от оптимального значения и для дисбаланса между спросом и предложением. Данный алгоритм использует информацию только о реакциях подразделений на текущие трансфертные цены, которые вычисляются по формуле

$$\lambda_t = -\frac{\sum_{j=1}^{t-1} \Delta \tilde{z}(\lambda_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{t-1} \|\Delta \tilde{z}(\lambda_j)\|^2}}, \quad \lambda_0 = 0; \quad \Delta \tilde{z}(\lambda) := \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i(\lambda) - \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i(\lambda).$$

Аналогичные результаты получены для динамической задачи, когда функции  $f_i$   $g_i$  зависят от последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин.

## Список литературы

- [1] Orabona F., Pál D. Scale-free online learning//Theoretical Computer Science, 2018, v. 716, p. 50–69, <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.11.021>

# On homogenization for locally periodic elliptic problems on a domain

Н.Н. Сеник

Санкт-Петербургский государственный университет  
nnsenik@gmail.com

Let  $\Omega$  be a Lipschitz domain, and let  $\mathcal{A}^\varepsilon = -\operatorname{div} A(x, x/\varepsilon) \nabla$  be a strongly elliptic operator on  $\Omega$  with fairly general boundary conditions, including, in particular, the Dirichlet and Neumann boundary conditions, as well as mixed ones. We suppose that the parameter  $\varepsilon$  is small and the function  $A$  in the operator  $\mathcal{A}^\varepsilon$  is Lipschitz in the first variable and periodic in the second, so its coefficients are locally periodic and rapidly oscillating. It is a classical result in homogenization theory that the resolvent  $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$  converges (in a certain sense) as  $\varepsilon \rightarrow 0$ . We are interested in approximations for  $(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$  and  $\nabla(\mathcal{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$  in the operator norm on  $L_p$  for a suitable  $p$ . The rates of the approximations depend on regularity of the effective operator  $\mathcal{A}^0$ . We prove that if  $(\mathcal{A}^0 - \mu)^{-1}$  is continuous from  $L_p$  to the Besov space  $B_{p,\infty}^{1+s}$  with  $0 < s \leq 1$ , then the rates are, respectively,  $\varepsilon^s$  and  $\varepsilon^{s/p}$ .

The research was supported by Russian Science Foundation grant no. 17-11-01069.

## Обобщенная задача Неймана для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости

А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет  
soldatov48@gmail.com

Обобщенная задача Неймана для эллиптического уравнения четного порядка  $2l$  определяется заданием на границе области, ограниченной достаточно гладким контуром  $\Gamma$ , последовательных нормальных производных  $(\partial/\partial n)^j$ ,  $j = 1, \dots, l$  порядков  $1 \leq k_1 < \dots < k_l \leq 2l$ . Для полигармонического уравнения при  $k_{j+1} - k_j \equiv 1$  эта задача была изучена А.В. Бицадзе [1]. Другой вариант задачи Неймана, основанный на вариационном принципе, был ранее предложен А.А. Дезиным [2]. В работе [3] для эллиптического уравнения с постоянными (и только старшими) вещественными коэффициентами была рассмотрена общая задача. Случай эллиптического уравнения с младшими коэффициентами был достаточно подробно исследован в [4–6]. Все рассмотрения велись в односвязной области.

В докладе обсуждается случай многосвязной области. Показано, что в этом случае критерий фредгольмовости сохраняется без изменений, однако формула индекса зависит также и от порядка связности области.

## Список литературы

- [1] Бицадзе А.В., Дифференц. уравнения, 1988, т. 24, №5, с. 825-831.
- [2] Дезин А.А., ДАН, 1954, т. 96, №5, с. 901-903.
- [3] Малахова Н.А., Солдатов А.П., Дифференц. уравнения, 2008, Т.44, №. 8, С. 1077-1083

- [4] Кошанов Б., Солдатов А.П., Дифференц. уравнения, 2016, Т.52, 12, С.1666-1681
- [5] Koshanov B.D., Soldatov A.P. About the generalized Dirichlet-Neumann problem for an elliptic equation of high order, AIP Conference Proceedings, 1997, 020013 (2018)
- [6] Солдатов А.П., О фредгольмовости и индексе обобщенной задачи Неймана, Дифф. уравнения, 2020, 56, 2, С. 217-225

## Всплески типа сплайнов в приложении к изучению свойств операторов интегрирования

Е.П. Ушакова

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН  
elenau@inbox.ru

Доклад посвящен базисам всплесков типа сплайнов как инструментам для исследования неравенств, связывающих нормы образов и прообразов операторов интегрирования, действующих в пространствах типа Бесова  $B_{pq}^s(\mathbb{R}, w)$  с параметрами  $0 < p, q < \infty$ ,  $-\infty < s < \infty$  и весовыми функциями  $w$  из класса Макенхаупта [4].

Пусть  $a \in \mathbb{R}$ . Объектами исследования являются операторы Римана–Лиувилля

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) := \chi_{(a, +\infty)}(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy,$$

$$I_{a-}^{\alpha} f(x) := \chi_{(-\infty, a)}(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^a (y-x)^{\alpha-1} f(y) dy$$

порядка  $\alpha > 0$  [2]. Задача состоит в поиске условий выполнения неравенств вида

$$\|f\|_{B_{pq}^{s-\alpha}(\mathbb{R}, w)} \lesssim c_{\alpha, w} \|I_{\pm}^{\alpha} f\|_{B_{pq}^s(\mathbb{R}, w)} \lesssim C_{u, w} \|f\|_{B_{pq}^{s+\alpha}(\mathbb{R}, u)}. \quad (*)$$

Для решения задачи применяется разложение элементов весовых пространств Бесова [3, 6, 10] по базисам всплесков, порожденных В-сплайнами натуральных порядков  $B_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  [5, 9], и дробных порядков гладкости  $\beta_{\pm}^{\gamma}$ ,  $\gamma > 0$  [7, 8].

Для простоты полагаем  $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , а также считаем  $f \equiv 0$  на  $\mathbb{R}_{a\mp}$  при исследовании  $I_{a\pm}^{\alpha}$ , соответственно, где  $\mathbb{R}_{a-} := (-\infty, a)$  и  $\mathbb{R}_{a+} := (a, \infty)$ .

Константы  $c_{\alpha, w} > 0$  и  $C_{u, w} > 0$  в неравенстве (\*) задаются функционалами, зависящими от указанных параметров. Условия  $c_{\alpha, w} < \infty$  и  $C_{u, w} < \infty$  достаточны для справедливости (\*). В частности, формулировка функционала  $C_{u, w}$  использует критерии выполнения весового дискретного неравенства Харди из [1, теорема 1.8].

Исследование выполнено в рамках государственных заданий Министерства науки и высшего образования РФ для ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, а также ВЦ ДВО РАН при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-01-00223).



## Список литературы

- [1] Прохоров Д.В., Степанов В.Д., Ушакова Е.П., Интегральные операторы Харди–Стеклова, *Совр. пробл. матем.* **22** (2016), 186 с.
- [2] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // Изд-во: «Наука и техника», Минск, 1987.
- [3] Ушакова Е.П. Разложение по всплескам типа сплайнов в весовых функциональных пространствах, *Труды МИАН* **312** (2021), 313–337.
- [4] Bui H.-Q. Weighted Besov and Triebel–Lizorkin spaces: interpolation by the real method, *Hiroshima Math. J.* **12**:3 (1982), 581–605.
- [5] Chui C.K. An introduction to wavelets // NY: Academic Press, 1992.
- [6] Roudenko S. Matrix-weighted Besov spaces, *Transactions of the AMS* **355**:1, 273–314.
- [7] Unser M., Blu T. Construction of fractional spline wavelet bases, *Proceedings of the SPIE Conference on Mathematical Imaging: Wavelet applications in signal and image processing VII* (Denver CO, USA, July 19-23, 1999) **3813** (1999), 422–431.
- [8] Unser M., Blu T. Fractional splines and wavelets, *SIAM Review* **42**:1 (2000), 43–67.
- [9] Ushakova E.P., Ushakova K.E. Localisation property of Battle–Lemarié wavelets’ sums, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **461**:1 (2018), 176–197.
- [10] Ushakova E.P. Spline wavelet bases in function spaces with Muckenhoupt weights, *Rev. Mat. Complut.* **33** (2020), 125–160.

## Модельные псевдодифференциальные уравнения в канонических областях

В.Б. Васильев

Белгородский государственный университет

vbv57@inbox.ru

Модельные уравнения в канонических областях возникают тогда, когда мы применяем локальный принцип для исследования фредгольмовости псевдодифференциальных операторов (уравнений) на многообразиях. Как правило, модельный псевдодифференциальный оператор имеет символ, не зависящий от пространственной переменной, а каноническая область – это конус в евклидовом пространстве. Два первых стандартных конуса – все  $m$ -мерное пространство  $\mathbb{R}^m$  и полупространство  $\mathbb{R}_+^m$  были изучены более полувека назад. Первый конус – локальная модель многообразия без края, а второй – локальная модель многообразия в окрестности точки гладкости границы. Случай, когда конус  $C \subset \mathbb{R}^m$  не совпадает с этими двумя, допускает различные трактовки и порождает множество различных подходов.

Автор развивает один из возможных вариантов исследования фредгольмовости псевдодифференциальных уравнений на многообразиях с негладкой границей. Он связан со специальной факторизацией эллиптического символа в конической точке. Некоторые результаты автора в этом направлении описаны в работах [1–4].

## Список литературы

- [1] Васильев В.Б. Потенциалы для эллиптических краевых задач в конусах. Сибирские электронные математические известия. 2016. Т. 13. С. 1129-1149.
- [2] Vasilyev V.B. Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case. Opusc. Math. 2019. V.39, No 1. P. 109-124.
- [3] Vasilyev V.B. Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems. Math. Meth. App;. Sci. 2018. V. 41, Issue 18. P. 9252-9263.
- [4] Васильев В.Б. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в многомерном конусе. Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 10. С. 1356—1365

# Программа секции «Прикладная математика и математическое моделирование»

## Зал № 10

Координаторы: В.В. Измоленов, В.М. Степаненко

### ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Игорь Куликов (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН). *Моделирование ударной детонации белого карлика и взрыв сверхновой типа Ia*

14<sup>50</sup> — 15<sup>10</sup> Евгений Чижонков (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *О схеме второго порядка точности для расчета колебаний и волн в холодной плазме*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Алексей Сулимов (Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ имени М.В. Ломоносова). *Применение глобальной оптимизации на многомерной энергетической поверхности для суперкомпьютерной разработки лекарств прямого действия на коронавирус, вызвавший пандемию COVID-19*

15<sup>30</sup> — 15<sup>50</sup> Андрей Грицун (Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН). *Прогнозирование изменений климата Земли с помощью модели Земной системы ИВМ РАН*

15<sup>50</sup> — 16<sup>10</sup> Юрий Лагутин (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Обратные задачи определения толщин слоёв многослойных покрытий по данным монохроматических измерений*

16<sup>10</sup> — 16<sup>30</sup> Евгений Мортиков (Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ). *Прямое численное моделирование устойчиво стратифицированных турбулентных течений*

16<sup>30</sup> — 16<sup>50</sup> Игорь Вигдорович (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Законы подобия для скорости и температуры в сверхзвуковом турбулентном пограничном слое*

### ПЕРЕРЫВ

17<sup>10</sup> — 17<sup>30</sup> Сергей Корольков (Институт космических исследований РАН). *Современное представление о форме гелиопаузы и других астросфер: стационарные идеальные МГД-решения*

17<sup>30</sup> — 17<sup>50</sup> Игорь Балюкин (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Математическое моделирование потоков энергичных атомов в гелиосфере и анализ данных КА Айбекс*

17<sup>50</sup> — 18<sup>10</sup> Андрей Бирюк (Кубанский государственный университет). *Об оптимальной форме ротора гироидина*

## ВТОРНИК, 10 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Михаил Никабадзе (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Задачи на собственные значения тензорных объектов с некоторыми приложениями к механике*

14<sup>50</sup> — 15<sup>10</sup> Ростислав Фадеев (Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН). *Развитие вычислительных и параллельных технологий в модели прогноза погоды ПЛАВ*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Татьяна Сальникова (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Существование и устойчивость равновесных решений уравнения Власова с модифицированным гравитационным потенциалом типа Леннарда-Джонса*

15<sup>30</sup> — 15<sup>50</sup> Егор Годенко (Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН). *Эйлеров и лагранжевы подходы при моделировании распределения пылевой компоненты в гелиосфере*

15<sup>50</sup> — 16<sup>10</sup> Евгений Степин (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН). *Численные исследования магнитных ловушек-галатей с погруженными в плазму проводниками*

16<sup>10</sup> — 16<sup>30</sup> Алексей Таюрский (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН). *Математические модели магнитного торнадо в солнечной плазме и стационарного плазменного двигателя*

16<sup>30</sup> — 16<sup>50</sup> Ульяна Монахова (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН). *Управление движением роя наноспутников с помощью электромагнитного взаимодействия*

## ПЕРЕРЫВ

17<sup>10</sup> — 17<sup>30</sup> Олеся Королькова (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Комплексное экспериментально-вычислительное исследование механических свойств материалов*

17<sup>30</sup> — 17<sup>50</sup> Сергей Петров (Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН). *Реализация схем переноса типа Тейлора-Галеркина для морского льда на сфере с помощью пакета INMOST*

17<sup>50</sup> — 18<sup>10</sup> Лев Высоцкий (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Использование Tensor-Train разложения для интегрирования функций многих переменных с сингулярностями*

18<sup>10</sup> — 18<sup>30</sup> Ирина Кириллова (Новосибирский государственный университет). *Изучение неустойчивости сферически симметричных состояний динамического равновесия двухкомпонентной плазмы Власова–Пуассона*

18<sup>30</sup> — 18<sup>50</sup> Анатолий Вершинин (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Математическое моделирование связанных гидро-геомеханических процессов с изменяющимися свойствами среды с учётом конечности деформаций с использованием высокопроизводительных вычислений*

18<sup>50</sup> — 19<sup>10</sup> Максим Романов (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Модификация Ладыженской для модели Хэмингуэя активной вязкопластической среды*

19<sup>10</sup> — 19<sup>30</sup> Александр Старченко (Томский региональный научно-образовательный математический центр). *Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличном каньоне*

# **Математическое моделирование связанных гидро-геомеханических процессов с изменяющимися свойствами среды с учётом конечности деформаций с использованием высокопроизводительных вычислений**

В.А. Левин<sup>1</sup>, Ю.Ю. Подладчиков<sup>1,2</sup>, В.А. Еремеев<sup>3</sup>, В.А. Вершинин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

<sup>2</sup>Université de Lausanne, Switzerland

<sup>3</sup>Gdansk University of Technology, Poland; Южный научный центр РАН  
versh1984@mail.ru

В докладе изложен подход к решению задач моделирования развития зон локализации пластических деформаций в рамках порупругопластической модели, обобщающей модель Био. Отличительной особенностью данной модели является двустороннее сопряжение между механическими процессами, происходящими в пористой упругопластической матрице и насыщающей вязкой жидкости, позволяющее учитывать как влияние изменения порового давления жидкости на напряженно-деформированное состояние пористой матрицы, так и обратное влияние изменения формы порового пространства на поровое давление в жидкости и, как следствие закона Дарси, на скорость перетока жидкости внутри пористой среды. Для моделирования накопления упругопластических деформаций с последующим развитием зон их локализации (полос скольжения) используется теория течения с неассоциированным законом пластичности по модели Друкера-Прагера. Для численного решения поставленной задачи используются вариационная постановка на основе метода Галеркина и изопараметрический метод спектральных элементов для дискретизации геометрической модели и уравнений по пространству на криволинейных неструктурированных сетках. Программная реализация разработанного алгоритма выполнена с использованием технологии CUDA. В докладе приводятся результаты численного решения задачи о развитии зон локализации упругопластической деформации в окрестности скважины, пробуренной в пористой горной породе, насыщенной жидкостью, в результате пошагового снижения давления в скважине по отношению к поровому давлению в породе на удалении от скважины. Рассмотрено изменение пористости и проницаемости в результате накопления пластических деформаций. Расчеты проведены на высокопроизводительной вычислительной станции HP Apollo на основе графических карт NVIDIA Tesla V100.

Работа выполнена в МГУ имени М.В. Ломоносова при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621 и при поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых - докторов наук МД-208.2021.1.1.

## **Развитие вычислительных и параллельных технологий в модели прогноза погоды ПЛАВ**

М.А. Толстых, Г.С. Гойман, Р.Ю. Фадеев, В.В. Шашкин

Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН

Гидрометцентр России

rost.fadeev@gmail.com

Глобальная модель ПЛАВ с 2010 года применяется в Гидрометцентре России для оперативного среднесрочного прогноза погоды. В настоящее время горизонтальное разрешение ПЛАВ составляет величину около 20 км над территорией России. Ожидается, что до конца 2021 года будет представлена усовершенствованная версия модели ПЛАВ, которая также будет тестироваться с разрешением около 10 км в Северном полушарии. Среди многих изменений следует отметить уточнение ряда вычислительных алгоритмов и работы по оптимизации программного кода модели с целью ускорения вычислений. Предварительная оценка скорости расчета одного среднесрочного прогноза погоды на основе новой версии ПЛАВ была выполнена на системе Cray XC40, установленной в ГВЦ Росгидромета при использовании до 3000 процессорных ядер. По отношению к неусовершенствованной версии ускорение составило величину около 22%.

Вместе с развитием ПЛАВ и сопутствующих ей технологий авторами ведутся работы по созданию нового динамического ядра для перспективной версии модели. В рамках доклада будут представлены результаты исследования параллельной эффективности, реализованных в рамках нового ядра многосеточного метода и метода Крыловского типа BICGstab. Данные методы применяются для решения линейных систем, возникающих при дискретизации негидростатических уравнений гидротермодинамики атмосферы на сетке типа "кубическая сфера".

Данные исследования выполняются при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2019-1624 с Министерством высшего образования и науки РФ).

## **Существование и устойчивость равновесных решений уравнения Власова с модифицированным гравитационным потенциалом типа Леннарда-Джонса**

Т.В. Сальникова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Российский университет дружбы народов

tatiana.salnikova@gmail.com

В математических моделях столкновения между частицами можно описывать различными способами. Можно использовать теорию неупругого удара твердых тел с коэффициентом восстановления Ньютона для относительной скорости отскакивающих частиц. При компьютерном моделировании основная трудность этого подхода состоит в отслеживании и уточнении громадного числа моментов времени соударений частиц.

Другая математическая модель состоит в добавлении к гравитационному потенциалу потенциала отталкивающих сил типа межмолекулярных сил Леннарда-Джонса. Численные эксперименты показывают, что при выполнении условия устойчивости Якоби обе

модели приводят к качественно идентичному характеру эволюции системы, с возможным образованием устойчивых конфигураций.

Как известно, при парных столкновениях бесконечно большого числа гравитирующих частиц функция плотности вероятности эволюционирует в соответствии с системой уравнений Власова-Больцмана-Пуассона. В настоящей работе предлагается метод

исследования с использованием уравнения Власова с потенциалом типа Леннарда-Джонса, который обеспечивает «сглаженное» контактное взаимодействие системы взаимно гравитирующих частиц и позволяет учитывать размер взаимодействующих частиц, а также учитывать не только парные, но и тройные или более столкновения частиц.

Для такой динамической системы существование большого класса нелинейно устойчивых равновесных решений доказывается методом энергии-Казимира.

## **Моделирование ударной детонации белого карлика и взрыв сверхновой типа Ia**

И.М. Куликов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

`kulikov@ssd.sscc.ru`

Сверхновые типа Ia являются не только источником элементов «жизни», но и «стандартными свечами» для измерения расстояния во Вселенной. В настоящем докладе мы опишем результаты математического моделирования ударной детонации белого карлика и последующий взрыв сверхновой типа Ia. С помощью вычислительных экспериментов было выяснено, что динамика ударной детонации определяется энергией взрыва и точкой поджига.

Для описания процесса построена гидродинамическая модель белых карликов с учетом ядерного горения углерода, замкнутая звездным уравнением состояния и дополненная уравнением Пуассона для гравитационного потенциала.

Представлены результаты исследования масштабируемости и энергоэффективности программной реализации.

## **Реализация схем переноса типа Тейлора-Галеркина для морского льда на сфере с помощью пакета INMOST**

С.С. Петров

Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН

`serg_petr97@mail.ru`

В данной работе исследуется зависимость точности численного решения уравнения переноса на сфере в зависимости от использования разных схем типа Тейлора-Галеркина для дискретизации по времени. Схемы типа Тейлора-Галеркина активно применяются в динамических блоках конечно-элементных моделей океана, атмосферы, морского льда. Рассматриваются различные начальные распределения массы, такие как бесконечно гладкие гауссовы поверхности, разрывные распределения массы. Задаются разные реверсивные



поля скорости, как дивергентные, так и бездивергентные. Реверсивность и бездивергентность поля скорости гарантирует совпадение начального поля массы с конечным, что позволяет оценить ошибки. Дивергентное поле скорости используется для проверки положительности и глобальной консервативности решения. Работа устроена следующим образом: сначала дается описание схем переноса типа Тейлора-Галеркина. Затем описываются начальные распределения массы и поля скорости. После этого представлены основные результаты численных экспериментов в различных конфигурациях. В конце делаются выводы и даются рекомендации по использованию той или иной схемы.

## Список литературы

- [1] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. The Finite Element Method, Fifth Edition, V. 3: Fluid Dynamics, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000
- [2] Quartapelle, L. Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations. Vol. 113.: Birkhauser, 1993.
- [3] Lohner R., Morgan K., Peraire, J. and Vahdati M., Finite element flux-corrected transport (FEM-FCT) for the Euler and Navier-Stokes equations. Int. J. Numer. Meth. Fluids 7 (1987) 1093–1109.
- [4] Ramachandran D. Nair and Peter H. Lauritzen. A class of deformational flow test cases for linear transport problems on the sphere. J. Comput. Phys. 229, 23 (November, 2010), 8868–8887.

## О схеме второго порядка точности для расчета колебаний и волн в холодной плазме

Е.В. Чижонков

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

evchizhonkov@yandex.ru

В целях моделирования колебаний и волн в холодной плазме построена модификация классической разностной схемы второго порядка точности - схемы МакКормака. Для задачи о свободных плазменных колебаниях, инициированных коротким мощным лазерным импульсом, с целью тестирования представленной схемы проведены численные эксперименты по сохранению энергии и других величин. Теоретическое исследование аппроксимации и устойчивости вместе с экспериментальным наблюдением за количественными характеристиками погрешности для наиболее чувствительных величин существенно повышает достоверность вычислений. Дополнительно исследовано влияние внешнего магнитного поля на плоские нерелятивистские нелинейные плазменные колебания. Для инициализации медленной необыкновенной волны в магнитоактивной плазме предложен способ построения недостающих начальных условий на основе решения линейной задачи методом Фурье. Показано, что при наличии внешнего постоянного магнитного поля ленгмюровские колебания трансформируются в медленную необыкновенную волну, энергия

которой вибрирует при перемещении от начала координат. При этом скорость волны увеличивается с ростом внешнего поля, что способствует выносу энергии из первоначальной области локализации колебаний.

### **Комплексное экспериментально-вычислительное исследование механических свойств материалов**

И.В. Инюхин<sup>1</sup>, О.П. Королькова<sup>1,2</sup>, Л.А. Костырева<sup>1</sup>, П.А. Моссаковский<sup>1</sup>

<sup>1</sup>НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

ol.shendrigina@mail.ru

В работе выполнено комплексное экспериментальное-вычислительное исследование механических свойств ряда конструкционных металлов. Для исследования динамических свойств материалов наиболее широко применяется в экспериментальной практике метод разрезного стержня Гопкинсона (РСГ). В работе выполнена серия РСГ испытаний и их модификаций на динамическое сжатие, растяжение и сдвиг (данная модификация была разработана и запатентована авторами исследования).

В результате была проанализирована степень неоднородности НДС в образце и показано, что скорости деформаций распределены и по длине, и по радиусу образца неравномерно и в эксперименте на растяжение локализуются в шейке, где с ее развитием могут отличаться от номинальных значений в несколько раз. Отсюда сделан вывод, что построенная кривая нагружения не может быть однозначно параметризована единым значением скорости деформации, поэтому определяющие соотношения материала со скоростной чувствительностью следует задавать таблицей из нескольких кривых нагружения во всем реализуемом диапазоне скоростей деформаций. Построение такой таблицы выполнено при помощи итерационной процедуры численного решения обратной задачи методом конечного элемента с ранее упомянутой целевой функцией. В итоге была выявлена скоростная чувствительность исследуемых материалов: увеличение предела текучести и уменьшение касательного модуля кривых с увеличением скорости деформации.

С использованием данных проведенных разнородных статических и динамических испытаний были построены критерии разрушения материалов в зависимости от вида НДС, представляющие собой сложную поверхность, определяемую двумя параметрами: параметром вида НДС, равным отношению гидростатического давления к интенсивности напряжений, и углом Лоде.

## **Численные исследования магнитных ловушек-галатей с погруженными в плазму проводниками**

К.В. Брушлинский, Е.В. Степин

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

eugene.v.stepin@gmail.com

В докладе представлены результаты расчётов равновесных магнитоплазменных конфигураций в магнитных ловушках-галатеях – перспективных технологических устройствах для магнитного удержания плазмы, разрабатываемых в связи с решением задачи управляемого термоядерного синтеза. В численном решении двумерных краевых задач с эллиптическим уравнением Грэда-Шафранова, следующем из уравнений магнитной газодинамики (МГД) в стационарной форме, получены распределения основных параметров плазмы и магнитного поля в магнитной ловушке «Галатей-Пояс» с двумя токонесущими проводниками, погружёнными внутрь плазменного объёма и при этом с ним не соприкасающимися. Проведено исследование устойчивости обсуждаемых двумерных конфигураций относительно возмущений магнитного поля той же размерности, что соответствует так называемой «диффузионной» устойчивости, и более полное исследование МГД-устойчивости относительно малых возмущений всех параметров задачи, включая динамические. Получены ограничения на безразмерную величину максимального давления плазмы, требуемые для устойчивости, и иерархия этих ограничений.

## **Обратные задачи определения толщин слоёв многослойных покрытий по данным монохроматических измерений**

Ю.С. Лагутин, А.А. Лагутина

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

lagutin.math@gmail.com

Многослойные покрытия используются при изготовлении широкого круга оптических приборов: зеркал, фильтров, поляризаторов и других. Для изготовления желаемого оптического покрытия необходимо нанести на подложку систему слоёв с фиксированными толщинами. Это означает, что в процессе напыления покрытия необходимо по зашумлённым данным измерения коэффициента пропускания на длине волны мониторинга восстанавливать истинные значения толщин слоёв. Решение с помощью МНК даёт быстро возрастающую ошибку при увеличении числа слоёв. В работе предложен метод решения задачи восстановления толщин слоёв с использованием функционала с регуляризирующими множителями для разности величин, характеризующих состояние системы в конце напыляемого слоя и началом следующего.

## **Современное представление о форме гелиопаузы и других астросфер: стационарные идеальные МГД-решения**

С.Д. Корольков, В.В. Измоленов

Институт космических исследований РАН

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

korolkovsergey1998@mail.ru

Глобальная форма гелиопаузы является предметом недавних горячих споров. В настоящее время обсуждаются два типа формы гелиопаузы. В первом типе гелиопауза имеет общепринятую пластинчатую топологию, а глобальная гелиосфера - кометоподобный тип. Во втором типе, предложенном в 2015 году Opher et al. гелиопауза имеет трубчатую топологию, а глобальная гелиосфера имеет двухструйный тип, в котором солнечный ветер после шока формирует струи, ориентированные по направлению к оси вращения Солнца. Струи образуются под действием азимутальной составляющей магнитного поля гелиосферы.

В этой работе исследован сценарий с двумя струями для упрощенной «игрушечной» астросферы, в которой (1) окружающая и движущаяся относительно звезды звездная среда полностью ионизирована, т.е. межзвездные атомы не рассматриваются, как это должно быть для гелиосферы, (2) межзвездное магнитное поле не учитывается, (3) не учитывается радиальная составляющая магнитного поля астросферы по сравнению с азимутальной, (4) истечение звездного ветра предполагается сверхзвуковым и изотропным. Приведены результаты численного 3D-МГД-моделирования астросферы для различных значений параметров потока. Показаны критические значения параметров, при которых астроплазма меняет свою топологию.

По результатам работы опубликована статья в журнале MNRAS (Q1, DOI: <https://doi.org/10.1093/mnras/stab1071>).

## **Эйлеров и лагранжевы подходы при моделировании распределения пылевой компоненты в гелиосфере**

Е.А. Годенко

Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Институт космических исследований РАН

eg24@yandex.ru

Гелиосфера (область распространения плазмы солнечного ветра) движется относительно локальной межзвездной среды, которая состоит из плазменной, нейтральной и пылевой компонент. Из-за относительного движения частицы межзвездной пыли проникают в гелиосферу. Основное влияние на движение пылевых частиц в гелиосфере оказывают три силы: электромагнитная сила, сила гравитационного притяжения и сила радиационного отталкивания. В результате, распределение пылевой компоненты становится существенно неоднородным: в частности, образуются сингулярности в распределении концентрации, а также области накопления пылинок. Цель данной работы – построение

модели распределения частиц межзвездной пыли в гелиосфере. Такая модель может в дальнейшем быть использована для интерпретации экспериментальных данных, а также для планирования будущих миссий по исследованию межзвездной пыли.

Для описания движения межзвездной пыли можно использовать **кинетический (эйлеров) подход**, который состоит в решении кинетического уравнения для функции распределения по скоростям, или **жидкостной (лагранжев) подход**, который состоит в вычислении в каждой точке вдоль траектории пылинки якобиана преобразования от лагранжевых координат к эйлеровым. Кинетический подход является более общим, и уже был неоднократно применен для моделирования распределения межзвездной пыли в гелиосфере, однако с помощью жидкостного подхода можно эффективно находить сингулярности в распределении концентрации - из уравнения неразрывности, записанного в лагранжевых координатах, ясно, что сингулярности будут находиться в тех точках, где якобиан становится равным нулю. Применение кинетического подхода для поиска сингулярностей сопряжено с использованием сеток расчетной области очень высокого разрешения, что подразумевает под собой также резкое увеличение количества моделируемых частиц, необходимых для достижения желаемой величины относительной статистической ошибки.

## Использование Tensor-Train разложения для интегрирование функций многих переменных с сингулярностями

Л.И. Высоцкий<sup>1,2,3</sup>, А.В. Смирнов<sup>3,4</sup>, Е.Е. Тыртышников<sup>4,5</sup>

<sup>1</sup>Высшая школа экономики

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

<sup>3</sup>Московский центр фундаментальной и прикладной математики

<sup>4</sup>Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ

<sup>5</sup>Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН

`vysotskylev@yandex.ru`

Численное интегрирование – это классическая задача, возникающая во многих областях науки. При этом интегрирование функций большого числа переменных с помощью многомерных квадратурных формул сталкивается с большими трудностями из-за экспоненциального роста количества узлов. Предлагаемый метод позволяет преодолеть эти трудности. Интегрируемая функция аппроксимируется с помощью тензора в формате «тензорного поезда» (tensor-train, ТТ), а затем эффективно вычисляется многомерная квадратурная формула. В работе предложен подход к высокоточному вычислению интегралов от функций с сингулярностями, а также проведён теоретический анализ величины ошибки интегрирования. Представлена реализация метода на языке C++ с открытым исходным кодом.

## **Законы подобия для скорости и температуры в сверхзвуковом турбулентном пограничном слое**

И.И. Вигдорович

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова

[vigdorovich.igor@gmail.com](mailto:vigdorovich.igor@gmail.com)

Как известно, описание турбулентных течений в рамках усредненных уравнений Навье-Стокса (уравнений Рейнольдса) сталкивается с фундаментальной проблемой, связанной с поиском дополнительных условий для замыкания задачи. Практическому решению этой проблемы посвящена современная теория моделей турбулентности. Однако в силу полуэмпирического характера теории ее результаты являются нестрогими и приближенными.

В докладе предложен другой подход к проблеме замыкания, который может быть применен к относительно узкому классу канонических течений, но зато свободен от частных гипотез и основан только на первых принципах. Согласно ранее высказанной идее, если течение в целом зависит от конечного числа постоянных параметров, турбулентное касательное напряжение и турбулентный поток тепла могут быть представлены в виде функций от градиентов усредненной скорости и температуры. Вместе с уравнениями Рейнольдса и энергии эти функциональные связи дают поставленную краевую задачу для полей усредненной скорости и температуры, которая после специальной замены переменных решается методом сращиваемых асимптотических разложений при больших значениях логарифма числа Рейнольдса. В результате для целого ряда несжимаемых пристенных течений получены законы подобия и расчетные соотношения для основных гидро- и термодинамических величин, а также выводы о качественных особенностях и асимптотической структуре течения.

В докладе этот подход распространен на сверхзвуковой турбулентный пограничный слой на пластине при нулевом продольном градиенте давления. Установлены законы подобия для скорости и температуры, справедливые в пристеночной области, которые позволяют представить профили скорости и температуры в потоке сжимаемого газа через профили этих величин в несжимаемом пограничном слое. Кроме постоянной Кармана и турбулентного числа Прандтля в логарифмической области, известных для течения несжимаемой жидкости, в теории появляются три новых универсальных постоянных, которые определяются из экспериментальных данных.

## **Численное моделирование неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в астросферах: стационарные и периодические газодинамические решения**

С.Д. Корольков, В.В. Измоленов

Институт космических исследований РАН

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

korolkovsergey1998@mail.ru

В рамках данной задачи была разработана газодинамическая модель взаимодействия солнечного (звёздного) ветра с межзвёздной средой. Применение технологии высокопроизводительного программирования CUDA, позволяющей использовать свыше 100 миллионов ячеек для вычислений, сделало возможным исследование неустойчивости гелиопаузы (астропауз), а также тангенциального разрыва от диска Маха в хвостовой области течения. Благодаря высокому разрешению сетки (менее 1 а.е. во всей области), было проведено моделирование неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для различных параметров потока (различных астросфер). Также исследована зависимость неустойчивости от разрешения сетки и метода. Применено улучшение аппроксимации схемы с помощью TVD процедуры. Кроме того учтена периодичность звёздного ветра и её стабилизирующее влияние на течение.

Промежуточные результаты работы опубликованы в журнале Journal of Physics: Conference Series (<http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1640/1/012012>).

## **Динамика пограничного слоя атмосферы над неоднородной поверхностью в прибрежной зоне**

А.Д. Пашкин, И.А. Репина, К.В. Барсков, А.Ю. Артамонов

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ

В работе рассматриваются результаты измерений структуры атмосферной турбулентности в прибрежной зоне с горным рельефом при переходе ветрового потока с берега на море и с моря на берег и в зависимости от удаления от берега. Измерительные установки располагались по склону от вершины Ай-Петри до берега, а также на морской платформе. Эти данные позволяют сравнивать турбулентные потоки и другие статистические характеристики, а также исследовать масштабирование поверхностного слоя для различных областей формирования потока. Было получено, что коэффициент сопротивления и суточные вариации потока явного тепла являются индикаторами области формирования потока. Коэффициент аэродинамического сопротивления на суше на порядок больше, чем на гладкой морской поверхности. При береговом потоке внутренний пограничный слой в прибрежной зоне был либо устойчивым, либо (в основном) неустойчивым, и резко менялся на разрыве поверхности суши. Поток теплого воздуха над более прохладной морской поверхностью создавал устойчивый внутренний пограничный слой над морской

поверхностью. Рассмотрены критерии применимости теории подобия Монина-Обухова при описании пограничного слоя в прибрежной зоне.

### **Закон стенки для профиля скорости в сжимаемом турбулентном пограничном слое**

А.И. Агеев<sup>1</sup>, Т.А. Манаенкова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова

<sup>2</sup>Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
aleshka-ageev@mail.ru

Установлены законы подобия для профилей скорости и температуры, справедливые в пристеночной области до- и сверхзвукового турбулентного пограничного слоя, которые позволяют представить профили скорости и температуры в потоке сжимаемого газа через профили этих величин в несжимаемом пограничном слое. Они получены как асимптотические разложения решения уравнений Рейнольдса по малому параметру – числу Маха, вычисленному по динамической скорости и энтальпии газа на стенке. Главный член разложения для профиля скорости соответствует известной формуле Ван Дриста. Однако полученное решение содержит еще дополнительные слагаемые порядка единицы, что объясняет расхождение формулы Ван Дриста с экспериментальными данными. Аналогичную структуру имеет закон стенки для температуры, который для сжимаемого течения сформулирован впервые.

Кроме постоянной Кармана и турбулентного числа Прандтля в логарифмической области, известных для течения несжимаемой жидкости, полученные соотношения содержат три новые универсальные константы, которые не зависят от молекулярных свойств и отношения теплоемкостей газа.

### **Лагранжево моделирование рассеяния взвешенных частиц в геофизических пограничных слоях**

А.В. Варенцов, Е.В. Мортиков, В.М. Степаненко

Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ

В работе представлена разработка и применение численной лагранжевой модели переноса аэрозольных частиц в городском пограничном слое атмосферы с высоким пространственным разрешением. Модель использует уравнение движения для расчета индивидуальной траектории частицы, взвешенной в воздухе. В модели реализованы три стохастические параметризации для пульсаций скорости воздуха: простая гауссова модель, модель случайных смещений нулевого порядка и модель случайных блужданий с конечным временем взаимодействия частицы со случайной пульсацией скорости среды. Кроме того, для учета скоррелированности лагранжевой скорости жидкости во времени реализована версия модели, основанная на уравнении Ланжевена для скорости пассивного трассера.



Разработанная численная модель реализована в виде программного кода на языке C++ и позволяет рассчитывать независимые траектории движения множества частиц, а также статистические характеристики поля концентрации частиц. Входные данные для модели – эйлеровы поля средней скорости ветра и характеристик турбулентности; они могут быть заданы аналитически или заимствованы из эйлеровых гидродинамических моделей RANS/LES.

