Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Сборник научных трудов
молодых ученых, аспирантов и студентов

ВЫПУСК 19

Ярославль
ЯрГУ
2019

УДК 51+004(060.55)
ББК В1я43+З973.2я43
С 56

Рекомендовано
редакционно-издательским советом ЯрГУ
в качестве научного издания. План 2019 года

Современные проблемы математики и информатики :
С 56 сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2019. — Вып. 19. — 60 с.
ISBN 978-5-8397-1186-0

В сборнике представлены работы молодых ученых, аспирантов и студентов.

В статьях рассматриваются различные проблемы теории динамических систем, информационных технологий, разработки программных средств и вычислительной математики.

Сборник подготовлен с использованием издательской системы LaTeX.

ББК В1я43+З973.2я43
УДК 51+004(060.55)

ISBN 978-5-8397-1186-0

Содержание

УДК 519.6

И. Н. Масленников

Локальная динамика модели оптико-электронного осциллятора

Для модели оптико-электронного осциллятора, описываемого дифференциально-интегральным уравнением, изучена устойчивость состояния равновесия. Для этого построено характеристическое уравнение и определено положение его корней. В зависимости от значений параметров определена устойчивость состояния равновесия. Выделены критические значения параметров, при которых состояние равновесия меняет свою устойчивость. В критических случаях построены аналоги нормальных форм.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциально-интегральное уравнение с запаздыванием [1], которое представляет собой реализацию модифицированного уравнения Икеды с задержкой по времени:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} + x + \delta\int_{t_0}^{t} x\left(s\right)ds = \beta_1 F\left(x(t-\tau)\right). \qquad (1)$$

Здесь β_1 — параметр, τ — параметр запаздывания, вещественный и положительный. Функция F достаточно гладкая, не ограничивая общности можно считать, что $F(0) = 0$. Таким образом, уравнение (1) имеет нулевое состояние равновесия, если это не так, то можно сделать соответствующую замену.

В работе [1] уравнение исследовалось численными методами, подбирались параметры, начальные условия, строились сложные квазипериодические режимы, так называемые химеры, при этом рассматривался случай, когда параметры $\varepsilon = 0.005$ и $\delta = 0.016$. В силу этого будем предполагать, что параметры ε и δ малы ($0 < \varepsilon \ll 1$, $0 < \delta \ll 1$) и пропорциональны: $\varepsilon = k\delta$, $k > 0$.

Поставим задачу исследовать локальную динамику в окрестности состояния равновесия. В §2 опишем устойчивость состояния равновесия, а в §3 исследуем бифуркации, которые возникают при потере устойчивости нулевого решения.

Отметим, что в статье [2] рассмотрено похожее уравнение оптико-электронного осциллятора, в котором параметр δ не является малым.

2. Исследование устойчивости состояния равновесия

В работе [5] проведено исследование расположения корней характеристического квазиполинома линеаризованного уравнения (1).

$$\varepsilon\lambda^2 + \lambda + k\varepsilon = \lambda\beta e^{-\lambda}. \tag{2}$$

Для уравнения (2) справедливы теоремы, доказанные в [5].

Теорема 1. *При $|\beta| < 1$ и достаточно малом ε, все корни (2) имеют отрицательные вещественные части.*

Теорема 2. *При $\beta = 1 + \varepsilon^2\beta_1$ корни характеристического уравнения допускают асимптотическое представление вида:*

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + o(\varepsilon^2) \qquad \text{при} \quad n \neq 0, \qquad \text{где}$$

$$\lambda_{n0} = 2\pi n i, \qquad \lambda_{n1} = -\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}},$$

$$\lambda_{n2} = -\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + \lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}} + \frac{\lambda_{n1}^2}{2} + \beta_1,$$

$$\text{и} \quad \lambda = \sqrt{\varepsilon}\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\lambda_3 + o(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \qquad \text{при} \quad \lambda_0 = 0, \qquad \text{где}$$

$$\lambda_1 = \pm\sqrt{k}i, \qquad \lambda_2 = \frac{-k}{4}.$$

Теорема 3. *При $\beta = -(1+\varepsilon^2\beta_1)$ корни характеристического уравнения допускают асимптотическое представление вида:*

