

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ТАМБОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Г.Р. ДЕРЖАВИНА

Управление научно-исследовательской деятельности студентов
и молодых ученых
Студенческий научный совет

Издается с марта 2017 года
Выходит 4 раза в год

ДЕРЖАВИНСКИЙ ФОРУМ

Том 3

№ 12

2019

Научный журнал

Зарегистрирован Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
(свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС77-68840 от 28 февраля 2017 г.)

Тамбов
2019

16+

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Редакционная коллегия

Главный редактор

Стромов Владимир Юрьевич – кандидат юридических наук, доцент, ректор. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Заместитель главного редактора

Завьялов Владимир Владимирович – председатель студенческого научного совета. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Члены редакционной коллегии:

Бетина Евгения Александровна – студентка педагогического института. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Гасанова Дарья Пунхановна – студентка института права и национальной безопасности. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Дронов Иван Сергеевич – начальник отдела организации научно-исследовательской работы студентов. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Емельянов Алексей Валерьевич – доктор биологических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Зеленукин Роман Валерьевич – кандидат юридических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Ильина Ирина Валерьевна – ответственный секретарь объединенной редакции научных журналов. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Коньшина Елизавета Владимировна – студентка института математики, естественных наук и информационных технологий. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Курин Андрей Юрьевич – кандидат педагогических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Лавринова Наталия Николаевна – кандидат философских наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Лямин Сергей Константинович – кандидат исторических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Медведева Ольга Александровна – студентка института экономики, управления и сервиса. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Никольская Анастасия Михайловна – студентка факультета культуры и искусств. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Передков Вячеслав Михайлович – кандидат педагогических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Платицына Наталья Игоревна – кандидат филологических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Радюкова Яна Юрьевна – кандидат экономических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Сапунов Михаил Олегович – студент медицинского института. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Сертакова Ирина Николаевна – кандидат философских наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Толстова Мария Александровна – студентка факультета истории, мировой политики и социологии. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Худайбергенова Мария Даниловна – студентка факультета филологии и журналистики. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (г. Тамбов, Российская Федерация)

Прием статей:

392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33, каб. 113

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Управление научно-исследовательской деятельности студентов и молодых ученых, Студенческий научный совет

Телефон: (4752) 72-34-34 доб. 0158

Электронная почта: derzhavin.forum@yandex.ru

СОДЕРЖАНИЕ

ЮРИДИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Бесперстова А.А.</i> Взыскание алиментов в порядке приказного производства.....	11
<i>Кокорев В.Г., Иванищева А.П.</i> К вопросу об административной преюдиции за совершение преступления, предусмотренного статьей 158.1 УК РФ «Мелкое хищение, совершенное лицом, подвергнутым административному наказанию».....	17
<i>Лазарева Т.В.</i> Стадия возбуждения уголовного дела в советской и современной России: сравнительно-правовой анализ.....	28
<i>Полозкова А.С.</i> Ответственность за клевету в России.....	35

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Худобородов С.М.</i> Развитие национальной промышленности как потенциальный источник стимуляции экономического роста России.....	41
---	----

ФИЛОСОФСКИЕ НАУКИ

<i>Носикова Я.В.</i> Эстетические представления йенской школы: переосмысление жанра комедии в работах братьев Шлегелей.....	48
---	----

СОЦИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Говердовская М.А.</i> Медиапространство университета на примере ТГУ им. Г.Р. Державина.....	54
--	----

ИСТОРИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Облицов М.А., Махрачев Г.С.</i> Из опыта идентификации остатков исчезнувших поселений в ходе проведения полевых экспедиций (на примере Бондарского района).....	61
<i>Щербаков С.В.</i> Генрих Риккерт об индивидуализирующих и генерализирующих методах исследования в исторической науке.....	73

ФИЛОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Манака Я.В.</i> Образно-символическая система повести «Вдова капитана» и рассказа «Душа женщины» Б.А. Лазаревского: способы развития и формы трансформации.....	81
--	----

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Гутарин М.М.</i> Патриотическое воспитание как одно из ведущих направлений начального образования.....	88
<i>Дронов И.С.</i> Дидактический потенциал блога учебной группы в обучении письменному академическому дискурсу.....	94
<i>Зайцева И.С.</i> Лепка на отраженной поверхности как уникальное средство развития воображения у дошкольников с задержкой психического развития.....	101
<i>Калачникова Р.С.</i> Практические способы применения фильмов на уроках английского языка.....	107
<i>Карасева Н.Ю.</i> Проблемы формирования первоначального навыка чтения и современная социальная ситуация развития ребенка младшего возраста.....	114

ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Баженова А.С., Чечет А.А., Тесленко П.О.</i> Когнитивный тренинг у одиноких пожилых людей: разработка и оценка эффективности.....	122
--	-----

КУЛЬТУРА И ИСКУССТВО

<i>Афанасьева Е.И.</i> Особенности дизайна сайта поддержки социологического исследования.....	131
<i>Парамонова Л.С.</i> Театральный фестиваль «Виват, Театр!»: история и потенциал развития.....	141

СОЦИАЛЬНАЯ РАБОТА

<i>Пищаева А.С., Сахно В.В., Тен А.А.</i> Обеспечение беспрепятственного доступа инвалидов к объектам транспортной, социальной и инженерной инфраструктур в Ростовской области.....	150
---	-----

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Масленников И.Н.</i> Исследование локальной динамики модели оптоэлектронного осциллятора.....	157
<i>Хромова Т.А.</i> Математические методы системы поддержки принятия решений для управления процессами в жилищно-коммунальном хозяйстве.....	167

ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Родионова Л.Д.</i> Оценка степени извлечения нонана и декана из водных эмульсий глауконитом Бондарского месторождения Тамбовской области.....	172
--	-----

МЕДИЦИНСКИЕ НАУКИ

<i>Любезнов В.В.</i> Анализ эффективности препарирования тканей зуба лазером в сравнении с классической методикой и ее аналогами.....	180
<i>Невструев К.А.</i> Оценка «усталости» никель-титановых инструментов в процессе работы.....	187
<i>Павлов Б.В., Соколова А.И., Шелль В.В.</i> Теоретическое обоснование и разработка метода повышения уровня глюкозы в крови при гипогликемической коме у больных сахарным диабетом.....	198

ЭКОЛОГИЯ И ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЕ

<i>Семенова А.В.</i> Динамика гидрологического режима реки Кариану районного центра Знаменка во время весеннего половодья.....	206
--	-----

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ МОДЕЛИ ОПТОЭЛЕКТРОННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

© И.Н. Маслеников

Аннотация. Для модели оптоэлектронного осциллятора, описываемого дифференциально-интегральным уравнением, изучена устойчивость состояния равновесия. Для этого построено характеристическое уравнение и определено положение его корней. В зависимости от значений параметров определена устойчивость состояния равновесия. Выделены критические значения параметров, при которых состояние равновесия меняет свою устойчивость. В критических случаях построены аналоги нормальных форм. *Ключевые слова:* характеристический квазиполином; асимптотическое представление корней; нормальная форма

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциально-интегральное уравнение с запаздыванием [1], которое представляет собой реализацию модифицированного уравнения Икеды с задержкой по времени:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} + x + \delta \int_{t_0}^t x(s) ds = \beta_1 F(x(t - \tau)). \quad (1)$$

Здесь β_1 – параметр; τ – параметр запаздывания, вещественный и положительный. Функция F достаточно гладкая, не ограничивая общности можно считать, что $F(0) = 0$. Таким образом, уравнение (1) имеет нулевое состояние равновесия, если это не так, то можно сделать соответствующую замену.

В работе [1] уравнение исследовалось численными методами, подбирались параметры, начальные условия, строились сложные квазипериодические режимы, так называемые химеры, при этом рассматривался случай, когда параметры $\varepsilon = 0,005$ и $\delta = 0,016$. В силу этого будем предполагать, что параметры ε и δ малы ($0 < \varepsilon \ll 1, 0 < \delta \ll 1$) и пропорциональны: $\varepsilon = k\delta, k > 0$.

Поставим задачу исследовать локальную динамику в окрестности состояния равновесия. В § 2 опишем устойчивость состояния равнове-

сия, а в § 3 исследуем бифуркации, которые возникают при потере устойчивости нулевого решения.

Отметим, что в статье [2] рассмотрено похожее уравнение оптоэлектронного осциллятора, в котором параметр δ не является малым.

2. Исследование устойчивости состояния равновесия

В работе [3] проведено исследование расположения корней характеристического квазиполинома линеаризованного уравнения (1).

$$\varepsilon \lambda^2 + \lambda + k\varepsilon = \lambda \beta e^{-\lambda}. \quad (2)$$

Для уравнения (2) справедливы теоремы, доказанные в [3].