Численная лагранжева модель проверена на аналитических эйлеровых решениях для течения Куэтта и логарифмического приземного слоя. Рассмотрен случай тяжёлых частиц, имеющих источник на поверхности и влияющих на плотностную стратификацию приземного слоя воздуха; получено аналитическое решение для концентрации, согласующееся с расчётами по лагранжевой модели. Проведены эксперименты по воспроизведению переноса частиц в серии городских каньонов, включая частицы с конечным периодом полураспада, имитирующие вирионы COVID-19 (SARS-CoV-2). На основе результатов расчетов было оценено влияние стратификации, размера и времени жизни частиц на перенос аэрозолей в типичной городской застройке.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 18-05-60126 и 19-05-50110.

## **Математическое моделирование потоков энергичных атомов в гелиосфере и анализ данных КА Айбекс**

И.И. Балюкин<sup>1,2,3</sup>, В.В. Измоденов<sup>1,2,3,4</sup>, Д.Б. Алексахов<sup>2,4</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

<sup>2</sup>Институт космических исследований РАН

<sup>3</sup>Высшая школа экономики

<sup>4</sup>Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН

igor.baliukin@gmail.com

Космический аппарат (КА) Interstellar Boundary Explorer (IBEX) с 2008 г. проводит измерения потоков энергичных нейтральных атомов (ЭНА) водорода на орбите Земли при помощи инструмента IBEX-Hi в диапазоне энергий от 0.3 до 6 кэВ. Была разработана численная модель для вычисления потоков ЭНА, в рамках которой восстанавливаются траектории движения атомов водорода от точки пространства, где они регистрируются КА IBEX, до точки их рождения в области возмущенного солнечного ветра. Вдоль траектории атома вычисляются и интегрируются потоки рожденных ЭНА, имеющих заданную скорость, а также учитываются потери частиц за счет процессов ионизации (перезарядки на протонах и фотоионизации).

Новизна и оригинальность разработанной модели состоит в детальном кинетическом подходе для моделирования распределения над-термальной компоненты – захваченных протонов, которые рождаются в области сверхзвукового солнечного ветра и захватываются гелиосферным магнитным полем. Их важность определяется тем, что наблюдаемые IBEX-Hi энергичные атомы рождаются в процессе перезарядки межзвёздных атомов водорода именно с захваченными протонами. Разработана модель распределения захваченных протонов в гелиосфере, в рамках которой решалось кинетическое уравнение в трёхмерной нестационарной постановке в предположении изотропности функции распределения по скоростям. Такой метод выгодно отличается от других существующих подходов, так

как основан на фундаментальных физических законах, и на данный момент не имеет аналогов среди конкурирующих научных групп.

Были выполнены расчёты модельных карт потоков ЭНА на основе разработанной ранее глобальной кинетико-МГД модели взаимодействия солнечного ветра с локальной межзвёздной средой (Izmodenov & Alexashov, 2020), проведено исследование параметров энергичной компоненты захваченных протонов и получены их количественные оценки на основе данных наблюдений для различных положений за гелиосферной ударной волной.

## **Математические модели магнитного торнадо в солнечной плазме и стационарного плазменного двигателя**

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

tayurskiy2001@mail.ru

Проведено исследование закрученных вихревых потоков плазмы в стационарных плазменных двигателях (СПД) и магнитных торнадо. Применительно к СПД разработана математическая модель, позволяющая установить зависимость основных параметров плазменной струи в СПД (сила тяги, величина ускорения ионов, распределение концентрации ионов и т.д.) от характеристик установки (геометрические размеры, расход рабочего вещества – ксенона, напряжённость магнитного поля и т.д.). Предложенная математическая модель основана на гибридных уравнениях плазмы с учётом инерции электронов, процесса объёмной ионизации и рекомбинации ионов на стенках установки. Для магнитных торнадо найдены граничные условия уравнений магнитного торнадо, гарантирующие существование стационарных вихревых потоков замагниченной плазмы, и проведено исследование этих потоков. Результаты исследований дают теоретическое подтверждение существования наблюдаемых в солнечной плазме вихревых образований, отождествляемых с магнитными супер-торнадо.

## **Некоторые вопросы микрополярной теории призматических тонких тел**

А.В. Хиженков

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Рассмотрены постановки краевых задач микрополярной теории призматических тонких тел с одним малым размером постоянной толщины в моментах относительно систем ортогональных полиномов при классической параметризации области тонкого тела. Получены дифференциальные уравнения равновесия и определяющие соотношения несколько первых приближений в моментах относительно системы ортогональных полиномов Лежандра и даны постановки краевых задач соответствующих приближений. При этом уравнения и статические граничные условия на боковой грани в моментах векторов перемещений и вращений относительно полиномов Лежандра представлены в операторном

виде и рассмотрены проблемы расщепления краевых задач при рассматриваемых приближениях. Кроме того, применяется полуобратный метод Сен-Венана для удовлетворения граничных условий на лицевых поверхностях, когда на тело действуют объемные силы и непрерывно распределенные напряжения на лицевых поверхностях. При этом методе компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений, которые не участвуют в граничных условиях на лицевых поверхностях, разлагаются в ряды по рассматриваемой системе ортогональных полиномов, а остальные компоненты определяются через них из уравнений с учетом граничных условий на лицевых поверхностях так, чтобы они удовлетворяли указанным выше граничным условиям. Показано, что такой метод представления компонент тензоров напряжений и моментных напряжений эквивалентен методу разложения всех компонент этих тензоров по данной системе ортогональных полиномов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621.

### **Дисперсионные уравнения и скорости волн в микрополярной теории упругости**

А.Р. Улуханян

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Получены общее дисперсионное уравнение для микрополярной анизотропной бесконечной среды, дисперсионные уравнения и скорости волн в трех взаимно перпендикулярных направлениях для трансверсально-изотропных и ортотропных микрополярных бесконечных упругих сред. Кроме того, выписаны таблицы скоростей волн в трех взаимно перпендикулярных направлениях для трансверсально-изотропных и ортотропных бесконечных упругих классических сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

### **Задачи на собственные значения тензорных объектов с некоторыми приложениями к механике**

М.У. Никабадзе

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

[nikabadze@mail.ru](mailto:nikabadze@mail.ru)

Рассмотрены задачи на собственные значения тензора и тензорно-блочной матрицы (ТБМ) любого четного ранга. Приведены формулы, выражающие классические инварианты тензора и ТБМ любого четного ранга через первые инварианты их степеней, а также

обратные к этим формулам соотношения. В явном виде построена полная ортонормированная система собственных тензоров симметрического тензора, а также полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов для ТБМ. Как частный случай, рассмотрены задачи на собственные значения для тензора и ТБМ четвертого ранга. Даны определения символов структуры для тензора и ТБМ соответственно, а также соответствующих этим тензорным объектам материалов классической и микрополярной линейных теорий упругости. Доказано существование микрополярных материалов с двумя отрицательными коэффициентами Пуассона. Найдены собственные значения и собственные тензоры для классических материалов кристаллографических сингоний, а также для некоторых микрополярных материалов. С помощью введенных в рассмотрение дифференциальных ТБМ уравнения движения в перемещениях и вращениях и статических граничных условий записаны уравнения движения и статические граничные условия соответственно. Найдены выражения для дифференциальных тензоров-операторов кофакторов, дифференциальных ТБМ кофакторов и определителей дифференциальных тензоров-операторов и дифференциальных тензорно-блочных матриц в случае трансверсально-изотропных и изотропных материалов. Уравнения движения и статические граничные условия, выраженные через векторы перемещений и вращений, расщепляются с помощью построенных соответствующих дифференциальных ТБМ кофакторов. Трехмерные начально-краевые задачи для линейных классических и микрополярных теорий анизотропных однородных сред с кусочно-плоской границей расщеплены. Изложенный выше материал с большим успехом распространяется на повторно-градиентные теории упругости и вязкоупругости и др.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621.

## **О математическом моделировании тонких тел вращения**

М.А. Богатырев

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Рассмотрена новая параметризация трехмерной тонкой области произвольного тела вращения, заключающаяся в использовании в отличие от классических подходов нескольких базовых поверхностей. Дано векторное параметрическое уравнение. Определены свойства новой параметризации геометрические характеристики. Выписаны выражения для компонент переноса единичного тензора второго ранга, а также соотношения, связывающие различные семейства базисов и порожденные ими геометрические характеристики. Выписаны основные рекуррентные формулы для полиномов Лежандра, а также получаемых из них несколько дополнительных соотношений, играющих важную роль при построении различных вариантов теорий тонких тел. Приведены необходимые соотношения теории моментов относительно систем ортогональных полиномов. В частности, дано определение момента тензорной величины, а также их производных и повторных производных. Выписаны моменты  $k$ -го порядка некоторых выражений относительно системы полиномов Лежандра. Даны представления некоторых дифференциальных операторов, системы уравнений движения, определяющих соотношений микрополярной теории упругости, а также граничных условий при рассматриваемой параметризации области тонкого

тела вращения. Кроме того, из представленных соотношений в свою очередь получены соответствующие соотношения в моментах относительно полиномов Лежандра. Даны постановки начально-краевых задач в моментах относительно полиномов Лежандра пятого приближения для теории упругих тел вращения. Как частные случаи рассмотрены цилиндрические и сферические тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621.

### **Применение глобальной оптимизации на многомерной энергетической поверхности для суперкомпьютерной разработки лекарств прямого действия на коронавирус, вызвавший пандемию COVID-19**

А.В. Сулимов, Д.К. Кутов, И.С. Ильин, А.С. Тащилова, В.Б. Сулимов

Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ  
Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
sulimovv@mail.ru

Применение молекулярного моделирования для разработки новых противовирусных лекарств. С помощью молекулярного моделирования описывается взаимодействие низкомолекулярных соединений, с белками-мишенями вирусов. С использованием суперкомпьютерной программы докинга SOL осуществляется поиск таких соединений-лигандов, которые ингибируют, т.е. блокируют, работу белков-мишеней и останавливают репликацию вируса. Программа докинга SOL осуществляет позиционирование лигандов в активном центре белка-мишени и дает оценку энергии связывания белок-лиганд. Чем выше эта энергия, тем более вероятно подтверждение ингибирующей активности лиганда в эксперименте, и тем более эффективное лекарство может быть создано на его основе, поскольку меньшая концентрация лигандов приводит к желаемому терапевтическому эффекту. Позиционирование лигандов осуществляется с использованием глобальной оптимизации на основе генетического алгоритма. Для вычисления энергии используется силовое поле MMFF94 – набор классических потенциалов, описывающих межатомные взаимодействия, а также учитывается влияние растворителя – воды, в рамках континуальной модели. Для улучшения надежности отбора лигандов кандидатов в ингибиторы для экспериментального тестирования, для наиболее перспективных по результатам докинга лигандов проводились расчеты энтальпии связывания белок-лиганд с помощью квантово-химического метода PM7 с учетом растворителя. Отобранные лиганды были проверены экспериментально, и часть из них показала высокую ингибирующую активность как в тестах *in vitro* в системе «белок-субстрат-ингибиторы», так и в тестах *in vivo* в культуре клеток при подавлении репликации живого коронавируса SARS-CoV-2. Найденные соединения могут стать основой новых лекарств прямого действия против коронавируса вызвавшего пандемию COVID-19.

## **Управление движением роя наноспутников с помощью электромагнитного взаимодействия**

У.В. Монахова, Д.С. Иванов, М.Ю. Овчинников  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
monakhova@phystech.edu

Новые подходы к изучению космоса привели к обширным исследованиям и разработкам групповых полетов малых космических аппаратов. Эти сложные системы способны решать различные амбициозные задачи, такие как дистанционное зондирование Земли, изучение гравитационных волн, солнечной коронографии и т.д. Малые космические аппараты предлагают новые научные и коммерческие применения благодаря увеличивающимся возможностям их маломощных микрокомпонентов. Также с экономической точки зрения, спутники меньшего размера проще и дешевле производить и запускать на орбиту, чем их более крупные аналоги.

В данной работе рассматривается группа спутников ChipSat, запущенных на низкой околоземной орбите с 3U CubeSat. ChipSat — это спутник, сделанный на основе печатной платы размером 3,5 x 3,5 см, и включающий в себя солнечную панель, бортовой компьютер, небольшие магнитные катушки и систему связи. Для построения группового полета предлагается рассмотреть два подхода к управлению относительным движением: централизованный и децентрализованный. При централизованном подходе 3U CubeSat считается главным аппаратом, а спутники ChipSat — подчиненными. После запуска главный аппарат создает постоянный во времени максимальный дипольный момент, а окружающие его подчиненные реализуют такие магнитные дипольные моменты, чтобы остановить относительный дрейф. В случае децентрализованного подхода после запуска спутники разбиваются на пары, внутри которых с помощью диполь-дипольного взаимодействия будет останавливаться дрейф. Во время движения состав пар меняется, и таким образом относительные дрейфы между всеми спутниками в группе стремятся к нулю. Предложенные схемы управления исследованы в зависимости от различных начальных параметров задачи.

## **Изучение неустойчивости сферически симметричных состояний динамического равновесия двухкомпонентной плазмы Власова–Пуассона**

И.С. Кириллова  
Новосибирский государственный университет  
i.kirillova@g.nsu.ru

Развитие математической теории устойчивости играет важнейшую роль в исследованиях плазмы и её свойств, поскольку для осуществления управляемого термоядерного синтеза (УТС) внутри ограниченного по объёму реактора необходимо решить проблему изолирования плазмы от его стенок.

Изучается задача линейной устойчивости сферически симметричных состояний динамического равновесия двухкомпонентной безграничной бесстолкновительной электрически нейтральной плазмы в электростатическом приближении — плазмы Власова-Пуассона.

Прямой метод Ляпунова доказана абсолютная неустойчивость исследуемых состояний равновесия по отношению к малым возмущениям, обладающим тем же типом симметрии. Также описан неполный незамкнутый подкласс этих возмущений, который отвечает достаточному условию линейной устойчивости, согласующемуся с классической теоремой Ньюкомба-Гарднера-Розенблюта (Н.-Г.-Р.) об устойчивости, и раскрывает его формальный характер.

Построено дифференциальное неравенство, из которого, при выполнении счётного набора условий, вытекает априорная экспоненциальная оценка снизу, говорящую о нарастании во времени изучаемых малых возмущений. Сам же счётный набор допускает трактовку в качестве конструктивных достаточных условий линейной практической неустойчивости. Обращено достаточное условие Н.-Г.-Р. линейной устойчивости. Представлены примеры состояний динамического равновесия и наложенных на них малых возмущений, которые растут во времени. Проведено обобщение на статистическую механику известной в электростатике теоремы Ирншоу о неустойчивости.

Результаты, полученные в ходе данной работы, могут найти себе применения не только при исследовании математических моделей плазмы на предмет адекватности, но и в процессах для разработки и эксплуатации установок для осуществления УТС.

## **Прогнозирование изменений климата Земли с помощью модели Земной системы ИВМ РАН**

А.С. Грицун, Е.М. Володин

Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН  
asgrit@mail.ru

В докладе рассматриваются вопросы, связанные с прогнозированием состояния хаотических систем, к которым относится и климатическая система Земли. Формулируется понятие «климат». Вводится понятие потенциальной предсказуемости, обсуждаются источники предсказуемости – предсказуемость по правой части и по начальным условиям. Кратко описана модель Земной системы INM-CM5 ИВМ РАН [1] — комплекс моделей динамики атмосферы, динамики океана, морского льда, почвы, биохимии океана и т.д., ее численная реализация, характеристики вычислительной эффективности. Сформулированы некоторые основные элементы международной программы сравнения климатических моделей CMIP6 [2], в которых принимала участие модель INM-CM5. Обсуждаются результаты, полученные при моделировании доиндустриального климата [3], климатических изменений в 1850-2014 гг. [4], прогностические расчеты по моделированию изменений климата 21 века [5], в том числе, расчеты для 2015-2030 гг. с учетом реально наблюдаемого начального состояния.

## **Список литературы**

- [1] Володин Е.М., Галин В.Я., Грицун А.С. и др., 2016, Математическое моделирование Земной системы / Под ред. Яковлева Н.Г. — М.: МАКС Пресс. — 328 с. ISBN 978-5-317-05435-9

- [2] Eyring, V., Bony, S., Meehl, G. A., et al., 2016, Overview of the Coupled Model Intercomparison Project Phase 6 (CMIP6) experimental design and organization, *Geosci. Model Dev.*, 9, 1937-1958, doi:10.5194/gmd-9-1937-2016.
- [3] E. Volodin, E. Mortikov, S. Kostykin, et al., 2017, Simulation of the present-day climate with the climate model INMCM5, *Climate dynamics*, 49, Issue 11–12, 3715–3734, doi:10.1007/s00382-017-3539-7
- [4] E. Volodin, A. Gritsun, 2018, Simulation of observed climate changes in 1850–2014 with climate model INM-CM5, *Earth Syst. Dynam.*, 9, 1235-1242, doi:10.5194/esd-9-1235-2018
- [5] Volodin, E.M., Gritsun, A.S., 2020, Simulation of Possible Future Climate Changes in the 21st Century in the INM-CM5 Climate Model, *Izvestiya - Atmospheric and Ocean Physics*, 2020, 56(3), 218-228, doi:10.1134/S0001433820030123

## **Прямое численное моделирование устойчиво стратифицированных турбулентных течений**

Е.В. Мортиков<sup>1</sup>, А.В. Глазунов<sup>1,2</sup>, В.Н. Лыкосов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ

<sup>2</sup>Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН

evgeny.mortikov@gmail.com

В докладе обсуждаются результаты прямого численного моделирования турбулентных течений при устойчивой стратификации в широком интервале значений чисел Рейнольдса и Ричардсона. Расчеты используются для оценки применимости предположений, используемых в полуэмпирических теориях турбулентности. Показано, что в течении Куэтта при сильной устойчивости наблюдается переход к режиму выраженной перемежаемости, в котором локализованные по пространству полосы турбулентного и ламинарного течения чередуются в поперечном к потоку направлении. Турбулентность в данной форме может поддерживаться при большей устойчивости, чем это считалось ранее. Наблюдаемое усиление переноса кинетической энергии пульсаций скорости в центр канала обеспечивает поддержание турбулентности и связано с формированием вторичных к основному течению крупных вихрей.

Работы выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер гранта 20-05-00776).

## **Модификация Ладыженской для модели Хэмингуэя активной вязкопластической среды**

М.С. Романов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

mcliz@mail.ru



В докладе будет рассмотрена одна модель вязкопластической среды, объединяющей в себе свойства жидкости, полимеров и жидких кристаллов. Среда подобного рода часто встречается в биологии; типичным примером является слизь, выделяемая эпителиальными клетками. Предполагается, что вязкость среды зависит от скорости деформации как многочлен, причем при малых скоростях деформации вязкость близка к константе, а при больших — к степенной функции с достаточно большим показателем. Таким образом рассматриваемая система является аналогом модификации О.А.Ладыженской для уравнений Навье-Стокса. Свободная энергия системы представляет собой функционал, содержащий кроме квадратичных слагаемых члены более высокого порядка, что приводит к принципиально нелинейным уравнениям. Для полученной системы ставится начально-краевая задача в периодической области. Доказана теорема о существовании решения для достаточно широкого класса функционалов энергии.

## **Об оптимальной форме ротора гиродина**

А.Э. Бирюк

Кубанский государственный университет

abiryuk@kubsu.ru

## Программа секции «Нелинейная динамика и управление»

### Зал № 8

Координатор: Д.В. Баландин

#### ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Лев Смирнов (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Химеры в системах нелокально взаимодействующих осцилляторов с симметричной и несимметричной связью*

14<sup>50</sup> — 15<sup>10</sup> Григорий Осипов (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Уединенные когерентные состояния в среде нелокально связанных фазовых осцилляторов*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Лев Смирнов (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Устойчивость стационарных синхронных состояний в системе Курамото*

15<sup>30</sup> — 15<sup>50</sup> Татьяна Лаптева (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Bifurcations in open quantum systems*

#### ПЕРЕРЫВ

16<sup>10</sup> — 16<sup>30</sup> Анастасия Емельянова (Институт прикладной физики РАН). *Третий тип хаоса в системе адаптивно связанных осцилляторов Курамото*

16<sup>30</sup> — 16<sup>50</sup> Мечислав Пугавко (Институт прикладной физики РАН). *Динамика спайковой нейронной сети в задаче двухальтернативного выбора*

16<sup>50</sup> — 17<sup>10</sup> Олег Масленников (Институт прикладной физики РАН). *Динамика рекуррентных нейронных сетей в задачах контролируемого обучения*

17<sup>10</sup> — 17<sup>30</sup> Евгений Евстифеев (Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского). *Исследование влияния интенсивности шума на характеристики перемежающейся обобщенной синхронизации при помощи метода локальных ляпуновских показателей*

#### ВТОРНИК, 10 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Егор Семенюта (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Экстремальные события в феноменологических нейронных сетях с различными типами связей*

14<sup>50</sup> — 15<sup>10</sup> Татьяна Леванова (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Влияние мемристорных связей на динамику ансамбля связанных систем ФитцХью-Нагумо*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Евгений Боев (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Модель поврежденной среды и ее реализация в задачах усталостной долговечности материалов и конструкций*

15<sup>30</sup> — 15<sup>50</sup> Александр Константинов (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Идентификация нелинейных моделей вязкопластического деформирования конструкционных материалов на базе динамических экспериментальных методик*

#### ПЕРЕРЫВ

16<sup>10</sup> — 16<sup>30</sup> Сергей Денисов (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Dissipative quantum chaos in Floquet systems*

16<sup>30</sup> — 16<sup>50</sup> Герман Гуйо (Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского). *Распознавание зашумленных сигналов с использованием нейросетевых методов*

16<sup>50</sup> — 17<sup>10</sup> Виталий Ханадеев (Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского). *Устойчивость обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора к шумовому воздействию*

17<sup>10</sup> — 17<sup>30</sup> Игорь Юсипов (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Численные критерии диссипативного квантового хаоса*

#### ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Руслан Бирюков (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Оптимальное по Парето управление гибким ротором в электромагнитных подшипниках*

14<sup>50</sup> — 15<sup>10</sup> Елена Бубнова (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Обобщенная  $\mathcal{H}_2$  норма систем со скачками*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Степан Шульпин (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Нейро-нечеткая стабилизация вращающейся платформы*

15<sup>30</sup> — 15<sup>50</sup> Евгений Ветчанин (Удмуртский государственный университет). *Динамика мобильных роботов с периодическим управлением*

#### ПЕРЕРЫВ

16<sup>10</sup> — 16<sup>30</sup> Иван Полехин (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН). *О применении топологического метода Важевского для исследования глобальной стабилизируемости*

16<sup>30</sup> — 16<sup>50</sup> Александр Тузиков (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Различные виды индуцированных стохастических переключений бистабильной ячейки памяти MRAM*

16<sup>50</sup> — 17<sup>10</sup> Илья Лебедев (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Идентификация кинетических параметров химической реакции с помощью параллельного алгоритма глобального поиска*

17<sup>10</sup> — 17<sup>30</sup> Марина Усова (Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского). *Об одном алгоритме поиска глобального экстремума разрывной функции*

17<sup>30</sup> — 17<sup>50</sup> Игорь Зыков (Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН). *О построении внешних оценок множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями на управляющее воздействие*

## **Уединенные когерентные состояния в среде нелокально связанных фазовых осцилляторов**

М.И. Болотов, Д.И. Болотов, Л.А. Смирнов, Г.В. Осипов, А. Пиковский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
maksim.bolotov@itmm.unn.ru

Рассмотрен класс солитонных химерных состояний в среде нелокально связанных идентичных фазовых осцилляторов с диффузией среднего поля. Такие состояния представляют собой уединенный участок когерентных осцилляторов на асинхронном фоне в системе большой длины. Разработана процедура поиска данных решений как гомоклинических траекторий в фазовом пространстве вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Проведено описание процесса развития неустойчивости солитонных химер.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект №075-02-2020-1483/1.

## **Третий тип хаоса в системе адаптивно связанных осцилляторов Курамото**

А.А. Емельянова, В.И. Некоркин  
Институт прикладной физики РАН  
emelianova@ipfran.ru, vnekorkin@appl.sci-nnov.ru

Впервые установлено существование в диссипативной динамической системе общего положения (системе без симметрий) нового типа детерминированного хаоса – смешанной динамики, – принципиально отличающегося как от хаотического консервативного, так и от хаотического диссипативного поведения. Система описывает динамику двух адаптивно связанных фазовых осцилляторов. Продемонстрировано, что смешанная динамика может возникать как при наличии небольшой расстройки собственных частот фазовых осцилляторов, так и при наличии внешнего периодического стимула. В пространстве параметров системы выделены области, в каждой из которых хаотические аттрактор и репеллер пересекаются, образуя замкнутое инвариантное множество из траекторий, принадлежащих как аттрактору, так и репеллеру, – так называемое обратимое ядро, являющееся образом смешанной динамики в фазовом пространстве. В отличие от хаотического аттрактора, обратимое ядро не притягивает никаких траекторий, но удерживает в своей малой окрестности все положительные и отрицательные полутраектории. Построено двумерное отображение Пуанкаре, которое показывает наличие в динамике системы одновременно консервативного и диссипативного хаотического поведения и их неразделимость. Показано, что в исследуемой системе фрактальная размерность обратимых ядер меньше фрактальных размерностей соответствующих хаотических аттракторов и репеллеров, формирующих эти обратимые ядра. Продемонстрировано, что в случае, когда смешанная динамика вызвана внешним воздействием на систему, она препятствует вынужденной синхронизации колебаний, в то время как действие внешней силы на уже сформированное благодаря расстройке собственных частот обратимое ядро приводит к его вынужденной синхронизации.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект №075-02-2020-1483/1.

## **Динамика спайковой нейронной сети в задаче двухальтернативного выбора**

М.М. Пугавко, О.В. Масленников, В.И. В.И. Некоркин

Институт прикладной физики РАН

slavapugavko2@gmail.com, olmaov@ipfran.ru, vnekorkin@ipfran.ru

Мы представляем результаты исследования искусственной спайковой нейронной сети, которая способна после обучения выполнять целевую функцию, моделирующую процесс решения когнитивной задачи двухальтернативного выбора. Задача заключается в том, чтобы субъект (человек или животное в эксперименте или некоторая вычислительная система) на основе предложенного стимула сделал вывод о том, каким из двух возможных свойств он обладает. В классическом эксперименте обезьяна в течение конечного временного промежутка наблюдает на экране облакодвигающихся точек, часть из которых перемещается случайным образом, а другая – в одном из двух выделенных направлений, после чего движением глаз сообщает свое решение о направлении преобладающего движения. В настоящей работе данная задача формализована в виде целевой функции – сравнения средних значений двух зашумленных входных сигналов и выбора большего из них. Реализована спайковая сеть нейронов накопление-сброс и проведено её контролируемое обучение методом e-ргор выполнять целевую функцию. На основе методов нелинейной динамики выявлены динамические механизмы, лежащие в основе её работы.

Показан коллективный механизм решения целевой задачи на основе разделения траекторий в фазовом пространстве в зависимости от соотношения между средними значениями входных сигналов. Установлены закономерности влияния индивидуальной динамики спайковых нейронов на выходную активность, лежащую в основе решения целевой задачи. Показано, что в рекуррентной сети после обучения выделяются три группы, две из которых взаимодействуют между собой посредством взаимно подавляющих связей и играют ключевую роль в выполнении нейросетью целевой функции. Выявленные группы по-разному воздействуют на выходы системы и активизируются различным образом при изменении соотношения между средними значениями входных сигналов.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект №075-02-2020-1483/1.

## **Динамика рекуррентных нейронных сетей в задачах контролируемого обучения**

О.В. Масленников, В.И. Некоркин

Институт прикладной физики РАН

olmaov@ipfran.ru, vnekorkin@ipfran.ru

Математическое моделирование активности нейронных популяций мозга как предмет изучения вычислительной нейронауки интенсивно развивается на протяжении последних десятилетий. Выбор уровня построения модели зависит от природы и масштаба явления, которое требуется описать. В области исследования динамических механизмов выполнения когнитивных задач в настоящее время наблюдается формирование парадигмы функциональных искусственных нейронных сетей, построенных с применением машинного обучения. Моделируемая задача формализуется в терминах целевой функции, преобразующей входные стимулы в требуемые выходные отклики. Затем задается искусственная нейронная сеть, состоящая из простых элементов, после чего происходит контролируемое обучение, т.е. настройка параметров этой сети выполнять целевое преобразование входов в выходы на основе методов глубокого обучения. Полученная сеть представляет собой многомерную динамическую систему в виде связанных простых нелинейных элементов – искусственных нейронов. Результирующую систему можно исследовать методами нелинейной динамики и теории сложных сетей.

В докладе описанный подход иллюстрируется на примере двух задач. Первая – автономная и индуцированная внешними стимулами генерация последовательных откликов в виде пространственно-временных паттернов различной конфигурации. Данная задача моделирует свойство моторных отделов мозга активировать и в зависимости от внешних условий перестраивать последовательность генерирующих электрические импульсы нейронов. Во втором примере моделируется выполнение когнитивной задачи сравнения двух вибротактильных стимулов, которая задействует соматосенсорную рабочую память. В обоих случаях полученные после контролируемого обучения системы изучены методами нелинейной динамики. Установлены объекты фазового пространства и изучены возникающие в ходе обучения свойства индивидуальной активности, определяющие особенности выполнения целевых задач.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект №075-02-2020-1483/1.

## **Исследование влияния интенсивности шума на характеристики перемежающейся обобщенной синхронизации при помощи метода локальных ляпуновских показателей**

Е.В. Евстифеев, О.И. Москаленко

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

evstifeev@mail.ru

В настоящее время широкое внимание исследователей направлено на изучение процессов установления хаотической синхронизации [1]. К одному из них относится перемежаемость вблизи границы обобщенной синхронизации [2,3]. Данное нелинейное явление

радиофизики характеризуется существованием связи между состояниями взаимодействующих систем в форме функционального соотношения (в общем виде – функционала). Под перемежаемостью следует понимать чередование временных интервалов синхронной (ламинарных фаз) и асинхронной (турбулентных фаз) динамики.

В настоящее время обобщенная хаотическая синхронизация привлекает особое внимание исследователей в связи с ее широкой распространенностью и возможностью применения, например, при скрытой передаче информации или в медицине.

На данный момент существует проблема, связанная с разработкой универсального метода выделения ламинарных и турбулентных фаз, необходимых для получения статистических характеристик перемежаемости. Такой метод должен быть применим в случае однонаправленной и взаимной связи, а также быть устойчивым к шуму.

В связи с этим, в данной работе был предложен метод расчета локальных показателей Ляпунова [4]. При помощи разработанного подхода было исследовано влияние интенсивности шума на характеристики перемежающейся обобщенной синхронизации. Для исследования были выбраны две однонаправленно и взаимно связанные системы Лоренца [3,5], демонстрирующие перемежаемость типа перескоков. Шум был добавлен непосредственно к уравнениям одной из систем. Установлено, что при небольшой интенсивности шума характеристики перемежаемости подчиняются экспоненциальным теоретическим закономерностям, соответствующим поведению при отсутствии шума.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект № 075-02-2021-1399. Изучение влияния шума на характеристики перемежаемости осуществлялось при поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук, проект № МД-21.2020.2.

## Список литературы

- [1] Boccaletti S, Kurths J., Osipov G. et al. The synchronization of chaotic systems // Physics Report. 2002. Vol. 366, Issue 1-2. P. 1-101.
- [2] Nikolai F. Rulkov, Mikhail M. Sushchik, Lev S. Tsimring, and Henry D. I. Abarbanel Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems// Phys. Rev. E. 1995. V. 51, № 2. P. 980
- [3] A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, A.A. Pivovarov and Vladislav A. Khanadeev. Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization // Phys. Rev. E. 2020. V. 102. P. 012205
- [4] Abarbanel H. D. I., Brown R., Kennel M.B. Variation of Lyapunov Exponents on a Strange Attractor // Journal of Nonlinear Science. 1991. Vol. 1. P. 175–199.
- [5] E.N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow// J. Atmos. Sci. 1963. V. 20, 2. pp. 130–141.



# Экстремальные события в феноменологических нейронных сетях с различными типами связей

Е.Ю. Семенюта, Т.А. Леванова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

semenyuta@itmm.unn.ru

Экстремальные события (ЭС) – редкие и непредсказуемые события, амплитуда которых превышает критический уровень. Один из ярких примеров ЭС в нейронауке – эпилептические припадки.

В данной работе мы изучаем влияние электрических связей на ЭС и хаотическую динамику в минимальном ансамбле двух пачечных нейронов Хиндмарш-Роуз с химическими и электрическими связями.

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i + bx_i^3 - ax_i^3 - z_i + I - k_i(x_i - v_s)\Gamma(x_j) + k(x_j - x_i) \\ \dot{y}_i = c - dx_i^2 - y_i \\ \dot{z}_i = r[s(x_i - x_R) - z_i] \\ i, j = 1, 2 \ (i \neq j) \end{cases} \quad (1)$$

Химические синаптические связи описываются слагаемым  $k_i(x_i - v_s)\Gamma(x_j)$ , где  $\Gamma(x)$  – сигмоидная функция. Параметры  $k_{1,2}$  отвечают за силу химических связей и являются управляющими параметрами в системе. С их помощью мы можем симулировать различные типы воздействия: тормозящее ( $k_{1,2} < 0$ ), возбуждающее ( $k_{1,2} > 0$ ) и смешанное ( $k_1$  и  $k_2$  разных знаков). Электрическая синаптическая связь описывается слагаемым  $k(x_j - x_i)$ , где  $k$  отвечает за силу связи.

Для данной системы были найдены диапазоны управляющих параметров связей, при которых в системе наблюдаются ЭС. Такие ЭС представляют собой спайки, наблюдающиеся в ходе временной эволюции переменной  $x_{II} = x_1 + x_2$ , амплитуды больше уровня  $H_s = \mu + 6\sigma$ , где  $\mu$  – среднее, а  $\sigma$  – стандартное отклонение.

Было показано, что существование ЭС при  $k = 0$  связано с феноменом гиперхаоса. При увеличении силы электрической связи  $k$  до некоторого порогового значения сначала разрушается гиперхаотический режим, затем хаотический режим становится регулярным. При достаточно сильной электрической связи элементы демонстрируют синфазную пачечную активность. Таким образом, добавление слабой электрической связи приводит к сокращению областей устойчивости ЭС и возникновению регулярных режимов. При этом для значений сил связей может из некоторого диапазона наблюдаться хаотическая активность, не приводящая к возникновению ЭС, которая исчезает при дальнейшем увеличении силы электрической связи.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект №075-02-2020-1483/1.

## **Влияние мемристорных связей на динамику ансамбля связанных систем ФитцХью-Нагумо**

А.Г. Коротков, Т.А. Леванова, Г.В. Осипов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

tatiana.levanova@itmm.unn.ru

В данной работе изучены различные типы нетривиальной нейроноподобной динамики, которые возникают при введении мемристорной связи в нейронных ансамблях. Для этого рассмотрен ансамбль нейроноподобных элементов ФитцХью-Нагумо, связанных синаптическими (как химическими, так и электрическими) связями и связями на основе мемристоров. Для указанного ансамбля проведен подробный бифуркационный анализ и описаны новые сложные сценарии возникновения и разрушения хаотических режимов, в том числе связанных со спиральным хаосом. Особое внимание уделено изучению экстремальных событий, которые ранее наблюдались в системе.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект №075-02-2020-1483/1.

## **Модель поврежденной среды и ее реализация в задачах усталостной долговечности материалов и конструкций**

Е.В. Боев

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

e.boev87@mail.ru

Развитие конструкций и аппаратов современного энергомашиностроения, самолётостроения и других высокотехнологичных отраслей промышленности характеризуется увеличением рабочих параметров, снижением металлоёмкости за счёт рационального проектирования и применения новых конструкционных материалов, значительным ростом удельного веса нестационарных режимов нагружения, существенным расширением температурного диапазона работы конструкций. Подобные тенденции привели к тому, что в настоящее время одной из основных задач при разработке и проектировании конструкций и аппаратов новой техники является надёжная расчётная оценка их прочности и ресурса. Эта задача наиболее актуальна для конструкций, срок службы которых составляет несколько десятков лет (атомные энергетические установки, авиационные газотурбинные двигатели (ГТД) и газотурбинные установки (ГТУ) нового поколения, нефтехимическое оборудование и др.). Целью работы является оценка усталостной долговечности элементов и узлов несущих конструкций при комбинированном термомеханическом нагружении с использованием определяющих соотношений МПС, предложенных Ю.Г. Коротких.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект №075-02-2020-1483/1

# **Идентификация нелинейных моделей вязкопластического деформирования конструкционных материалов на базе динамических экспериментальных методик**

**А.Ю. Константинов**

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
konstantinov@mech.unn.ru

Эффективность численного моделирования, как инструмента проектирования оптимальной конструкции, во многом определяется точностью математических моделей, описывающих поведение материалов, составляющих эту конструкцию. Указанные математические модели, или как их принято называть - определяющие соотношения, должны учитывать основные характерные особенности, присущие моделируемому процессу. Так для задач оценки прочности конструкций в условиях динамического нагружения (взрывное или ударное воздействие на конструкцию) на процессы деформирования и разрушения конструкционных материалов существенное влияние оказывает скорость деформации. Кроме того, деформирование пластических материалов (металлов и сплавов) сопровождается адиабатическим разогревом, так как тепло, выделяемое за счет работы пластической деформации, не успевает рассеиваться за характерное время ударного процесса. В настоящей работе приводится описание методов идентификации нелинейных моделей вязкопластического деформирования конструкционных материалов на базе динамических экспериментальных методик. Рассмотрены два основных подхода - прямая идентификация моделей на основе системы базовых экспериментов и метод идентификации, опирающийся на решение обратной задачи с применением численного моделирования. В качестве основного инструмента экспериментального исследования процессов деформирования и разрушения при высокоскоростном нагружении используется метод Кольского и его модификации. Для описания вязкопластического деформирования материалов используется семейство моделей, базирующихся на теории течения. Поверхность текучести определяется условием Мизеса. Радиус поверхности текучести зависит от деформации, скорости деформации и температуры. Математические формулировки указанной зависимости строятся эмпирическим путем. Описаны современные инструменты, такие как скоростная видеорегистрация, трехмерное сканирование и соответствующее программное обеспечение, позволяющие повысить информативность и точность экспериментального наблюдения. Даны примеры идентификации нелинейных моделей вязкопластического деформирования для ряда материалов. Достоверность моделей подтверждается совпадением результатов натурных и численных экспериментов.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект №075-02-2020-1483/1.