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + o(\varepsilon^2), \qquad \text{где}$$

$$\lambda_{n0} = \pi(2n+1)i, \qquad \lambda_{n1} = -\frac{\lambda_{n0}^2 + k}{\lambda_{n0}},$$

$$\lambda_{n2} = -\frac{2\lambda_{n0}\lambda_{n1} + \lambda_{n1}^2}{\lambda_{n0}} + \frac{\lambda_{n1}^2}{2} + \beta_1,$$

$$\text{и} \quad \lambda = \frac{-\varepsilon k}{2} + o(\varepsilon) \qquad \text{при} \quad \lambda_0 = 0.$$

3. Построение нормальной формы уравнения

Уравнение (1) допускает запись в виде

$$\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = \beta F(\dot{y}(t-1)). \tag{3}$$

Разложим в уравнении (3) функцию F в ряд Тейлора:

$$\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} + k\varepsilon y = \beta_1\dot{y}(t-1) + \beta_2(\dot{y}(t-1))^2 + \beta_3(\dot{y}(t-1))^3 + \ldots, \tag{4}$$

где β_2, β_3 некоторые постоянные.

Рассмотрим задачу построения нормальной формы для уравнения (4), при параметре $\beta_1 = -(1+\varepsilon^2\beta)$, $\beta > 0$. При таком β_1 характеристическое уравнение имеет бесконечное количество корней, стремящихся к мнимой оси, таким образом, реализуется критический случай бесконечной размерности. Для исследования поведения решений воспользуемся методом квазинормальных форм [3]. Представим функцию y в виде ряда

$$y = \varepsilon V(t) + \varepsilon W(\tau) + \varepsilon^2 U_1(t) + \varepsilon^3 U_2(t) + \ldots, \tag{5}$$

где U_1, U_2 периодические с периодом 1: $U_1(t) \equiv U_1(t+1), U_2(t) \equiv U_2(t+1)$. Функция W такая, что среднее значение $\beta_2\dot{V}^2 - kW(\tau)$ равняется 0:

$$W(\tau) = \frac{\beta_2}{k}\int\limits_0^1 \dot{V}^2(t,\tau)dt.$$

Функция $V(t)$ представляется в виде ряда Фурье:

$$V(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{iIm(\lambda_{n0}+\varepsilon\lambda_{n1}+\varepsilon^2\lambda_{n2}+\ldots)t}V_n(\tau), \qquad \text{где} \quad \tau = \varepsilon^2 t.$$

Значения λ_{n0}, λ_{n1}, λ_{n2} определяются из асимптотического приближения корней уравнения (2) (см. Теорему 3).

Обозначим $\xi_n(\varepsilon)$:

$$\xi_n(\varepsilon) = i(\lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \ldots).$$

Для удобства выпишем первую и вторую производную функции V.

$$\dot{V} = \sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n V_n(\tau) + \varepsilon^2 V_n'(\tau))e^{\xi_n t}, \tag{6}$$

$$\ddot{V} = \sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n^2 V_n(\tau) + 2\xi_n\varepsilon^2 V_n'(\tau) + \varepsilon^4 V_n''(\tau))e^{\xi_n t}. \tag{7}$$

Рассмотрим подробнее $\dot y(t-1)$:

$$\dot y(t-1) = \varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n V_n(\tau-\varepsilon^2)+\varepsilon^2 V_n'(\tau-\varepsilon^2))e^{\xi_n t}e^{-\xi_n}+ \\ +\varepsilon^3\dot W(\tau-\varepsilon^2)+\varepsilon^2\dot U_1(t-1)+\varepsilon^3\dot U_2(t-1)+\dots \tag{8}$$