Теорема 1. При $|\beta| < 1$ и достаточно малом ε все корни (2) имеют отрицательные вещественные части.

Теорема 2. При $\beta = 1 + \varepsilon^2 \beta_1$ корни характеристического уравнения допускают асимптотическое представление вида:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda_{n0} + \varepsilon \lambda_{n1} + \varepsilon^2 \lambda_{n2} + o(\varepsilon^2), \quad \text{при } n \neq 0, \\ \text{где } \lambda_{n0} &= 2\pi n i, \lambda_{n1} = -\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}}, \\ \lambda_{n2} &= -\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + \lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}} + \frac{\lambda_{n1}^2}{2} + \beta_1, \\ \text{и } \lambda &= \sqrt{\varepsilon} \lambda_1 + \varepsilon \lambda_2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \lambda_3 + o\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \quad \text{при } \lambda_0 = 0, \\ \text{где } \lambda_1 &= \pm \sqrt{k} i, \lambda_2 = \frac{-k}{4}. \end{aligned}$$

Теорема 3. При $\beta = -(1 + \varepsilon^2 \beta_1)$ корни характеристического уравнения допускают асимптотическое представление вида:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda_{n0} + \varepsilon \lambda_{n1} + \varepsilon^2 \lambda_{n2} + o(\varepsilon^2), \\ \text{где } \lambda_{n0} &= \pi(2n + 1)i, \lambda_{n1} = -\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}}, \\ \lambda_{n2} &= -\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + \lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}} + \frac{\lambda_{n1}^2}{2} + \beta_1, \\ \text{и } \lambda &= \frac{-\varepsilon k}{2} + o(\varepsilon), \quad \text{при } \lambda_0 = 0. \end{aligned}$$

3. Построение нормальной формы уравнения

Уравнение (1) допускает запись в виде (3):

$$\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = \beta F(\dot{y}(t-1)). \quad (3)$$

Разложим в уравнении (3) функцию F в ряд Тейлора:

$$\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = \beta_1 \dot{y}(t-1) + \beta_2 (\dot{y}(t-1))^2 + \beta_3 (\dot{y}(t-1))^3 + \dots \quad (4)$$

β_2, β_3 – некоторые постоянные.

3.1 Построение нормальной формы при $\beta_1 = -(1 + \varepsilon^2 \beta)$

Рассмотрим задачу построения нормальной формы для уравнения (4), при параметре $\beta_1 = -(1 + \varepsilon^2 \beta)$, $\beta > 0$. При таком β_1 характеристическое уравнение имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси, таким образом, реализуется критический случай бесконечной размерности. Для исследования поведения решений воспользуемся методом квазинормальных форм [4–5]. Представим функцию y в виде ряда:

$$y = \varepsilon V(t) + \varepsilon W(\tau) + \varepsilon^2 U_1(t) + \varepsilon^3 U_2(t) + \dots \quad (5)$$

U_1, U_2 периодические с периодом 1: $U_1(t) \equiv U_1(t+1)$, $U_2(t) \equiv U_2(t+1)$. Функция W такая, что среднее значение $\beta_2 \dot{V}^2 - kW(\tau)$ равняется 0:

$$W(\tau) = \frac{\beta_2}{k} \int_0^1 \dot{V}^2(t, \tau) dt.$$

$V(t)$ представляется в виде ряда Фурье:

$$V(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i \operatorname{Im}(\lambda_{n0} + \varepsilon \lambda_{n1} + \varepsilon^2 \lambda_{n2} + \dots)t} V_n(\tau), \quad \text{где } \tau = \varepsilon^2 t.$$

Значения $\lambda_{n0}, \lambda_{n1}, \lambda_{n2}$ определяются из асимптотического приближения корней уравнения (2) (см. Теорему 3).

Обозначим $\xi_n(\varepsilon)$:

$$\xi_n(\varepsilon) = i(\lambda_{n0} + \varepsilon \lambda_{n1} + \varepsilon^2 \lambda_{n2} + \dots).$$

Для удобства выпишем первую и вторую производную функции V .

$$\dot{V} = \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n V_n(\tau) + \varepsilon^2 V_n'(\tau)) e^{\xi_n t}, \quad (6)$$

$$\ddot{V} = \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n^2 V_n(\tau) + 2\xi_n \varepsilon^2 V_n'(\tau) + \varepsilon^4 V_n''(\tau)) e^{\xi_n t}. \quad (7)$$

Рассмотрим подробнее $\dot{y}(t-1)$:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t-1) = & \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n V_n(\tau - \varepsilon^2) + \varepsilon^2 V_n'(\tau - \varepsilon^2)) e^{\xi_n t} e^{-\xi_n} + \\ & + \varepsilon^3 W(\tau - \varepsilon^2) + \varepsilon^2 \dot{U}_1(t-1) + \varepsilon^3 \dot{U}_2(t-1) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Разложим в ряды Тейлора функции $e^{-\xi_n}$, $V_n(\tau - \varepsilon^2)$ и $W(\tau - \varepsilon^2)$, получим:

$$\begin{aligned} e^{-\xi_n} &= e^{-\pi(2n+1)i - \varepsilon \lambda_{n1} - \varepsilon^2 \lambda_{n2} - \dots} = -1 + \varepsilon \lambda_{n1} + \varepsilon^2 \lambda_{n2} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \lambda_{n1}^2 - \dots, \\ V_n(\tau - \varepsilon^2) &= V_n(\tau) - \varepsilon^2 V_n'(\tau) + \dots, \\ W(\tau - \varepsilon^2) &= W(\tau) - \varepsilon^2 W'(\tau) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Подставим (5), (6), (7), (8), (9) в уравнение (4), будем приравнять коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и соответствующих $e^{\xi_n t}$, выпишем результат в явном виде:

$$\begin{aligned} & \varepsilon (\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n^2 V_n(\tau) + 2\xi_n \varepsilon^2 V_n'(\tau) + \varepsilon^4 V_n''(\tau)) e^{\xi_n t} + \varepsilon^5 W''(\tau) + \\ & + \varepsilon^2 \ddot{U}_1 + \varepsilon^3 \ddot{U}_2) + \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n V_n(\tau) + \varepsilon^2 V_n'(\tau)) e^{\xi_n t} + \varepsilon^3 W'(\tau) + \\ & + \varepsilon^2 \dot{U}_1 + \varepsilon^3 \dot{U}_2 + k\varepsilon (\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\xi_n t} V_n(\tau) + \varepsilon W(\tau) + \varepsilon^2 U_1 + \varepsilon^3 U_2) + o(\varepsilon^4) = \\ & = -(1 + \varepsilon^2 \beta) (\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n (V_n(\tau) - \varepsilon^2 V_n'(\tau)) + \varepsilon^2 (V_n'(\tau) - \varepsilon^2 V_n''(\tau))) e^{\xi_n t} \times \\ & \times (-1)(1 - \varepsilon \lambda_{n1} - \varepsilon^2 \lambda_{n2} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \lambda_{n1}^2) + \varepsilon^3 (W'(\tau) - \varepsilon^2 W''(\tau)) + \\ & + \varepsilon^2 \dot{U}_1(t-1) + \varepsilon^3 \dot{U}_2(t-1)) + \beta_2 (\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n (V_n(\tau) - \varepsilon^2 V_n'(\tau)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\varepsilon^2(V_n'(\tau) - \varepsilon^2 V_n''(\tau))e^{\xi_n t}(-1)(1 - \varepsilon\lambda_{n1} - \varepsilon^2\lambda_{n2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2) + \\
 & +\varepsilon^3(W'(\tau) - \varepsilon^2 W''(\tau)) + \varepsilon^2 \dot{U}_1(t-1) + \varepsilon^3 \dot{U}_2(t-1))^2 + \\
 & +\beta_3(\varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} (\xi_n(V_n(\tau) - \varepsilon^2 V_n'(\tau)) + \varepsilon^2(V_n'(\tau) - \varepsilon^2 V_n''(\tau)))e^{\xi_n t} \times \\
 & \quad \times (-1)\left(1 - \varepsilon\lambda_{n1} - \varepsilon^2\lambda_{n2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2\right) + \\
 & +\varepsilon^3(W'(\tau) - \varepsilon^2 W''(\tau)) + \varepsilon^2 \dot{U}_1(t-1) + \varepsilon^3 \dot{U}_2(t-1))^3. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Раскроем скобки, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и соответствующих $e^{\xi_n t}$.

При ε получаем верное тождество:

$$\lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t} = \lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t}.$$

При ε^2 получаем:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{n0}^2 V_n(\tau)e^{\xi_n t} + \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{n1} V_n(\tau)e^{\xi_n t} + \dot{U}_1 + \\
 & + \sum_{-\infty}^{\infty} k V_n(\tau)e^{\xi_n t} + kW(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)(-\lambda_{n1} V_n(\tau) + \lambda_{n1} \lambda_{n0} V_n(\tau))e^{\xi_n t} - \\
 & - \dot{U}_1(t-1) + \beta_2 \sum_{-\infty}^{\infty} g_{2n}(V)e^{(\pi 2ni + o(\varepsilon))t}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

$g_{2n}(V)$ – это коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \pi(2n+1)i V_n(\tau)e^{\xi_n t} \right)^2.$$

После сокращений из уравнения (11) определяется \dot{U}_1 :

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_1 &= \frac{1}{2}(\beta_2 \sum_{-\infty}^{\infty} g_{2n}(V(t, \tau))e^{(\pi 2ni + o(\varepsilon))t} - kW(\tau)), \\
 \dot{U}_1 &= \frac{1}{2}(\beta_2 \dot{V}^2 - kW(\tau)).
 \end{aligned}$$

U_1 находится в виде:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^r \beta_2 \dot{V}^2(s, \tau) - W(\tau) ds.$$

Обратим внимание, что U_1 периодическая, так как среднее значение подынтегральной функции равно нулю.

При ε^3 получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\xi_n t} 2\lambda_{n0}\lambda_{n1}V_n(\tau) + \ddot{U}_1 + \sum_{-\infty}^{\infty} (\lambda_{n2}V_n(\tau) + V_n'(\tau))e^{\xi_n t} + \dot{U}_2 + \\ & + kU_1 + W'(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)e^{\xi_n t} ((-1)(\lambda_{n2}V_n(\tau) - \lambda_{n0}V_n'(\tau) + V_n'(\tau)) + \\ & + \lambda_{n1}^2 V_n(\tau) + (-\lambda_{n2} + \frac{1}{2}\lambda_{n1}^2)\lambda_{n0}V_n(\tau)) - (\dot{U}_2(t-1) + W'(\tau)) + \\ & + \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{n0}\beta V_n(\tau)e^{\xi_n t} + \dot{U}_1(t-1) + \beta_2 \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2n}(V)e^{(\pi(2n+1)i+o(\varepsilon))t} + \\ & + \beta_2 \sum_{-\infty}^{\infty} f_{2n}(V)e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t} + \beta_3 \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_{3n}(V)e^{(\pi(2n+1)i+o(\varepsilon))t}. \quad (12) \end{aligned}$$

$\varphi_{2n}(V)$ – коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$(-2)\dot{U}_1(t-1) \sum_{-\infty}^{\infty} \pi(2n+1)iV_n(\tau)e^{\xi_n t};$$

$\varphi_{3n}(V)$ – коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$(-1) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \pi(2n+1)iV_n(\tau) \right)^3;$$

$f_{2n}(V)$ – коэффициенты ряда Фурье для функции:

$$(-2) \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{m0}\lambda_{m1}V_m(\tau)e^{\xi_m t}.$$

Уравнение (12) упрощается до вида:

$$\begin{aligned} \ddot{U}_1 + 2\dot{U}_2 + kU_1 + 2W'(\tau) - \beta_2 \sum_{-\infty}^{\infty} f_{2n}(V)e^{(\pi 2ni + o(\varepsilon))t} = \\ = \sum_{-\infty}^{\infty} (-\lambda_{n0}V_n'(\tau) + \frac{1}{2}\lambda_{n1}^2\lambda_{n0}V_n(\tau) + \lambda_{n0}\beta V_n(\tau) + \\ + \beta_2\varphi_{2n}(V) + \beta_3\varphi_{3n}(V))e^{(\pi(2n+1)i + o(\varepsilon))t}. \end{aligned} \quad (13)$$

В уравнении (13) левая часть периодическая, а правая антипериодическая, равенство возможно тогда и только тогда, когда левая и правая части равны 0.

\dot{U}_2 определяется в виде:

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{2}(\beta_2 \sum_{-\infty}^{\infty} f_{2n}(V)e^{(\pi 2ni + o(\varepsilon))t} - \ddot{U}_1 - kU_1 - 2W'(\tau)).$$

Рассмотрим антипериодическую часть уравнения (13) и разложим ее на соответствующие степени $e^{\xi_n t}$:

$$\lambda_{n0}V_n'(\tau) = \frac{1}{2}\lambda_{n1}^2\lambda_{n0}V_n(\tau) + \lambda_{n0}\beta V_n(\tau) + \beta_2\varphi_{2n}(V) + \beta_3\varphi_{3n}(V). \quad (14)$$

Подставим значения λ_{n1} и λ_{n0} в уравнение (14):

$$\begin{aligned} V_n'(\tau) = -\frac{1}{2}\left(\pi^2(2n+1)^2 - 2k + \frac{k^2}{\pi^2(2n+1)^2}\right)V_n(\tau) + \\ + \beta V_n(\tau) + \frac{\beta_2}{\pi(2n+1)i}\varphi_{2n}(V) + \frac{\beta_3}{\pi(2n+1)i}\varphi_{3n}(V). \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида с краевыми условиями:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial^2 r} + kV - \frac{k^2}{2}J^2(V) + \beta V + \beta_2 J\left(U_1 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \beta_3 J\left(\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^3\right), \quad (16)$$

$$\int_0^1 V(\tau, r)dr = 0, V(\tau, r) \equiv -V(\tau, r+1). \quad (17)$$

$J(V)$, как и ранее, обозначена первообразная функции V с нулевым средним:

$$J^2(V) = J(J(V)), (J(V))'_r \equiv V.$$

Представим функцию V из уравнения (16) в виде:

$$V = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(2n+1)ir} V_n(\tau). \quad (18)$$

Подставив формулу (18) в уравнение (16) и приравняв коэффициенты получившихся рядов Фурье, мы получим построчное равенство, что для каждого n справедливо равенство (14).

Теорема 4. Пусть V_* – решение (16) с краевыми условиями (17), причем

$$V_* = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(2n+1)ir} V_n(\tau),$$

тогда

$$y = \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\varepsilon n r} V_n(\tau) + \varepsilon W(\tau)$$

является асимптотическим по невязке равномерно по $t \geq 0$ решением (4).

Доказательство теоремы следует из построений решения, сделанных ранее.

Аналогичные действия и результаты получаются при $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2 \beta$.

4. Заключение

Была рассмотрена модель оптоэлектронного осциллятора, найдено его состояние равновесия. Для изучения локальной динамики уравнения был рассмотрен характеристический квазиполином. Выделены критические значения параметра β , при котором состояние равновесия меняет свою устойчивость. Найдено асимптотическое представление корней характеристического квазиполинома при критическом значении параметра β . Интересным оказывается то, что кроме основной «цепочки» стремящихся к мнимой оси корней существует еще один близкий к нулю корень характеристического уравнения. Построено асимптотическое представление корней при малом изменении параметра β_1 . Главным результатом работы является построение нормальной формы решения уравнения (4) при критических параметрах β_1 .

Список литературы

1. *Larger L., Maistrenko Y., Penkovskiy B.* Virtual Chimera States for Delayed-Feedback Systems // *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 111. P. 054103.
2. *Григорьева Е.В., Кащенко С.А., Глазков Д.В.* Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием // *Моделирование и анализ информационных систем*. 2018. Т. 25. № 1. С. 71-82.
3. *Маслеников И.Н.* Исследование локальной динамики дифференциально-интегрального уравнения с запаздыванием // *Современные проблемы математики и информатики*. 2018. Вып. 18. С. 39-45.
4. *Кащенко И.С.* Асимптотическое разложение решений уравнений: методические указания. Ярославль: ЯрГУ, 2011. 44 с.
5. *Кащенко И.С.* Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2008. Т. 48. № 12. С. 2141-2150.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

Поступила в редакцию 17.09.2019 г.

Отрецензирована 03.10.2019 г.

Принята в печать 22.10.2019 г.

Информация об авторе:

Маслеников Игорь Николаевич – магистрант по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика». Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, г. Ярославль, Российская Федерация. E-mail: igor.maslenikov16@yandex.ru

STUDY OF THE LOCAL DYNAMICS OF THE OPTOELECTRONIC OSCILLATOR MODEL

Maslenikov I.N., Master's Degree Student in "Applied Mathematics and Informatics" Programme. P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation. E-mail: igor.maslenikov16@yandex.ru

Abstract. We study the stability of equilibrium state for the model of optoelectronic oscillator described by the differential-integral equation. For this, we construct a characteristic equation and determine the position of its roots. Depending on the parameters values, we determine the stability of equilibrium state. We identified the critical parameters values at which the

equilibrium state changes its stability. In critical cases, we construct analogues of standard forms.

Keywords: characteristic quasipolynomial; asymptotic roots representation; standard form

Received 17 September 2019

Reviewed 3 October 2019

Accepted for press 22 October 2019