# Распознавание зашумленных сигналов с использованием нейросетевых методов

Г.А. Гуйо

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

guyo199814@gmail.com

В данной работе изучаются возможности применения нейросетевых методов и алгоритмов машинного обучения [1, 2] для решения задач распознавания и классификации сигналов с помехами на примере сигналов внеклеточного электрического потенциала [3]. Выбраны экспериментальные данные, содержащие сигналы 3-х близко расположенных нейронов и проведено сопоставление различных вариантов их распознавания. Учитывая большой объем данных для непосредственного применения методов кластеризации, вначале необходимо выделить некоторые признаки, которые будут однозначно характеризовать каждый импульс нейронных спайков. Такими признаками были выбраны коэффициенты дискретного преобразования Фурье и амплитуда сигнала. Далее к выбранным признакам были применены ряд нейросетевых методов (KNN, Mean Shift, K-means, t-SNE, PCA и многослойный персептрон), чтобы классифицировать исходные импульсы.

Также был продемонстрирован метод выделения характерных признаков с помощью многомасштабного анализа на основе вейвлет-преобразования для сигналов ЭЭГ молодой и возрастной группы без хронических заболеваний, при выполнении задач моторно-двигательной функции. Для сигналов ЭЭГ, в качестве признаков, была посчитана средняя дисперсия вейвлет-коэффициентов детализации через вейвлет-функции семейства Добеши. Данный признак может быть использован для диагностики структурных изменений сигналов ЭЭГ людей разных возрастных групп.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект № 075-02-2021-1399.

## Список литературы

- [1] *Schmidhuber J.* Deep learning in neural networks: An overview // *Neural Networks*. 2015. Vol. 61. P. 85–117.
- [2] *Federer C., Xu H., Fyshe A.* Improved object recognition using neural networks trained to mimic the brain's statistical properties // *Neural Networks*. 2020. Vol. 131. P. 103–114.
- [3] *Lewicki M.S.* A review of methods for spike sorting: the detection and classification of neural action potentials // *Network: Comput. Neural Syst.* 1998. Vol. 9. P. R53–R78.

# **Устойчивость обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора к шумовому воздействию**

**В.А. Ханадеев, О.И. Москаленко**

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

**v.a.hanadeev@gmail.com**

Известно, что шумы могут по-разному влиять на установление синхронизации между связанными хаотическими системами [1–3]. Шумы могут приводить как к усилению синхронных режимов, так и способствовать разрушению, например, режимов полной и фазовой синхронизации [1,2]. На данный момент достаточно хорошо исследовано поведение границы режима обобщенной синхронизации в простых системах под воздействием шумов. В то же время, почти ничего не известно о влиянии шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией аттрактора, в которых механизмы установления обобщенной синхронизации отличаются от случая систем с простой топологией аттрактора [4].

Данный доклад посвящен исследованию влияния различных типов шумов на установление режима обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора. В качестве исследуемых систем были выбраны односторонне связанные системы Лоренца [5] и односторонне связанные системы Чена [6]. С помощью метода вспомогательной системы и расчета старшего условного показателя Ляпунова было исследовано влияние белого шума с гауссовой плотностью распределения вероятностей и цветного шума с равномерной плотностью распределения вероятностей на режим обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора.

В результате проведенного исследования установлено, что характер шумового сигнала не оказывает существенного влияния на порог возникновения синхронного режима как в системах Лоренца, так и осцилляторах Чена. Вне зависимости от типа шумового воздействия режим обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора оказывается устойчивым по отношению к шумам в широком, но ограниченном диапазоне изменения интенсивности шумового воздействия.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект № 075-02-2021-1399. Изучение влияния шума на границу обобщенной синхронизации осуществлялось при поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – докторов наук, проект № МД-21.2020.2.

## **Список литературы**

- [1] J.F. Heagy, T.L. Carroll, L.M. Pecora // Phys Rev E 1995. V. 52. No. 2. R1253-R1256.
- [2] C.S. Zhou, Kurths J., I.Z. Kiss, J.L. Hudson // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89, P. 014101.
- [3] O.I. Moskalenko, A.E. Hramov, A.A. Koronovskii et al. // Eur. Phys. J. B 2011. V. 82. P. 69–82.
- [4] A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, A.A. Pivovarov et al. // Phys. Rev. E V. 102. P. 012205.
- [5] Z. Zheng, X. Wang, M.C. Cross // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 056211.
- [6] Z. Chen, Y Yang., G. Qi, et al. // Phys. Lett. Sect. A Gen. At. Solid State Phys. 2007. V. 360, No. 6. P. 696–701.

# Численные критерии диссипативного квантового хаоса

И.И. Юсипов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
yusipov.igor@gmail.com

В настоящее время диссипативные квантовые системы являются неотъемлемой частью экспериментальной и технологической реальности. Практические реализации нано- и оптомеханических систем, сверхпроводящих элементов не осуществимы в полной изоляции от окружающей среды. Подобные системы являются открытыми и их динамика существенно диссипативна, а преимущественно используемое описание посредством эволюции когерентных квантовых систем является приближением, часто грубым, реальных физических процессов. Диссипация в данных системах является полноправным генератором эволюции, которая не менее сложна и разнообразна, чем унитарная, генерируемая гамильтонианами. Диссипация способна привести систему в состояния, которые недостижимы в классическом пределе. Теория диссипативного квантового хаоса переживает активное развитие и напрямую связана с распространением методов и подходов классической теории бифуркаций и детерминированного хаоса. В данной области важнейшим направлением является разработка численных критериев для количественной оценки диссипативного квантового хаоса. Также Отдельный интерес представляет исследование математических моделей, описывающих физические системы, в которых количественные характеристики квантового хаоса можно получить из данных реального эксперимента.

Одна из основополагающих концепций теории динамического хаоса заключается в том, что сложная хаотическая динамика возникает из-за локальной неустойчивости, которая заставляет две изначально близкие траектории расходиться. Это расхождение обычно количественно оценивается с помощью показателей Ляпунова — мощного инструмента для количественной оценки динамического хаоса. В данной работе рассматривается обобщение квантового показателя Ляпунова для диссипативных систем на основе количественного определения расходимости изначально близких квантовых траекторий. Введенная численная характеристика может быть использована для выявления сложной структуры регулярных и хаотических областей, а также квантовых бифуркаций в различных моделях открытых квантовых систем. В частности, в модели открытого квантового димера квантовый показатель Ляпунова позволил количественно оценить динамику системы при переходе от регулярного режима к квантовому хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Как и в классическом случае, в случае хаотизации системы, старший квантовый показатель Ляпунова становится положительным.

Кроме этого, используя открытый резонатор с модуляцией в качестве модели, было обнаружено, что статистика времён ожидания фотона может служить хорошим диагностическим инструментом для обнаружения диссипативного квантового хаоса. Хаотическая динамика возникает при появлении степенной промежуточной асимптотики, которая согласуется с положительным старшим квантовым показателем Ляпунова. Данные результаты открывают новую перспективу для количественной оценки режимов, возникающих в открытых квантовых системах, особенно в таких областях, как квантовая электродинамика, квантовая оптика и поляритонные устройства, где статистика излучения фотонов является общепринятым инструментом.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект №075-02-2020-1483/1.

## Обобщенная $\mathcal{H}_2$ норма систем со скачками

Р.С. Бирюков, Е.С. Бубнова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
bes0406@mail.ru

В работе рассматривается линейный объект со скачками, динамика которого описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_c(t)x + B_c(t)v, & t \in [t_k, t_{k+1}), \\ x(t_{k+1}) &= A_{d,k}x(t_{k+1} - 0) + B_{d,k}w_k, & k = 0, \dots, N-1, \\ z &= C(t)x,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x \in \mathbb{R}_2^{n_x}$  — состояние объекта,  $v(t) \in L_2([t_0, t_N], \mathbb{R}_2^{n_v})$  — непрерывное возмущение,  $\{w_k\} \in l_2([0, N-1], \mathbb{R}_2^{n_w})$  — дискретное возмущение,  $z \in \mathbb{R}_2^{n_z}$  — целевой выход. Матрицы  $A_c(t)$ ,  $B_c(t)$  таковы, что решение рассматриваемой системы существует на заданном интервале.

Обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма объекта (1) определяется как точное гарантированное максимальное по времени значение квадрата евклидовой нормы выхода системы, нормированное суммой квадратов евклидовых норм возмущений и квадратичной формы начального состояния системы:

$$\gamma^2 = \sup_{(x_0, v, w) \neq 0} \frac{\sup_{t \in [t_0, t_N]} |z(t)|_2^2}{\|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2 + x_0^\top R x_0}.\tag{2}$$

**Теорема.** Обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма объекта (1) при начальном и внешнем возмущениях на заданном горизонте  $[t_0, t_N)$  может быть вычислена как

$$\gamma^2 = \max_{k=0 \dots N-1} \sup_{t \in [t_k, t_{k+1})} \lambda_{\max} \left( \mathcal{C}_k(t) Y_k \mathcal{C}_k^\top(t) + C(t) \mathcal{P}_k(t) C^\top(t) \right),\tag{3}$$

где  $Y_k = Y_k^\top \succcurlyeq 0$  — решение уравнения  $Y_{k+1} = \mathcal{A}_k Y_k \mathcal{A}_k^\top + \mathcal{P}_k(t_{k+1})$  с начальным условием  $Y_0 = R^{-1}$ , здесь

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_k &= \Phi(t_{k+1}, t_k) A_{d,k}, & \mathcal{C}_k(t) &= C(t) \Phi(t, t_k) A_{d,k}, \\ \mathcal{P}_k(t) &= \int_{t_k}^t \Phi(t, \tau) B_c(\tau) B_c^\top(\tau) \Phi^\top(t, \tau) d\tau + \Phi(t, t_k) B_{d,k} B_{d,k}^\top \Phi^\top(t, t_k)\end{aligned}\tag{4}$$

и  $\Phi(t, \tau)$  — фундаментальная матрица решений уравнения  $\dot{x} = A_c(t)x$ .

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект №075-02-2020-1483/1.

# Нейро-нечеткая стабилизация вращающейся платформы

С.М. Шульпин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
shulpinstm@gmail.com

В работе рассматривается математическая модель простейших движений человека, которые он совершает, чтобы удержать вертикальное положение на свободно вращающихся качелях. Предполагается, что движения происходят только во фронтальной плоскости; во время движений нет смещения или отрыва ног от поверхности качелей; смещение центра масс тела человека во время движений происходит вдоль дуги окружности. В этом случае можно считать, что движения человека приближённо описываются однозвенным перевернутым маятником, закреплённым шарнирно в геометрическом центре качелей. Математическая модель описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left( J + (m_p + m_s)d^2 + m_p r_p^2 + 2m_p r_p d \cos \theta \right) \ddot{\varphi} + m_p r_p (r_p + d \cos \theta) \ddot{\theta} + \varepsilon \dot{\varphi} = \\ & = m_p r_p d \dot{\theta} (\dot{\theta} + 2\dot{\varphi}) \sin \theta + g(m_p d + m_s r_s) \sin \varphi + g m_p r_p \sin(\varphi + \theta), \quad (1) \end{aligned}$$

$$m_p r_p (r_p + d \cos \theta) \ddot{\varphi} + m_p r_p^2 \ddot{\theta} + m_p r_p d \dot{\varphi}^2 \sin \theta - g m_p r_p \sin(\varphi + \theta) = M,$$

где  $\varphi$  — угол поворота качелей, отсчитываемый в положительном направлении от вертикальной оси,  $\theta$  — угол отклонения маятника, отсчитываемый от нормали к поверхности качелей,  $M$  — управляющий момент, приложенный в точке крепления маятника,  $r_s$  — расстояние от точки крепления качелей до их центра масс,  $d$  — расстояние от точки крепления качелей до точки крепления маятника, при этом  $r_s \leq d$ ,  $r_p$  — длина маятника, через  $m_s$ ,  $m_p$  и  $J$  обозначим соответственно массу качелей, массу маятника и момент инерции качелей относительно оси, проходящей через центр масс.

Для синтеза управления  $M = \Theta(\varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta})$ , стабилизирующего качель в горизонтальном положении, предлагается использовать подход, связанный с применением нечеткой логики и генетических алгоритмов. Эффективность такого управления зависит от выбора базы правил и определения функций принадлежности входных и выходных переменных. В настоящей работе предлагается модификация генетического алгоритма, позволяющая настраивать как параметры функций принадлежности лингвистических переменных, так и их тип. Эффективность предложенного подхода подтверждена численными экспериментами.

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект №075-02-2020-1483/1.



# Оптимальное по Парето управление гибким ротором в электромагнитных подшипниках

Д.В. Баландин, Р.С. Бирюков, М.М. Коган

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет  
ruslan.biryukov@itmm.unn.ru

В работе рассматривается гибкий вертикальный ротор, вращающийся в двух электромагнитных подшипниках. Динамика такого ротора описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}_1 - \mu_0 \ddot{y} &= -4\mu_0 u_1 + \lambda \Delta \alpha + \varepsilon \Delta \dot{\alpha} - \rho_0 \bar{\omega} \dot{\beta}_1 - \varepsilon \bar{\omega} \Delta \beta + w_1, \\ \ddot{\alpha}_2 + \mu_0 \ddot{y} &= 4\mu_0 u_2 - \lambda \Delta \alpha - \varepsilon \Delta \dot{\alpha} - \rho_0 \bar{\omega} \dot{\beta}_2 + \varepsilon \bar{\omega} \Delta \beta + w_2, \\ \ddot{\beta}_1 + \mu_0 \ddot{x} &= 4\mu_0 u_3 - \lambda \Delta \beta - \varepsilon \Delta \dot{\beta} + \rho_0 \bar{\omega} \dot{\alpha}_1 - \varepsilon \bar{\omega} \Delta \alpha + w_3, \\ \ddot{\beta}_2 - \mu_0 \ddot{x} &= -4\mu_0 u_4 + \lambda \Delta \beta + \varepsilon \Delta \dot{\beta} + \rho_0 \bar{\omega} \dot{\alpha}_2 + \varepsilon \bar{\omega} \Delta \alpha + w_4, \\ \ddot{x} + (\ddot{\beta}_1 - \ddot{\beta}_2)/8 &= u_3 + u_4 + w_5, \\ \ddot{y} + (\ddot{\alpha}_2 - \ddot{\alpha}_1)/8 &= u_1 + u_2 + w_6,\end{aligned}$$

где  $\Delta \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ,  $\Delta \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1$ ,  $\Delta \beta = \beta_1 - \beta_2$ ,  $\Delta \dot{\beta} = \dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2$ ,  $x$  и  $y$  — координаты центра масс ротора,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  и  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  — угловые переменные,  $u_1, \dots, u_4$  — управляющие переменные, связанные с электромагнитными силами в подшипниках и  $w_1, \dots, w_6$  — внешние силы, действующие на ротор, — ограниченные по  $L_2$ -норме функции. Безразмерные параметры, фигурирующие в системе, имеют вид:  $\mu_0 = 4ml_0^2/(J + ml_0^2)$ ,  $\rho_0 = \sqrt{2m\delta_0/\gamma\omega_0 J_z}/(J + ml_0^2)$  (где  $l_0$  — четверть длины ротора,  $J$  и  $J_z$  — главные моменты инерции ротора,  $\omega_0$  — основная частота изгибных колебаний ротора,  $\gamma$  — характерный масштаб управляющих электромагнитных сил,  $\delta_0$  — номинальный зазор в электромагнитных подшипниках),  $\bar{\omega}$  — частота вращения ротора относительно вертикальной оси, приведенная к основной частоте  $\omega_0$  его изгибных колебаний,  $\lambda$  — коэффициент жесткости гибкого ротора и  $\varepsilon$  — коэффициент внутреннего трения материала ротора.

Построено решение задачи оптимального раскручивания ротора в классе управлений в форме линейных обратных связей по состоянию. Функционалы, характеризующие качество процесса управления, имеют вид

$$J_1(u) = \sup_{w \neq 0} \frac{\max_{k=1, \dots, 4} \left\{ \sup_{t \geq 0} |\sigma_k| \right\}}{\|w\|_2}, \quad J_2(u) = \sup_{w \neq 0} \frac{\max_{k=1, \dots, 4} \left\{ \sup_{t \geq 0} |u_k| \right\}}{\|w\|_2},$$

где через  $\sigma_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , обозначены смещения ротора в верхнем и нижнем электромагнитных подшипниках:

$$\sigma_1 = x + \beta_1/2, \quad \sigma_2 = y - \alpha_1/2, \quad \sigma_3 = x - \beta_2/2, \quad \sigma_4 = y + \alpha_2/2.$$

Работа выполнена в рамках Программы развития регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего», проект № 075-02-2020-1483/1.

# Динамика мобильных роботов с периодическим управлением

Е.В. Ветчанин, И.С. Мамаев

Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет  
eugene186@mail.ru, mamaev@rcd.ru

Рассмотрены две математических модели плоскопараллельного движения твердых тел в жидкости под действием периодических управлений.

Первая модель описывает движение эллиптического профиля [1], управляемого колебаниями внутреннего ротора, в среде с вязким сопротивлением (линейным по скоростям). В рассматриваемой математической модели постулируется наличие периодически изменяющейся циркуляции вокруг тела, которая приближенно моделирует влияние периодически образующихся вихревых структур в кормой части. Показано, что в частном случае профиля круговой формы, с помощью метода Пуанкаре может быть указано приближенное решение уравнений движения, соответствующее предельному циклу. При этом сам профиль движется в среднем прямолинейно. В общем случае (профиль эллиптической формы) существование такого решения может быть обнаружено численно. Для рассматриваемой модели продемонстрировано существование хаотических режимов движения. Одним из механизмов возникновения хаоса является сценарий Фейгенбаума.

Вторая из рассматриваемых моделей описывает плоскопараллельное движение эллиптического профиля в среде с постоянной циркуляцией и вязким сопротивлением. В рассматриваемой модели постулируется наличие силы и момента силы, действующих на тело, и изменяющихся периодически в системе координат, связанной с телом [2–4]. Показано, что в случае профиля круговой формы и в отсутствие вязкого трения уравнения движения могут быть проинтегрированы явно. Для случая, когда внешний момент обладает нулевой средней величиной, указаны соотношения параметров системы, при которых возникают резонансы, приводящие к неограниченному перемещению и неограниченному росту скорости. В случае, когда внешний момент обладает ненулевой средней величиной, в рассматриваемой системе обнаружена асимптотическая устойчивость по части переменных. Показано, что в случае профиля эллиптической формы и в отсутствие вязкого трения в системе могут реализовываться хаотические (консервативные) режимы движения. При наличии вязкого трения могут возникать как регулярные асимптотически устойчивые режимы движения, так и странные аттракторы.

## Список литературы

- [1] Borisov A. V., Mamaev I. S., Vetchanin E. V., Self-propulsion of a Smooth Body in a Viscous Fluid Under Periodic Oscillations of a Rotor and Circulation, Regular and Chaotic Dynamics, 2018, vol. 23, no. 7-8, pp. 850-874
- [2] Borisov A. V., Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Motion of a Smooth Foil in a Fluid under the Action of External Periodic Forces. I, Russian Journal of Mathematical Physics, 2019, vol. 26, no. 4, pp. 412-428
- [3] Borisov A. V., Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Motion of a Smooth Foil in a Fluid under the Action of External Periodic Forces. II, Russian Journal of Mathematical Physics, 2020, vol. 27, no. 1, pp. 1-17

- [4] Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Asymptotic behavior in the dynamics of a smooth body in an ideal fluid, *Acta Mechanica*, 2020, vol. 231, pp. 4529-4535

## **Идентификация кинетических параметров химической реакции с помощью параллельного алгоритма глобального поиска**

К.А. Баркалов, И.Г. Лебедев

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

lebedev.ilya.g@gmail.com

Основным способом математического моделирования химических реакций является построение кинетической модели. При разработке кинетической модели многостадийной химической реакции решается обратная задача химической кинетики, которая представляет собой задачу глобальной оптимизации с целевой функцией вида “черный ящик”. В данной работе рассматривается решение этой задачи параллельным алгоритмом глобальной оптимизации. Разработанный алгоритм основан на редукции исходной многомерной задачи к эквивалентной ей одномерной задаче с последующим ее решением эффективными методами оптимизации функций одной переменной. Вопросы распараллеливания алгоритма на разных архитектурах рассмотрены в [1, 2].

Исследуется одна из химических реакций, экспериментальные данные и ее описание рассмотрены в работе [3]. Математическая модель задач химической кинетики представляет собой систему дифференциальных уравнений, которая описывает изменения концентраций веществ во времени в соответствии со скоростью стадий реакции. Согласно этой модели можно сформировать оптимизационную задачу, в которой целевая функция определяется как сумма абсолютных отклонений расчетных и экспериментальных концентраций:

$$F = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |x_{ij}^{calc} - x_{ij}^{exp}| \rightarrow \min,$$

где  $x_{ij}^{calc}$  и  $x_{ij}^{exp}$  – расчетные и экспериментальные значения концентраций компонентов;  $M$  – количество точек измерения;  $N$  – количество веществ, участвующих в реакции.

В результате решения поставленной задачи химической кинетики параллельным методом глобального поиска были рассчитаны кинетические параметры процесса преформинга пропана на Ni катализаторе.

Вычислительные эксперименты проводились на кластере «Лобачевский», Узел кластера состоит из 2-х Intel Sandy Bridge E5-2660 2.2 GHz, 64 Gb RAM. Алгоритм глобального поиска запускался в последовательном и параллельном режимах, максимальное число задействованных процессоров составляло 40, и ускорение составило соответственно 15.63.

## **Список литературы**

- [1] Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Издательство Московского университета, 2013. 280 с.

- [2] Barkalov K., Lebedev I. Solving multidimensional global optimization problems using graphics accelerators // Communications in Computer and Information Science. 2016. vol. 687, pp. 224-235.
- [3] Uskov S.I., Potemkin D.I., Enikeeva L.V., Snytnikov P.V., Gubaydullin I.M., Sobyenin V.A. Propane pre-reforming into methane-rich gas over Ni catalyst: experiment and kinetics elucidation via genetic algorithm. Energies. 2020. vol. 13, art.no 3393.

## **О построении внешних оценок множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями на управляющее воздействие**

И.В. Зыков

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН  
zykoviustu@mail.ru

Множества достижимости и их аналоги играют важную роль в решении многих задач теории управления и дифференциальных игр. Для нелинейных управляемых систем точное описание множеств достижимости, как правило, невозможно. В данной работе рассматривается задача построения внешних оценок множеств достижимости в виде множества уровня некоторого аналога функции Ляпунова для нелинейной управляемой системы с интегральным ограничением на управление. В терминах интегральных ограничений часто формулируются, например, условия ограниченности запаса энергии, ресурса топлива для объекта управления. Для систем с геометрическими ограничениями на управляющее воздействие известны методы приближенного построения множеств достижимости (см., например, [1–3]), основанные на оценках решений дифференциальных неравенств Гамильтона-Якоби. Схема, предложенная в [3], была перенесена в работе [4] на случай нелинейных управляемых систем с ограничением на управление в пространстве  $\mathbb{L}_p$  ( $p > 1$ ), для множеств достижимости которых были получены оценки в виде множеств уровня аналогов функций Ляпунова. В линейном случае предлагается возможность улучшения оценок по схеме работы [4], путем добавления времени в число аргументов квадратичной функции Ляпунова, где матрица коэффициентов этой функции, получаемая как решение некоторого матричного уравнения Бернулли (частный случай уравнения Рикатти), связанное с грамианом управляемости исходной системы, определяет динамику оценивающего эллипсоида. При надлежащем выборе начальных значений можно получить сколь угодно точную аппроксимацию (в метрике Хаусдорфа) множества достижимости. Приводятся результаты численного моделирования для ряда нелинейных систем 2-го порядка.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в региональном научно-образовательном центре НОЦ ИММ УрО РАН, «Уральский математический центр».

## **Список литературы**

- [1] Куржанский А.Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона-Якоби в теории управления // Тр. ИММ УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 173–183.

- [2] Гусев М.И. О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 60–69.
- [3] Никольский М.С. Об оценивании множества достижимости для некоторых управляемых объектов // Междунар. конф., посвящ. 110-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина: сб. тр. Москва, 2018. С. 194–196.
- [4] Зыков И.В. О внешних оценках множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями // Изв. ИМИ УдГУ. 2019. Т. 53. С. 61–72.

## Об одном алгоритме поиска глобального экстремума разрывной функции

К.А. Баркалов, М.А. Усова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
orpbang@mail.ru

В рамках исследования рассматривается алгоритм глобальной оптимизации для функций, имеющих, возможно, одну или несколько точек разрыва типа конечного скачка. Свойство липшицевости в таких задачах может не выполняться в силу наличия ударных воздействий, резонансных явлений, скачков геометрических размеров или свойств материала и т.п.. Во многих случаях множество точек разрыва является известным. Однако существуют задачи, в которых нет априорных оценок точек разрыва, но известно, что они возможны.

Задача рассматривается в одномерной постановке

$$\varphi^* = \varphi(x^*) = \min \{ \varphi(x) : x \in [a, b] \},$$

так как решение многомерных задач может быть сведено к решению соответствующих им одномерных с помощью различных схем редукции размерности [1].

Последовательный метод решения рассматриваемой задачи был предложен в [1] и основывается на идентификации разрывов с последующим построением сглаживающей функции. Данный алгоритм был распараллелен с использованием общего подхода к распараллеливанию, изложенного в [2]. В серии экспериментов наблюдалось линейное сокращение числа итераций в зависимости от числа задействованных потоков, что в предположении большой трудоемкости вычислений будет соответствовать линейному ускорению по времени. Так, при использовании 64 потоков ускорение по итерациям составляло от 50 до 55.

Альтернативой данному подходу предложен алгоритм с исключением точек разрыва (в дальнейшем АГП-Р). Данный алгоритм позволяет отказаться от построения сглаживающего преобразования, что значительно упрощает вычислительную схему алгоритма. Для демонстрации эффективности проведено сравнение с методами Direct Search (DS), Simulated Annealing (SA) и Genetic Algorithm (GA) пакета MATLAB Global Optimization Toolbox.

Таблица 1: Сравнение методов на серии задач с разрывами

Метод	Решено задач	Среднее число итераций	Среднее число вычислений функции
АГП-Р	1000	79	80
SA	998	765	770
GA	993	25	1310
DS	964	38	71

## Список литературы

- [1] Стронгин Р.Г. Поиск глобального оптимума. М.: Знание, 1990. 48 с.
- [2] Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Издательство Московского университета, 2013. 280 с.

## Программа секции «Теория узлов»

### Зал № 3

Координатор: Н.В. Абросимов

#### ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>00</sup> Андрей Веснин (РНОМЦ Томского государственного университета). *Гипотеза о прямоугольных узлах и объемы прямоугольных многогранников*

15<sup>00</sup> — 15<sup>30</sup> Андрей Егоров (Новосибирский государственный университет). *Прямоугольные многогранники в трехмерном пространстве Лобачевского*

15<sup>30</sup> — 16<sup>00</sup> Бао Вуюнг (Новосибирский государственный университет). *Антипризмы в трехмерных пространствах постоянной кривизны*

#### ПЕРЕРЫВ

16<sup>30</sup> — 17<sup>00</sup> Михаил Овчинников (Челябинский государственный университет). *Эпсилон-TQFT-представление группы кос  $B_n$*

17<sup>00</sup> — 17<sup>20</sup> Илья Алексеев (Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера). *Новые классы минимальных диаграмм узлов*

17<sup>30</sup> — 18<sup>00</sup> Алексей Миллер (Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера). *Гордиевы графы преобразований узлов*

18<sup>00</sup> — 18<sup>30</sup> Дарья Аксенова (Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера). *Новые автоморфизмы моноидов струнных зацеплений*

#### ВТОРНИК, 10 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>00</sup> Александр Медных (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Геометрия узлов и зацеплений в пространствах постоянной кривизны*

15<sup>00</sup> — 15<sup>30</sup> Николай Абросимов (РНОМЦ Томского государственного университета). *Об объемах некоторых узлов и зацеплений*

15<sup>30</sup> — 16<sup>00</sup> Михаил Чернавских (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Представление слоений прямоугольными диаграммами*

#### ПЕРЕРЫВ

16<sup>30</sup> — 17<sup>00</sup> Евгений Фоминых (Санкт-Петербургский государственный университет). *3-многообразия, задаваемые 4-регулярными графами с тремя эйлеровыми циклами*

17<sup>00</sup> — 17<sup>30</sup> Филипп Кораблёв (Челябинский государственный университет). *Линкоиды и их примарные разложения*

17<sup>30</sup> — 17<sup>50</sup> Максим Иванов (Новосибирский государственный университет). *Связные суммы виртуальных узлов и инварианты плоских виртуальных узлов*

#### ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>00</sup> Валерий Бардаков (РНОМЦ Томского государственного университета). *Виртуальные узлы и косы*

15<sup>00</sup> — 15<sup>30</sup> Тимур Насыбуллов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Квандлы, удовлетворяющие условиям обрыва цепочек орбит*

15<sup>30</sup> — 16<sup>00</sup> Андрей Малютин (Санкт-Петербургский государственный университет). *О росте числа узлов*

#### ПЕРЕРЫВ

16<sup>30</sup> — 17<sup>00</sup> Василий Мантуров (Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана). *Узлы, группы и картинки*

17<sup>00</sup> — 17<sup>30</sup> Денис Федосеев (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Bracket structures in knot theories: from Kauffman bracket to colourings brackets and unsolved problems*

17<sup>30</sup> — 18<sup>00</sup> Seongjeong Kim (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *On links in  $S_g \times S^1$  and its invariants*

18<sup>00</sup> — 18<sup>30</sup> Татьяна Козловская (РНОМЦ Томского государственного университета). *Группа сингулярных кос и ее представления*

18<sup>30</sup> — 19<sup>00</sup> *Открытые вопросы теории узлов*



## Об объемах некоторых узлов и зацеплений

Н.В. Абросимов

РНОМЦ Томского государственного университета

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

abrosimov@math.nsc.ru

Будет дан обзор последних результатов по геометрии узлов и зацеплений. Мы исследуем существование гиперболической, сферической или евклидовой структуры на различных конических многообразиях, у которых носителем является трехмерная сфера, а сингулярным множеством заданный узел или зацепление. Будут представлены тригонометрические тождества, связывающие длины сингулярных геодезических и конические углы. Эти тождества будут использованы для получения точных интегральных формул для объемов соответствующих конических многообразий.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 19-01-00569).

## Новые автоморфизмы моноидов струнных зацеплений

Д. Аксенова

Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера

daria.aksenova12@gmail.com

Доклад посвящен исследованию моноидов  $StL_n$  изотопических классов струнных зацеплений с  $n$  нитями и содержащихся в них групп крашенных кос  $P_n$ . Центральным объектом повествования является серия новых автоморфизмов  $\theta_n: StL_n \rightarrow StL_n$  моноидов струнных зацеплений.

Определение  $\theta_n$  основано на нескольких изящных топологических конструкциях. Сужение автоморфизма  $\theta_n$  на группу  $P_n$  сопряжено с автоморфизмом  $w_n$ , определенным в [2]. Группа  $Aut(P_n)$  автоморфизмов порождается автоморфизмами группы кос  $B_n$ , суженными на группу  $P_n$ , группой  $Aut_c(P_n)$  центральных автоморфизмов и автоморфизмом  $w_n$ .

Существует несколько альтернативных конструкций, каждая из которых позволяет определить серию автоморфизмов  $\theta_n$ . В докладе будут представлены некоторые из них. Корректность определения этих конструкций доказывается с помощью теоремы о лампочке (см. [3]) и трюка Александра (см. [1]).

## Список литературы

- [1] Alexander J. W. On the deformation of an  $n$ -cel. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 9 (12) (1923), 406-407.
- [2] Bardakov V. G., Neshchadim M Singh. Automorphisms of pure braid groups. Monatshefte für Mathematik. 187 (2018), 1-19.

- [3] Hass J., Thompson A. Neon bulbs and the unknotting. *Journal of Knot Theory and Its Ramification*. 6 (2) (1997), 235-242.

## **Новые классы минимальных диаграмм узлов**

И.С. Алексеев

Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера  
ilyaalekseev@yahoo.com

Гипотеза Тейта, доказанная в 1986 году, гласит, что все приведенные альтернированные диаграммы узлов и зацеплений минимальны (по количеству перекрестков). Основой доказательства этой гипотезы является неравенство, связывающее количество перекрестков на произвольной диаграмме зацепления с шириной его многочлена Джонса. Оказывается, что с помощью другого известного неравенства, связывающего количество окружностей Зейферта на произвольной диаграмме зацепления с шириной его многочлена HOMFLY-PT, удастся доказать минимальность новых классов диаграмм, обобщающих приведенные альтернированные. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00151).

## **Список литературы**

- [1] Alekseev I. New classes of minimal knot diagrams. <https://arxiv.org/abs/2012.04330>.

## **Виртуальные узлы и косы**

В.Г. Бардаков

РНОМЦ Томского государственного университета  
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
Новосибирский государственный университет  
bardakov@math.nsc.ru

Виртуальные узлы были введены Л. Кауфманом в 1992 году как обобщение классических узлов. С тех пор теория виртуальных узлов активно развивается. В докладе будет рассказано о связи виртуальных узлов с виртуальными косами. Будут построены инварианты виртуальных узлов и зацеплений. В частности, группы виртуальных зацеплений, биквандлы виртуальных зацеплений. Будут описаны аппроксимационные свойства групп виртуальных зацеплений.

# Представление слоений прямоугольными диаграммами

М.М. Чернавских

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

mike.chernavskikh@gmail.com

Прямоугольные диаграммы зацеплений широко используются в изучении узлов. Например, решается задача монотонного упрощения [1]. Также на языке прямоугольных диаграмм комбинаторно определяются гомологии Хегора-Флоера [4,5]. В работе Дынникова–Прасолова [2,3] было впервые введено понятие прямоугольной диаграммы поверхности, где с помощью данной техники были изучены Лежандровы узлы.

Узел  $K$  называется расслоенным, если дополнение до узла  $K$  это косое произведение окружности на некоторую двумерную поверхность. Неформально говоря, поверхность Зейферта расслоенного узла  $K$  можно проворачивать вокруг него самого. Дынников–Прасолов придумали комбинаторный вариант вращения поверхности Зейферта вокруг узла: по прямоугольной диаграмме поверхности строится однопараметрическое семейство прямоугольных диаграмм с общим краем — диаграммой узла  $K$ .

Это семейство можно модифицировать так, чтобы оно задавало слоение на всей трехмерной сфере. Причем для задания всего семейства прямоугольных диаграмм достаточно задать кривые, на которых могут находиться вершины прямоугольников.

## Список литературы

- [1] Dynnikov I. Arc-presentations of links: Monotonic simplification. *Fund.Math.* 190 (2006), 29–76; arXiv:math/0208153
- [2] Dynnikov I., Prasolov M. Rectangular diagrams of surfaces: representability. *Matem. Sb.* 208 (2017), no. 6, 55–108; translation in *Sb. Math.* 208 (2017), no. 6, 781–841, arXiv:1606.03497.
- [3] Dynnikov I. Transverse-Legendrian links. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 16 (2019), 1960–1980.
- [4] Manolescu C., Ozsváth P., Sarkar S. A combinatorial description of knot Floer homology. *Ann. of Math.* (2) 169 (2009), no. 2, 633–660.
- [5] Ozsvath P. S., Szabo Z. Holomorphic disks and topological invariants for closed three-manifolds. *Ann. of Math.* (2), 159(3):1027–1158, 2004.

## **Прямоугольные многогранники в трехмерном пространстве Лобачевского**

А.А. Егоров

Новосибирский государственный университет

`a.egorov2@g.nsu.ru`

В пространстве Лобачевского рассмотрим прямоугольные многогранники двух типов: компактные — все вершины конечны, идеальные — со всеми вершинами на абсолюте. Теоремы Погорелова и Андреева дают необходимые и достаточные условия существования остроугольных многогранников в пространстве Лобачевского. Обсудим верхние и нижние оценки на объемы прямоугольных многогранников. Поговорим про подкласс компактных прямоугольных гиперболических многогранников, состоящий из многогранников, имеющих комбинаторику фуллеренов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 19-01-00569).

## **Bracket structures in knot theories: from Kauffman bracket to colourings brackets and unsolved problems**

Д.А. Федосеев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

`denfedex@yandex.ru`

Kauffman bracket is one of the most well-known and fundamental invariants of classical knots. In general, the idea of developing a «bracket» invariant from certain smoothings of crossings is very fruitful and it was successfully implemented in many settings.

An interesting example of bracket invariants is the parity bracket defined by V.O. Manturov. The parity bracket was used by its author to prove that the theory of free knots is non-trivial. Moreover, this bracket was the first working example of picture-valued invariants: the invariant value of the bracket was not a number or a polynomial, but a «picture» — an actual graph (a concrete knot diagram, not a class of diagrams).