Раскладывая в ряды Тейлора функции $e^{-\xi_n}$, $V_n(\tau-\varepsilon^2)$ и $W(\tau-\varepsilon^2)$, получим:

$$e^{-\xi_n} = e^{-\pi(2n+1)i-\varepsilon\lambda_{n1}-\varepsilon^2\lambda_{n2}-\dots} = -1+\varepsilon\lambda_{n1}+\varepsilon^2\lambda_{n2}-\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2-\dots, \\ V_n(\tau-\varepsilon^2) = V_n(\tau)-\varepsilon^2 V_n'(\tau)+\dots, \\ W(\tau-\varepsilon^2) = W(\tau)-\varepsilon^2 W'(\tau)+\dots \tag{9}$$

Подставим (5), (6), (7), (8), (9) в уравнение (4), будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и соответствующих $e^{\xi_n t}$, выпишем результат в явном виде:

$$\varepsilon(\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n^2 V_n(\tau)+2\xi_n\varepsilon^2 V_n'(\tau)+\varepsilon^4 V_n''(\tau))e^{\xi_n t}+\varepsilon^5 W''(\tau)+ \\ +\varepsilon^2\ddot U_1+\varepsilon^3\ddot U_2)+\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n V_n(\tau)+\varepsilon^2 V_n'(\tau))e^{\xi_n t}+\varepsilon^3 W'(\tau)+ \\ +\varepsilon^2\dot U_1+\varepsilon^3\dot U_2+k\varepsilon(\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}e^{\xi_n t}V_n(\tau)+\varepsilon W(\tau)+\varepsilon^2 U_1+\varepsilon^3 U_2)+o(\varepsilon^4) = \\ = -(1+\varepsilon^2\beta)(\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n(V_n(\tau)-\varepsilon^2 V_n'(\tau))+\varepsilon^2(V_n'(\tau)-\varepsilon^2 V_n''(\tau)))e^{\xi_n t}\cdot \\ \cdot(-1)(1-\varepsilon\lambda_{n1}-\varepsilon^2\lambda_{n2}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2)+\varepsilon^3(W'(\tau)-\varepsilon^2 W''(\tau))+ \\ +\varepsilon^2\dot U_1(t-1)+\varepsilon^3\dot U_2(t-1))+\beta_2(\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n(V_n(\tau)-\varepsilon^2 V_n'(\tau))+ \\ +\varepsilon^2(V_n'(\tau)-\varepsilon^2 V_n''(\tau)))e^{\xi_n t}(-1)(1-\varepsilon\lambda_{n1}-\varepsilon^2\lambda_{n2}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2)+ \\ +\varepsilon^3(W'(\tau)-\varepsilon^2 W''(\tau))+\varepsilon^2\dot U_1(t-1)+\varepsilon^3\dot U_2(t-1))^2+ \\ +\beta_3(\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}(\xi_n(V_n(\tau)-\varepsilon^2 V_n'(\tau))+\varepsilon^2(V_n'(\tau)-\varepsilon^2 V_n''(\tau)))e^{\xi_n t}\cdot \\ \cdot(-1)(1-\varepsilon\lambda_{n1}-\varepsilon^2\lambda_{n2}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_{n1}^2)+ \\ +\varepsilon^3(W'(\tau)-\varepsilon^2 W''(\tau))+\varepsilon^2\dot U_1(t-1)+\varepsilon^3\dot U_2(t-1))^3. \tag{10}$$

Раскроем скобки, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и соответствующих $e^{\xi_n t}$.

При ε получаем верное тождество:

$$\lambda_{n0} V_n(\tau) e^{\xi_n t} = \lambda_{n0} V_n(\tau) e^{\xi_n t}.$$

При ε^2 получаем:

$$\begin{gathered}\sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{n0}^2 V_n(\tau) e^{\xi_n t} + \sum_{-\infty}^{\infty} \lambda_{n1} V_n(\tau) e^{\xi_n t} + \dot{U}_1 + \sum_{-\infty}^{\infty} k V_n(\tau) e^{\xi_n t} + \\ + kW(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)(-\lambda_{n1} V_n(\tau) + \lambda_{n1}\lambda_{n0} V_n(\tau)) e^{\xi_n t} - \\ - \dot{U}_1(t-1) + \beta_2 \sum_{-\infty}^{\infty} g_{2n}(V) e^{(\pi 2ni + o(\varepsilon))t},\end{gathered} \tag{11}$$

где $g_{2n}(V)$ – это коэффициенты ряда Фурье для функции

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \pi(2n+1) i V_n(\tau) e^{\xi_n t} \right)^2.$$

После сокращений из уравнения (11) определяется $\dot{U}_1$

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{2}(\beta_2 \sum_{-\infty}^{\infty} g_{2n}(V(t,\tau)) e^{(\pi 2ni + o(\varepsilon))t} - kW(\tau)),$$

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{2}(\beta_2 \dot{V}^2 - kW(\tau)).$$

U_1 находится в виде:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^r \beta_2 \dot{V}^2(s,\tau) - W(\tau) ds.$$

Обратим внимание, что U_1 периодическая, т. к. среднее значение подынтегральной функции равно нулю.

При ε^3 получаем:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{\xi_n t} 2\lambda_{n0}\lambda_{n1}V_n(\tau) + \ddot{U}_1 + \sum_{-\infty}^{\infty}(\lambda_{n2}V_n(\tau) + V_n'(\tau))e^{\xi_n t} + \dot{U}_2 +$$
$$+kU_1 + W'(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)e^{\xi_n t}((-1)(\lambda_{n2}V_n(\tau) - \lambda_{n0}V_n'(\tau) + V_n'(\tau)) +$$
$$+\lambda_{n1}^2 V_n(\tau) + (-\lambda_{n2} + \frac{1}{2}\lambda_{n1}^2)\lambda_{n0}V_n(\tau)) - (\dot{U}_2(t-1) + W'(\tau)) + \quad (12)$$
$$+\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{n0}\beta V_n(\tau)e^{\xi_n t} + \dot{U}_1(t-1) + \beta_2\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi_{2n}(V)e^{(\pi(2n+1)i+o(\varepsilon))t} +$$
$$+\beta_2\sum_{-\infty}^{\infty} f_{2n}(V)e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t} + \beta_3\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi_{3n}(V)e^{(\pi(2n+1)i+o(\varepsilon))t}.$$

Здесь $\varphi_{2n}(V)$ – коэффициенты ряда Фурье для функции

$$(-2)\dot{U}_1(t-1)\sum_{-\infty}^{\infty}\pi(2n+1)iV_n(\tau)e^{\xi_n t};$$

$\varphi_{3n}(V)$ – коэффициенты ряда Фурье для функции

$$(-1)\left(\sum_{-\infty}^{\infty}\pi(2n+1)iV_n(\tau)\right)^3;$$

$f_{2n}(V)$ – коэффициенты ряда Фурье для функции

$$(-2)\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{n0}V_n(\tau)e^{\xi_n t}\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}\lambda_{m0}\lambda_{m1}V_m(\tau)e^{\xi_m t}.$$

Уравнение (12) упрощается до вида:

$$\ddot{U}_1 + 2\dot{U}_2 + kU_1 + 2W'(\tau) - \beta_2\sum_{-\infty}^{\infty} f_{2n}(V)e^{(\pi 2ni+o(\varepsilon))t} =$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty}(-\lambda_{n0}V_n'(\tau) + \frac{1}{2}\lambda_{n1}^2\lambda_{n0}V_n(\tau) + \lambda_{n0}\beta V_n(\tau) + \quad (13)$$
$$+\beta_2\varphi_{2n}(V) + \beta_3\varphi_{3n}(V))e^{(\pi(2n+1)i+o(\varepsilon))t}.$$

В уравнении (13) левая часть периодическая, а правая антипериодическая, равенство возможно тогда и только тогда, когда левая и правая часть равна 0.