Later, inspired by the work [3] of S. Nelson et. al., Ilyutko and Manturov [1] defined the parity-biquandle bracket, which dominated both Manturov parity bracket and Nelson biquandle bracket. Later on, the author together with Manturov and Nikonov developed a colourings bracket which in a way may be regarded as an «ultimate generalisation» of the former ones.

These results lead to a natural desire to shift bracket constructions by a dimension: to define them in the case of 2-dimensional knots.

In the talk I will give an overview of these concepts, and present a framework of unsolved problems, the most central of which is: we have the machinery of smoothings for 2-dimensional knots; how do we define bracket structures for them?

If time permits, the smoothing techniques in the setting of 2-knots will be discussed in detail.

The talk is based on a joint work with I.M. Nikonov and V.O. Manturov. The work was partially supported by RFBR grants 20-51-53022, 19-51-51004, and 19-01-00775.

## Список литературы

- [1] Ilyutko D. P., Manturov V. O. “Picture-valued biquandle bracket”. Journal of Knot Theory and its Ramifications, 29(2), [2040004]. <https://doi.org/10.1142/S0218216520400040>, <https://arxiv.org/abs/1701.06011>
- [2] Manturov V. O., Fedoseev D. A., Kim S., Nikonov I. M. Invariants and pictures. Low-dimensional topology and combinatorial group theory. World Scientific, 2020.
- [3] Nelson S., Orrison M. E., Rivera V. Quantum enhancements and biquandle brackets. arXiv:math.GT/1508.06573

### **3-многообразия, задаваемые 4-регулярными графами с тремя эйлеровыми циклами**

Е.А. Фоминых

Санкт-Петербургский государственный университет  
efominykh@gmail.com

Доклад посвящен исследованию нового класса 3-многообразий, задаваемых 4-регулярными графами, оснащенными тройками эйлеровых циклов специального вида. Два эйлеровых цикла в графе называют совместимыми, если у них не имеется общей пары последовательных ребер. Конечный связный 4-регулярный граф, обладающий тройкой попарно совместимых эйлеровых циклов, мы называем 3-эйлеровым, а саму такую тройку — оснащением. Известно, что все вершинно 3-связные простые 4-регулярные графы являются 3-эйлеровыми. Каждый оснащенный 3-эйлеров граф  $G$  с  $n$  вершинами определяет компактное 3-многообразие  $M$  с непустым краем. А именно, приклеив к  $G$  по одной двумерной клетке вдоль каждого из трех циклов оснащения, мы получим так называемый специальный спайн, однозначно задающий  $M$ . Обозначим через  $M_n$  класс всех таких многообразий. Мы доказали, что при  $n > 2$  каждое многообразие из  $M_n$  является гиперболическим со связным вполне геодезическим краем, его сложность Матвеева, равна  $n$ , а число элементов в  $M_n$  при всех достаточно больших  $n$  превышает  $(n/9)n$ .

Доклад основан на совместной работе А.В. Малютина, Е.А. Фоминых и Е.В. Шумаковой, выполненной при поддержке Российского научного фонда (проект 19-11-00151).

### **Связные суммы виртуальных узлов и инварианты плоских виртуальных узлов**

М.Э. Иванов

Новосибирский государственный университет  
m.ivanov2@ng.su.ru

Связная сумма двух диаграмм виртуальных узлов — это диаграмма, построенная разрыванием каждой из двух диаграмм в некоторой точке и склеиванием концов согласно

ориентации. Для виртуальных узлов результат связной суммы зависит от выбора диаграмм узлов и точек разрыва.

В 2018 г. К. Каур, М. Прабхакар и А. Веснин определили семейство полиномиальных инвариантов  $F^n(t, \ell)$ . С помощью этих инвариантов и их обобщений для фиксированной пары узлов построены примеры бесконечных семейств различных связных сумм.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 19-01-00569).

## On links in $S_g \times S^1$ and its invariants

S. Kim

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,  
Новосибирский государственный университет  
ksj19891120@gmail.com

A virtual knot, which is one of generalizations of knots in  $R^3$  (or  $S^3$ ), is, roughly speaking, an embedded circle in thickened surface  $S_g \times I$ . In this talk we will discuss about knots in 3-dimensional  $S_g \times S^1$ . We introduce basic notions for knots in  $S_g \times S^1$ , for example, diagrams, moves for diagrams and so on. For knots in  $S_g \times S^1$  technically we lose over/under information, but we will have information how many times the knot rotates along  $S^1$ . We will discuss the geometric meaning of the rotating information and how to construct invariants by using the «rotating» information.

## Линкоиды и их примарные разложения

Ф.Г. Кораблёв

Челябинский государственный университет  
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН  
korablev@csu.ru

Пусть  $F$  — ориентируемая поверхность,  $L = a_1 \sqcup \dots \sqcup a_n \sqcup c_1 \sqcup \dots \sqcup c_m$  — набор дуг  $a_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , и замкнутых кривых  $c_j$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Линкоидом на поверхности  $F$  называется такое вложение  $L$  в утолщение  $F \times I$ , что, во-первых,  $\partial a_i \subset \partial F \times I$  для всех  $i \in \{1, \dots, n\}$ , причём каждое из колец  $\partial F \times I$  содержит не более одной концевой точки всех дуг  $a_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , и, во-вторых,  $c_j \subset \text{Int}(F \times I)$  для всех  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Подобно классическим узлам и зацеплениям, линкоиды удобно задавать своими диаграммами на поверхности  $F$ . Каждая такая диаграмма состоит из нескольких замкнутых кривых и собственных дуг. Диаграммы рассматриваются с точностью до трёх классических движений Рейдемейстера, локальные области действия которых не содержат край поверхности  $F$ , а также с точностью до гомеоморфизмов поверхности  $F$ .

На множестве линкоидов можно ввести несколько естественных операций связного суммирования. Во многих случаях удобно использовать обратные к этим операциям преобразования редукций, в результате применения которых каждый линкоид разбивается на

несколько более простых:  $S_2$ -редукция выполняется вдоль разбивающей сферы, ограничивающей шар с заузленной дугой линкоида,  $A_0$ -редукция (дестабилизация) выполняется вдоль послойного неразбивающего кольца, которое не пересекается с кривыми линкоида,  $A_1$ -редукция выполняется вдоль послойного разбивающего кольца, которое пересекается с кривыми линкоида ровно в одной точке,  $A_2$ -редукция выполняется вдоль послойного разбивающего кольца, которое пересекается с кривыми линкоида ровно в двух точках,  $A_{1,1}$ -редукция выполняется вдоль пары неразбивающих послойных колец, каждое из которых пересекается с кривыми линкоида ровно в одной точке, а вместе эти кольца разбивают утолщение  $F \times I$ .

Можно доказать, что к любому линкоиду применимо лишь конечное число  $S_2, A_0, A_1, A_2, A_{1,1}$ -редукций. Однако конечный результат не всегда однозначно определён и может зависеть от последовательности используемых редукций. Например, существует линкоид на поверхности рода 3, который с помощью  $S_2, A_1$ -редукций можно свести к двум разным наборам примарных, то есть далее не редуцируемых, линкоидам. Если к используемому множеству редукций добавить  $A_0$ -редукцию, то для любого линкоида его конечный результат редукций оказывается однозначно определённым и не зависящим от того, какие редукции выполнялись.

## Группа сингулярных кос и ее представления

Т.А. Козловская

РНОМЦ Томского государственного университета

`t.kozlovskaya@math.tsu.ru`

В данной работе найдена конечная система порождающих и соотношений группы сингулярных крашенных кос. Отсюда получено разложение сингулярных крашенных кос на трех нитях в виде полупрямого произведения и HNN - расширение известных групп. Также доказано, что в группе сингулярных крашенных кос на трех нитях центр выделяется прямым множителем.

Построены локальные однородные линейные представления группы сингулярных кос.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2020-1479/1)

## Гауссовы узлы и их инварианты

В.Э. Лешков

Новосибирский государственный университет

`v.leshkov@g.nsu.ru`

Будут введены обобщенные группы Кокстера, частными случаями которых являются группы крашенных гауссовых кос  $GV P_n$ , определенные В.Г. Бардаковым, Р. Bellingeri, С. Damiani, и группы  $G_n^k$ , определенные В.О. Мантуровым. Используя установленные свойства этих групп, будут введены инварианты гауссовых узлов. Отметим, что гауссовы узлы были введены и изучались В.Г. Тураевым.

## **О росте числа узлов**

А.В. Малютин

Санкт-Петербургский государственный университет  
malyutin@pdmi.ras.ru

Мы исследуем структуру и статистические характеристики множества классических узлов, включая скорость роста числа узлов относительно различных мер сложности. Один из недавних результатов в этом направлении — конструкция вложений групп крашенных кос в множество узлов. Построенные вложения позволяют показать, в частности, что количество узлов с дуговым индексом не выше  $24N$  составляет по меньшей мере  $N^N$ .

## **Узлы, группы и картинки**

В.О. Мантуров

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
vomanturov@yandex.ru

Будет рассказано о схожести многих задач из маломерной топологии и комбинаторной теории групп. В частности, будет рассказано о построении инвариантов топологических объектов со значениями в «картинках», что легко и наглядно позволит решать ряд задач из различных областей математики.

## **Геометрия узлов и зацеплений в пространствах постоянной кривизны**

А.Д. Медных

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН  
Новосибирский государственный университет  
mednykh@math.nsc.ru

Излагаются новые методы вычисления объемов конических многообразий, моделируемых в гиперболической, сферической или евклидовой геометриях. В докладе роль такого многообразия играет трехмерная сфера, снабженная метрикой постоянной кривизны и умеющая в качестве сингулярного множества заданный узел или зацепление.

## **Гордиевы графы преобразований узлов**

А.Ю. Миллер

Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера  
miller.m2@mail.ru

В задачах классической теории узлов нередко возникают различные геометрические процедуры, меняющие тип узла. Самый популярный вид таких процедур — локальные преобразования — замена в узле или зацеплении тэнгла одного типа на тэнгл другого типа. Среди хорошо изученных локальных преобразований — переключение перекрёстков



( [5]), вложенная перестройка ( [1,4]),  $\Delta$ -преобразование ( [7]),  $\#$ -преобразование ( [6]),  $n$ -преобразование ( [8]). Но исследование каждого из этих локальных преобразований зачастую идет в строго определенном направлении, для разных преобразований задаются разные вопросы. В данном докладе будет представлен обзор использования метода Гордиевых графов для универсализации изучения преобразований узлов и, что более важно, обнаружения необычных и тонких структур на множестве всех узлов или зацеплений. Каждому преобразованию можно сопоставить его Гордиев граф, вершинами которого являются все узлы, а ребро между двумя вершинами проводится в том случае, если данное преобразование переводит один узел в другой и наоборот. Гордиевы графы исследовались, например, в работах [2,3]. Такой инструмент как Гордиевы графы помогает существенно облегчить формулировку большинства классических вопросов о преобразованиях, придать гипотезам явную геометрическую визуализацию. Гордиевы графы позволяют конструировать гипотезы-шаблоны – задавать вопросы универсально, для любого преобразования, а также изучать новые свойства преобразований, трудноформулируемые в других терминах.

## Список литературы

- [1] Belousov, Yu. S., Karev, M. V., Malyutin, A. V., Miller, A. Yu., Fominykh, E. A., Lernaean knots and band surgeries. *Algebra i Analiz* 33 (2021), no. 1, 30–66.
- [2] Blair R., Campisi M., Johnson J., Taylor S. A., Tomova M. Neighbors of knots in the Gordian graph. *Amer. Math. Monthly* 124 (2017), no. 1, 4–23.
- [3] Jabuka S., Liu B., Moore A. H. Knot graphs and Gromov hyperbolicity. (2019), preprint arXiv:1912.03766.
- [4] Hoste J., Nakanishi Y., Taniyama K. Unknotting operations involving trivial tangles. *Osaka J. Math.* 27 (1990), 3, 555–566.
- [5] Lickorish W. B. R. The unknotting number of a classical knot. *Combinatorial methods in topology and algebraic geometry* (Rochester, N.Y., 1982), 117–121,
- [6] Murakami H. Some metrics on classical knots. *Math. Ann.* 270 (1985), 1, 35–45.
- [7] Murakami H., Nakanishi Y. On a certain move generating link-homology. *Math. Ann.* **284** (1989), № 1, 75–89.
- [8] Przytycki J. H.  $t$ - $k$  moves on links. *Braids* (Santa Cruz, CA, 1986), 615–656, *Contemp. Math.*, 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

## Квандлы, удовлетворяющие условиям обрыва цепочек орбит

Т.Р. Насыбуллов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

timur.nasybullov@mail.ru

Квандлы были впервые введены Джойсом и Матвеевым как инварианты для узлов и зацеплений в  $S^3$ . Квандл узла является очень сильным инвариантом, что делает его практически бесполезным для практического использования, однако порой гомоморфизмы из квандла узла в более простые квандлы дают полезную информацию, которая помогает определить, являются ли два узла эквивалентными. Эта потенциальная полезность приводит к необходимости изучения некоторых специальных классов квандлов, удовлетворяющих тем или иным полезным свойствам с алгебраической точки зрения. В ходе доклада мы обсудим один такой класс, а именно, класс квандлов, которые удовлетворяют условию обрыва цепочек орбит. Доклад основан на недавней совместной работе автора с М. Bonatto, А. Crans и G. Whitney.

## Эпсилон-TQFT-представление группы кос $B_n$

М. Овчинников

Челябинский государственный университет

ovch\_csu\_ru@mail.ru

Топологической квантовой теорией поля (topological quantum field theory - TQFT) называется функтор из некоторой категории кобордизмов в категорию линейных пространств. ([1]) Т.е. это правило, которое многообразию сопоставляет линейное отображение, а краям многообразия - линейные пространства. Край может трактоваться как одна компонента, и тогда многообразию сопоставляется вектор, как две компоненты (если есть) - тогда многообразию сопоставляется матрица, в общем случае это может быть тензор. Существует TQFT, основанная на простых спайнах 3-многообразий ([2]). Спайн 3-многообразия с непустым краем - это такой двумерный полиэдр в нем, что дополнение к нему имеет вид прямого произведения края многообразия на полуинтервал. Спайн называется простым, если линк каждой его точки либо окружность, либо граф вида три ребра с общими концами, либо граф вида 1-остов тетраэдра. Эпсилон-TQFT - это, можно сказать, сильно облегченная версия TQFT Тураева-Виро, также основанная на простых спайнах, но использующая эпсилон-инвариант (то же самое, что  $t$ -инвариант) ([3]) вместо инварианта Тураева-Виро. Эпсилон здесь - обозначение корня квадратного уравнения  $x^2 = x + 1$  ("число золотое сечение"). Косу на  $n$  нитях можно рассматривать как диаграмму, изображающую в "плоскости-времени" как набор  $n$  точек плоскости меняет со временем свое положение на плоскости и возвращается как целое в исходное положение. В рамках эпсилон-TQFT коса моделируется "толстым диском" ("плоскость-время"), в котором "высверлены" сквозные цилиндры - окрестности нитей-путей. Следует отметить, что в данной TQFT-модели используется модификация определения Атьи, при которой многообразия склеиваются не целыми компонентами края, а подповерхностями в краях. Этот подход естественно реализуется с помощью простых спайнов, точнее - с помощью простых полиэдров с краем, который является графом степени три. Подповерхности - окрестности

этих графов в крае многообразия. В нашем случае эти полиэдры имеют два края вида  $p$  окружностей, соединенных последовательно  $p-1$  ребрами. Непрерывная деформация во времени такого графа моделирует перемещение "дыр" на сфере (точек в плоскости), и в "плоскости-времени" порождает простой полиэдр с краем, к которому применима формула эpsilon-инварианта, по которой вычисляются элементы соответствующей матрицы. У кос с 3 нитями две порождающие элементарные косы. Соответственно, образ этой группы кос порождается двумя матрицами - образами этих двух элементарных кос. Вычисления дали матрицы размера 15 на 15, имеющие блочную структуру: первый блок размера 8 на 8 - матрицы перестановки - легко поддаются изучению, второй блок - матрицы 7 на 7 с элементами, выражающимися через эpsilon, поддаются изучению трудно.

## Список литературы

- [1] Atiyah M. F. Topological quantum field. Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Paris. 68 (1988), 175-186.
- [2] Turaev V. G., Viro O. Y. State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols. Topology 31 (1992), 865-902.
- [3] Матвеев С. В., Овчинников М. А., Соколов М. В. Построение и свойства  $t$ -инварианта. Записки научных семинаров ПОМИ. 267 (2000), 207-219.

## Мультифлайпы прямоугольных диаграмм узлов

В.А. Соколова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

berablop@yandex.ru

Было доказано [1], что тривиальный узел можно распознать с помощью элементарных движений без увеличения сложности, то есть последовательно применяя все возможные комбинации элементарных ходов, не увеличивая число ребер. Если есть алгоритм распознавания тривиального узла, то возникает вопрос — можно ли распознать другой тип узлов, например, сателлитный? Было введено обобщение элементарных движений — флайп [5], но для одного примера сателлитного узла оказалось, что монотонным упрощением последовательностью флайпов распознать его тип не получится [4]. Этот же узел все-таки можно преобразовать элементарными движениями к нужному виду, но с увеличением сложности. Отсюда возникает идея мультифлайпа — движения, являющимся одновременным действием сразу нескольких флайпов. Тем самым при этом преобразовании возможно в одной части увеличить сложность, а в другой — уменьшить, что наталкивает на мысль о монотонном распознавании ещё какого-нибудь типа узлов. Совместно с Дынниковым Иваном Алексеевичем было доказано, что мультифлайп не меняет тип узла [3]. В докладе будет представлено наглядное доказательство этого факта.

## Список литературы

- [1] Dynnikov I. Arc-presentations of links: Monotonic simplification. *Fund. Math.* 190 (2006), 29–76; arXiv:math/0208153
- [2] Dynnikov I. Recognition algorithms in knot theory. (Russian) *Uspekhi Mat. Nauk* 58 (2003), no. 6 (354), 45–92; translation in *Russian Math. Surveys* 58 (2003), no. 6, 1093–1139
- [3] Dynnikov I., Sokolova V. Multiflipes of rectangular diagrams of links, 2020, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, to appear, <https://arxiv.org/abs/2009.02247>
- [4] Kazantsev A. Essential tori in link complements: detecting the satellite structure by monotonic simplification. arXiv:1005.5263
- [5] Prasolov M. Rectangular Diagrams of Legendrian Graphs. arXiv:1412.2267

### Гипотеза о прямоугольных узлах и объемы прямоугольных многогранников

А.Ю. Веснин

РНОМЦ Томского государственного университета  
`vesnin@math.nsc.ru`

Гиперболическое зацепление называется прямоугольным, если дополнение к нему, как гиперболическое 3-многообразие, допускает разбиение на прямоугольные (все двугранные углы равны  $\pi/2$ ) многогранники. Примерами прямоугольных зацеплений являются двухкомпонентное зацепление Уайтхеда и трехкомпонентное зацепление Борромеевых колец. Дополнение к зацеплению Уайтхеда можно склеить из одного прямоугольного идеального октаэдра, а дополнение к Борромеевым кольцам – из двух таких октаэдров. В [2] высказана «гипотеза о прямоугольных узлах»: никакой гиперболический узел не является прямоугольным. Мы покажем, что сравнение объемов гиперболических узлов и объемов прямоугольных идеальных многогранников с идеальными вершинами (см. [3, 4]) позволяет утверждать, что гипотеза верна для узлов малого порядка. Также будет показано, как объемы прямоугольных идеальных многогранников возникают в гипотезе о максимальном объеме гиперболического многогранника заданного комбинаторного типа [1].

## Список литературы

- [1] Belletti G. The maximum volume of hyperbolic polyhedra. *Trans. Amer. Math. Soc.* 374 (2021), 1125–1153.
- [2] Champanerkar A., Kofman I., Purcell J. Right-angled polyhedra and alternating links. arXiv:1910.13131.
- [3] Egorov A., Vesnin A. Volume estimates for right-angled hyperbolic polyhedra. *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universita di Trieste* 52 (2020), 565–576.

- [4] Vesnin A., Egorov E. Ideal right-angled polyhedra in Lobachevsky space. *Chebyshevskii Sbornik* 21 (2020), 65-83.

## **Антипризмы в трехмерных пространствах постоянной кривизны**

Вьонг Хыу Бао

Новосибирский государственный университет

[vuonghuubao@live.com](mailto:vuonghuubao@live.com)

Рассмотрим антипризмы в евклидовом, гиперболическом и сферическом пространстве. Антипризма — это выпуклый многогранник с группой симметрии  $S_{2n}$  (по классификации Шёнфлиса), которая порождена зеркально-вращательной симметрией порядка  $2n$ , то есть композицией поворота на угол  $\pi/n$  и отражения относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота.

Нами установлены необходимые и достаточные условия существования антипризм в  $E^3$ ,  $H^3$  и  $S^3$ . Найдены отношения между двугранными углами и длинами ребер в виде теорем косинусов. Получены явные интегральные формулы для объемов антипризм в каждой из трех геометрий.

## Программа секции «Группы и графы»

### Зал № 6

Координаторы: Е.В. Константинова, Н.В. Маслова

#### ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 14<sup>40</sup> Михаил Волков *Section Opening*

14<sup>40</sup> — 15<sup>30</sup> Peter J. Cameron (University of St Andrews, UK). *Synchronization and Semigroups, Graphs and Groups*

15<sup>30</sup> — 16<sup>20</sup> Yaokun Wu (Shanghai Jiao Tong University, China). *Strongly reachable automata*

16<sup>20</sup> — 17<sup>10</sup> Gareth Jones (University of Southampton, UK). *Groups, Graphs and Surfaces: a Survey*

17<sup>10</sup> — 18<sup>00</sup> Михаил Волков (Уральский федеральный университет). *Completely reachable and completely co-reachable automata*

18<sup>00</sup> — 18<sup>20</sup> Михаил Голубятников (Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН). *Small distance-regular graphs with intersection arrays  $\{mn - 1, (m - 1)(n + 1), n - m + 1; 1, 1, (m - 1)(n + 1)\}$*

18<sup>20</sup> — 18<sup>40</sup> Людмила Циовкина (Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН). *On a class of abelian distance-regular covers of complete graphs*

#### ВТОРНИК, 10 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>20</sup> Tatsuro Ito (Anhui University, China). *The  $T$ -module structure of a tree*

15<sup>20</sup> — 16<sup>10</sup> Sho Suda (National Defense Academy of Japan, Japan). *On the eigenvalues of graphs of mutually orthogonal Sudoku Latin squares*

16<sup>10</sup> — 17<sup>00</sup> Tomaž Pisanski (University of Primorska, Slovenia). *Odd antilattices*

17<sup>00</sup> — 17<sup>20</sup> Дмитрий Малышев (Высшая школа экономики). *Critical hereditary classes of graphs*

#### ПЕРЕРЫВ

17<sup>30</sup> — 17<sup>50</sup> Ен Гун Сон (Новосибирский государственный университет). *Girth of cubic Pancake graphs*

17<sup>50</sup> — 18<sup>10</sup> Кристина Кравченко (Новосибирский государственный университет). *Two ways to find integral graphs using their spectra*

18<sup>10</sup> — 18<sup>30</sup> Владимир Леонтьев (Сибирский федеральный университет). *The collection process and P. Hall's collection formula*

18<sup>30</sup> — 18<sup>50</sup> Борис Дураков (Сибирский федеральный университет). *On periodic groups of 2-rank one*

18<sup>50</sup> — 19<sup>10</sup> Леонид Шалагинов (Челябинский государственный университет). *Deza graphs with parameters  $(4n, n + 2, n - 2, 2)$*

19<sup>10</sup> — 19<sup>30</sup> Равиль Бильданов (Новосибирский государственный университет). *On WL-rank and WL-dimension of some circulant Deza graphs*

19<sup>30</sup> — 19<sup>50</sup> Дмитрий Панасенко (Челябинский государственный университет). *Enumeration of divisible design graphs*

#### ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 15<sup>20</sup> Cheryl E. Praeger (The University of Western Australia, Australia). *Basic edge-transitive oriented graphs of valency four*

15<sup>20</sup> — 16<sup>10</sup> Pablo Spiga (University of Milano-Bicocca, Italy). *The road closure conjecture and boolean lattices of groups*

16<sup>10</sup> — 17<sup>00</sup> Klavdija Kutnar (University of Primorska, Slovenia). *On intersection densities of transitive groups of degrees  $2p$  and  $p^k$*

17<sup>00</sup> — 17<sup>20</sup> Дмитрий Чуриков (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Structure of  $k$ -closures of finite nilpotent permutation groups*

#### ПЕРЕРЫВ

17<sup>30</sup> — 18<sup>00</sup> Наталья Маслова (Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН). *On characterization of a finite group by its Gruenberg–Kegel graph*

18<sup>00</sup> — 18<sup>30</sup> Анатолий Кондратьев (Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН). *On recognition of sporadic simple groups by their Gruenberg–Kegel graphs*

18<sup>30</sup> — 18<sup>50</sup> Николай Минигулов (Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН). *On finite solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw*

18<sup>50</sup> — 19<sup>10</sup> Кристина Ильенко (Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН). *On coincidence of Gruenberg–Kegel graphs of a finite almost simple group and a finite non-solvable Frobenius group*

19<sup>10</sup> — 19<sup>30</sup> Алексей Васильев (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Relatively maximal subgroups of odd index in symmetric groups*

19<sup>30</sup> — 19<sup>50</sup> Виктор Панышин (Новосибирский государственный университет). *On a special case of some generalization of Thompson's conjecture*

### ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Алексей Гордеев (Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН). *On list chromatic numbers of 2-colorable hypergraphs*

14<sup>50</sup> — 15<sup>10</sup> Павел Гейн (Уральский федеральный университет). *On chromatic uniqueness of some complete tripartite graphs*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Руслан Магдиев (Санкт-Петербургский государственный университет). *Geometry of finitely generated nilpotent groups*

15<sup>30</sup> — 15<sup>50</sup> Светлана Жилина (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Orthogonality graphs on pairs of basis elements of real Cayley–Dickson algebras*

15<sup>50</sup> — 16<sup>10</sup> Роман Стасенко (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Short  $SL_2$ -structures on simple Lie algebras*

16<sup>10</sup> — 16<sup>30</sup> Yu Jiang (Математический центр в Академгородке). *On primary modules of modular Terwilliger algebras of association schemes*

16<sup>30</sup> — 17<sup>20</sup> Rosemary A. Bailey (University of St Andrews, UK). *Diagonal structures and beyond*

17<sup>20</sup> — 17<sup>30</sup> Елена Константинова (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *On  $G_2$ -conferences*



## Diagonal structures and beyond

Rosemary A. Bailey  
The University of St Andrews, UK  
rab24@st-andrews.ac.uk

The *Hamming graph*  $H(n, m)$  has vertex set  $A^n$ , where  $A$  is a set of size  $m$ ; two vertices are joined if they differ in exactly one coordinate.

In the case  $m = 2$ , we get another interesting graph, the *folded cube*, by adding to the Hamming graph (the cube) the edges which join antipodal vertices, those differing in all coordinates. For  $n = 4$ , this gives the *Clebsch graph*.

I will give a generalization of the folded cube for the case  $m > 2$ .

$A^n$  has a natural Cartesian decomposition, with a corresponding lattice of partitions corresponding to the equivalence relations  $\equiv_J$ , for  $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ , where  $v \equiv_J w$  if  $v$  and  $w$  agree in all coordinates outside  $J$ . So then  $v$  and  $w$  are adjacent in  $H(n, m)$  if and only if  $v \equiv_{\{j\}} w$  for some index  $j$ . In joint work with Cameron, Praeger and Schneider [3], we showed that, for  $n \geq 2$ , if a set of  $n + 1$  partitions of a set  $\Omega$  has the property that any  $n$  of them are the minimal elements in an  $n$ -dimensional Cartesian lattice, then either

- (a)  $n = 2$ , and the partitions are the rows, columns and letters of a Latin square; or
- (b) there is a group  $G$  of order  $m$ , unique up to isomorphism, such that  $\Omega = G^n$ , and the partitions are the coset partitions of the  $n$  coordinate subgroups  $G_1, \dots, G_m$  and the diagonal subgroup  $\delta(G)$ .

In case (b), the automorphism groups of the structures generalize the *diagonal groups* occurring in the O’Nan–Scott Theorem.

In subsequent work, Cameron and I [1] considered a graph on  $G^m$ , called the *diagonal graph*, which generalises the folded cube. Two vertices are joined whenever they are in the same part of one of the minimal partitions. (In the case  $n = 2$ , this is the *Latin square graph* associated with the Latin square.) To find the spectrum of this graph, we use the partial order on the join-semilattice generated by the partitions, and in particular its Möbius function.

Also, with Cameron, Kinyon and Praeger [2], I have begun investigating the situation when there are  $n + r$  partitions, any  $n$  of which are the minimal elements of an  $n$ -dimensional Cartesian lattice, with  $r > 1$ .

## Список литературы

- [1] R. A. Bailey and Peter J. Cameron, The diagonal graph, <https://arxiv.org/abs/2101.02451>
- [2] R. A. Bailey, Peter J. Cameron, Michael Kinyon, and Cheryl E. Praeger, Diagonal groups and arcs over groups, <https://arxiv.org/abs/2010.16338>
- [3] R. A. Bailey, Peter J. Cameron, Cheryl E. Praeger, and Csaba Schneider, The geometry of diagonal groups, <https://arxiv.org/abs/2007.10726>

# Новосибирский государственный университет

Р.Р. Бильданов

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

ravilbildanov@gmail.com

The is joint work with Viktor Panshin and Grigory Ryabov

The *WL-rank*  $\text{rk}_{\text{WL}}(\Gamma)$  of a digraph  $\Gamma$  is defined to be the number of classes in the coherent configuration of  $\Gamma$ . The graph  $\Gamma$  is strongly regular if and only the  $\text{rk}_{\text{WL}}(\Gamma) \leq 3$ . All strongly regular circulant graphs, i.e. all circulant graphs of WL-rank at most 3, were classified independently in [1, 6, 7].

A  $k$ -regular graph  $\Gamma$  on  $n$  vertices is called a *Deza* graph if there exist nonnegative integers  $a$  and  $b$  such that any pair of distinct vertices of  $\Gamma$  has either  $a$  or  $b$  common neighbors [2]. A Deza graph is called *strictly* if it is non-strongly regular and has diameter 2.

We classify Deza circulant graphs of WL-rank 4. We also establish that some families of strictly Deza circulant graphs have WL-rank 5 or 6. Together with computational result [3, 4], this implies that every strictly Deza circulant graph with at most 95 vertices has WL-rank at most 6.

The *WL-dimension* of a graph  $\Gamma$  is defined to be the smallest positive integer  $m$  for which  $\Gamma$  is identified by the  $m$ -dimensional Weisfeiler-Leman algorithm [5, Definition 18.4.2]. We prove that all considered graphs have WL-dimension at most 3. The talk is based on the results of paper [8]

Acknowledgement. The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2019-1613 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

## Список литературы

- [1] Bridges W., Mena R. Rational circulants with rational spectra and cyclic strongly regular graphs. *Ars Combin.* 8 (1979), 143-161.
- [2] Erickson M., Fernando S., Haemers W., Hardy D., Hemmeter J. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs. *J. Comb. Designs.* 7 (1999), 359-405.
- [3] Gavriluk A., Goryainov S., Shalaginov L. Proceedings of G2A2-conference, Ekaterinburg (2015), [http://g2a2.imm.uran.ru/slides/plenary\\_talks/Goryainov.pdf](http://g2a2.imm.uran.ru/slides/plenary_talks/Goryainov.pdf).
- [4] Goryainov S., Shalaginov L. Cayley-Deza graphs with less than 60 vertices. *Sib. Elect. Math. Rep.* 1 (2014), 268-310.
- [5] Gröhe M. Descriptive complexity, canonisation, and definable graph structure theory. Cambridge University Press, Cambridge (2017).

- [6] Hughes D., van Lint J., Wilson R. Announcement at the Seventh British Combinatorial Conference Cambridge (1979) (unpublished).
- [7] Ma S. Partial difference sets. *Discrete Math.* 52 (1984), 75-89.
- [8] Bildanov R., Panshin V., Ryabov G. On WL-rank and WL-dimension of some Deza circulant graphs (2020), <https://arxiv.org/abs/2012.13898>

## Synchronization and Semigroups, Graphs and Groups

P. Cameron

The University of St Andrews, UK  
 pjc20@st-andrews.ac.uk

An automaton is *synchronizing* if there is a word  $w$  in its alphabet (called a *reset word*) such that, when the machine reads  $w$ , it ends up in a fixed state, independent of its starting state. As well as practical applications, research on this has been driven by the infamous *Černý conjecture*, which asserts that, if an  $n$ -state automaton is synchronizing, then it has a reset word of length at most  $(n - 1)^2$ . If true, this would be best possible; but we still lack a proof.

I will not be talking about the Černý conjecture. I begin by translating the synchronization question into one about transformation monoids. Each input letter for the automaton defines a transformation on the set of states, and concatenating words corresponds to composing the corresponding transformations. Thus an automaton can be regarded as a transformation monoid with a specified generating set. The automaton is synchronizing if and only if the monoid contains a transformation of *rank* 1, that is, one whose image is a singleton. Now a monoid fails to be synchronizing if and only if it is contained in the endomorphism monoid of a graph on its domain, and the graph can be chosen to have clique number equal to chromatic number. This seems a complicated way to check synchronization (which can be done in polynomial time), but has great theoretical importance.

For some time, with João Araújo and many others, I have been investigating the synchronization question for monoids generated by a permutation group and one further transformation. (I note in passing that the extremal examples known for the Černý conjecture have this form.) A natural first question is:

*Which permutation groups  $G$  have the property that, for any transformation  $t$  which is not a permutation, the monoid  $\langle G, t \rangle$  is synchronizing?*

We use the term *synchronizing* for a permutation group with this property, by abuse of language (a permutation group of degree greater than 1 is never synchronizing as a monoid). Using the earlier result, it can be shown that  $G$  is synchronizing if and only if there is no  $G$ -invariant graph with clique number equal to chromatic number.

It is easy to show that synchronizing permutation groups must be transitive and primitive, and cannot preserve a Cartesian decomposition of the domain. According to the *O’Nan–Scott Theorem*, such groups must be affine, diagonal, or almost simple.

In each of these classes, some groups are synchronizing and some are not. But there has been recent progress. Diagonal groups of dimension at least 2 are non-synchronizing, though recently synchronizing examples of dimension 1 have been found. In the case of almost simple groups, the synchronizing examples mostly depend on constructions in finite geometry and design theory.

I will survey as much of this beautiful theory as time permits.

## Structure of $k$ -closures of finite nilpotent permutation groups

Д.В. Чуриков

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

churikovdv@gmail.com

Let  $\Omega$  be a finite set and  $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ . Denote by  $\text{Orb}_k(G)$  the set of all orbits of the induced action of  $G$  on  $\Omega \times \cdots \times \Omega = \Omega^k$ . The  $k$ -closure of the permutation group  $G$  is defined to be the largest subgroup  $G^{(k)}$  in  $\text{Sym}(\Omega)$  such that  $\text{Orb}_k(G) = \text{Orb}_k(G^{(k)})$ . The group  $G$  is said to be  $k$ -closed if  $G^{(k)} = G$ . The concept of  $k$ -closure was introduced by H. Wielandt in the framework of the method of invariant relations developed by him to study group actions [3].

In this talk we focus on  $k$ -closures of nilpotent groups. It is well known that every finite nilpotent group is the direct product of its nontrivial Sylow subgroups. The main result shows that  $k$ -closure respects this decomposition generalizing results of [1, 2].

**Theorem.** *If  $G$  is a finite nilpotent permutation group, and  $k \geq 2$ , then  $G^{(k)}$  is the direct product of  $k$ -closures of Sylow subgroups of  $G$ .*

**Corollary.** *For  $k \geq 2$ , a finite nilpotent permutation group  $G$  is  $k$ -closed if and only if every Sylow subgroup of  $G$  is  $k$ -closed.*

Acknowledgement. The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2019-1613 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

## Список литературы

- [1] Churikov D., Ponomarenko I. On 2-closed abelian permutation groups, (2020); <https://arxiv.org/abs/2011.12011>

- [2] Churikov D., Praeger C. Finite totally  $k$ -closed groups. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. 1 (2021), 240-245.
- [3] Wielandt H.W. Permutation groups through invariant relations and invariant functions. Lecture Notes, Ohio State University, Ohio (1969).

## On periodic groups of 2-rank one

Б.Е. Дураков

Сибирский федеральный университет  
durakov96@gmail.com

By the well-known theorems of Burnside, Brauer, and Suzuki [4, Theorem 4.88], if  $G$  is a finite group of 2-rank 1 with involution  $i$ , then the involution  $iO(G)$  lies in the center of the factor group  $G/O(G)$ . In 1973 V. P. Shunkov in the Kourovka Notebook posed Question 4.75 about the validity of this theorem in the class of periodic groups. The answer is unknown even if the centralizer  $C_G(i)$  is quasicyclic, see Question 15.54 of V. D. Mazurov from the Kourovka notebook. The answer to Question 15.54 is affirmative when  $G$  acts (sharply) 2-transitively on the set  $G/C_G(i)$  (see [6]) and when  $C_G(i)$  is a quasicyclic group that is not maximal in  $G$ .

Recall that an involution  $i$  of a group  $G$  is called *finite* if for any  $g \in G$  the subgroup  $\langle i, i^g \rangle$  is finite. In a periodic group every involution is finite. In the article [5] it was proved that the group  $G$  with a malnormal nonmaximal in  $G$  2-subgroup  $C$  and a finite involution  $i$  is a locally finite Frobenius group with abelian kernel  $[i, G]$  and locally cyclic or (generalized) quaternionic complement  $C$ . The proof in this work is based on the methods of investigating groups with strongly embedded subgroups and the result of B. Amberg and Ya. P. Sysak [1].

In [2] a partial positive solution to Question 4.75 is obtained under the condition that the involution  $i$  of the group  $G$  generates a finite subgroup with every element of finite order not divisible by 4. In particular, Question 4.75 is answered positively in the class of conjugate binary finite groups. However, even for the class of conjugate biprimively finite groups, better known as Shunkov groups, Question 4.75 is still open. The following theorem is announced.

**Theorem.** *Suppose that a group  $G$  satisfies the conditions of the Question 4.75 and any triple of involutions from  $G$  generates in  $G$  a subgroup different from its commutator subgroup. Then  $iO(G) \in Z(G/O(G))$ .*

In the future we plan to continue investigations of infinite groups of 2-rank 1 and with additional finiteness conditions, including groups saturated with finite Frobenius groups. A group  $G$  is *saturated* with groups from the set of finite groups  $\mathfrak{X}$  if every finite subset of elements from  $G$  is contained in a subgroup of  $G$  which is isomorphic to a group from the set  $\mathfrak{X}$ . The article [3] based on the results of the study of periodic groups with this condition.

**Acknowledgements.** This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in

the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2021-1388) and by the Russian Foundation for Basic Research according to the project no. 19-01-00566 A.

## Список литературы

- [1] Amberg B., Sysak Ya. On products of groups with abelian subgroups of small index. *Journal of Group Theory* (2017), 1061-1072.
- [2] Durakov B. On some groups of 2-rank 1. *Trudy IMM UrO RAN*. 25 no. 4 (2019), 64-68.
- [3] Durakov B., Sozutov A. On Periodic Groups Saturated with Finite Frobenius Groups. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. 35 (2021), 73-86.
- [4] Gorenstein D. *Finite simple groups: an introduction to their classification*. Plenum Press, (1982).
- [5] Sozutov A., Durakov B. On Groups with an Isolated 2-Subgroup. *Mathematical Notes*. 105 (2019), 425-428.
- [6] Suchkov N. Finiteness of Some Sharply Doubly Transitive Groups. *Algebra and Logic*. 40 (2001), 190-193.

## On chromatic uniqueness of some complete tripartite graphs

П.А. Гейн

Уральский федеральный университет  
pavel.gein@gmail.com

Let  $G = (V, E)$  be a graph with a vertex set  $V$  and an edge set  $E$ . A *coloring* of a graph  $G$  into  $t$  colors is a map  $\varphi: V \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$ , such that  $\varphi(u) \neq \varphi(v)$  for any two adjacent vertices  $u$  and  $v$  of a graph  $G$ . We call numbers  $1, 2, \dots, t$  as colors. A graph is called *t-colorable* if there exists its coloring into  $t$  colors. A minimum integer  $t$ , for which  $G$  is  $t$ -colorable, is called the *chromatic number* of  $G$  and denoted as  $\chi(G)$ .

The number of colorings of a graph  $G$  into  $t$  colors is denoted as  $P(G, t)$ . It is well known (see, for example, [1]) that the function  $P(G, \lambda)$  is a polynomial of variable  $\lambda$ . Two graphs  $G$  and  $H$  are called *chromatically equivalent* if  $P(G, \lambda) = P(H, \lambda)$ . A graph  $G$  is called *chromatically unique*, if for any graph  $H$  graphs  $G$  and  $H$  are chromatically equivalent iff they are isomorphic.

Much attention of researches was drawn to the problem of chromatic uniqueness of complete multipartite graphs  $K(n_1, n_2, \dots, n_t)$ .

We proved the following theorem.

**Theorem.** Complete tripartite graph  $K(n_1, n_2, n_3)$  is chromatically unique if  $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 2$  and  $n_1 - n_3 \leq 5$ .

Chromatic uniqueness of graph  $K(n_1, n_2, n_3)$  when  $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 2$  and  $n_1 - n_3 \leq 4$  was proved in [2], [3], [4]. The main result of this work is the proof of the theorem in the case when  $n_1 - n_3 = 5$ .

## Список литературы

- [1] Asanov M.O., Baransky V.A., Rasin V. V. Discrete mathematics: graphs, algorithms, matroids. Saint-Petersburg, "Lan", (2010).
- [2] Baransky V. A., Koroleva T. A. Chromatic uniqueness of certain complete tripartite graphs. Izv. Ural. Gos. Univ. Mat. Mekh. Inform. 74:12 (2010), 5-26.
- [3] Koroleva T. A. Chromatic uniqueness of some complete tripartite graphs. I, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 13:3 (2007), 65-83.
- [4] Koroleva T. A. Chromatic uniqueness of some complete tripartite graphs. II, Izv. Ural. Gos. Univ. Mat. Mekh. Inform. 74 (2010), 39-56.

### Small distance-regular graphs with intersection arrays

$$\{mn - 1, (m - 1)(n + 1), n - m + 1; 1, 1, (m - 1)(n + 1)\}$$

М.П. Голубятников

Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН

mike\_ru1@mail.ru

This is joint work with Alexander A. Makhnev

Let  $\Gamma$  be a distance-regular graph of diameter 3 with strongly regular graph  $\Gamma_3$ , where  $\Gamma_3$  have the same vertices as  $\Gamma$ , and two vertices are adjacent in  $\Gamma_3$  if and only if the distance between them in  $\Gamma$  is equal to 3 (see [1]).

**Problem.** Find an intersection array of a distance-regular graph  $\Gamma$  if  $\Gamma_3$  is strongly regular and the parameters of  $\Gamma_3$  are known.

If  $\Gamma_3$  is a pseudo-geometric graph of a net, then there is the following infinite series of feasible intersection arrays  $\{mn - 1, (m - 1)(n + 1), n - m + 1; 1, 1, (m - 1)(n + 1)\}$  (see [3]). We consider intersection arrays from this series for some small parameters  $n$  and  $m$  and prove the following theorem.

**Theorem** *Distance-regular graphs with intersection arrays  $\{20, 16, 5; 1, 1, 16\}$  and  $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$  do not exist.*

Our poof of Theorem is based on calculations of triple intersection numbers (see [2]).

Acknowledgement. This work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

## Список литературы

- [1] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs. Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag. (1989).
- [2] Coolsaet K., Jurišić A. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs. J. Comb. Theory, Series A. 115 (2008), 1086-1095.
- [3] Makhnev A., Golubyatnikov M., Guo W. Inverse Problems in Graph Theory: Nets, Communications in Mathematics and Statistics. 7:1 (2019), 69-8.

## On list chromatic numbers of 2-colorable hypergraphs

А.С. Гордеев

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН  
gordalserg@gmail.com

This is joint work with Danila Cherkashin

To each vertex  $v \in V$  of a hypergraph  $H = (V, E)$  we assign a list  $L(v)$  of colors which can be used for  $v$ .  $H$  is  $k$ -colorable if there exists a proper coloring of  $H$  using lists  $L(v) = \{1, \dots, k\}$ , i.e. such an assignment of colors to vertices that every edge contains a pair of vertices with different colors.  $H$  is  $k$ -choosable if for any assignment of lists of size  $k$  there exists a proper coloring of  $H$ . The *list chromatic number*  $\text{ch}(H)$  is the minimum number  $k$  such that  $H$  is  $k$ -choosable.

The celebrated Erdős–Hajnal problem is to evaluate the chromatic number in terms of the number of edges or vertex degrees; the talk is devoted to the list chromatic number case. For the history, survey and a lot of related problems see [4]. The proofs of the results can be found in [2].

**Sparse case.** Denote  $L(H) = \max_{\emptyset \neq E' \subset E} \frac{|E'|}{|\bigcup_{e \in E'} e|}$ . Also denote the maximum degree of a vertex in  $H$  by  $\Delta(H)$  and the minimum size of an edge in  $H$  by  $s(H)$ . We prove the following theorem.

**Theorem 1.** *For any 2-colorable hypergraph  $H$ ,  $\text{ch}(H) \leq \lceil L(H) \rceil + 1 \leq \lceil \Delta(H)/s(H) \rceil + 1$ .*



This is a generalization of a similar bound for bipartite (2-colorable) graphs by Alon and Tarsi [1], and for  $k$ -partite  $k$ -uniform hypergraphs by Schauz [5].

A hypergraph is  $k$ -regular if the degree of every vertex is equal to  $k$ , and  $k$ -uniform if the size of every edge is equal to  $k$ . It is known that a  $k$ -uniform  $k$ -regular hypergraph is 2-colorable for  $k \geq 4$  [6]. By applying Theorem 1 we immediately see that  $k$ -uniform  $k$ -regular hypergraphs are 2-choosable for  $k \geq 4$ .

**Dense case.** We also obtain both lower and upper bounds on the list chromatic number of the complete  $s$ -uniform 2-colorable hypergraph in the vein of Erdős–Rubin–Taylor theorem [3].

**Theorem 2.** *Let  $H$  be an  $s$ -uniform 2-colorable hypergraph on  $t$  vertices and  $t < \frac{1}{4}(1 + s^{1/l})^l$ . Then  $\text{ch}(H) \leq l$ .*

**Theorem 3.** *Suppose that  $t = \Omega((\log s + \log l) \cdot l^2(1 + s^{1/l})^l)$ . Then  $\text{ch}(K_{t/2, t/2}^s) > l$ .*

Acknowledgement. The talk is partially supported by RFBR grant 19-31-90081.

## Список литературы

- [1] Alon N., Tarsi M. Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica*. 12:2 (1992), 125-134.
- [2] Cherkashin D., Gordeev A. On list chromatic numbers of 2-colorable hypergraphs. (2021); arXiv preprint arXiv:2102.02746.
- [3] Erdős P., Rubin A., Taylor H. Choosability in graphs. *Congr. Numer.* 26 (1979), 125-157.
- [4] Raigorodskii A., Cherkashin D. Extremal problems in hypergraph colourings. *Russian Mathematical Surveys*. 75:1 (2020).
- [5] Schauz U. A Paintability Version of the Combinatorial Nullstellensatz, and List Colorings of  $k$ -partite  $k$ -uniform Hypergraphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 176 (2010).
- [6] Thomassen C. The even cycle problem for directed graphs. *Journal of the American Mathematical Society*. 5:2 (1992), 217-229.

## On coincidence of Gruenberg–Kegel graphs of a finite almost simple group and a finite non-solvable Frobenius group

К.А. Ильенко

Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН  
christina.ilyenko@yandex.ru

This is joint work with Natalia Maslova

The *Gruenberg–Kegel graph* or the *prime graph*  $\Gamma(G)$  of a finite group  $G$  is the graph whose vertices are the prime divisors of  $|G|$ , with  $p \sim q$  if and only if  $G$  contains an element

of order  $pq$ . Our research is devoted to the problem of describing cases when Gruenberg–Kegel graphs of non-isomorphic finite groups are both disconnected and coincide.

In our investigation we use standard terminology and notations (see [1]). Let's recall some known definitions. A finite group  $G$  is a *Frobenius group* if there is a non-trivial subgroup  $C$  of  $G$  such that  $C \cap gCg^{-1} = \{1\}$  whenever  $g \notin C$ , also this subgroup  $C$  is called a *Frobenius complement* of  $G$ . Let  $K = \{1\} \cup (G \setminus \bigcup_{g \in G} gCg^{-1})$ . Then  $K$  is a normal subgroup of  $G$  which is called the *Frobenius kernel* of  $G$ . A finite group  $G$  is a *2-Frobenius group* if  $G = ABC$ , where  $A$  and  $AB$  are normal subgroups of  $G$ ,  $AB$  and  $BC$  are Frobenius groups with kernels  $A$  and  $B$  and complements  $B$  and  $C$ , respectively. It is known that each 2-Frobenius group is solvable. The *socle*  $Soc(G)$  of a finite group  $G$  is the subgroup of  $G$  generated by the set of all its non-trivial minimal normal subgroups. A finite group  $G$  is *almost simple* if  $Soc(G)$  is a finite nonabelian simple group.

By the *Gruenberg–Kegel Theorem*, if  $G$  is a finite group with disconnected Gruenberg–Kegel graph, then one of the following holds:  $G$  is a Frobenius group,  $G$  is a 2-Frobenius group,  $G$  is an extension of a nilpotent group by an almost simple group. In [4] all the cases of coincidence of Gruenberg–Kegel graphs of a finite simple group and of a Frobenius or a 2-Frobenius group were described. Moreover, directly from the main results of the papers [2] and [3] we can obtain the complete list of almost simple groups such that their Gruenberg–Kegel graphs coincide with Gruenberg–Kegel graphs of solvable Frobenius groups or 2-Frobenius groups. In this talk we discuss a recent progress in the classification of almost simple (but not simple) groups such that their Gruenberg–Kegel graphs coincide with Gruenberg–Kegel graphs of non-solvable Frobenius groups.

Acknowledgement. This work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

## Список литературы

- [1] Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of finite groups. Clarendon Press, Oxford (1985).
- [2] Gorshkov I. B., Maslova N. V. Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs are equal to the Gruenberg–Kegel graphs of solvable groups. Algebra and Logic. 57:2 (2018), 115-129.
- [3] Zinov'eva M. R., Kondrat'ev A. S. Finite almost simple groups with prime graphs all of whose connected components are cliques. Proc. Steklov Inst. Math. 295:S1 (2013), 178-188.
- [4] Zinov'eva M. R., Mazurov V. D. On finite groups with disconnected prime graph. Proc. Steklov Inst. Math. 283:Suppl. 1 (2013), 139-145.

## The T-module structure of a tree

T. Ito

Anhui University, China

tito@staff.kanazawa-u.ac.jp

For a rooted tree, irreducible T-modules will be discussed in comparison with irreducible S-modules, where T is the Terwilliger algebra and S is the centralizer algebra of the automorphism group of the rooted tree. Some applications of the T-module structure of a tree will be given.

## Groups, Graphs and Surfaces: a Survey

G. Jones

University of Southampton, UK

g.a.jones@soton.ac.uk

The theory of maps (embeddings of graphs in surfaces) grew in the late 19th century out of map colour problems and automorphic functions, though Hamilton's Icosian Calculus was an earlier false start. During the 20th century, techniques and examples from group theory, topology and graph theory aided its development, leading to classifications of the most symmetric embeddings of various classes of arc-transitive graphs, such as complete, complete bipartite and Johnson graphs.

Recently, Grothendieck's concept of dessins d'enfants has given a further incentive to study maps (and more generally hypermaps) as providing a link between Riemann surfaces, algebraic number fields and Galois groups.

## On recognition of sporadic simple groups by their Gruenberg-Kegel graphs

A.C. Кондратьев

Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН

a.s.kondratiev@imm.uran.ru

The *Gruenberg-Kegel graph* (or the *prime graph*)  $\Gamma(G)$  of a finite group  $G$  is a graph, in which the vertex set is the set of all prime divisors of the order of  $G$  and two different vertices  $p$  and  $q$  are adjacent if and only if there exists an element of order  $pq$  in  $G$ .

For a finite group  $G$ ,  $h_\Gamma(G)$  denotes the number of all pairwise non-isomorphic finite groups  $H$  such that  $\Gamma(H) = \Gamma(G)$  (if the set of such groups  $H$  is infinite, then  $h_\Gamma(G) = \infty$ ). A group  $G$  is called  $n$ -recognizable by its Gruenberg-Kegel graph if  $h_\Gamma(G) = n < \infty$ , recognizable by its Gruenberg-Kegel graph if  $h_\Gamma(G) = 1$ , and unrecognizable by its Gruenberg-Kegel graph if  $h_\Gamma(G) = \infty$ . We say that the problem of recognition by Gruenberg-Kegel graph is solved for a finite group  $G$  if the value  $h_\Gamma(G)$  is found.

In 2003, M. Hagie [1] investigated the structure of finite groups having the same Gruenberg–Kegel graphs as some sporadic simple groups. In particular, she gave first examples of finite groups recognizable by their Gruenberg–Kegel graphs; they were sporadic simple groups  $J_1$ ,  $M_{22}$ ,  $M_{23}$ ,  $M_{24}$ , and  $Co_2$ . However, that investigation was not completed. In 2006, A. V. Zavarnitsine [4] established that the group  $J_4$  is recognizable by its Gruenberg–Kegel graph. The unrecognizability of the sporadic groups  $M_{12}$  and  $J_2$  by their Gruenberg–Kegel graphs was known previously; it follows from the unrecognizability of these groups by their spectra.

In this talk, we discuss a solution of the recognition problem for most part of sporadic simple groups. The talk is based on the results of papers [2] and [3].

## Список литературы

- [1] Hagie M. The prime graph of a sporadic simple group. *Comm. Algebra*. 31:9 (2003), 4405-4424.
- [2] Kondrat'ev A. S. On Recognition of the sporadic simple groups  $HS$ ,  $J_3$ ,  $Suz$ ,  $O'N$ ,  $Ly$ ,  $Th$ ,  $Fi_{23}$ , and  $Fi'_{24}$  by the Gruenberg–Kegel graph. *Siberian Math. J.* 61:6 (2020), 1087-1092.
- [3] Kondrat'ev A. S., Recognition of the sporadic simple groups  $Ru$ ,  $HN$ ,  $Fi_{22}$ ,  $He$ ,  $M^cL$ , and  $Co_3$  by their Gruenberg–Kegel graph. *Proc. Steklov Inst. Math.* 313:Suppl. 1 (2021), to appear.
- [4] Zavarnitsine A. V. Recognition of finite groups by the prime graph. *Algebra and Logic*. 45:4 (2006), 220-231.

## Two ways to find integral graphs using their spectra

К.Б. Кравченко

Новосибирский государственный университет

`k.kravchenko@g.nsu.com`

Let  $\Gamma$  be a 4-regular graph without loops and multiple edges. Spectrum of a graph  $\Gamma$  is the spectrum of its adjacency matrix. A graph whose spectrum consists entirely of integers is called an integral graph. We consider a list of feasible parameters for integral bipartite graphs from [2] and construct a graph for one of parameters sets. There is another way to construct this graph which was found in [1]. We compare those two ways to find new graphs with certain properties and consider the impact of those constructing methods on graph plotting.

Acknowledgement. The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2019-1613 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

## Список литературы

- [1] Minchenko M., Wanless I. M. Quartic integral Cayley graphs. *Ars Mathematica Contemporanea*. 8 (2015), 381-408; <https://doi.org/10.26493/1855-3974.502.566>
- [2] Stevanović D., de Abreu N. M. M., de Freitas M. A. A., Del-Vecchio R. Walks and regular integral graphs. *Linear Algebra Appl.* 423 (2007), 119-135, <https://doi.org/10.1016/j.laa.2006.11.026>

## On intersection densities of transitive groups of degrees $2p$ and $p^k$

K. Kutnar

University of Primorska, Slovenia

[klavdija.kutnar@upr.si](mailto:klavdija.kutnar@upr.si)

Let  $V$  be a finite set and  $G$  a group acting on  $V$ . Two elements  $g, h \in G$  are said to be *intersecting* if  $g(v) = h(v)$  for some  $v \in V$ . More generally, a subset  $\mathcal{F}$  of  $G$  is an *intersecting set* provided every pair of elements of  $\mathcal{F}$  is intersecting. The *intersection density*  $\rho(G)$  of a transitive permutation group  $G$  is the maximum value of the quotient  $|\mathcal{F}|/|G_v|$  where  $\mathcal{F}$  runs over all intersecting sets in  $G$  and  $G_v$  is a stabilizer of  $v \in V$ .

In this talk we present some recent results regarding intersection densities of transitive permutation groups of degrees  $2p$  and  $p^k$ ,  $p$  a prime and  $k$  a positive integer. These results settle some of the problems and conjectures raised in [1] and [2].

## Список литературы

- [1] Meagher K., Razafimahatratra A. S., Spiga P. On triangles in derangement graphs. *J. Combin. Theory, Ser. A*. 180 (2021), 105390.
- [2] Razafimahatratra A. S. On multipartite derangement graphs. *Ars Math. Contemp.* (2021); <https://doi.org/10.26493/1855-3974.2554.856>.

## The collection process and P. Hall's collection formula

В.М. Леонтьев

Сибирский федеральный университет

[v.m.leontiev@outlook.com](mailto:v.m.leontiev@outlook.com)

In [2], P. Hall introduced the concept of the *collection process*. Let  $W$  be a positive word of the free group  $F = F(a_1, \dots, a_m)$ ,  $m \geq 2$ . By rearranging step by step consecutive

occurrences of elements in  $W$  using the rule:  $QR = RQ[Q, R]$ ,  $Q, R \in F$ , the collection process transforms  $W$  into the following form:

$$W = q_1^{e_1} \dots q_j^{e_j} T_j, \quad j \geq 1, \quad (1)$$

where  $q_1, \dots, q_j$  are commutators in  $a_1, \dots, a_m$  arranged in order of increasing weights,  $T_j$  consists of commutators of weights not less than  $w(q_j)$  (the weight of  $q_j$ ).

P. Hall applied the collection process to the word  $W = (a_1 a_2)^n$ ,  $n \geq 1$  in [2]. For the obtained collection formula he proved that the exponents  $e_i$  can be expressed as  $e_i(n) = c_1 \binom{n}{1} + \dots + c_{w(q_i)} \binom{n}{w(q_i)}$ , where integers  $c_k \geq 0$  do not depend on  $n$ . This result is significant for the theory of  $p$ -groups, since  $e_i(p^\alpha)$  is divisible by the prime power  $p^\alpha$  if  $w(q_i) < p$ .

In [3], M. Hall generalized that result to the word  $(a_1 \dots a_m)^n$ , using exactly P. Hall's approach.

Let  $W$  be a word of  $F$  (not necessarily positive). In [6], using Lie algebras, it was proved that  $W^n$ ,  $n \geq 1$ , can be expressed as  $W^n = q_1^{e_1} \dots q_{j(s)}^{e_{j(s)}}$  modulo  $\Gamma_s(F)$ ,  $s \geq 2$ , where  $q_1, \dots, q_{j(s)}$  are commutators in  $a_1, \dots, a_m$  of weights less than  $s$ , and  $e_i$  is divisible by  $n$  if  $n$  is a prime power  $p^\alpha$  and  $w(q_i) < p$ .

In [7], using a modification of P. Hall's approach, R. R. Struik proved the collection formula (1) for  $W = a_1^{n_1} a_2^{n_2}$ ,  $n_1, n_2 \geq 1$ ,  $q_1 = a_2$ , and found an expression for the exponents  $e_i$ , from which it follows that  $e_i$  is divisible by  $n_l$ ,  $l = 1, 2$ , if  $n_l$  is a prime power  $p_l^{\alpha_l}$  and the weight of  $q_i$  in  $a_l$  is less than  $p_l$ .

H. W. Waldinger and A. M. Gaglione obtained the collection formula for  $W = a_1 a_2^{n_2}$ , where  $n_2$  is a prime power, by methods of [6] in the articles [8] and [1] respectively.

The aim of our work is to develop an approach to investigation of the exponents  $e_i$  in (1) by modifying the original approach of P. Hall. Basing on the developed approach, we generalize the results of M. Hall and R. R. Struik mentioned above. Also we find an explicit form of the exponents for several series of commutators in P. Hall's collection formula for  $(a_1 a_2)^n$ . Some results of our work can be found in [4, 5].

Acknowledgement. This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075-02-2021-1388).

## Список литературы

- [1] Gaglione A. M. A commutator identity proved by means of the Magnus Algebra, *Houston J. Math.*, **5**, No. 2 (1979) 199-207.
- [2] Hall P. A contribution to the theory of groups of prime-power order. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **36** (1934), 29-95.
- [3] Hall M., Jr. The Theory of Groups. The Macmillan, New York, (1959).
- [4] Kolesnikov S. G., Leontiev V. M., Egorychev G. P. Two collection formulas. *J. Group Theory*. **23**, No. 4 (2020), 607-628.
- [5] Leontiev V. M. Combinatorial problems connected with P. Hall's collection process. *Sib. Electron. Math. Rep.* **17** (2020), 873-889.

- [6] Magnus W., Karrass A., Solitar D. Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations. Interscience Publ., Wiley, New York, (1966).
- [7] Struik R. R. On nilpotent products of cyclic groups. II, Can. J. Math. 13 (1961), 557-568.
- [8] Waldinger H. V. Two theorems in the commutator calculus. Trans. Am. Math. Soc. 167 (1972), 389-397.

## Critical hereditary classes of graphs

Д.С. Малышев

Высшая школа экономики

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

dsmalyshev@rambler.ru

A class of graphs is called *hereditary* if it is closed under deletion of vertices. It is known that a hereditary (and only hereditary) class  $\mathcal{X}$  can be defined by the set of its *forbidden induced subgraphs*  $\mathcal{Y}$ , i.e. graphs, minimal under deletion of vertices, not belonging to  $\mathcal{X}$ . If  $\mathcal{Y}$  is finite, then  $\mathcal{X}$  is called *finitely defined*.

Let  $\Pi$  be an NP-complete graph problem. A hereditary graph class is called  $\Pi$ -*easy* if  $\Pi$  can be solved in polynomial time for its graphs. A hereditary class, for which  $\Pi$  is NP-complete, is called  $\Pi$ -*hard*. A natural way to classify hereditary classes into  $\Pi$ -easy and  $\Pi$ -hard classes is to consider maximal  $\Pi$ -easy and minimal  $\Pi$ -hard classes. For any NP-complete graph problem there are no maximal easy classes. In fact, minimal hard classes exist for some problems and they do not exist for another problems. So, the notions of maximal easy and minimal hard classes seem to be improper for complexity classification.

The notion of a boundary graph class, introduced by V. E. Alekseev, is a more useful tool for classification. A class  $\mathcal{X}$  is called  $\Pi$ -*limit* if there is an infinite sequence  $\mathcal{X}_1 \supset \mathcal{X}_2 \supset \dots$  of  $\Pi$ -hard classes with  $\mathcal{X} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$ . A minimal under inclusion  $\Pi$ -limit class is called  $\Pi$ -*boundary*. V.E. Alekseev has showed that a finitely defined class is  $\Pi$ -hard iff it contains some  $\Pi$ -boundary class. Thus, a known set of  $\Pi$ -boundary classes gives a complete description of  $\Pi$ -hard classes.

The talk surveys already known results and recent development in the area of critical (minimal and boundary) graph classes and applications of them for obtaining complete complexity dichotomies for some subfamilies of the hereditary graph classes family.

Acknowledgements. The work is partially supported by Russian Foundation for Basic Research, project number 20-51-04001, and by Russian Science Foundation, project number 21-11-00194.

# On characterization of a finite group by its Gruenberg–Kegel graph

Н.В. Маслова

Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН

Уральский математический центр

butterson@mail.ru

This talk is partially based on joint works with P. J. Cameron and with W. Guo and A.S. Kondrat'ev

The *Gruenberg–Kegel graph* or the *prime graph*  $\Gamma(G)$  of a finite group  $G$  is the graph whose vertices are the prime divisors of  $|G|$ , with  $p \sim q$  if and only if  $G$  contains an element of order  $pq$ .

In this talk we (briefly) discuss the question of characterization of a finite group by its Gruenberg–Kegel graph. This question is actively investigating, and some known results in this area are surveyed in [1].

In particular, we discuss our following recent results:

- There are infinitely many finite groups with the same Gruenberg–Kegel graph as the Gruenberg–Kegel of a finite group  $G$  if and only if there is a finite group  $H$  with non-trivial solvable radical such that  $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ .
- There is a function  $F$  on the natural numbers with the property that if a finite  $n$ -vertex graph whose vertices are labelled by pairwise distinct primes is the Gruenberg–Kegel graph of more than  $F(n)$  finite groups, then it is the Gruenberg–Kegel graph of infinitely many finite groups. (The function we give satisfies  $F(n) = O(n^7)$ , but this is probably not best possible.)
- If a finite graph  $\Gamma$  whose vertices are labelled by pairwise distinct primes is the Gruenberg–Kegel graph of only finitely many finite groups, then all such groups are almost simple; moreover,  $\Gamma$  has at least three pairwise non-adjacent vertices, and 2 is non-adjacent to at least one odd vertex.
- The groups  ${}^2G_2(27)$  and  $E_8(2)$  are uniquely determined by the isomorphism types of their Gruenberg–Kegel graphs.
- The group  $E_6(2)$  is uniquely determined by its Gruenberg–Kegel graph.

The talk is partially based on the results of papers [1] and [2].

Acknowledgements. Four first results were obtained in a joint work with P. Cameron [1], the work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-71-10067). The last result was obtained in a joint work with W. Guo and A.S. Kondrat'ev [2], the work was supported by the Ural Mathematical Center under the agreement No. 075-02-2021-1387 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation and by the National Natural Science Foundation of China (NSFC) according to research project no. 11771409.



## Список литературы

- [1] Cameron P. J., Maslova N. V. Criterion of unrecognizability of a finite group by its Gruenberg–Kegel graph, (2020); <https://arxiv.org/abs/2012.01482>.
- [2] Guo W., Kondrat'ev A. S., Maslova N. V. Recognition of the group  $E_6(2)$  by its Gruenberg–Kegel graph, in preparation.

### On finite solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw

Н.А. Минигулов

Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН

[n.a.minigulov@imm.uran.com](mailto:n.a.minigulov@imm.uran.com)

This is joint work with Anatoly Kondrat'ev

The *Gruenberg–Kegel graph* (or the *prime graph*)  $\Gamma(G)$  of a finite group  $G$  is a graph, in which the vertex set is the set of all prime divisors of the order of  $G$  and two different vertices  $p$  and  $q$  are adjacent if and only if there exists an element of order  $pq$  in  $G$ . The paw is a graph on four vertices whose degrees are 1, 2, 2, and 3. Other terminology and notation are standard (see, for example, [1]).

A. S. Kondrat'ev has described finite groups with the same Gruenberg–Kegel graphs as groups  $\text{Aut}(J_2)$  (see [2]) and  $A_{10}$  (see [3]). The Gruenberg–Kegel graphs of all these groups are isomorphic as abstract graphs to the paw.

We establish the following more general problem: to describe finite groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic as abstract graphs to the paw.

As a part of the solution of this problem, in [4] we have proved that if  $G$  is a finite non-solvable group and the graph  $\Gamma(G)$  as abstract graph is isomorphic to the paw, then the quotient group  $G/S(G)$  (where  $S(G)$  is the solvable radical of  $G$ ) is almost simple, and have classified all finite almost simple groups such that their Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the paw. Also we have classified in [5] finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to the paw in the followings two cases:

- (1) group  $G$  has no elements of order 6;
- (2) group  $G$  contains element of order 6 and the vertex of degree 1 divides  $|S(G)|$ .

In this talk, we discuss a recent progress in a description of finite solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic as abstract graphs to the paw.

Acknowledgement. This work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

## Список литературы

- [1] Conway J. H., et al. Atlas of Finite Groups. Clarendon Press, Oxford. (1985).
- [2] Kondrat'ev A. S. Finite groups with prime graph as in the group  $Aut(J_2)$ . Proc. Steklov Inst. Math. 283:Suppl. 1 (2013), 78-85.
- [3] Kondrat'ev A. S. Finite groups that have the same prime graph as the group  $A_{10}$ , Proc. Steklov Inst. Math. 285:Suppl. 1 (2014), 99-107.
- [4] Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A. Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group  $A_{10}$ . Siberian Electr. Math. Rep. 15 (2018), 1378-1382.
- [5] Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A. On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw. Communications in Mathematics and Statistics. (2021), (accepted for publication).

## Enumeration of divisible design graphs

Д.И. Панасенко

Челябинский государственный университет

Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН

makare95@mail.ru

This is joint work with Leonid Shalaginov

A  $k$ -regular graph is called a *divisible design graph* if its vertex set can be partitioned into  $m$  classes of size  $n$ , such that two distinct vertices from the same class have exactly  $\lambda_1$  common neighbors, and two vertices from different classes have exactly  $\lambda_2$  common neighbors. Divisible design graphs were introduced in 2011 [1]. The list of feasible parameters of divisible design graphs up to 50 vertices was presented in the Master's thesis by M. A. Meulenberg [2].

In this talk, we discuss recent computational approach for enumeration of divisible design graphs and take a look at found proper DDGs with at most 39 vertices, except for three sets of parameters [3].

## Список литературы

- [1] Haemers W. H., Kharaghani H., Meulenberg M. A. Divisible Design Graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series A. 118 (2011), 978-992.
- [2] Meulenberg M. A. Divisible Design Graphs, Master's thesis, Tilburg University, 2008.
- [3] List of divisible design graphs up to 39 vertices, <http://alg.imm.uran.ru/dezagraphs/ddgtab.html>.

# On a special case of some generalization of Thompson's conjecture

В.В. Паньшин

Новосибирский государственный университет

v.panshin@yandex.ru

For a finite group  $G$  denote by  $N(G)$  the set of conjugacy class sizes of  $G$ . In 1987 J.G.Thompson posed the following conjecture (see Question 12.38 in [4]).

**Thompson's conjecture.** If  $L$  is a finite nonabelian simple group,  $G$  is a finite group with  $Z(G) = 1$  and  $N(G) = N(L)$ , then  $G \simeq L$ .

In a series of papers started from [1] and culminated in [3] this conjecture was successfully proved.

We denote the direct product of  $n$  copies of a group  $G$  by  $G^n$ . There is a natural question that generalizes Thompson's conjecture.

**Question.** Let  $L$  be a finite nonabelian group,  $G$  is a finite group with  $Z(G) = 1$ . Is it true that for every  $n \in \mathbb{N}$  if we have  $N(L^n) = N(G)$ , then  $L^n \simeq G$ ?

The case  $A_5 \times A_5$  was positively checked in [2]. Here we show that the following theorem holds.

**Theorem.** If  $G$  is a group such that  $N(A_6 \times A_6) = N(G)$  and  $Z(G) = 1$ , then  $G \simeq A_6 \times A_6$ .

Acknowledgement. The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2019-1613 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

## Список литературы

- [1] Chen G. Y. On Thompson's conjecture. J. Algebra. 185 (1996), 185-193.
- [2] Gorshkov I. B. On characterisation of a finite group by the set of conjugacy class sizes. (2019); <https://arxiv.org/abs/1912.07206>.
- [3] Gorshkov I. B. On Thompson's conjecture for finite simple groups. Communications in Algebra. 47 (2019), 5192-5206.
- [4] Khukhro E. I., Mazurov V. D. (Eds.), Unsolved problems in Group Theory: the Kurovka Notebook. 16th edition, Sobolev Institute of Mathematics, (2006).

## Odd antilattices

T. Pisanski

University of Primorska, University of Ljubljana, Slovenia

`tomaz.pisanski@fmf.uni-lj.si`

This is joint work with Karin Cvetko-Vah and Michael Kinyon

An *antilattice* is an algebraic structure based on the same set of axioms as lattice except that the two commutativity axioms for  $\wedge$  and  $\vee$  are replaced by the their anticommutativity counterparts. Although antilattices represent the simplest variety of noncommutative lattices, they play an important role in general theory of noncommutative lattices [4] and are subject of recent investigations [1]. In 2005 Jonathan Leech [3] describes a construction that associates an antilattice to a magic square. Here, we revisit this construction and explore connections between *odd* antilattices, i.e. antilattices without subalgebras of order 2, *elementary* antilattices, i.e. antilattices without proper subalgebras, *simple* antilattices, i.e. antilattices with no proper congruence, and pairs of orthogonal Latin squares [2]. In addition some more general double bands and noncommutative lattices will be discussed.

## Список литературы

- [1] Cvetko-Vah K., Kinyon M., Leech J., Pisanski T. Regular Antilattices. The Art of Discrete and Applied Mathematics. 2 (2019), no. 2. Paper No. 2.06, 10 pp.
- [2] Heinrich K., Zhu L. Existence of orthogonal Latin squares with aligned subsquares. Discrete Math. 59 (1986), 69-78.
- [3] Leech J. Magic squares, finite planes and simple quasilattices. Ars Combinatoria. 77 (2005), 75-96.
- [4] Leech J. Noncommutative Lattices: Skew Lattices, Skew Boolean Algebras and Beyond. FAMNIT Lectures Series, Slovenian Discrete and Applied Mathematics Society and University of Primorska Press, Koper, (2021), 284 pp.

## Basic edge-transitive oriented graphs of valency four

C. Praeger

The University of Western Australia, Australia

`cheryl.praeger@uwa.edu.au`

The talk is about finite connected 4-valent graphs admitting a edge-transitive and vertex-transitive subgroup  $G$  of automorphisms which preserves an orientation of the edges. A connected  $G$ -edge-transitive oriented 4-valent graph is basic if each quotient, modulo the orbits of a normal subgroup of  $G$  is degenerate: it is either a cycle (oriented or unoriented) or consists of a single vertex or a single edge. In other words, these are the graphs which are basic relative to normal quotient reduction. I will discuss the structure of these basic graphs using both group theoretic and combinatorial information. There are three kinds of basic

examples: quasiprimitive, bi-quasiprimitive, and cyclic types. Apart from six infinite families of well-understood examples, the group  $G$  has a unique minimal normal subgroup  $N = T^k$ , for some simple group  $T$ , and the integer  $k$  is bounded:  $k \in \{1, 2\}$  for quasiprimitive type,  $k \in \{1, 2, 4, 8\}$  for bi-quasiprimitive type; and  $k$  is bounded above by certain explicit functions of  $r$  for cycle type, where the quotient modulo the  $N$ -orbits is a cycle of length  $r$ . All the bounds are tight, and in all cases infinite families of examples meeting the bounds are given.

Perhaps the most startling case is where the quotient mod  $N$  is an unoriented cycle  $C_r$ ,  $N = T^k$  with  $T$  nonabelian, and the bound is  $k \leq r2^r$ . In this case we have given examples meeting the bound only for  $r = 3$ , hence  $k = 24$ , and for any simple group  $T$  which can be generated by elements  $a, b$  of orders 2 and 3, respectively.

Collaborators. The work on the quasiprimitive case is joint with Jehan Al-bar, Ahman Al-kenani, Najat Muthana, and Pablo Spiga, published in 2016 and 2017. The other cases are a collaboration with Nemanja Poznanovic; the bi-quasiprimitive type is in Algebraic Combinatorics (in press), while the results for cycle type will first appear in Nem's thesis from the University of Melbourne.

## On Cayley isomorphism property for abelian groups

Г.К. Рябов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

gric2ryabov@gmail.com

A finite group  $G$  is called a *DCI-group* if every two isomorphic Cayley digraphs over  $G$  are Cayley isomorphic, i.e. there exists an isomorphism between these digraphs that is also an automorphism of  $G$ . One of the motivations to study DCI-groups comes from the Cayley graph isomorphism problem. Suppose that  $G$  is a DCI-group. Then to determine whether two Cayley digraphs  $\text{Cay}(G, S)$  and  $\text{Cay}(G, T)$  are isomorphic, we only need to check the existence of  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  with  $S^\varphi = T$ . The latter, usually, is much easier.

The definition of a DCI-group goes back to Ádám who conjectured [1], in our terms, that every cyclic group is DCI. This conjecture was proved to be false. The problem of determining all finite DCI-groups was raised by Babai and Frankl [2]. One of the crucial steps towards the classification of all DCI-groups is to determine abelian DCI-groups. It was proved that every abelian DCI-group is the direct product of groups of coprime orders each of which is elementary abelian or isomorphic to  $\mathbb{Z}_4$  (see [3, Theorem 8.8]). However, the classification of abelian DCI-groups is far from complete. In the talk we discuss on new infinite families of abelian DCI-groups and approaches to determining whether a given group is DCI. The talk is based on the papers [4–9].

Acknowledgement. The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2019-1613 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

## Список литературы

- [1] Ádám A. Research Problem 2-10. J. Combin. Theory. 2 (1967), 393.
- [2] Babai L., Frankl P. Isomorphisms of Cayley graphs I. Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 18, North-Holland, Amsterdam (1978), 35-52.
- [3] Li C. H. On isomorphisms of finite Cayley graphs – a survey. Discrete Math. 256, Nos. 1-2 (2002), 301-334.
- [4] Kovács I., Ryabov G. CI-property for decomposable Schur rings over an abelian group. Algebra Colloq. 26, No. 1 (2019), 147-160.
- [5] Kovács I., Ryabov G.  $C_p^4 \times C_q$  is a DCI-group, (2019); <https://arxiv.org/abs/1912.08835>.
- [6] Kovács I., Muzychuk M., Pálffy P., Ryabov G., Somlai G. CI-property of  $C_p \times C_n$  and  $C_p^2 \times C_q^2$  for digraphs, in preparation.
- [7] Ryabov G. The Cayley isomorphism property for the group  $C_2^5 \times C_p$ . Ars Math. Contemp. 19, No. 2 (2020), 277-295.
- [8] Ryabov G. The Cayley isomorphism property for the group  $C_4 \times C_p^2$ . Comm. Algebra. 49, No. 4 (2021), 1788-1804.
- [9] Xie J.-H., Feng Y.-Q., Ryabov G., Liu Y.-L. Normal Cayley digraphs of cyclic groups with CI-property, (2021), <https://arxiv.org/abs/2102.03976>.

### Deza graphs with parameters $(4n, n + 2, n - 2, 2)$

Л.В. Шалагинов

Челябинский государственный университет

Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН

44sh@mail.ru

A Deza graph (see [1]) with parameters  $(v, k, b, a)$  is a  $k$ -regular graph with  $v$  vertices such that any two distinct vertices have  $b$  or  $a$  common neighbours, where  $b \geq a$ . If Deza graph  $G$  has parameters  $(4n, n + 2, n - 2, 2)$  and  $n > 8$  then we prove that  $G$  is a divisible design graph.

An incidence structure with constant block size  $k$  is a divisible design whenever the point set can be partitioned into  $m$  classes of size  $n$ , such that two points from one class occur together in exactly  $\lambda_1$  blocks, and two points from different classes occur together in exactly  $\lambda_2$  blocks. A divisible design graph (see [2]) is a graph whose adjacency matrix is the incidence matrix of a divisible design.

In this work Deza graphs (and in particular divisible design graphs) with parameters  $(4n, n + 2, n - 2, 2)$  are characterized.

## Список литературы

- [1] Erickson M., Fernando S., Haemers W. H., Hardy D., Hemmeter J. Deza graphs: A generalization of strongly regular graphs. Journal of Combinatorial Designs. 7 no. 6 (1999), 359-405.
- [2] Haemers W. H., Kharaghani H., Meulenberg M. A. Divisible Design Graphs. Journal of Combinatorial Theory, Series A. 118 (2011), 978-992.

### Girth of cubic Pancake graphs

Ен Гун Сон

Новосибирский государственный университет

e.son@g.nsu.ru

This is joint work with Elena Konstantinova

In this talk we consider Cayley cubic Pancake graphs on the symmetric group  $Sym_n$  with a generating set consisting of a triple of prefix-reversals  $r_i$ ,  $2 \leq i \leq n$ , where  $r_i$  is a permutation that changes the order of elements within an interval  $[1, i]$  of a permutation  $\pi = [\pi_1, \dots, \pi_i, \dots, \pi_n]$  when multiplied on the right. Not every triple of prefix-reversals forms a connected graph. In 2003, D. Bass and I. Sudborough investigated this class of graphs in [1] and identified six generating sets:  $S_1 = \{r_2, r_{n-1}, r_n\}$ ,  $S_2 = \{r_{n-2}, r_{n-1}, r_n\}$ ,  $S_3 = \{r_3, r_{n-2}, r_n\}$  for even  $n$ ,  $S_4 = \{r_3, r_{n-1}, r_n\}$  for odd  $n$ ,  $S_5 = \{r_{n-3}, r_{n-1}, r_n\}$  for odd  $n$ ,  $S_6 = \{r_{n-3}, r_{n-2}, r_n\}$ . Cubic Pancake graphs were also considered by D. Sawada and A. Williams in [2] and A. Pankratova in [3].

We study the girth  $g(\Gamma)$  of cubic Pancake graphs  $\Gamma$ . In particular, for Cayley graphs  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  on the symmetric group  $Sym_n$  with generating sets  $S_1$  and  $S_2$  the following theorem is proved.

**Theorem 1.**

$$g(\Gamma_1) = g(\Gamma_2) = \begin{cases} 6, & \text{for } n = 4; \\ 8, & \text{for } n \geq 5. \end{cases}$$

Using structural properties of cubic Pancake graphs  $\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$  with generating sets  $S_3, S_4, S_5$ , respectively, it is proved that the girth of these graphs does not exceed 12 for any  $n \geq 6$ . For the graph  $\Gamma_6$  with generating set  $S_6$ , a hypothesis about its girth was put forward.

**Conjecture 1.**

$$g(\Gamma_6) = 28 \text{ for all } n \geq 19.$$

A new generating set was also found. It consists of three elements and generates a connected Cayley graph on the symmetric group. The girth of this graph is given by the following result.

**Theorem 2.** *The set  $DS_1 = \{r_n, r_{n-2}, r_2\}$  is a generating set of the symmetric group  $Sym_n$ , when  $n \geq 5$  and  $n$  is odd. Moreover, the graph  $P_n^{DS_1} = Cay(Sym_n, \{r_n, r_{n-2}, r_2\})$  has the following girth:*

$$g(P_n^{DS_1}) = \begin{cases} 6, & \text{for } n = 5, \text{ with } C_6 = (r_3 r_2)^3; \\ 8, & \text{for } n \geq 7, \text{ with } C_8 = (r_n r_2 r_n r_{n-2})^2. \end{cases}$$

There is one more conjecture about generating sets of cardinality three.

**Conjecture 2.** *The sets  $DS_2 = \{r_{n-4}, r_{n-3}, r_n\}$ , when  $n$  is odd,  $DS_3 = \{r_{n-5}, r_{n-3}, r_n\}$ , when  $n$  is odd,  $DS_4 = \{r_{n-4}, r_{n-1}, r_n\}$ , when  $n$  is even, are generating sets of the symmetric group  $Sym_n$ , where  $n \geq 7$ .*

## Список литературы

- [1] Bass D., Sudborough I. Pancake problems with restricted prefix reversals and some corresponding Cayley networks. *Journal of Parallel and Distributed Computing*. 63 (2003), 327-336; [https://doi.org/10.1016/S0743-7315\(03\)00033-9](https://doi.org/10.1016/S0743-7315(03)00033-9)
- [2] Sawada J., Williams A. Successor rules for flipping pancakes and burnt pancakes. *Theoretical Computer Science*. 609 (2016), 60-75; <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2015.09.007>
- [3] Pankratova A. Hamiltonian 3-Big Pancake graph. Bachelor's Graduate Qualifying Thesis, Novosibirsk. (2017), 30p.

## The road closure conjecture and boolean lattices of groups

P. Spiga

University of Milano-Bicocca, Italy

`pablo.spiga@unimib.it`

In this talk, we introduce the road closure conjecture of Araújo and Cameron on synchronizing primitive groups. We discuss various cases of this conjecture via the O’Nan-Scott theorem. One of the most important cases is for almost simple groups, where the road closure conjecture requires detailed information on the (Wilson) novelty subgroups and on certain types of lattices of subgroups.



## Short $SL_2$ -structures on simple Lie algebras

Р.О. Стасенко

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

theromestasenko@yandex.ru

There is the classical Tits-Kantor-Koeher construction, which allows one to construct from a simple Jordan algebra  $J$  a simple Lie algebra  $\mathfrak{g}$ , having the form:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{der}(J) \oplus \mathfrak{sl}_2(J).$$

The Tits-Kantor-Koeher theorem states that there is a one-to-one correspondence between simple Jordan algebras and simple Lie algebras equipped with decomposition as above.

The Tits-Kantor-Koeher construction can be interpreted as a linear representation of the Lie algebra  $\mathfrak{sl}_2$  by automorphisms of the Lie algebra  $\mathfrak{g}$  which decomposes into irreducible representations of dimensions 1 and 3. The following concept is a natural generalization of this construction. Let  $S$  be a reductive algebraic group and let  $\mathfrak{g}$  be a Lie algebra. The homomorphism  $\Phi : S \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$  is called the  $S$ -structure on the Lie algebra  $\mathfrak{g}$ .

The talk is devoted to a  $SL_2$ -structures on simple Lie algebras. We call  $SL_2$ -structure *short* if the representation  $\Phi$  of the group  $SL_2$  decomposes into irreducible representations of dimensions 1, 2 and 3. In this case, the isotypic decomposition of the representation  $\Phi$  have the form:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus (\mathbb{C}^2 \otimes J_1) \oplus (\mathfrak{sl}_2 \otimes J_2).$$

The Tits-Kantor-Koeher construction corresponds to the case  $J_1 = 0$ . The talk deals with the case of  $J_1 \neq 0$ .

Similarly to the Tits-Kantor-Koeher theorem, there is a one-to-one correspondence between simple Lie algebras with a short  $SL_2$ -structure with  $J_1 \neq 0$  and so-called simple symplectic Lie–Jordan triples  $(J_1; \mathfrak{g}_0; J_2)$ , where  $J_1$  is a symplectic space,  $\mathfrak{g}_0$  is a reductive Lie subalgebra in  $\mathfrak{sp}(J_1)$ , and  $J_2$  is a simple Jordan subalgebra of symmetric operators on  $J_1$  such that  $J_2$  and  $\mathfrak{g}_0$  have no nontrivial common invariant subspaces in  $J_1$ . A complete classification of short  $SL_2$ -structures on simple Lie algebras will be given.

Acknowledgement. The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Mathematical Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement 075-15-2019-1621 and also by Russian Foundation for Basic Research grant 20-01-00515 A.

## On the eigenvalues of graphs of mutually orthogonal Sudoku Latin squares

S. Suda

National Defense Academy of Japan, Japan

sho.suda@gmail.com

A Sudoku Latin square of order  $q^2$  is a Latin square of order  $q^2$  partitioned into  $q^2$   $q \times q$  subarrays such that each subarray contains each symbol exactly once. It is well known that mutually orthogonal Latin squares (MOLS) give rise to strongly regular graphs whose parameters are uniquely determined from the order and the number of Latin squares.

In this talk, we consider mutually orthogonal Sudoku squares (MOSLs) of order  $q^2$  and define graphs attached to MOSLs by adding edges corresponding to the information of subarrays to the graphs attached to MOLS. It turns out that the eigenvalues of the graphs depend on the structure of Sudoku, but we explicitly determine the spectrum of the graphs when MOSLs are obtained from finite fields. As a corollary, we then use this data to distinguish the non-equivalent Sudoku Latin squares.

## On a class of abelian distance-regular covers of complete graphs

Л.Ю. Циовкина

Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН

l.tsiovkina@gmail.com

A distance-regular antipodal cover  $\Gamma$  of a complete graph is called *abelian* if the group of all automorphisms of  $\Gamma$  that fix setwise each of its antipodal classes is abelian and acts regularly on an antipodal class. The problem of finding new constructions of abelian distance-regular covers of complete graphs is motivated by their various applications, e.g. in coding theory and discrete geometry.

In this talk, we consider the problem of classification and construction of abelian distance-regular covers  $\Gamma$  of complete graphs with the following property (\*): there is a vertex-transitive group of automorphisms  $G$  of  $\Gamma$  which induces an almost simple primitive permutation group  $G^\Sigma$  on the set  $\Sigma$  of antipodal classes of  $\Gamma$ . It has been recently solved in the case when the permutation rank  $\text{rk}(G^\Sigma)$  of  $G^\Sigma$  equals 2 (which implies classification of all arc-transitive covers with the property (\*)). We will present some results towards solution of this in the case  $\text{rk}(G^\Sigma) > 2$ .

Acknowledgement. This research was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 20-71-00122.

# Relatively maximal subgroups of odd index in symmetric groups

А.С. Васильев

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН

a.vasilev1@g.nsu.ru

This is joint work with Danila Revin

Let  $\mathfrak{X}$  be a class of finite groups closed under taking subgroups, homomorphic images and extensions and containing the group of order 2. This work contains description of maximal  $\mathfrak{X}$ -subgroups of odd index in symmetric group  $\text{Sym}_n$  of degree  $n$ .

Denote  $\mu_{\mathfrak{X}} = \max\{n \mid \text{Sym}_n \in \mathfrak{X}\}$ . Let sequence  $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$  and  $\overline{b_k b_{k-1} \dots b_0}$  be given in which every element is equal to 0 or an odd integer less or equal than  $\mu_{\mathfrak{X}}$ . We say that the sequence  $\overline{b_k b_{k-1} \dots b_0}$  is obtained from  $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$  by *elementary replacement* if there exist an odd number  $d$  less or equal than  $\mu_{\mathfrak{X}}$  and having binary representation  $\overline{d_l d_{l-1} \dots d_1 1}$  and a number  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , such that  $a_i = 1, b_i = d, a_r = 1$  and  $b_r = 0$  if  $r \in \{i+1, \dots, i+l\}$  and  $d_{r-i} = 1$ , and  $a_r = b_r$  otherwise.

A *generalized binary representation of a natural number  $n$*  is the decomposition

$$n = \overline{b_k b_{k-1} \dots b_0} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot 2^i, \quad (2)$$

such that  $b_i = 0$  for  $i > k = \lceil \log_2 n \rceil$ , and the representation  $\overline{b_k b_{k-1} \dots b_0}$  is obtained from  $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$  by a series of elementary replacements.

With each generalized representation (2) we associate a *template of a diagram* using the following rule. The template consists of  $k+1$  columns, where  $k = \lceil \log_2 n \rceil$ , and the numbering starts from 0, from the right to the left. The height of  $i$ th column equals  $i$  (the zero column is empty). On the top of the  $i$ th column we put  $b_i$  from the generalized representation  $\overline{b_k b_{k-1} \dots b_0}$ .

Diagrams corresponding to the extended binary representation (2) are defined as follows. If a diagram template for such a representation has 0 on top of a column, then we delete the column. Consider a column of height  $i$  and which has  $b_i > 0$  on top. If  $2^i b_i \leq \mu_{\mathfrak{X}}$ , then we paint over the whole column. Otherwise, we paint over a band of a height  $c_i \geq 0$ , such that  $2^{c_i} b_i \leq \mu_{\mathfrak{X}}$ , at the top part of the column. If there is an unpainted part of the column left, we cut it into bands of heights  $l_1, \dots, l_t \in \{1, 2, \dots, \lceil \log_2 \mu_{\mathfrak{X}} \rceil\}$ ,  $t = t(i)$  from the bottom up, so that  $2^{l_t + c_i} \cdot b_i > \mu_{\mathfrak{X}}$  and  $2^{l_j + l_{j+1}} > \mu_{\mathfrak{X}}$  for all  $j = 1, \dots, t-1$ .

A template whose columns are partitioned in the above-indicated way is called a *diagram representing a number  $n$* . A diagram is said to be *inadmissible* if it contains two columns of heights  $i$  and  $j$ ,  $i > j$ , and the unpainted part of a larger column is obtained from the unpainted part of a smaller one by adding on the top either band of height  $(i - c_i) - (j - c_j)$  while  $2^{i-j+c_j} \cdot b_i + 2^{c_j} \cdot b_j \leq \mu_{\mathfrak{X}}$  or two bands of heights  $c_j$  and  $(i - j - c_i)$  while  $b_j = 1$  and  $2^{i-j} \cdot b_i + b_j \leq \mu_{\mathfrak{X}}$ . Otherwise, a diagram is said to be *admissible*. The fact that  $\mathcal{D}$  is an admissible diagram for a number  $n$  is written thus:  $\mathcal{D} \models n$ .

Let  $\mathcal{D} \models n$  be an admissible diagram complying with the generalized representation (2) of a number  $n$ , and let the  $i$ th column of the diagram corresponding to a nonzero digit  $b_i$  be

partitioned into unpainted bands of heights  $l_1, \dots, l_t$  and a painted band  $c_i$ . With the given diagram we associate a subgroup in  $\text{Sym}_n$  using the following rule. An  $i$ th column is assigned the wreath product  $\text{Sym}_{2^{l_1}} \wr \dots \wr \text{Sym}_{l_t} \wr \text{Sym}_{2^{c_i \cdot b_i}}$ , which is treated as a transitive subgroup of  $\text{Sym}_{2^{i \cdot b_i}}$ . The entire diagram is assigned the direct wreath product (corresponding to its columns)  $\prod_{i=0}^k \text{Sym}_{2^{l_1}} \wr \dots \wr \text{Sym}_{l_t} \wr \text{Sym}_{2^{c_i \cdot b_i}}$ , where  $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$ . We can naturally identify this product with a subgroup in  $\text{Sym}_n$  and denote it by  $S_{\mathcal{D}}$ . The subgroup  $S_{\mathcal{D}}$  is defined uniquely up to conjugation in  $\text{Sym}_n$ .

**Theorem** *Let  $G = \text{Sym}_n$ . Then the map  $\mathcal{D} \mapsto S_{\mathcal{D}}^G$  yields a bijection between a set of admissible diagrams  $\mathcal{D} \models n$  and a set of conjugacy classes of maximal  $\mathfrak{X}$ -subgroups of odd index in  $\text{Sym}_n$ .*

Acknowledgement. This work was supported by the Russian Science Foundation (project 19-71-10067).

## Completely reachable and completely co-reachable automata

М.В. Волков

Уральский федеральный университет  
mishavolkov@gmail.com

This is joint work with David Fernando Casas Torres

A deterministic finite automaton (DFA) consists of a finite set  $Q$  of states, a finite input alphabet  $\Sigma$ , and a bunch of transformations  $\delta_a: Q \rightarrow Q$  assigned to letters  $a \in \Sigma$ . Every word  $w$  over  $\Sigma$  defines a transformation  $\delta_w: Q \rightarrow Q$  as follows: if  $w = a_1 \cdots a_k$  with  $a_1, \dots, a_k \in \Sigma$ , then  $\delta_w := \delta_{a_1} \cdots \delta_{a_k}$ .

We say that a DFA  $(Q, \Sigma)$  is *completely reachable* if every non-empty subset of  $Q$  occurs as the image of the transformation  $\delta_w$  for some word  $w$  over  $\Sigma$ . Dually, a DFA  $(Q, \Sigma)$  is *completely co-reachable* if every partition of the set  $Q$  occurs as the kernel of the transformation  $\delta_w$  for some word  $w$  over  $\Sigma$ . The class of CRA completely reachable DFAs, as well as the class CCRA of completely co-reachable DFAs, sits between two important classes of DFSs intensively studied in the literature. Namely, both CRA and CCRA consist of synchronizing DFAs and contain the class of DFAs for which every transformation of the state set is induced by some word over the input alphabet.

We give combinatorial characterizations of completely reachable and completely co-reachable DFAs. For the class CCRA, the characterization leads to a polynomial time membership algorithm; the complexity of deciding membership in the class CRA remains open.

# Strongly reachable automata

Y. Wu

Shanghai Jiao Tong University, China  
ykwu@sjtu.edu.cn

This is joint work with Yinfeng Zhu

Let  $\Omega$  be a set. A singular transformation on  $\Omega$  is an element of  $\Omega^\Omega$  which is not onto. Let  $S$  and  $P$  be two sets. Associate to each  $s \in S$  a singular transformation  $\pi_s$  on  $\Omega$  while associate to each  $p \in P$  a permutation  $\pi_p$  on  $\Omega$ . For each  $N \subseteq \Omega^\Omega$ , we call the resulting automaton  $(\Omega, S \cup P, \pi)$  strongly  $N$ -reachable provided there is a positive integer  $\ell$  such that for each word  $W = W_1 \cdots W_n$  over  $S \cup P$  in which letters from  $S$  appear at least  $\ell$  times,  $\pi_W = \pi_{W_1} \circ \cdots \circ \pi_{W_n}$  always falls inside  $N$ . The strong  $N$ -reachable index of  $(\Omega, S \cup P, \pi)$  is the minimum  $\ell$  for which the previous claim holds. If we take  $N$  to be the set of maps whose ranges have size at most  $t$ , a strongly  $N$ -reachable automaton is called strongly  $t$ -synchronizing, and the corresponding strong  $N$ -reachable index is known as its strong  $t$ -synchronizing index.

What is the complexity of deciding if an automaton is strongly  $N$ -reachable? How to estimate the strong  $N$ -reachable index? How to classify the structure of strongly  $N$ -reachable automata and how to characterize those with extremal strong  $N$ -reachable indices? We report our progress in understanding these questions for various special subsets  $N$  of  $\Omega^\Omega$ .

## Программа секции «Интегрируемые и динамические системы»

### Зал № 4

Координаторы: Г.С. Маулешова, О.В. Починка, А.О. Толбей

#### ПОНЕДЕЛЬНИК, 9 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Ольга Починка (Высшая школа экономики). *О структурной устойчивости 3-диффеоморфизмов с одномерными аттрактором и репеллером*

14<sup>50</sup> — 15<sup>10</sup> Сергей Кащенко (Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Сергей Глызин (Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Периодические режимы типа бегущих волн в полностью связанных нейронных сетях*

15<sup>30</sup> — 15<sup>50</sup> Илья Кащенко (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Бифуркации в уравнениях с запаздыванием*

15<sup>50</sup> — 16<sup>10</sup> Александр Килин (Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет). *Динамика многозвенных колёсных систем*

16<sup>10</sup> — 16<sup>30</sup> Александра Кащенко (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Релаксационные режимы в кольце связанных осцилляторов*

#### ПЕРЕРЫВ

16<sup>50</sup> — 17<sup>10</sup> Елена Пивоварова (Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет). *Свободное и управляемое качение шарового волчка по вибрирующей плоскости*

17<sup>10</sup> — 17<sup>30</sup> Айдамир Сташ (Кавказский математический центр, Адыгейский государственный университет). *Об управлении спектрами показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем*

17<sup>30</sup> — 17<sup>50</sup> Игорь Маслеников (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Динамика уравнения второго порядка с запаздыванием при производной*

17<sup>50</sup> — 18<sup>10</sup> Дмитрий Костерин (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Кусочно-гладкие решения одной краевой задачи специального вида*

18<sup>10</sup> — 18<sup>30</sup> Георгий Вепрев (Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера). *Несуществование универсальной системы нулевой энтропии для непериодических аменабельных групп*

## ВТОРНИК, 10 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Елена Кудрявцева (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Topology of spaces of gradient-like flows on surfaces*

14<sup>50</sup> — 15<sup>10</sup> Вячеслав Гринес (Высшая школа экономики). *О топологии многообразий, допускающих диффеоморфизмы с регулярной и хаотической динамикой*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Лев Лерман (Высшая школа экономики). *Неавтономные векторные поля на замкнутых многообразиях: структурная устойчивость, инварианты и реализация*

15<sup>30</sup> — 15<sup>50</sup> Дмитрий Талалаев (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Оснащенные графы, интегрируемые системы статистической физики в старших размерностях и уравнение тетраэдров*

15<sup>50</sup> — 16<sup>10</sup> Борис Бычков (Высшая школа экономики, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Electrical networks and Lagrangian Grassmannians*

16<sup>10</sup> — 16<sup>30</sup> Антон Казаков (Высшая школа экономики, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Electrical and Ising networks and dimer models*

### ПЕРЕРЫВ

16<sup>50</sup> — 17<sup>10</sup> Сергей Агапов (Новосибирский государственный университет, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН). *Рациональные интегралы геодезических потоков*

17<sup>10</sup> — 17<sup>30</sup> Сотирис Константину-Ризос (Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *NLS type tetrahedron maps*

17<sup>30</sup> — 17<sup>50</sup> Сергей Игонин (Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Преобразования Бэклунда для (1+1)-мерных интегрируемых систем: их алгебра, геометрия и приложения*

17<sup>50</sup> — 18<sup>10</sup> Екатерина Татанова (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Динамика уравнения с большим запаздыванием и периодическими коэффициентами*

18<sup>10</sup> — 18<sup>30</sup> Надежда Стрижова (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *О гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности*

18<sup>30</sup> — 18<sup>50</sup> Вадим Колесов (Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Tetrahedron maps and the algebraic relations that define them*

18<sup>50</sup> — 19<sup>10</sup> Евгений Глухов (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Об алгебро-геометрических методах в теории ортогональных криволинейных систем координат*

## ЧЕТВЕРГ, 12 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Сергей Агафонов (São Paulo State University, Brazil). *Polynomial integrals of geodesic flow, webs, and integrable billiards*

14<sup>50</sup> — 15<sup>10</sup> Владислав Сидоренко (Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН). *Использование промежуточных интегрируемых систем в исследованиях методами теории возмущений*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Евгений Жужома (Высшая школа экономики). *Two-dimensional attractors of A-flows and fibered links on 3-manifolds*

15<sup>30</sup> — 15<sup>50</sup> Валерий Гайко (Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси). *Глобальная теория бифуркаций и приложения планарных полиномиальных динамических систем*

15<sup>50</sup> — 16<sup>10</sup> Андрей Коняев (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *О геометрии Нийенхейса и ее приложениях к интегрируемым системам*

16<sup>10</sup> — 16<sup>30</sup> Рустем Гарифуллин (Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН). *Высшие симметрии полудискретных уравнений гиперболического типа. Полудискретная версия уравнения Цицейки*

## ПЕРЕРЫВ

16<sup>50</sup> — 17<sup>10</sup> Александра Гундарева (Математический центр в Академгородке). *О коммутирующих элементах в первой алгебре Вейля над рациональными числами*

17<sup>10</sup> — 17<sup>30</sup> Наталия Даурцева (Математический центр в Академгородке, Новосибирский государственный университет). *О почти эрмитовых структурах кооднородности 1 на 6-мерных многообразиях*

17<sup>30</sup> — 17<sup>50</sup> Алексей Казаков (Высшая школа экономики). *Об аттракторах Лоренца и Ровеллы в системе Любимова-Закса*

17<sup>50</sup> — 18<sup>10</sup> Сергей Соколов (Московский физико-технический институт). *Bifurcation Diagram of a Certain Integrable Case of Vortex Dynamics*

18<sup>10</sup> — 18<sup>30</sup> Владислав Кибкало (Московский центр фундаментальной и прикладной математики). *Реализация топологии слоений интегрируемых систем в классе бильярдов*



## ПЯТНИЦА, 13 АВГУСТА

14<sup>30</sup> — 14<sup>50</sup> Иван Мамаев (Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет). *Качественный анализ динамики частиц в метрике Керра*

14<sup>50</sup> — 15<sup>10</sup> Азамат Шавлуков (Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН). *Типичная особенность типа гиперболической омбилики решения квазилинейной гидродинамической системы*

15<sup>10</sup> — 15<sup>30</sup> Мейрамгул Ерментай (Специализированный учебно-научный центр НГУ, Новосибирский государственный университет). *О минимальных изотропных поверхностях в  $\mathbb{CP}^3$*

15<sup>30</sup> — 15<sup>50</sup> Гульнара Маулешова (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет). *Об одноточечных коммутирующих разностных операторах*

15<sup>50</sup> — 16<sup>10</sup> Ксения Фисенко (Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *A discrete Darboux–Lax scheme for solving systems of integrable difference equations*

### ПЕРЕРЫВ

16<sup>30</sup> — 16<sup>50</sup> Евгений Собко (Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера, ПОМИ РАН). *From (super)Conformal Blocks to Integrable Quantum Mechanics and back*

16<sup>50</sup> — 17<sup>10</sup> Дмитрий Миллионщиков (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова). *Рост узких алгебр Ли и интегрируемость*

17<sup>10</sup> — 17<sup>30</sup> Александр Михайлов (Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова). *Quantisation of Nonabelian Dynamical Systems. Quantisation Ideals*

# Реализация топологии слоений интегрируемых систем в классе бильярдов

В.В. Ведюшкина<sup>1</sup>, В.А. Кибкало<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

<sup>2</sup>Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
aivernirra@gmail.com , slava.kibkalo@gmail.com

Недавно в теории интегрируемых бильярдов получено несколько важных результатов. А.А.Глуцук [1] (с опорой на идею углового бильярда А.Е.Миронова и М.Бялого) доказал версию знаменитой гипотезы Биркгофа. Если бильярд на плоском компактном столе с кусочно-гладкой границей имеет полиномиальный по импульсам интеграл, то граница лежит на одной или нескольких софокусных квадраках из семейства  $(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  или на параболах с общей осью и фокусом. Такие столы и бильярды на них мы называем *элементарными*.

В то же время В.В.Ведюшкиной удалось существенно расширить [2] класс интегрируемых бильярдов путем склейки стола-комплекса (названного *бильярдной книжкой*) из нескольких элементарных столов (“листов” книжки). В ограничении на каждый лист проекция бильярдной книжки на плоскость является изометрией и биекцией. Склеивка листов книжки происходит по общим дугам границы (“корешкам” книжки), которые проецируются на дуги квадрак семейства (1). Корешку приписана перестановка  $\sigma$  на склеенных по нему листах. Она задает переход шара с листа на лист после удара о него. Перестановки на пересекающихся корешках коммутируют.

В докладе обсуждается *лиувиллева* эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем (ИГС) и бильярдов: гомеоморфность их фазовых пространств, сохраняющая *слоения Лиувилля*, т.е. их разбиения на связные совместные уровни первых интегралов. Почти все слои гомеоморфны торам, но есть и “особые” слои, обычно содержащие критические точки набора интегралов.

Эффективным методом изучения динамических систем и их эквивалентностей является поиск и вычисление инвариантов. Инвариантом Фоменко–Цишанга, классифицирующим ИГС в ограничении на неособый ( $\text{grad } H \neq 0$ ) 3-уровень  $Q^3$  энергии  $H = h$  с точностью до лиувиллевой эквивалентности, является граф с числовыми метками, вершины которого помечены типами особенностей (“3-атомов” — классов эквивалентности расслоенных окрестностей особых слоев). Метки задаются диффеоморфизмами склейки  $Q^3$  (из частей-атомов по их граничным торам).

**Гипотеза Фоменко о бильярдах, [3].** Каждая ИГС из некоторого “разумного” класса, ограниченная на неособое  $Q^3$ , лиувиллево эквивалентна “своему” интегрируемому бильярду.

**Теорема 1.** Все “элементы” инварианта Ф–Ц реализуются бильярдами (пока “по отдельности”):

- 1)любой (невыврожденный) 3-атом ИГС содержится в слоении “своей” заданной явно книжки;
- 2)любое значение числовой метки содержится инварианте “своего” заданного явно бильярда;

**Теорема 2.** Все классы грубой лиувиллевой эквивалентности ИГС на  $Q^3$  (базы слоения; они задаются инвариантом Ф–Ц без числовых меток) реализуются явно заданными книжками. П.1 Т.1 и Т.2 доказаны В.В.Ведюшкиной и И.С.Харчевой, п.2

Т.1 — В.В.Ведюшкиной и В.А.Кибкало (в т.ч. бильярдами в магнитном поле). Ею же доказано:  $Q^3$  подходящей книжки есть св. сумма  $\forall$  набора  $k(S^1 \times S^2)$  и линз  $L_i(k_i, n_i)$ , и может (как и  $Q^3$  ИГС) не быть многообразием Зейфerta.

Также В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко удалось реализовать бильярдами многие ИГС из приложений в подходящих зонах энергии, и геодезические потоки на  $S^2$  и  $T^2$  с интегралами степени 1 и 2. В работах В.А. Кибкало начата реализация полулокальных 4-особенностей  $rk\ 0$  ИГС (положения равновесия невырождены) бильярдами на книжках в поле потенциала Гаука.

## Список литературы

- [1] А.А. Глуцук, О двумерных полиномиально интегрируемых бильярдах на поверхностях постоянной кривизны // Докл. РАН. 2018. Т. 481, №6. С. 594–598.
- [2] В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. Т. 209, №12. С. 17–56.
- [3] А.Т.Фоменко, В.В.Ведюшкина, Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2019. №3. С. 15–25.

## Topology of spaces of gradient-like flows on surfaces

Е.А Кудрявцева

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

eakudr@mech.math.msu.su

Suppose  $M$  is a smooth closed orientable surface, and  $\mathcal{P} \subset M$  its finite subset. For a closed 1-form  $\beta$  on  $M' = M \setminus \mathcal{P}$ , consider the set  $\mathcal{Z}_\beta := \{P \in M' \mid \beta(P) = 0\}$  of its zeros. A closed 1-form  $\beta$  on  $M' = M \setminus \mathcal{P}$  will be called a *Morse flow* on  $M$  if, on a neighbourhood of every point  $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Z}_\beta$ , there exist local coordinates  $x, y$  such that either  $\beta = d(2xy) = d(\operatorname{Im}(z^2))$  and  $P \in \mathcal{Z}_\beta$ , or  $\beta = \pm(xdy - ydx)/(x^2 + y^2) = \pm d(\operatorname{Im}(\ln z))$  and  $P \in \mathcal{P}$ , where  $z = x + iy$ . Geometrically, the set  $\mathcal{P}_\beta := \mathcal{P}$  consists of *sources* and *sinks* of the flow  $\beta$ , while  $\mathcal{Z}_\beta$  consists of *saddle points* of  $\beta$ .

A closed 1-form  $\beta$  on  $M' = M \setminus \mathcal{P}$  will be called a *gradient-like flow* on  $M$  if there exists a Morse function  $f \in C^\infty(M)$ , called an *energy function* of  $\beta$ , such that

- (i) the set  $\mathcal{P}$  coincides with the set of local extremum points of  $f$ ,
- (ii) the 2-form  $df \wedge \beta|_{M \setminus \mathcal{C}_f}$  has no zeros and defines a positive orientation on  $M$ ,
- (iii) in a neighbourhood of every point  $P \in \mathcal{C}_f$ , there exist local coordinates  $x, y$  such that either
  - $f = f(P) + x^2 - y^2$ ,  $\beta = d(2xy)$  and  $P \in \mathcal{Z} = \mathcal{C}_f \setminus \mathcal{P}$ , or
  - $f = f(P) \pm (x^2 + y^2)$ ,  $\beta = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$  and  $P \in \mathcal{P}$ .

Geometrically, the set  $\mathcal{P}_\beta := \mathcal{P}$  of *sources* and *sinks* of the flow  $\beta$  coincides with the set of local extremum points of the energy function  $f$ , while the set  $\mathcal{Z}_\beta := \mathcal{Z} = \mathcal{C}_f \setminus \mathcal{P}$  of *saddle points* of the flow  $\beta$  coincides with the set of saddle critical points of  $f$ .

Let  $\beta_0$  be a Morse flow on  $M$ . Consider the set  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\beta_0)$  of all gradient-like flows  $\beta$  having the same types of local singularities as  $\beta_0$ . The following theorem is similar to a result by S. Smale (1961) characterizing gradient-like flows among all Morse-Smale flows.

**Теорема** (Characterization of 2D gradient-like flows). *Let  $\beta_0$  be a Morse flow on  $M$ . Then:*

- (a) *The space  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\beta_0)$  of gradient-like flows is nonempty if and only if  $\beta_0$  has at least one sink and at least one source.*
- (b) *A Morse flow  $\beta$  is gradient-like if and only if*
  - (i)  *$\beta$  has at least one sink and at least one source,*
  - (ii) *every separatrix of  $\beta$  has two endpoints belonging to  $\mathcal{Z}_\beta \cup \mathcal{P}_\beta$ , and*
  - (iii) *there is no an oriented closed curve  $P_1 P_2 \dots P_{k-1} P_k$  ( $k \geq 2$ ) formed by oriented separatrices of  $\beta$ , where  $P_i \in \mathcal{Z}_\beta$  and  $P_k = P_1$ .*

**Теорема.** *For any gradient-like flow  $\beta_0$  on  $M$ , the space  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\beta_0)$  has the homotopy type of the manifold  $\mathcal{M}_s^1 = \mathcal{M}_s^1(f_0)$  from [1], where  $f_0$  is an energy function of  $\beta_0$ . Moreover:*

- (a) *There exists a surjective submersion  $\lambda : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}_s^1$ , a stratification and a  $(|\mathcal{Z}_{\beta_0}| + 2s - 1)$ -dimensional fibration on  $\mathcal{M}_s^1$  such that every class of orbital topological equivalence (resp.,  $\mathcal{D}^0(M)$ -orbit) in  $\mathcal{B}$  is the  $\lambda$ -preimage of a stratum (resp., a fibre) from  $\mathcal{M}_s^1$ .*
- (b) *The map  $\lambda$  provides a homotopy equivalence between every  $\text{Diff}^0(M)$ -invariant subset  $I \subseteq \mathcal{B}$  and its image  $\lambda(I) \subseteq \mathcal{M}_s^1$ . In particular, it provides a homotopy equivalence between  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{M}_s^1$ , as well as between every class of topological equivalence (resp.,  $\text{Diff}^0(M)$ -orbit) in  $\mathcal{B}$  and the corresponding stratum (resp., fibre) in  $\mathcal{M}_s^1$ .*

## Список литературы

- [1] E.A. Kudryavtseva. Topology of the spaces of functions with prescribed singularities on surfaces // Doklady Mathematics, **93**:3 (2016), 264–266.

## Об алгебро-геометрических методах в теории ортогональных криволинейных систем координат

Е.В. Глухов, И.И. Мохов, В. Боччи-Флорио  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
Московский центр фундаментальной и прикладной математики  
[evgeniy.glukhov.eg@gmail.com](mailto:evgeniy.glukhov.eg@gmail.com), [mokhov@mi-ras.ru](mailto:mokhov@mi-ras.ru),

В докладе будет представлен алгебро-геометрический подход в задаче об ортогональных криволинейных системах координат, который впервые был предложен И. М. Кричевером [1]. Мы используем недавние результаты [2], [3], чтобы выделить алгебро-геометрические данные, которые приводят к ортогональным криволинейным системам координат с заданным числом постоянных коэффициентов Ламе. Также мы представим преобразования алгебро-геометрических данных, которые приводят к классическим преобразованиям Рибокура и Комбескюра таких систем, и обсудим геометрические свойства связанных такими преобразованиями систем в терминах алгебро-геометрических данных.

Мы проведём все необходимые вычисления для сингулярных кривых аналогично работе [4], чтобы получить примеры всех представленных конструкций в элементарных функциях.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №20-11-20214).

## Список литературы

- [1] И. М. Кричевер. *Алгебро-геометрические  $n$ -ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности*. Функц. анализ и его прил., 31:1 (1997), 32–50. <http://mi.mathnet.ru/faa444>
- [2] Е. В. Глухов, О. И. Мохов. *Об алгебро-геометрических методах построения плоских диагональных метрик специального вида*. УМН, 74:4(448) (2019), 185–186. <http://mi.mathnet.ru/umn9891>
- [3] Е. В. Глухов, О. И. Мохов. *Об алгебро-геометрических методах построения подмногообразий с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны*. Функц. анализ и его прил., 54:3 (2020), 26–37. <http://mi.mathnet.ru/faa3744>
- [4] А. Е. Миронов, И. А. Тайманов. *Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым*. Труды МИАН, 255 (2006), 180–196. <http://mi.mathnet.ru/tm262>

## О гамильтоновой геометрии уравнений ассоциативности

О.И. Мохов, Н.А. Стрижова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

mokhov@mi-ras.ru, nanapavl@gmail.com

Уравнения ассоциативности или уравнения Виттена–Дейкхрафа–Верлинде–Верлинде возникли при изучении двумерных топологических теорий поля и стали играть важную роль в различных задачах математики и математической физики (см., например, [1]). О.И.Мохов [2,3] показал, что уравнения ассоциативности эквивалентны интегрируемым недиагонализуемым системам гидродинамического типа. Оказалось, что уравнения ассоциативности в таком представлении обладают нетривиальной гамильтоновой геометрией, отдельным вопросам которой будет посвящен доклад.

На докладе будет представлена полная классификация уравнений ассоциативности в случае трех примарных полей относительно наличия гамильтоновой структуры Дубровина–Новикова первого порядка [4,5]. Также будут построены конечномерные канонически гамильтоновы редукции уравнений ассоциативности [6–8]. Кроме того, будет изучена геометрия высших гамильтоновых операторов уравнений ассоциативности.

Доклад основан на совместных результатах докладчика и О.И. Мохова. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №20-11-20214).

## Список литературы

- [1] B.A. Dubrovin. *Geometry of 2D topological field theories*. Lecture Notes in Math., 1996, V.1620, pp. 120–348; arXiv: hep-th/9407018 (1994).
- [2] O.I. Mokhov. *Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations*. Topics Topol. and Math. Phys., A.M.S., Providence, RI, 1995, pp. 121–151.
- [3] О.И. Мохов. *Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы*. УМН, 1998, Т. 53, №3, С. 85–192.
- [4] О.И. Мохов, Н.А. Павленко. *Классификация уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновым оператором первого порядка*. ТМФ, 2018, Т. 197, №1, С. 124–137.
- [5] О.И. Мохов, Н.А. Стрижова. *Классификация уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновой структурой типа Дубровина–Новикова*. УМН, 2018, Т. 73, №1, С. 183–184.
- [6] О.И. Мохов, Н.А. Стрижова. *Интегрируемость по Лиувиллю редукции уравнений ассоциативности на множество стационарных точек интеграла в случае трех примарных полей*. УМН, 2019, Т. 74, №2 (446), С. 191–192.
- [7] Н.А. Стрижова. *О гамильтоновой редукции уравнений ассоциативности в случае четырех примарных полей*. Океан. исследования, 2019, Т. 47, №1, С. 118–122.
- [8] O.I. Mokhov, N.A. Strizhova. *On the Liouville integrable reduction of the associativity equations in the case of three primary fields*. Proc. Sympos. Pure Math, v.103.1, p.317–336

## Polynomial integrals of geodesic flow, webs, and integrable billiards

С.И. Агафонов

São Paulo State University, Brazil

sergey.agafonov@gmail.com

This talk links two seemingly unrelated topics: the geometry of planar webs and the dynamics of geodesic flow. We present a geometric interpretation of integrability of geodesic flow by integrals, quadratic and cubic in momenta, in terms of the web theory. On surfaces, admitting quadratic integrals, we construct integrable billiards. For the flat case, these integrals are just conics (for quadratic integrals) and cubics (for cubic ones) in the dual space. Thus, the presented results are generalizations of some classical theorems, like Graf & Sauer and Poncelet theorems, to "integrable" metrics of non-constant curvature.

## Рациональные интегралы геодезических потоков

С.В. Агапов<sup>1,2</sup>, В.В. Шубин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>2</sup>Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

agapov.sergey.v@gmail.com, vlad.v.shubin@gmail.com

В докладе будет рассказано про интегрируемые геодезические потоки на двумерных поверхностях, допускающие рациональные по импульсам первые интегралы.

## О почти эрмитовых структурах кооднородности один на 6-мерных многообразиях

Н.А. Даурцева

Новосибирский государственный университет

Математический центр в Академгородке

n.daurtseva@g.nsu.ru

В докладе будут изложены некоторые результаты, касающиеся геометрии почти эрмитовых структур на  $S^6$  и  $S^2 \times S^4$ , полученные в ходе изучения компактных односвязных почти эрмитовых 6-мерных многообразий кооднородности один. Многообразие кооднородности один это многообразие с достаточно большой группой симметрии, в том смысле, что на многообразии действует компактная группа Ли с одномерным пространством орбит. В определенном смысле многообразия кооднородности один являются многообразиями со следующей после однородных пространств "наибольшей" группой симметрий. Компактные односвязные многообразия кооднородности один малых размерностей были классифицированы К. Хелишером [1, 2]. В размерности 6 каждое из них диффеоморфно одному из следующих: компактное симметрическое пространство; нетривиальное  $S^4$ -сферическое расслоение над  $S^2$ ; нетривиальное  $\mathbb{C}P^2$  расслоение над  $S^2$  со структурной группой  $SU(3)/\mathbb{Z}_3$ ;  $S^2$ -сферическое расслоение над  $\mathbb{C}P^2$ ;  $S^2 \times S^2$  со структурной группой редуцируемой к  $SO(2)$ .



На  $S^6$  и  $S^2 \times S^4$  определено действие группы  $SU(2) \times SU(2)$  формулами  $(g_1, g_2) \in SU(2) \times SU(2) : (p, q) \in S^6 \subset \mathbb{H} \times Im(\mathbb{H}) \mapsto (g_1 p g_2^{-1}, g_2 q g_2^{-1})$ ,  $(g_1, g_2) \in SU(2) \times SU(2) : (p, q, t) \in S^2 \times S^4 \subset Im(\mathbb{H}) \times (\mathbb{H} \times \mathbb{R}) \mapsto (g_1 p g_1^{-1}, g_1 q g_2^{-1}, t)$  соответственно. В обоих случаях это действие кооднородности 1 с главными орбитами диффеоморфными  $S^2 \times S^3$ . Сингулярные орбиты действия на  $S^6$  диффеоморфны  $S^2$  и  $S^3$ , а на  $S^2 \times S^4$  обе сингулярные орбиты диффеоморфны  $S^2$ . Инвариантные относительно этого действия почти эрмитовы структуры определяются  $ad(\Delta SU(2))$ -инвариантной римановой метрикой и 2-формой на касательном пространстве в начале однородного пространства  $S^2 \times S^3 = SU(2) \times SU(2)/\Delta SU(2)$ , компоненты которых — функции от одной переменной, удовлетворяющие некоторым граничным условиям, необходимым для гладкого продолжения структур на сингулярные орбиты.

**Теорема 1.** На множестве почти эрмитовых структур кооднородности один на  $S^6$  со стандартной метрикой вложения в  $\mathbb{R}^7$  классы  $W_1 \oplus W_3 \oplus W_4 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 = W_1, W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 = \emptyset$  в терминах классификации Грэя-Хервеллы.

**Теорема 2.** Почти комплексные структуры кооднородности один на  $S^6$  не интегрируемы.

**Теорема 3.** [3] На  $S^2 \times S^4$  существует серия квази-келеровых структур кооднородности один.

## Список литературы

- [1] Hoelscher C. A. *Classification of cohomogeneity one manifolds in low dimensions*. Pac. J. Math., 2010, 1, Vol. 246, p. 129–186
- [2] Hoelscher C. A. *Diffeomorphism type of six-dimensional cohomogeneity one manifolds*. Ann. Glob. Anal. Geom., 2010, 1, Vol. 38, p. 1–9
- [3] Даурцева Н. А. *Квази-келеровы структуры кооднородности 1 на  $S^2 \times S^4$* . Сиб. матем. журн., 2020, Vol. 61, 4, p. 765–776

## О минимальных изотропных поверхностях в $\mathbb{C}P^3$

М.С. Ерментай

Специализированный учебно-научный центр НГУ

Новосибирский государственный университет

ermentay.m@gmail.com

Данная работа посвящена изучению минимальных изотропных торов в  $\mathbb{C}P^3$ . Мы показываем, что один из классов таких поверхностей отвечает гладким периодическим решением уравнения sh-Gordon. В работе получена система нелинейных дифференциальных уравнений, которая описывает минимальные изотропные поверхности в  $\mathbb{C}P^3$ :

$$-V_2 V_3 + V_1 V_4 = 0,$$

$$4e^v - e^{-2v}(k_1^2 + k_2^2) - 2e^{-v}(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2) + \Delta v = 0,$$



$$\begin{aligned}
k_2 V_3 - k_1 V_4 + e^v (V_{1y} - V_{2x}) &= 0, \\
-k_2 V_1 + k_1 V_2 + e^v (V_{3y} - V_{4x}) &= 0, \\
-k_1 V_3 - k_2 V_4 + e^v (V_{2y} + V_{1x}) &= 0, \\
k_1 V_1 + k_2 V_2 + e^v (V_{4y} + V_{3x}) &= 0.
\end{aligned}$$

где  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ,  $V_i(x, y)$  — некоторые вещественные двояко периодические функции. Из этой системы можно выделить два естественных случая, когда она сводится к одному уравнению. Первый — к уравнению Цицейки. Этот случай отвечает поверхностям, которые содержатся в комплексной проективной плоскости, т.е. ранее изученному случаю минимальных лагранжевых поверхностей. Второй случай — когда система сводится к уравнению sh-Gordon. В этом случае поверхность не содержится ни в какой комплексной проективной плоскости. В работе получены частные решения указанной системы.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1675.

## Глобальная теория бифуркаций и приложения планарных полиномиальных динамических систем

В.А. Гайко

Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси  
valery.gaiko@gmail.com

Обсуждаются возможности применения глобальной теории бифуркаций планарных полиномиальных динамических систем и ее методов для решения 16-й проблемы Гильберта о максимальном числе и взаимном расположении предельных циклов. В частности, рассматриваются квадратичные системы и специальные классы полиномиальных систем, используемые в приложениях, а именно: проводится глобальное качественное исследование известной модели нейрона ФитцХью-Нагумо; кубично-линейной системы Куклеса и общей полиномиальной системы Льенара, используемых для моделирования электротехнических комплексов и систем; механической системы Эйлера-Лагранжа-Льенара, моделирующей динамику робототехнических комплексов и систем; квартичных биомедицинских и экологических систем Холлинга и Лесли-Говера типа «хищник-жертва», моделирующих динамику численности двух популяций; а также редуцированной квартичной системы Топпа, моделирующей динамику диабета.

## **О коммутирующих элементах в первой алгебре Вейля над рациональными числами**

**А.Ф. Гундарева**

Математический центр в Академгородке

`al.gundareva@gmail.com`

Проблема явного построения примеров коммутирующих дифференциальных операторов известна давно. Хотя кольца коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов классифицируются в терминах геометрических спектральных данных, явное построение примеров коммутирующих операторов ранга, больше 1 представляет собой по-прежнему трудную задачу, поскольку в этом случае в набор спектральных данных входит набор трансцендентных параметров (произвольных функций). Еще сложнее строить примеры коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля с рациональными коэффициентами. Исследование орбит пар коммутирующих операторов под действием группы автоморфизмов алгебры Вейля представляет особый интерес, поскольку связано с известной открытой гипотезой Диксмье описания эндоморфизмов первой алгебры Вейля.

Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 порядков 4 и 6, отвечающие эллиптической спектральной кривой, найдены И. М. Кричевером и С. П. Новиковым. Коэффициенты этих операторов выражаются через эллиптические функции, причем коэффициенты зависят от произвольного функционального параметра. С помощью этих операторов построены семейства коммутирующих пар операторов с рациональными коэффициентами с эллиптической спектральной кривой.

## **Динамика многозвенных колёсных систем**

**А.А. Килин, И.С. Мамаев, Е.М. Артемова**

Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет

`kilin@rcd.ru, mamaev@rcd.ru, liz-artemova2014@yandex.ru`

В работе рассматриваются задачи о свободном и управляемом движении многозвенных колесных экипажей. Рассмотрено несколько конструкций мобильных колесных систем как в рамках неголономной модели качения, так и в присутствии трения качения. В рамках неголономной модели предполагается, что отсутствует проскальзывание между колесами и подстилающей поверхностью. В качестве модели трения выбрана вязкая модель трения линейно зависящая от угловых скоростей вращения колес. Указаны динамические эффекты, возникающие при свободном качении рассматриваемых систем. При исследовании управляемого движения в качестве управляющих воздействий рассматриваются углы взаимного расположения отдельных звеньев экипажа. Для исследуемых задач определены границы применимости неголономной модели и границы управляемости системы по Рашевскому-Чжоу.

## Качественный анализ динамики частиц в метрике Керра

И.С. Мамаев, И.А. Бизяев

Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет  
mamaev@rcd.ru

Метрика Керра является цилиндрически симметричным решением уравнений Эйнштейна, которое описывает гравитационное поле вращающейся черной дыры. В координатах Бойера – Линдквиста  $x = (t, r, \theta, \varphi)$  метрика Керра представляется в следующей форме

$$ds^2 = \frac{\Delta(r)}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\varphi - a dt)^2 - \rho^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta(r)} + d\theta^2 \right), \quad (1)$$
$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta(r) = r^2 - 2r + a^2.$$

Траектории частиц в этом гравитационном поле описывается гамильтоновой системой с двумя степенями свободы

$$\frac{dp_r}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{dp_\theta}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{dr}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta},$$
$$H = \frac{1}{2\rho^2} \left( \frac{p_r^2}{\Delta} + p_\theta^2 \right) + V, \quad (2)$$
$$V = \frac{1}{2\Delta\rho^2} \left( -(\Delta\rho^2 + 2r(r^2 + a^2))E^2 + 4arEL + \left( \frac{\Delta}{\sin^2 \theta} - a^2 \right) L^2 \right),$$

где  $E$  — это энергия частицы, а  $L$  — проекция ее момента импульса на ось вращения. Система (2) обладает дополнительным квадратичным по импульсам интегралом Картера и, следовательно, является интегрируемой по Лиувиллю-Арнольду системой. В работе построена бифуркационная диаграмма и выполнена классификация типов траекторий системы (2) в зависимости от значений первых интегралов.

## Об одноточечных коммутирующих разностных операторах

Г.С. Маулешова, А.Е. Миронов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

mauleshova@math.nsc.ru, mironov@math.nsc.ru

Коммутирующие дифференциальные и разностные операторы представляют как самостоятельный интерес, так и интерес с точки зрения приложений к интегрируемым солитонным уравнениям. При этом двухточечные коммутирующие разностные и дифференциальные операторы ранга один хорошо изучены. Совместные собственные функции таких операторов могут быть найдены явно. Случай операторов ранга больше 1 является очень сложным. Первые примеры таких операторов в случае спектральных кривых рода больше 1 были построены совсем недавно. В докладе будет рассказано взаимосвязь между одноточечными коммутирующими разностными операторами ранга два (операторами

Кричевера-Новикова), которые отвечают эллиптической спектральной кривой, и коммутирующими дифференциальными операторами с той же спектральной кривой. А именно, мы планируем показать, что коммутирующие дифференциальные операторы могут быть получены предельным переходом из одноточечных коммутирующих разностных операторов ранга два.

Работа поддержана при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1675.

## **Рост узких алгебр Ли и интегрируемость**

Д.В. Миллионщиков

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

mitia\_m@hotmail.com

Зельманов и Шалев предложили называть узкими положительно градуированные алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ ,  $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ , с не более, чем двумерными однородными компонентами  $\mathfrak{g}_i$ . Примеры таких алгебр Ли можно встретить в самых разных задачах. В частности, эти алгебры имеют медленный линейный рост. Самый известный пример – положительная часть алгебры Витта (Вирасоро). Узкие алгебры изучала Вернь (филиформные алгебры Ли) задолго до Зельманова и Шалева.

Другой важный и интересный класс положительно градуированных алгебр Ли – это алгебры Карно. Они удовлетворяют дополнительному условию  $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$ ,  $\forall i$ . Алгебры Карно рассматривались Вершиком и Гершковичем под названием однородных алгебр Ли в работах по неголономной геометрии.

В докладе мы обсудим, как рост узких естественно градуированных алгебр Ли связан с интегрируемостью некоторых гиперболических уравнений в частных производных, а также с интегрируемостью комплексных структур на нильмногообразиях.

## **Свободное и управляемое качение шарового волчка по вибрирующей плоскости**

Е.Н. Пивоварова, А.А. Килин

Уральский математический центр, Удмуртский государственный университет

archive@rcd.ru, kilin@rcd.ru

Работа посвящена исследованию задачи о качении шарового волчка, представляющего собой сферу с закрепленным в ее центре осесимметричным маятником, без проскальзывания по вибрирующей плоскости. Показано, что рассматриваемая система допускает частные решения (стационарные вращения), при которых маятник вращается относительно вертикально расположенной оси своей симметрии. Подробно исследованы вопросы устойчивости и стабилизации данных решений. Проведен анализ реакции связей, и выделены области параметров, при которых возможна безотрывная стабилизация волчка.

Показано, что указанные частные решения можно стабилизировать с помощью изменения угловой скорости вращения маятника относительно оси своей симметрии, причем вращение маятника является необходимым условием безотрывной стабилизации.

## From (super)Conformal Blocks to Integrable Quantum Mechanics and back

Е.М. Собко

Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера  
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН  
evgenysobko@gmail.com

The Conformal Bootstrap Programme, which was originally formulated in the series of seminal papers [1] almost half century ago has recently got substantial development [2,3] and raised hopes for a non-perturbative analysis of conformal field theories in any dimension, even of theories for which an action cannot be written down or a microscopic (UV) description is not known. This symmetry-based programme rests on a careful separation of kinematical and dynamical data in correlation functions, i.e. on the split into the kinematical conformal blocks and the dynamical coefficients of the operator product expansion (OPE). The latter are severely constrained by the so-called crossing symmetry equations, an infinite set of coupled equations for the OPE structure constants with kinematically determined coefficients built of conformal blocks and tensor structures.

Recently we developed a universal approach [4,5] to general conformal blocks in any CFT ( $D > 2$ ) through the harmonic analysis on certain bundles over a quotient of the conformal group. The resulting Casimir equations are given by a matrix version of the integrable Calogero-Sutherland Hamiltonian that describes scattering of interacting spinning particles in a 1-dimensional external potential and conformal blocks play the role of wavefunction. Our approach furnishes solutions of Casimir equations for external fields of arbitrary spin and dimension in terms of functions on the conformal group. This allows us to build a systematic solution theory using representation theory of conformal group and the theory of Calogero-Sutherland models, particularly it recovers the simple group-theoretic meaning of early discovered seed conformal blocks and weight-shifting operators. At the same time, our approach has natural generalization to superconformal theories, particularly we worked out the general superconformal blocks in four dimensions [6] and wrote the supercrossing equations [7,8] for the 4-point function with any external long operators, what in principle allows to carry out the Conformal Bootstrap Programme for 4D superconformal theories.

## Список литературы

- [1] S. Ferrara, A. F. Grillo and R. Gatto, T Annals Phys. 76 (1973) 161; A. M. Polyakov, Zh. Eksp.Theor. Fiz. 66 (1974) 23; G. Mack, Nucl. Phys. B 118 (1977) 445.
- [2] R. Rattazzi, V. S. Rychkov, E. Tonni and A. Vichi, “Bounding scalar operator dimensions in 4D CFT,” JHEP **12** (2008), 031 doi:10.1088/1126-6708/2008/12/031 [arXiv:0807.0004 [hep-th]].

- [3] D. Poland, S. Rychkov and A. Vichi, “The Conformal Bootstrap: Theory, Numerical Techniques, and Applications,” *Rev. Mod. Phys.* **91** (2019), 015002 doi:10.1103/RevModPhys.91.015002 [arXiv:1805.04405 [hep-th]].
- [4] V. Schomerus, E. Sobko and M. Isachenkov, “Harmony of Spinning Conformal Blocks,” arXiv:1612.02479 [hep-th].
- [5] V. Schomerus and E. Sobko, “From Spinning Conformal Blocks to Matrix Calogero-Sutherland Models,” arXiv:1711.02022 [hep-th].
- [6] I. Buric, V. Schomerus, E. Sobko, "Superconformal Blocks: General Theory arXiv:1904.04852, *JHEP* 01 (2020) 159
- [7] I. Buric, V. Schomerus and E. Sobko, “The Superconformal X-ing Equation,” [arXiv:2005.13547 [hep-th]].
- [8] I. Buric, V. Schomerus and E. Sobko, "Crossing Symmetry for Long Multiplets in 4D  $\mathcal{N} = 1$  SCFTs *JHEP* 04 (2021) 130 , arXiv:2011.14116

## **Несуществование универсальной системы нулевой энтропии для непериодических аменабельных групп**

Г.А. Вепрев

Санкт-Петербургский международный математический институт им. Л. Эйлера  
egor.veprev@mail.ru

Пусть аменабельная группа  $G$  действует гомеоморфизмами на метрическом компакте  $X$ . Система  $(G, X)$  называется универсальной для некоторого класса  $S$  эргодических метрических действий  $G$ , если для любой инвариантной меры на  $X$  соответствующая метрическая система принадлежит  $S$ , и обратно, любая система из  $S$  представима инвариантной мерой на  $X$ .

J. Serafin доказал, что в случае группы  $Z$  такой системы не существует для класса  $S$ , состоящего из действий нулевой энтропии. Мы доказываем несуществование универсальной системы нулевой энтропии для любой непериодической аменабельной группы  $G$ .

Доказательство основано на инварианте энтропийного типа, предложенном в работах А. М. Вершика — масштабированной энтропии. В докладе приводится обзор масштабированной энтропии и основных шагов в доказательстве результата.

## Electrical networks and Lagrangian Grassmannians

Б.С. Бычков

Высшая школа экономики

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

bbychkov@hse.ru

Electrical network is a graph in a disk with inner and outer sets of vertices and positive weight on each edge which means conductance. The (compactified) space of electrical networks coincides with the certain linear slice of the totally nonnegative Grassmannian  $\text{Gr}(n-1, 2n)_{\geq 0}$ . I will talk about the new parametrisation of the electrical variety, using the response matrix of an electrical network, which defines an embedding into the nonnegative Lagrangian Grassmannian  $\text{IG}(n-1, 2n-2)_{\geq 0}$ . The talk is based on the joint work in progress with V. Gorbounov, A. Kazakov and D. Talalaev.

## Electrical and Ising networks and dimer models

А.А. Казаков

Высшая школа экономики

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

anton.kazakov.4@mail.ru

I will continue the talk of Boris Bychkov and will focus on the applications of the embedding defined by response electrical matrices into the nonnegative Lagrangian Grassmannian  $\text{IG}(n-1, 2n-2)_{\geq 0}$ . As an important example, I will show that the Kenyon–Wilson theorem about polynomial formulas of special partition functions of trees could be obtained as a consequence of our embedding. Also I will talk about the relation of our technique with the embedding in the positive part of orthogonal Grassmannian of Ising models. In particular, using the Gorbounov–Talalaev vertex-model technique for electrical networks, I will demonstrate the construction of the full «electrical» analogue of Galashin and Pylyavskyy dimers models for Ising models. Using this construction I will show that the star-triangle transformation for Ising models and electrical networks could be obtained by the superurban renewal transformation of dimer models. Finally, I will demonstrate how the star-triangle transformation for these models related with the Sergeev–Korepanov–Kashaev solution of the Yang–Baxter and Zamolodchikov equations. The talk is based on a joint ongoing work with B. Bychkov, V. Gorbounov and D. Talalaev.

## A discrete Darboux–Lax scheme for solving systems of integrable difference equations

К.И. Фисенко

Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
`xenia.fisenko9@yandex.ru`

In this talk we present a new discrete Darboux–Lax scheme for constructing solutions to quad-graph equations that do not necessarily possess the  $3D$ -consistency property. As an illustrative example we use an Adler–Yamilov type of system that is the compatibility condition of two Darboux transformations for the nonlinear Schrödinger (NLS) equation. In particular, we construct a Bäcklund transformation for this Adler–Yamilov system and we employ it to construct a parametric family of interesting solutions, including kink soliton solutions, starting from a simple seed one.

This is a joint work with S. Konstantinou-Rizos (P.G. Demidov Yaroslavl State University, Russia) and P. Xenitidis (Liverpool Hope University, UK). This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2021-1397 for the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of YarSU).

## Tetrahedron maps and the algebraic relations that define them

В.А. Колесов

Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
`vadik.kolesov2015@yandex.ru`

In this talk we generalise some results obtained by Buchstaber [1] on linear Yang–Baxter maps and also the results presented in [2] on linear parametric Yang–Baxter maps to the case of tetrahedron maps. In particular, we clarify the structure of the nonlinear algebraic relations which define linear (parametric) tetrahedron maps (with nonlinear dependence on parameters), and we present several transformations which allow one to obtain new such maps from known ones. Moreover, using the fact that the differential of a tetrahedron map is a tetrahedron map itself, we construct parametric families of linear tetrahedron maps.

This is a joint work with S. Igonin, S. Konstantinou-Rizos and M. Preobrazhenskaia [3]. This work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 20-71-10110).

## Список литературы

- [1] V.M. Bukhshtaber V M, Yang–Baxter mappings, Russian Math. Surveys, **53**, 1343–1345 (1998).
- [2] V. Buchstaber, S. Igonin, S. Konstantinou-Rizos, and M. Preobrazhenskaia, Yang–Baxter maps, Darboux transformations, and linear approximations of refactorisation problems, J. Phys. A: Math. Theor., **53**, 504002 (2020).
- [3] S. Igonin, V. Kolesov, S. Konstantinou-Rizos, and M. Preobrazhenskaia, Tetrahedron maps, Yang–Baxter maps, and partial linearisations, arXiv:2106.09130 (2021).



## NLS type tetrahedron maps

С. Константину-Ризос

Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
skonstantin84@gmail.com

This talk is concerned with the construction of new solutions in terms of birational maps to the functional tetrahedron equation and parametric tetrahedron equation. We present a method for constructing solutions to the parametric tetrahedron equation via Darboux transformations. In particular, we study matrix refactorisation problems for Darboux transformations associated with the nonlinear Schrödinger (NLS) and the derivative nonlinear Schrödinger (DNLS) equation, and we construct novel nine-dimensional tetrahedron maps. We show that the latter can be restricted to six-dimensional parametric tetrahedron maps on invariant leaves. Finally, we construct parametric tetrahedron maps employing degenerated Darboux transformations of NLS and DNLS type.

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2021-1397 for the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of P.G. Demidov Yaroslavl State University).

## Список литературы

- [1] S. Konstantinou-Rizos. Nonlinear Schrödinger type tetrahedron maps, J. Nuc. Phys. B 960 (2020) 115207.

## Quantisation of Nonabelian Dynamical Systems. Quantisation Ideals

А.В. Михайлов

Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
A.V.Mikhailov@leeds.ac.uk

*The correspondence between the quantum and classical theories lies not so much in the limiting agreement when  $\hbar \rightarrow 0$  as in the fact that the mathematical operations on the two theories obey in many cases the same laws. P.A.M. Dirac [1]*

In my talk I propose a new approach to the problem of quantisation of dynamical systems, introduce the concept of quantisation ideals and provide meaningful examples [2]. Traditionally, quantisation theories start with classical Hamiltonian systems with variables taking values in commutative algebras and then study their non-commutative deformations, such that the commutators of observables tend to the corresponding Poisson brackets as the (Planck) constant of deformation goes to zero. Moreover, the commutation relations have to be consistent with the dynamics which may be far not obvious [1].

In the new approach it is proposed to depart from systems defined on a free associative algebra  $\mathfrak{A}$ , i.e. to start from a *non-commutative free associative mechanics*. In this framework the problem of quantisation is reduced to description of two-sided ideals  $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$  (the *quantisation ideals*) which define commutation relations in the quotient algebras  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ . The ideal  $\mathfrak{J}$

must be invariant with respect to the dynamics of the non-commutative system. Surprisingly, this idea works rather efficiently and in a number of cases it enables us to find commutation relations manifestly compatible with the system. Such quantisations may not originate from deformations of commutative dynamical systems.

For example, the cubic symmetry

$$\begin{aligned} u_{n,\tau} &= u_n u_{n-1} u_{n-2} + u_n u_{n-1} u_{n-1} + u_n u_n u_{n-1} \\ &- u_{n+1} u_n u_n - u_{n+1} u_{n+1} u_n - u_{n+2} u_{n+1} u_n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (1)$$

of the non-commutative Volterra system  $u_{n,t} = u_{n+1} u_n - u_n u_{n-1}$  admits two distinct quantisations with commutation relations:

$$\begin{aligned} (a) \quad & u_n u_{n+1} = \alpha u_{n+1} u_n, \quad u_n u_m = u_m u_n, \\ (b) \quad & u_n u_{n+1} = (-1)^n \alpha u_{n+1} u_n, \quad u_n u_m = -u_m u_n, \end{aligned} \quad n - m \geq 2.$$

The first one (a) was known, it had been derived in the quantum theory of the Volterra model [3]. It is a deformation of the commutative system ( $\alpha \rightarrow 1$ ). The second quantisation (b) is new. It is not compatible with the Volterra dynamics, but compatible with all odd power symmetries of equation (1) and, obviously, it is not a deformation of the commutative system.

Other examples of quantisation, including Bogoyavlensky's systems, Novikov's finite-gap hierarchies of the KdV equation and systems of two equations with quadratic nonlinearity will also be discussed in the talk.

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2021-1397 for the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of YarSU).

## Список литературы

- [1] P.A.M. Dirac. The Fundamental Equations of Quantum Mechanics. *Proc. R. Soc. London, Series A*, v. 109, (752):642–653, 1925.
- [2] A.V.Mikhailov. Quantisation ideals of nonabelian integrable systems. *Russ. Math. Surv.*, v. 75, (5): 978, 2020. (arXiv preprint arXiv:2009.01838).
- [3] A.Yu.Volkov. Quantum Volterra model, *Phys. Lett. A* 167, 345-355, 1992

## Bifurcation Diagram of a Certain Integrable Case of Vortex Dynamics

С.В. Соколов, П.Е. Рябов, Г.П. Пальшин

Московский физико-технический институт

sokolov.sv@phystech.edu

An integrable case of vortex dynamics is considered, which describes the dynamics of two vortices in a cylindrical region. This study is devoted to the generalization of the results of the works [1–4], in which the statement of the problem is stated. The Hamiltonian form of the equations of motion for an arbitrary number of vortices is given, as well as an additional

first integral. We consider a one-parameter family of integrable Hamiltonians describing both the case of vortices in an ideal fluid and the case of vortices in a Bose-Einstein condensate.

A new bifurcation diagram is obtained. An explicit reduction procedure is described. The absolute motions of the vortices are considered.

This work was supported by RFBR grants No. 18-29-10051 mk, 20-01-00399 A.

## Список литературы

- [1] Sokolov, S. V. and Ryabov, P. E., Bifurcation Analysis of the Dynamics of Two Vortices in a Bose–Einstein Condensate. The Case of Intensities of Opposite Signs, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2017, vol. 22, no. 8, pp. 979–998.
- [2] Sokolov, S. V. and Ryabov, P. E. Bifurcation Diagram of the Two Vortices in a Bose-Einstein Condensate with Intensities of the Same Signs, *Doklady Mathematics*, 2018, vol. 97, no. 3, pp. 286–290.
- [3] Pavel E. Ryabov and Artemiy A. Shadrin, Bifurcation Diagram of One Generalized Integrable Model of Vortex Dynamics, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, Vol. 24, No. 4, pp. 418–431.
- [4] Ryabov, P. E., Sokolov, S. V. Phase Topology of Two Vortices of Identical Intensities in a Bose-Einstein Condensate, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2019, vol. 15, no. 1, pp. 59–66.

## Оснащенные графы, интегрируемые системы статистической физики в старших размерностях и уравнение тетраэдров

Д.В. Талалаев

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

[dtalalaev@yandex.ru](mailto:dtalalaev@yandex.ru)

Оснащенные графы – это граф с функцией на ребрах или вершинах, объект смешанной дискретной и непрерывной природы. Они возникают в широком круге математических задач и теорий. Одной из современных областей, в которых возникают такие структуры, является так называемая петлевая квантовая гравитация, в которой изучают спиновые пены и различные наблюдаемые на них. Я расскажу, как общий подход к построению инвариантов 2-узлов и 3-х мерных интегрируемых моделей статистической физики, основанный на уравнении тетраэдров Замолодчикова, может применяться к вычислениям на спиновых пенах, в том числе для подсчета количества их трехцветных раскрасок.

# Высшие симметрии полудискретных уравнений гиперболического типа. Полудискретная версия уравнения Цицейки

Р.Н. Гарифуллин Р.Н.  
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН  
rustem@matem.anrb.ru

В докладе рассматриваются интегрируемые уравнение вида

$$u_{n+1,x} = f(u_{n,x}, u_{n+1}, u_n, x).$$

Исторические такие уравнения возникали как преобразования Бэклунда для нелинейных уравнений в частных производных эволюционного типа. Наиболее известным представителем этого класса является одевающая цепочка

$$u_{n+1,x} = u_{n,x} + u_{n+1}^2 - u_n^2,$$

которая возникла как преобразование Бэклунда для модифицированного уравнения Кортевега де Вриза:

$$u_{n,t} = u_{n,xxx} - 6u_n^2 u_{n,x}.$$

С другой стороны уравнение КдВ можно рассматривать как высшую симметрию полудискретного уравнения. По второму – дискретному направлению высшая симметрия имеет вид

$$u_{n,\tau} = \frac{(u_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n-1})}{u_{n+1} - u_{n-1}}$$

и является известным дифференциально-разностным уравнением.

В этом докладе представлен способ построения высших симметрий таких полудискретных уравнений по обоим направлениям. Приводятся 2 примера: один из них известный – полудискретная версия уравнения синус-Гордона, второй является новым – полудискретной версией уравнения Цицейки:

$$u_{n+1,x} = u_{n,x} + (e^{-2u_n} + e^{-2u_{n+1}}) + \sqrt{e^{2u_n} + e^{2u_{n+1}}}.$$

Для этого нового уравнения и его высших симметрий приведены представления Лакса. Найденные пары Лакса выписываются в терминах матриц порядка  $3 \times 3$  либо в операторном виде.

Более подробное изложение результатов дано в [1,2].

## Список литературы

- [1] R. N. Garifullin and I. T. Habibullin, “Generalized symmetries and integrability conditions for hyperbolic type semi-discrete equations”, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 54:20 (2021), 205201, 19 pp.
- [2] Гарифуллин Р. Н., "Об интегрируемости полудискретного уравнения Цицейки Уфимский математический журнал, 13:2 (2021), с. 18–24.

# Периодические режимы типа бегущих волн в полносвязных нейронных сетях

С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов

Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
glyzin.s@gmail.com, kolesov@uniyar.ac.ru

Рассматривается полносвязная сеть из  $m$ ,  $m \geq 2$  нейронов, взаимодействующих посредством химических синапсов (см. методику, предложенную в статьях [1, 2])

$$\dot{u}_j = \left[ \lambda f(u_j(t-1)) + b \left( \sum_{s=1, s \neq j}^m g(u_s(t-\Delta)) \right) \ln \frac{u_*}{u_j} \right] u_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Здесь  $u_j = u_j(t) > 0$  – мембранный потенциал  $j$ -ого нейрона сети, параметр  $\lambda > 0$ , характеризующий скорость протекания электрических процессов в нейроне, предполагается большим,  $b = \text{const} > 0$ ,  $u_* = \exp(\lambda c)$ ,  $c = \text{const} \in \mathbb{R}$ ,  $\Delta > 0$  – дополнительное запаздывание в химических синапсах, точка – дифференцирование по  $t$ , а функции  $f(u), g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ ,  $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$ ,  $g(u) > 0 \forall u > 0$ , обладают свойствами:  $f(0) = 1$ ,  $g(0) = 0$ ,  $f(u) + a = g(u) - 1 = uf'(u) = ug'(u) = u^2 f''(u) = u^2 g''(u) = O(u^{-1})$  при  $u \rightarrow +\infty$ .

Изучается вопрос о существовании и устойчивости так называемых периодических режимов  $k$ -доминирования. Эти режимы характеризуются тем, что группа из  $k : 1 < k < m$  произвольно выбранных нейронов сети генерирует синхронные периодические импульсы, а остальные нейроны практически не возбуждены. Как удалось показать, при надлежащем выборе параметров в системе (1) может сосуществовать до  $2^m - 1$  устойчивых циклов группового доминирования. Анализ полученных в работе условий существования этих циклов показывает, что данного эффекта всегда можно добиться при фиксированных  $a$ ,  $b$ ,  $m$  и при достаточно больших по модулю отрицательных значениях параметра  $c$ .

Следует отметить, что модель (1) с максимально большим числом связей позволяет описать наиболее сложное и разнообразное поведение, возможное в биологических нейронных ассоциациях. Особенностью рассмотренных нами режимов  $k$ -доминирования является то, что часть нейронов сети находится в неработающем (рефрактерном) состоянии. Несмотря на это такие режимы могут играть существенную роль в функционировании рассматриваемых ассоциаций, поскольку в обработке информации мозгом могут играть роль не только аттракторы соответствующей динамической системы, но и различные переходные процессы. Учитывая относительную узость области притяжения соответствующих циклов, такие переходные процессы непременно появятся при условии учета случайных воздействий. Вместе с тем, имеется простой способ применения построенных режимов для конструирования искусственных нейронных сетей с заданными свойствами. С этой целью каждому периодическому режиму  $k$ -доминирования может быть поставлен в соответствие бинарный вектор  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ , где  $\alpha_j = 1$  если  $j$ -й нейрон активен и  $\alpha_j = 0$  в противном случае. Принимая во внимание это обстоятельство, приходим к выводу, что данные режимы могут быть использованы для построения устройств с ассоциативной памятью на их основе.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение № 075-02-2021-1397).

## Список литературы

- [1] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Об одном способе математического моделирования химических синапсов // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 10. С. 1227–1244. DOI: 10.1134/S0374064113100014.
- [2] Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // УМН. 2015. Т. 70, № 3 (423). С. 3–76. DOI: 10.4213/rm9659.

## Преобразования Бэклунда для $(1+1)$ -мерных интегрируемых систем: их алгебра, геометрия и приложения

С.А. Игонин

Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
s-igonin@yandex.ru

Эволюционное  $(1+1)$ -мерное уравнение — это дифференциальное уравнение в частных производных, имеющее вид  $u_t = F(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots)$ , где нижние индексы обозначают дифференцирование вектор-функции  $u = (u^1(x, t), \dots, u^n(x, t))$  конечной размерности  $n$ . Порядок производных по  $x$  может быть произвольным. Известно, что очень многие дифференциальные уравнения могут быть записаны в таком виде после подходящей замены переменных.

В докладе рассматриваются свойства интегрируемости в смысле теории солитонов для таких уравнений. Самыми известными примерами интегрируемых нелинейных эволюционных  $(1+1)$ -мерных уравнений являются уравнения Кортевега–де Фриза (KdV), Кричевера–Новикова, Ландау–Лифшица и нелинейное уравнение Шрёдингера.

Известно, что теория интегрируемости в смысле теории солитонов для  $(1+1)$ -мерных уравнений основана на использовании представлений нулевой кривизны (ПНК) и преобразований Бэклунда, позволяющих получать для интегрируемых уравнений явные решения, в том числе солитонные решения.

Для любого эволюционного  $(1+1)$ -мерного уравнения мы строим семейство алгебр Ли, которые ответственны за все ПНК и преобразования Бэклунда этого уравнения в следующем смысле: ПНК и преобразования Бэклунда, рассматриваемые с точностью до калибровочной эквивалентности, соответствуют представлениям построенных алгебр, в том числе представлениям векторными полями на многообразиях. При этом ПНК и преобразования Бэклунда могут зависеть от производных любого порядка, который может быть даже больше порядка исходного уравнения.

Построенные алгебры обобщают алгебры Уолквиста–Эстабрука (Wahlquist–Estabrook prolongation algebras), которые ответственны за существенно меньший класс представлений нулевой кривизны и преобразований Бэклунда.

В качестве приложения получены необходимые условия для существования преобразования Бэклунда между двумя данными уравнениями. Это позволило доказать несуществование преобразований Бэклунда для многих пар уравнений.

В изученных примерах в структуре построенных алгебр Ли обнаруживаются бесконечномерные подалгебры алгебр Каца–Мууди (Kac–Moody algebras) и бесконечномерные

алгебры, состоящие из матричнозначных функций на некоторых алгебраических кривых, в том числе эллиптических кривых.

Часть результатов доклада основана на совместных работах с Gianni Manno (Politecnico di Torino, Италия):

S. Igonin, G. Manno, Journal of Geometry and Physics 150 (2020), 103596;

S. Igonin, G. Manno, Journal of Geometry and Physics 138 (2019), 297-316.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2021-1397).

## Релаксационные режимы в кольце связанных осцилляторов

А.А. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

a.kashchenko@uniyar.ac.ru

Рассмотрим систему из  $N$  ( $N \geq 4$ ) нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{u}_j + u_j &= \lambda F(u_j(t - T)) + \gamma(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}), \quad (j = 1, \dots, N) \\ u_0 &= u_N, \quad u_{N+1} = u_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u_j$  — действительные функции,  $F$  — кусочно-гладкая ограниченная финитная функция (то есть  $F(x) \equiv 0$  при  $|x| \geq p$ , где  $p$  — некоторая положительная константа), величина запаздывания  $T$  — положительная константа, ненулевой параметр связи  $\gamma$  удовлетворяет неравенству  $\gamma > -\frac{1}{4}$ , положительный параметр  $\lambda$  является достаточно большим ( $\lambda \gg 1$ ). Система (1) моделирует кольцо из осцилляторов с запаздывающей обратной связью.

Мы выделяем специальное множество начальных условий в фазовом пространстве  $C([-T, 0]; \mathbb{R}^N)$  и строим асимптотику всех решений системы (1) с начальными условиями из этого множества. В результате получаем, что при положительных значениях параметра  $\gamma$ , начиная с некоторого момента времени, все осцилляторы синхронизируются. При отрицательных значениях  $\gamma > -\frac{1}{4}$  при четном числе осцилляторов наблюдается двухклатерная синхронизация, а при нечетном числе осцилляторов наблюдаются как релаксационные циклы, так и нерегулярные колебания.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

# Бифуркации в уравнениях с запаздыванием

И.С. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

iliyask@uniyar.ac.ru

Основное внимание в работе уделено бифуркационному эффекту, при котором при стремлении малого параметра к нулю, возникает бесконечный процесс прямых и обратных бифуркаций.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с одним или несколькими запаздываниями

$$\dot{x} = f(x(t), x(t - T_1), \dots, x(t - T_m)) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

где  $T_1 > \dots > T_m > 0$ . Считая, что  $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ , изучим поведение решений в окрестности состояния равновесия  $x = 0$ . Основное предположение состоит в том, что рассматриваемая задача является сингулярно возмущенной. Это может быть, например, если запаздывание  $T_1$  достаточно велико:  $T_1 \gg 1$ . Заменой времени удобно перевести исходное уравнение к виду

$$\varepsilon \dot{x} = f(x(t), x(t - h_1), \dots, x(t - h_m)), \quad \varepsilon = T_1^{-1} \ll 1, \quad h_i = T_i/T_1. \quad (1)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(a_0 + a_1 e^{-\lambda} + \dots + a_m e^{-h_m \lambda} - \varepsilon \lambda I) = 0, \quad (2)$$

где  $a_0 = f'_x(0)$ ,  $a_j = f'_{x(t-h_j)}(0)$ .

Рассмотрим ситуацию, когда у (2) нет корней с положительной вещественной частью (отделенных от мнимой оси при малых  $\varepsilon$ ) и есть корни, расположенные сколь угодно близко к мнимой оси при достаточно малых  $\varepsilon$ . Таким образом система находится вблизи точки бифуркации. В этом случае рассмотрим главную часть (2), которую можно представить в виде уравнения на вещественные значения  $\delta$  и  $\Omega$

$$\det(a_0 + a_1 e^{-i\Omega} + \dots - i\delta I) = 0.$$

Это уравнение имеет решение  $(\Omega, \delta)$  (иначе мы не вблизи точки бифуркации). Интересующий нас бифуркационный эффект возникает при  $\delta > 0$ . В этом случае исходная система дифференциальных уравнений в окрестности состояния равновесия  $x = 0$  может быть сведена к аналогу нормальной формы (квазинормальной форме) вида

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_1(\theta + \Omega) i \frac{\partial u}{\partial r} + (d_2(\theta + \Omega)^2 + d_3)u + d_4 u |u|^2, \quad u(\tau, r+1) \equiv u(\tau, r). \quad (3)$$

Здесь функция  $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$  такая, что  $\delta \varepsilon^{-1} + \theta$  пропорционально  $2\pi$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  она принимает все свои значения бесконечное количество раз, поэтому решения (3) и их устойчивость может меняться бесконечное количество раз. Это позволяет сделать вывод о возможности бесконечно процесса прямых и обратных бифуркаций в (1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . [1]

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-29-10043).



## Список литературы

- [1] *Kashchenko I., Kaschenko S.* Infinite Process of Forward and Backward Bifurcations in the Logistic Equation with Two Delays // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **22:4** (2019), 407–412.

### Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием

С.А. Кащенко

Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
kasch@uniyar.ac.ru

Исследуется поведение всех решений логистического уравнения с запаздыванием и диффузией в достаточно малой окрестности положительного состояния равновесия. Предполагается, что для коэффициентов задачи выполнены условия бифуркации АндроноваХопфа. Рассмотрены малые возмущения всех коэффициентов, включая коэффициент запаздывания и коэффициенты граничных условий. Изучены ситуации, когда эти возмущения зависят от пространственной переменной и когда являются периодическими по времени функциями. В качестве основных результатов построены уравнения на центральном многообразии. Их нелокальная динамика определяет поведение всех решений исходной краевой задачи в достаточно малой окрестности состояния равновесия. Установлена возможность управления динамикой исходной задачи с помощью изменений фазового сдвига в возмущающей силе. Получены численные и аналитические результаты о динамических особенностях при двухчастотных возмущениях с частотами, близкими к удвоенной частоте собственных колебаний. Приведены асимптотические формулы для решений исходной краевой задачи.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение № 075-02-2021-1397).

### Кусочно-гладкие решения одной краевой задачи специального вида

Д.С. Костерин

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
kosterin.dim@mail.ru

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \xi - \beta(\xi^2 - M(\xi^2)) - (1 - \beta)(\xi^3 - M(\xi^3)), \quad (1)$$

где  $\beta \in [0; 1]$ ,  $\xi = \xi(t, x)$  при каждом  $t \geq 0$  представляет собой кусочно-гладкую по пространственной переменной  $x$  функцию,  $M(\xi)$  – среднее функции  $\xi(t, x)$  по переменной

$x$ , то есть

$$M(\xi) = \int_0^1 \xi(t, x) dx.$$

Уравнение (1) рассматривается с периодическим краевым условием

$$\xi(t, x + 1) = \xi(t, x) \quad (2)$$

и дополнительным условием нулевого среднего

$$M(\xi) = 0. \quad (3)$$

Краевые задачи подобного типа возникают при исследовании ряда сингулярно-возмущенных задач параболического типа [1] и систем уравнений с большим коэффициентом запаздывания [2].

Рассматриваемая краевая задача при каждом  $\beta$  имеет однопараметрическое семейство кусочно-постоянных по переменной  $x$  решений вида

$$\xi(t, x) = \begin{cases} a(\alpha), & 0 < x < \alpha, \\ b(\alpha), & \alpha < x < 1. \end{cases}$$

Исследуется устойчивость этих решений при различных  $\beta$ . Показано, что при  $\beta = 1$  эти решения неустойчивы. В остальных случаях доказано, что если параметр  $\alpha$  принадлежит некоторому интервалу  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , то такое решение устойчиво. Кроме того, показано, что в случае  $\beta = 0$  существуют устойчивые кусочно-постоянные решения, имеющие более одной точки разрыва.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-29-10055).

## Список литературы

- [1] Глызин С. Д., Кащенко С. А., Толбей А. О. *Взаимодействие двух волн в модели Ферми–Паста–Улама* // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23. № 5. С. 548–558.
- [2] Григорьева Е. В., Кащенко С. А. *Медленные и быстрые колебания в модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием*. Доклады Академии наук. 2019. т. 484, № 1, с. 21–25.

# Динамика уравнения второго порядка с запаздыванием при производной

И.Н. Маслеников

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

igor.maslenikov16@yandex.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с запаздывающей обратной связью:

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \delta y = F\left(\frac{dy}{dt}(t - \tau)\right). \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon$  и  $\delta$  - малые и пропорциональные параметры  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\delta = k\varepsilon$ ,  $\tau$  — параметр запаздывания, вещественный и положительный. Функция  $F$  достаточно гладкая, не ограничивая общности можно считать, что  $F(0) = 0$ . Таким образом, уравнение (1) имеет нулевое состояние равновесия. Рассматриваемая задача является сингулярно возмущенной.

Отметим, что в статье [1] рассмотрено похожая модель оптоэлектронного осциллятора, в котором параметр  $\delta$  не является малым.

Характеристический квазиполином линеаризованной в нуле уравнения (1) имеет вид:

$$\varepsilon \lambda^2 + \lambda + k\varepsilon = \lambda \beta_1 e^{-\lambda}. \quad (2)$$

Показано, что при  $|\beta_1| < 1$  нулевое состояние равновесия устойчиво, а при  $|\beta_1| > 1$  — неустойчиво. В критических случаях  $\beta_1 = \pm 1$  характеристическое уравнение имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Таким образом критические случаи имеют бесконечную размерность.

Для исследования поведения решений в случае  $\beta_1 = \pm 1$  построены квазинормальные формы — специальные нелинейные уравнения параболического типа, не содержащие малых параметров, решения которых дают главную часть асимптотических по невязке равномерно по  $t \geq 0$  решений уравнения (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10043).

## Список литературы

- [1] Григорьева Е.В., Кащенко С.А., Глазков Д.В.. Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием.// Моделирование и анализ информационных систем. Т.25, №1, 2018, с. 71-82.

# Использование промежуточных интегрируемых систем в исследованиях методами теории возмущений

В.В. Сидоренко

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

vvsidorenko@list.ru

Рассмотрим систему, динамика которой описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{\mathbf{I}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\varphi}} + \delta \mathbf{f}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}), \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{I}} + \delta \mathbf{g}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}), \quad (1)$$

где

$$\mathbf{I} = (I_0, I_1) \in B \subset \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1) \in T^2, \\ H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \varepsilon) = H_0(I_0) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}), \quad 0 \leq \delta \ll \varepsilon \ll 1,$$

функции  $H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \varepsilon)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})$  являются достаточно гладкими и  $2\pi$ -периодическими по  $\boldsymbol{\varphi}$ . Система (1) представляет результат наложения возмущений на интегрируемую гамильтонову систему с собственным вырождением, заданную гамильтонианом  $H_0(I_0)$ . Из структуры уравнений (1) вытекает, что возмущения включают гамильтонову компоненту порядка  $\varepsilon$  и негамильтонову компоненту (в общем случае) более высокого порядка малости  $\delta$ . Далее будем предполагать, что  $\delta = \varepsilon^k$ ,  $k \geq 2$ .

Необходимость исследования влияния суперпозиции малых гамильтоновых и еще более малых негамильтоновых возмущений возникает достаточно часто в задачах небесной механики [1,2].

Пренебрегая на первой стадии исследования негамильтоновыми возмущениями, с помощью метода усреднения можно установить, что с точностью  $\sim \varepsilon$  поведение переменных  $I_1, \varphi_1$  на временном интервале  $\sim \varepsilon^{-1}$  описывается гамильтоновой системой с одной степенью свободы:

$$\dot{I}_1 = -\varepsilon \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial \varphi_1}, \quad \dot{\varphi}_1 = -\varepsilon \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial I_1}. \quad (2)$$

Здесь

$$\hat{H}_1(I_0, I_1, \varphi_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1 d\varphi_0.$$

Пусть  $I_1(\tau, I_0, h)$ ,  $\varphi_1(\tau, I_0, h)$ ,  $\tau = \varepsilon t$  обозначает периодическое решение промежуточной системы (2), лежащее на уровне  $\varepsilon h$  ее гамильтониана. Период этого решения равен  $\varepsilon^{-1}T(I_0, h)$ .

**Теорема.** При некоторых стандартных условиях, обеспечивающих применение метода усреднения, эволюция величин  $I_0, h$ , определяющих качественное поведение решения системы (1), с точностью  $\sim \varepsilon$  на временном интервале  $\delta^{-1}$  описывается дифференциальными уравнениями:

$$\dot{I}_0 = \frac{\delta}{2\pi T(I_0, h)} \int_0^{2\pi} \int_0^{T(I_0, h)} f_0(I_0, I_1(\tau, I_0, h), \varphi_0, \varphi_1(\tau, I_0, h)) d\varphi_0 d\tau, \\ \dot{h} = \frac{\delta}{2\pi T(I_0, h)} \int_0^{2\pi} \int_0^{T(I_0, h)} \left\{ \sum_{n=0,1} \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial I_n} f_n(I_0, I_1(\tau, I_0, h), \varphi_0, \varphi_1(\tau, I_0, h)) + \right.$$

$$\left. \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial \varphi_1} g_1(I_0, I_1(\tau, I_0, h), \varphi_0, \varphi_1(\tau, I_0, h)) \right\} d\varphi_0 d\tau,$$

Бифуркации периодических решений промежуточной системы (2) могут привести к появлению в динамике системы (1) квазивероятностных эффектов, теория которых изложена, например, в [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 20-01-00312А).

## Список литературы

- [1] Molchanov, A.M.: The resonant structure of the Solar System. *Icarus*, **8**, 203-215 (1968)
- [2] Neishtadt, A.I.: Scattering by resonances. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **65**, 1-20 (1997)
- [3] Нейштадт, А.И.: Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром. *Прикл. Мат. и Мех.*, **39**. 621-632 (1975)

## Об управлении спектрами показателей колеблемости двумерных дифференциальных систем

А.Х. Сташ

Кавказский математический центр, Адыгейский государственный университет  
aidamir.stash@gmail.com

Для заданного натурального  $n$  обозначим через  $\mathcal{M}^n$  множество линейных однородных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

каждая из которых отождествляется со своей ограниченной непрерывной оператор-функцией  $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ . Множество всех ненулевых решений системы  $A \in \mathcal{M}^n$  обозначим через  $\mathcal{S}_*(A)$  и положим  $\mathcal{S}^n \equiv \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A)$ . Для ненулевого вектора  $m \in \mathbb{R}^n$ , вектор-функции  $x \in \mathcal{S}^n$  и момента времени  $t > 0$  через  $\nu(x, m, t)$  обозначим число нулей скалярного произведения  $\langle x, m \rangle$  на промежутке  $(0, t]$ .

**Определение 1.** *Верхние сильный и слабый показатели колеблемости* функции  $x \in \mathcal{S}^n$  соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}_\bullet(x) \equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t), \quad \hat{\nu}_\circ(x) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t} \nu(x, m, t),$$

а соответствующие *нижние* – теми же формулами с заменой в них верхних пределов нижними.

**Определение 2.** Множество  $\text{Spec}_\kappa(A)$  всех значений показателя  $\kappa : \mathcal{S}_*(A) \rightarrow \mathbb{R}$  назовем *спектром* этого показателя системы  $A \in \mathcal{M}^n$ .

Показатели колеблемости, блуждаемости и вращаемости решений дифференциальных систем впервые были введены И.Н. Сергеевым. Шишлянников Е.М. установил, что

для любого конечного множества неотрицательных чисел, содержащего ноль, (или для любого замкнутого ограниченного счетного множества неотрицательных рациональных чисел с единственной нулевой предельной точкой) существует двумерная линейная однородная дифференциальная система, у которой спектр значений показателей блуждаемости совпадает с этим множеством. Оказалось, что эти свойства переносятся и на показатели колеблемости.

**Теорема 1.** Для любого конечного множества неотрицательных чисел  $X$ , содержащего ноль, существует такая система  $A \in \mathcal{M}^2$ , что при любом  $\omega = \hat{\nu}_\bullet, \check{\nu}_\bullet, \hat{\nu}_\circ, \check{\nu}_\circ$  справедливо равенство  $\text{Spec}_\omega(A) = X$ .

**Теорема 2.** Для любого замкнутого ограниченного счетного множества  $X$  неотрицательных рациональных чисел с единственной нулевой предельной точкой существует такая система  $A \in \mathcal{M}^2$ , что при любом  $\omega = \hat{\nu}_\bullet, \check{\nu}_\bullet, \hat{\nu}_\circ, \check{\nu}_\circ$  справедливо равенство  $\text{Spec}_\omega(A) = X$ .

## Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием и периодическими коэффициентами

Е.М. Татанова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e.tatanova@mail.ru

В работе рассматривается уравнение

$$\dot{x} + x = ax(t - T) + f(x).$$

В работе исследована локальная (в окрестности нулевого состояния равновесия) динамика дифференциального уравнения с запаздыванием в случае, когда параметр  $T$ , характеризующий запаздывание, является достаточно большим, т.е.

$$T \gg 1,$$

а параметр

$$a = \pm(1 + \varepsilon^2 a_1(t)),$$

где  $\varepsilon = \frac{1}{T}$ , не является константой.

В случаях, близких к критическим, для исследования была применена теория квазинормальных форм [1].

С помощью асимптотических методов построены в критических случаях аналоги нормальных – квазинормальные – формы. Получили, что в рассматриваемом случае с большим запаздыванием нормальная форма становится неавтономной.

## Список литературы

- [1] Кашенко, И.С. Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики – 2008. – Т. 48 – №12. – С. 2141-2150.

## Типичная особенность типа гиперболической омбилики решения квазилинейной гидродинамической системы

А.М. Шавлуков

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН

aza3727@yandex.ru

Изучается типичная (с точки зрения математической теории катастроф) особенность омбилического типа решения системы уравнений течения одномерного изоэнтропического газа

$$u_T + uu_X + \alpha(\rho)\rho_X = 0, \rho_X + (\rho u)_X = 0, \quad (1)$$

где  $\alpha(\rho) = \rho^{-1}p_\rho$ .

Отдельно изучены специальные случаи упавнения состояния  $p = a^2\rho^\gamma$ . Рассмотрены показатели политропы  $\gamma = 3$ ,  $\gamma = \frac{5}{3}$  (однатомный газ).

Система переписывается в инвариантах Римана как система квазилинейных уравнений. При  $\gamma = 3$  это система уравнений Хопфа.

В окрестности точки потери гладкости решение в виде формального степенного ряда в главном порядке описывается каноническим уравнением сечения гиперболической омбилики. В случае  $\gamma = \frac{5}{3}$  возмущение роста катастрофы отличается от описанного в [1]. Предполагается неточность представленной в [1] классификации особенностей инвариантов Римана.

Исследование выполнено совместно с Б.И. Сулеймановым.

## Список литературы

- [1] А. Х. Рахимов, "Особенности римановых инвариантов", Функц. анализ и его прил., 27:1 (1993), 46–59; Funct. Anal. Appl., 27:1 (1993), 39–50

## О топологии многообразий, допускающих диффеоморфизмы с регулярной и хаотической динамикой

В.З. Гринес

Высшая школа экономики

vgrines@yandex.ru

Пусть  $M^n$ ,  $n \geq 3$ , – замкнутое гладкое ориентируемое  $n$ -многообразие и  $\mathbb{G}(M^n)$  множество – А-диффеоморфизмов  $f : M^n \rightarrow M^n$ , неблуждающее множество  $NW(f)$  которых удовлетворяет следующим условиям: (1) каждое нетривиальное базисное множество из  $NW(f)$  является либо ориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности один, либо ориентируемым сжимающимся репеллером коразмерности один; (2) инвариантные многообразия изолированных седловых периодических точек пересекаются трансверсально, и сепаратрисы коразмерности один таких точек могут пересекать только одномерные сепаратрисы других изолированных седловых периодических орбит.

Для  $f \in \mathbb{G}(M^n)$  обозначим:  $k_f \geq 0$  число всех  $C$ -плотных компонент нетривиальных базисных множеств, принадлежащих  $NW(f)$ ;  $\kappa_f \geq 0$  число всех связок, принадлежащих нетривиальным базисным множествам из  $NW(f)$ ;  $\mu_f \geq 0$  число всех узловых периодических точек (стоков и источников);  $\nu_f \geq 0$  число изолированных седловых периодических точек с индексом Морса 1 или  $n - 1$ ;  $\lambda_f \geq 0$  число периодических точек, чей индекс Морса не принадлежит множеству  $\{0, 1, n - 1, n\}$ . Для неотрицательного целого числа  $m$  обозначим:  $\mathcal{T}_m^n$  либо пустое множество, если  $m = 0$ , либо связную сумму  $\underbrace{\mathbb{T}^n \# \dots \# \mathbb{T}^n}_{m \geq 1}$  копий

$n$ -тора, если  $m \geq 1$ ;  $\mathcal{S}_m^n$  многообразие, которое либо является сферой  $\mathbb{S}^n$ , если  $m = 0$ , либо связной суммой  $\underbrace{(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \# \dots \# (\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)}_{m \geq 1}$  из  $m \geq 1$  копий  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ , если  $m \geq 1$ ;

$\mathcal{N}_m^n$  многообразие, которое либо является пустым множеством, если  $m = 0$ , либо связной суммой  $N_1^n \# \dots \# N_m^n$ , где каждое многообразие  $N_i^n$  является односвязным многообразием, не гомеоморфным сфере  $\mathbb{S}^n$ , если  $m \geq 1$ .

*Теорема (В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, 2021).* Пусть  $f \in \mathbb{G}(M^n)$ . Тогда существуют целые числа  $\chi_f$  и  $l_f$ , удовлетворяющие неравенствам  $1 \leq \chi_f \leq \kappa_f$  и  $0 \leq l_f \leq \lambda_f$  соответственно, такие, что  $M^n$  гомеоморфно связной сумме  $\mathcal{T}_{k_f}^n \# \mathcal{S}_{\beta_f}^n \# \mathcal{S}_{g_f}^n \# \mathcal{N}_{l_f}^n$ , где  $\beta_f = \kappa_f - k_f - \chi_f + 1$ ,  $g_f = \frac{1}{2}(\nu_f - \mu_f - \kappa_f + 2\chi_f)$ .

Доклад подготовлен при частичной финансовой поддержке гранта РНФ (проект № 21-11-00010).

## Об аттракторах Лоренца и Ровеллы в системе Любимова-Закса

А.О. Казаков

Высшая школа экономики

kazakovdz@yandex.ru

Мы приводим численное подтверждение существования аттракторов Лоренца и Ровеллы в обобщенной системе Лоренца, предложенной Любимовым и Заксом. Напомним, что аттрактор Лоренца является робастно хаотическим (псевдогиперболическим) в отличие от аттрактора Ровеллы, который относится к классу квазиаттракторов со следующим замечательным свойством: он существует на нигде неплотном множестве значений параметров, имеющем, тем не менее, положительную меру Лебега.

Из работ Любимова и Закса известно, что в рассматриваемой системе, при определенных значениях параметров, возникает гомоклиническая бифуркация восьмерка бабочка состояния равновесия с нулевой седловой величиной. Рождение аттрактора Лоренца в результате такой бифуркации установлено с помощью численной проверки известного критерия Шильникова. Для рождения аттрактора Ровелла мы предлагаем новый критерий, который также проверяется численно.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.



# Two-dimensional attractors of A-flows and fibered links on 3-manifolds

Е.В. Жужома, В.С. Медведев

Высшая школа экономики

medvedev-1942@mail.ru, zhuzhoma@mail.ru

**Introduction.** Dynamical systems satisfying an Axiom A (in short, A-systems) were introduced by S.Smale. By definition, a non-wandering set of A-system is the topological closure of periodic orbits endowed with a hyperbolic structure. Due to Smale's Spectral Decomposition Theorem, the non-wandering set of any A-system is a disjoint union of closed, invariant, and topologically transitive sets called *basic sets*. E.Zeeman proved that any  $n$ -manifold,  $n \geq 3$ , supporting nonsingular flows supports an A-flow with a one-dimensional nontrivial basic set. It is natural to consider the existence of two-dimensional (automatically non-trivial) basic sets on  $n$ -manifolds beginning with closed 3-manifolds  $M^3$ . We prove that any closed orientable 3-manifolds supports A-flows with two-dimensional attractors. Our main attention concerns to embedding of non-mixing attractors and its basins (stable manifolds) in  $M^3$ .

**Main results.** Let  $f^t$  be an A-flow on a closed orientable 3-manifold  $M^3$  and  $\Lambda_a$  a two-dimensional non-mixing attractor of  $f^t$ . The stable manifold (in short, a basin)  $W^s(\Lambda_a)$  of  $\Lambda_a$  is an open subset of  $M^3$  consisting of the trajectories whose  $\omega$ -limit sets belong to  $\Lambda_a$ . First, we construct a special compactification of  $W^s(\Lambda_a)$  called a casing by a collection of circles that form a fiber link in the casing.

*Theorem 1.* Let  $f^t$  be an A-flow on an orientable closed 3-manifold  $M^3$  such that the non-wandering set  $NW(f^t)$  contains a 2-dimensional non-mixing attractor  $\Lambda_a$ . Then there is a compactification  $M(\Lambda_a) = W^s(\Lambda_a) \cup_{i=1}^k l_i$  of the basin  $W^s(\Lambda_a)$  by the family of circles  $l_1, \dots, l_k$  such that

- $M(\Lambda_a)$  is a closed orientable 3-manifold;
- the flow  $f^t|_{W^s(\Lambda_a)}$  is extended continuously to the nonsingular flow  $\tilde{f}^t$  on  $M(\Lambda_a)$  with the non-wandering set  $NW(\tilde{f}^t) = \Lambda_a \cup_{i=1}^k l_i$  where  $l_1, \dots, l_k$  are repelling isolated periodic trajectories of  $\tilde{f}^t$ ;
- the family  $L = \{l_1, \dots, l_k\} \subset M(\Lambda_a)$  is a fibered link in  $M(\Lambda_a)$ .

The second result of the paper, in a sense, is reverse to the first one.

*Theorem 2.* Let  $\{l_1, \dots, l_k\} \subset M^3$  be a fibered link in a closed orientable 3-manifold  $M^3$ . Then there is a nonsingular A-flow  $f^t$  on  $M^3$  such that the non-wandering set  $NW(f^t)$  contains a 2-dimensional non-mixing attractor and the repelling isolated periodic trajectories  $l_1, \dots, l_k$ .

*Corollary.* Given any closed orientable 3-manifold  $M^3$ , there is a nonsingular A-flow  $f^t$  on  $M^3$  such that the non-wandering set  $NW(f^t)$  contains a two-dimensional attractor.

This work is supported by Laboratory of Dynamical Systems and Applications of National Research University Higher School of Economics, of the Ministry of science and higher education of the RF, grant ag. No 075-15-2019-1931.

# О существовании структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов с динамикой одномерный поверхностный аттрактор-репеллер

О.В. Починка

Высшая школа экономики

olga-pochinka@yandex.ru

Пусть  $f$  – диффеоморфизм гладкого замкнутого  $n$ -многообразия  $M^n$ . Наиболее просто устроенные диффеоморфизмы имеют динамику источник-сток, где роль источника и стока играют базисные множества, являющиеся репеллером и аттрактором соответственно. Возникает естественный вопрос о том, какие многообразия допускают такую динамику и когда такие диффеоморфизмы являются структурно устойчивыми. В случае, когда базисные множества тривиальны, таким многообразием является  $n$ -мерная сфера, а все диффеоморфизмы источник-сток являются структурно устойчивыми. Динамика аттрактор-репеллер с нетривиальными базисными множествами существует на многообразиях размерности  $n \geq 2$ , при этом размерность базисных множеств может принимать значения от 1 до  $n - 1$ . Известно [1], что на поверхностях ( $n = 2$ ) все такие диффеоморфизмы не являются структурно устойчивыми. Также из работы [2] следует, что все 3-диффеоморфизмы с одномерными аттрактором и репеллером типа соленоида Смейла-Вильямса тоже не являются структурно устойчивыми. В [3, 4] были построены структурно устойчивые 3-диффеоморфизмы с одномерными аттрактором и репеллером. Однако, базисные множества в построенных примерах не являются канонически вложенными в поверхность.

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема.** Не существует структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов с поверхностными канонически вложенными одномерными аттрактором и репеллером.

Работа поддержана грантом Правительства Российской Федерации, номер договора 075-15-2019-1931.

## Список литературы

- [1] Robinson R.C., Williams R.F. (1973). Finite Stability is not generic (Dynamical Systems ((Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971)) Academic Press, New York), 451–462.
- [2] Gibbons J.C. One-Dimensional basic sets in the three-sphere. Trans. of the Amer. Math. Soc. Volume 164, February 1972, 163–178.
- [3] Bonatti Ch., Guelman N. Axiom A diffeomorphisms derived from Anosov flows. J. Mod. Dyn. 4 (2010), no. 1, 1–63.
- [4] Shi Yi. Partially hyperbolic diffeomorphisms on Heisenberg nilmanifolds and holonomy maps. C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2014. V. 352, No.9, 743–747.

# Неавтономные векторные поля на многообразиях: классификация, инварианты, реализация

Л.М. Лерман

Высшая школа экономики

l1erman@hse.ru

We study nonautonomous vector fields (NVFs) on a  $C^\infty$ -smooth closed manifold  $M$ . An NVF on  $M$  is a uniformly continuous map  $v : \mathbb{R} \rightarrow V^k(M)$  where  $V^k(M)$  is the Banach space of  $C^k$ -smooth vector fields on  $M$  endowed with  $C^k$ -norm. Such NVF generates its solutions whose graphs in the extended phase manifold  $M \times \mathbb{R}$  (integral curves) define a foliation into integral curves. We endow  $M$  some Riemannian metric and take in  $M \times \mathbb{R}$  the metric of the direct product of two metrics: the Riemannian in  $M$  and the standard metric on  $\mathbb{R}$ . Two NVFs on  $M$  are uniformly equivalent, if there exists an equimorphism of the extended phase manifold sending one foliation into another one with the preservation of time direction.

To find a class of NVFs amenable to a classification, we define gradient-like NVFs on 2-dimensional closed manifolds. Roughly speaking, a gradient-like NVF means that (1) every integral curve possesses the exponential dichotomy both on the semi-axis  $t > -$  and  $t < 0$ ; this property implies the existence of the local stable manifold (if dichotomy on  $t > 0$ ) or the local unstable manifold (if dichotomy on  $t < 0$ ); (2) there are only finitely many stable and unstable manifolds; two more assumptions guaranteeing the right behavior of boundaries of stable and unstable manifolds. For such NVFs we consider traces of global stable and unstable manifolds on the section  $t = 0$  (these traces can be either a point, a smooth curve, or an open disk). This allows one to introduce some invariant of these NVFs similar to that found by Leontovich, Peixoto and others. Then the following two theorems are valid.

**Теорема.** *The invariant found is the complete classifying invariant for gradient-like NVFs.*

**Теорема.** *Gradient-like NVFs are structurally stable.*

All types of these NVFs can be realized as asymptotically autonomous NVFs on  $M$ .

The same ideas are valid also for 1-dimensional case for nonautonomous equations on the circle  $S^1$  (L.Lerman, E.Gubina, *Discr. Cont. Dyn. Syst.*, Ser S., v.13, No.4, 1341–1367). Namely, the following theorem is valid

**Теорема.** *For a gradient-like nonautonomous equation on  $S^1$  there exists a complete invariant of the uniform equivalency, that is two such equations are uniformly equivalent, iff their invariants coincide.*

This can be applied to a differential equation on  $S^1$  which depends almost periodically in  $t$ . Then the following result holds.

**Теорема.** *If an almost periodic in  $t$  differential equation on  $S^1$  is gradient-like, then there are a finite number of almost periodic integral curves in  $S^1 \times \mathbb{R}$  such that each such a curve possesses exponential dichotomy on  $\mathbb{R}$ , half of these curve are exponentially stable and another half are exponentially unstable. These curves divide  $S^1 \times \mathbb{R}$  into finite number of strips whose boundaries are one stable and one unstable curve. Any integral curve in the strip tends to stable IC, as  $t \rightarrow \infty$  and to the unstable IC, as  $t \rightarrow -\infty$ .*

If time allow, we shall discuss some results obtained in the collaboration with V.Z. Grines on the structure of a class of NVFs on three-dimensional sphere  $S^3$  which have more complicated structure like wildly knotted separatrces.

Author was supported by the Laboratory of Dynamical Systems and Applications of NRU HSE of the Ministry of Science and Higher Education of RF, grant 075-15-2019-1931.