$\dot{U}_2$ определяется в виде:

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{2}(\beta_2 \sum_{-\infty}^{\infty} f_{2n}(V) e^{(\pi 2ni + o(\varepsilon))t} - \ddot{U}_1 - kU_1 - 2W'(\tau)).$$

Рассмотрим антипериодическую часть уравнения (13) и разложим её на соответсвующие степени $e^{\xi_n t}$:

$$\lambda_{n0} V_n'(\tau) = \frac{1}{2}\lambda_{n1}^2 \lambda_{n0} V_n(\tau) + \lambda_{n0}\beta V_n(\tau) + \beta_2\, \varphi_{2n}(V) + \beta_3\, \varphi_{3n}(V). \tag{14}$$

Подставим значения λ_{n1} и λ_{n0} в уравнение (14) :

$$\begin{gathered} V_n'(\tau) = -\frac{1}{2}\left(\pi^2(2n+1)^2 - 2k + \frac{k^2}{\pi^2(2n+1)^2}\right) V_n(\tau) + \\ +\beta V_n(\tau) + \frac{\beta_2}{\pi(2n+1)i}\, \varphi_{2n}(V) + \frac{\beta_3}{\pi(2n+1)i}\, \varphi_{3n}(V). \end{gathered} \tag{15}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\begin{gathered} \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + kV - \frac{k^2}{2} J^2(V) + \\ +\beta V + \beta_2 J\left(U_1 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \beta_3 J\left(\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^3\right), \end{gathered} \tag{16}$$

с дополнительными условиями

$$\int_0^1 V(\tau, r) dr = 0, \qquad V(\tau, r) \equiv -V(\tau, r+1). \tag{17}$$

Через $J(V)$, как и ранее, обозначена первообразная функции V с нулевым средним:

$$J^2(V) = J(J(V)), \qquad (J(V))_r' \equiv V.$$

Представим функцию V из уравнения (16) в виде:

$$V = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(2n+1)ir} V_n(\tau). \tag{18}$$

Подставив формулу (18) в уравнение (16) и приравняв коэффициенты получившихся рядов Фурье, мы получим построчное равенство,что для каждого n справедливо равенство (14).

Теорема 4. *Пусть* $V_* = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pi(2n+1)ir} V_n(\tau)$ – *решение задачи* (16), (17), *тогда*

$$y(t,\varepsilon) = \varepsilon \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\xi_n t} V_n(\varepsilon^2 t) + \varepsilon W(\varepsilon^2 t)$$

является асимптотическим по невязке равномерно по $t \geq 0$ *решением* (4).

Доказательство теоремы следует из построений, сделанных ранее. Аналогичные действия и результаты получаются при $\beta_1 = 1 + \varepsilon^2\beta$.

4. Заключение

Рассмотрена модель оптико-электронного осциллятора, найдено его состояние равновесия. Для изучения локальной динамики в окрестности нулевого решения уравнения построен характеристический квазиполином. Выделены критические значения параметра β, при которых состояние равновесия меняет свою устойчивость. Найдено асимптотическое представление корней характеристического квазиполинома при критическом значении параметра β. Интересным оказывается тот факт, что кроме основной «цепочки» стремящихся к мнимой оси корней существует еще один близкий к нулю корень характеристического уравнения. Построено асимптотическое представление корней при малом изменении параметра β_1. Главным результатом работы является построение нормальной формы дифференциального уравнения (4) при критических значениях параметра β_1.

Литература

1. *Larger L., Maistrenko Y., Penkovskyi B.* Virtual Chimera States for Delayed-Feedback Systems // Physical Review Letters, 2013. Vol. 111. 054103.

2. *Григорьева Е. В., Кащенко С. А., Глазков Д. В.* Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, №1. 2018. С. 71-82.

3. *Кащенко И. С.* Асимптотическое разложение решений уравнений: методические указания. Ярославль: ЯрГУ, 2011.

4. *Кащенко И. С.* Метод квазинормальных форм в уравнениях с запаздыванием: методические указания. Ярославль: ЯрГУ, 2011.

5. *Масленников И. Н.* Исследование локальной динамики дифференциально-интегрального уравнения с запаздыванием // Современные проблемы математики и информатики. Вып. 18 / Ярославль : ЯрГУ, 2018. С. 39-45.

6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова