Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов

ВЫПУСК 18

Ярославль
ЯрГУ
2018

УДК 517.9+512.54+519.6(081)
ББК В1я43+3973.2я43
С 56

Рекомендовано
редакционно-издательским советом ЯрГУ
в качестве научного издания. План 2018 года

Современные проблемы математики и информатики :
С 56 сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов / Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2018. — Вып. 18. — 64 с.
ISBN 978-5-8397-1158-7

В сборнике представлены работы молодых ученых, аспирантов и студентов.

В статьях рассматриваются различные проблемы теории динамических систем, информационных технологий, разработки программных средств и вычислительной математики.

Сборник подготовлен с использованием издательской системы LaTeX.

ББК В1я43+3973.2я43
УДК 517.9+512.54+519.6(081)

ISBN 978-5-8397-1158-7

Содержание

УДК 519.6

И. Н. Масленников

Исследование локальной динамики дифференциально-интегрального уравнения с запаздыванием

Для модели оптико-электронного осциллятора, описываемого дифференциально-интегральным уравнением, изучается устойчивость нулевого решения. Для этого строится характеристическое уравнение и анализируется положение его корней. В зависимости от значений параметров определяется устойчивость состояния равновесия. Выделяются критические значения параметров, при которых состояние равновесия меняет устойчивость. Строится асимптотическое приближение корней характеристического квазиполинома.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциально-интегральное уравнение с запаздыванием [1], которое представляет собой экспериментальную реализацию модифицированного уравнения Икеды с задержкой по времени:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} + x + \delta\int_{t_0}^{t} x\,(s)\,ds = \beta_1 F\,(x(t-\tau))\,. \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon, \delta, \beta_1, t_0$ — некоторые параметры, τ — параметр запаздывания, вещественный и положительный. Функция F достаточно гладкая, не ограничивая общности, можно считать, что $F(0) = 0$. Таким образом, уравнение (1) имеет нулевое состояние равновесия, если это не так, то можно сделать соответствующую замену.

В работе [1] уравнение (1) исследовалось численными методами, строились сложные квазипериодические режимы, так называемые химеры. Для этого подбирались подходящие значения параметров ($\varepsilon = 0.005$ и $\delta = 0.016$) и начальные условия. В силу этого предполагаем, что параметры ε и δ малы ($0 < \varepsilon, \delta \ll 1$) и пропорциональны: $\varepsilon = k\delta$, $k > 0$.

Ставится задача исследования локальной динамики в окрестности нулевого состояния равновесия (1). В 2.1 строится характеристический многочлен. В 2.2 изучается характеристическое уравнение при малых значениях параметра β, определяется устойчивость состояния равновесия. В последнем пункте строится асимптотическое приближения корней уравнения (1), выделяется вещественная часть для определения устойчивости или неустойчивости состояния равновесия.

Отметим, что в статье [2] рассмотрено похожее уравнение оптико-электронного осциллятора, в котором параметр δ не является малым.

2. Исследование устойчивости состояния равновесия

2.1. Построение характеристического квазиполинома

Сделаем замену $\dot{y}(t) = x(t)$ в уравнении (1), перенесем часть слагаемых в правую часть и перейдем к системе

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = \beta_1 F\left(x(t-\tau)\right) - x - \delta y, \\ \varepsilon\dot{y} = \varepsilon x. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что $x = 0, y = 0$ является решением системы (2). Исследуем его устойчивость. Выделим линейную часть выражения $F\left(x(t-\tau)\right)$.

$$F(z) = \dot{F}(0)z + O(z^2).$$

Введем параметр $\beta = \dot{F}(0)\cdot\beta_1$, $\beta - const$. Для исследования устойчивости линеаризуем (2) на нулевом состоянии равновесия:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = -x - \delta y + \beta x(t-\tau), \\ \varepsilon\dot{y} = \varepsilon x. \end{cases} \tag{3}$$

Для построения характеристического уравнения системы (3) воспользуемся методом Эйлера. Будем искать решение (3) в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \quad \text{где } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - нетривиальный вектор.}$$

Выполним подстановку и после очевидных преобразований получим

$$\begin{pmatrix} -1 + \beta e^{-\lambda\tau} - \varepsilon\lambda & -\delta \\ \varepsilon & -\varepsilon\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = 0. \tag{4}$$

Поскольку нас не интересует тривиальный вектор, нам нужно чтобы определитель матрицы (4) был равен нулю

$$\begin{vmatrix} -1 + \beta e^{-\lambda\tau} - \varepsilon\lambda & -\delta \\ \varepsilon & -\varepsilon\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Построим характеристический квазиполином. Используя условие $k\delta = \varepsilon$, получим

$$\varepsilon\lambda^2 + \lambda - \lambda\beta e^{-\lambda\tau} + \frac{\varepsilon}{k} = 0. \qquad (5)$$

Нас интересует расположение корней уравнения (5) относительно мнимой оси [4]. Состояние равновесия будет устойчивым, если все корни будут иметь отрицательную вещественную часть, и неустойчивым, если хотя бы один корень будет иметь положительную вещественную часть.

2.2. Исследование характеристического квазиполинома при малых $|\beta|$

Рассмотрим характеристическое уравнение при $\beta = 0$ и малом $\varepsilon > 0$. Сделаем замену

$$\lambda = \frac{\mu}{\varepsilon}.$$

Заменим в характеристическом уравнении переменные, домножим на ε и перенесем в правую часть экспоненту:

$$\mu^2 + \mu + \frac{\varepsilon^2}{k} = \mu\beta e^{-\tau\frac{\mu}{\varepsilon}}. \qquad (6)$$

При $\beta = 0$ уравнение становится квадратным, его корни

$$\mu_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{4\varepsilon^2}{k}}}{2}.$$

Нетрудно увидеть, что $\mathrm{Re}\mu_{1,2} < 0$. При нулевом β состояние равновесия устойчиво, все решения (1) из некоторой окрестности нуля стремятся к состоянию равновесия [5].

Исследуем характеристическое уравнение, когда $|\beta|$ мало, но не равно нулю.

Теорема 1. *При $|\beta| < 1$ и достаточно малом ε, все корни* (6) *имеют отрицательные вещественные части.*

Доказательство. Предположим обратное, что есть корень μ с неотрицательной вещественной частью, т. е. $\mathrm{Re}\mu \geq 0$. Разделим уравнение (6) на μ, это можно сделать, т. к. $\mu = 0$ не является корнем.

$$\mu + 1 + \frac{\varepsilon^2}{k\mu} = \beta e^{-\tau\frac{\mu}{\varepsilon}}. \qquad (7)$$

Представим $\mu = \alpha + i\gamma$ и оценим модуль правой части:

$$|\beta e^{-\tau\frac{\alpha+i\gamma}{\varepsilon}}| = |\beta||e^{-\tau\frac{\alpha+i\gamma}{\varepsilon}}| \leq |\beta|e^{-\tau\frac{\alpha}{\varepsilon}} \leq |\beta|.$$

Оценим левую часть:

$$|\mu + 1 + \frac{\varepsilon^2}{k\mu}| = |\alpha + i\gamma + 1 + \frac{\varepsilon^2}{k(\alpha+i\gamma)}| = |\alpha + i\gamma + 1 + \frac{\varepsilon^2(\alpha - i\gamma)}{k(\alpha^2+\gamma^2)}| =$$

$$= \sqrt{\left(\alpha + 1 + \frac{\varepsilon^2\alpha}{k(\alpha^2+\gamma^2)}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\varepsilon^2\gamma}{k(\alpha^2+\gamma^2)}\right)^2}.$$

Слагаемые под корнем при $\alpha \geq 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\left(\alpha + 1 + \frac{\varepsilon^2\alpha}{k(\alpha^2+\gamma^2)}\right)^2 \geq 1, \qquad \left(\gamma - \frac{\varepsilon^2\gamma}{k(\alpha^2+\gamma^2)}\right)^2 \geq 0.$$

Отсюда следует, что при $\beta<1$ у характеристического уравнения (7) нет корней ни на мнимой оси, ни в правой комплексной полуплоскости. Теорема доказана.

□

Таким образом, при $|\beta| < 1$ состояние равновесия устойчиво, и все решения (1) с начальными условиями из его некоторой окрестности стремятся к нулю [5].

2.3. Разложение критических корней по малому параметру

В предыдущем пункте мы определили $|\beta| < 1$, теперь рассмотрим $|\beta| = 1$, как это показано в [3].

Для определенности сначала найдем приближение корней (5) при β=1. Выделим первый член разложения асимптотического ряда

$$\lambda = \lambda_0 + o(1).$$

Подставим в уравнение (5) и всё, что будет иметь порядок малости больше чем o(1) сгруппируем.

$$\lambda_0 e^{-\lambda_0\tau} = \lambda_0 + o(1).$$

Выделяя главную часть, получаем

$$\lambda_0(e^{-\lambda_0\tau} - 1) = 0.$$

У этого уравнения корнями являются

$$\lambda_0 = 0 \qquad \text{и} \quad \lambda_{n0} = \frac{2\pi n i}{\tau}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что нулевой корень имеет кратность 2. Уточним асимптотику при $\lambda_{n0} \neq 0$, чтобы определить вещественную часть каждого корня:

$$\lambda_n = \frac{2\pi n i}{\tau} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \mathrm{o}(\varepsilon^2).$$

Подставим это в уравнение (6):

$$\varepsilon\left(\frac{2\pi n i}{\tau} + \varepsilon\lambda_{n1}\right)^2 + \frac{2\pi n i}{\tau} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \frac{\varepsilon}{k} + \mathrm{o}(\varepsilon^2) =$$

$$= \left(\frac{2\pi n i}{\tau} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2}\right) e^{-\left(\frac{2\pi n i}{\tau} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \mathrm{o}(\varepsilon^2)\right)\tau}.$$

Так как $\varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2}$ мало, то разложим экспоненту в ряд Тейлора.

$$\varepsilon\left(\frac{-4\pi^2 n^2}{\tau^2} + \varepsilon\frac{4\pi n i}{\tau}\lambda_{n1}\right) + \frac{2\pi n i}{\tau} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \frac{\varepsilon}{k} + \mathrm{o}(\varepsilon^2) =$$

$$= \left(\frac{2\pi n i}{\tau} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2}\right)\left(1 - \tau\varepsilon\lambda_{n1} - \tau\varepsilon^2\lambda_{n2} + \frac{\tau^2\varepsilon^2}{2}\lambda_{n1}^2 + \mathrm{o}(\varepsilon^2)\right).$$

Раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра.

При ε^0 имеем верное тождество

$$\frac{2\pi n i}{\tau} = \frac{2\pi n i}{\tau}.$$

При ε^1 получим

$$\frac{-4\pi^2 n^2}{\tau^2} + \frac{1}{k} = -2\pi n i\lambda_{n1} \quad \text{при } n \neq 0. \tag{8}$$

При ε^2 – соотношение

$$\frac{4\pi n i}{\tau}\lambda_{n1} = -\tau\lambda_{n1}^2 + \frac{2\pi n i}{\tau}\left(-\tau\lambda_{n2} + \frac{\tau^2}{2}\lambda_{n1}^2\right). \tag{9}$$

Из (8) и (9) последовательно выражаются λ_{n1} и λ_{n2}:

$$\lambda_{n1} = \frac{\left(\frac{-4\pi^2 n^2}{\tau^2} + \frac{1}{k}\right) i}{2\pi n} \quad \text{при } n \neq 0.$$

$$\lambda_{n2} = \frac{\left(\dfrac{4\pi n i}{\tau}\lambda_{n1} + \tau\lambda_{n1}^2\right) i}{2\pi n} + \frac{\tau}{2}\lambda_{n1}^2 \quad \text{при } n \neq 0. \tag{10}$$

Выделим действительную часть числа λ_{n2} и определим знак. Первое слагаемое (10) является чисто мнимым и не влияет на устойчивость, $\mathrm{Re}\lambda_{n2} = \dfrac{\tau}{2}\lambda_{n1}^2$.

Значит $\mathrm{Re}\lambda_{n2} \leq 0$, причем $\mathrm{Re}\lambda_{n2} = 0$ только, если k изначально будет подобрано определенным образом, и только при каком-то одном n это будет выполняться.

Теперь уточним асимптотику при $\lambda_0 = 0$. Возьмем разложение

$$\lambda = \sqrt{\varepsilon}\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\lambda_3 + \mathrm{o}(\varepsilon^{\frac{3}{2}}).$$

По аналогии выполняем те же действия. В результате получаем

$$\lambda_1 = \frac{\pm i}{\sqrt{\tau k}} \qquad \text{и} \qquad \lambda_2 = \frac{-1}{2k}.$$

Теорема 2. *При $\beta = 1$ корни характеристического уравнения допускают асимптотическое представление вида*

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \mathrm{o}(\varepsilon^2), \quad \text{при} \quad n \neq 0, \quad \text{где}$$

$$\lambda_{n0} = \frac{2\pi n i}{\tau}, \qquad \lambda_{n1} = \frac{\left(\dfrac{-4\pi^2 n^2}{\tau^2} + \dfrac{1}{k}\right) i}{2\pi n},$$

$$\lambda_{n2} = \frac{\left(\dfrac{4\pi n i}{\tau}\lambda_{n1} + \tau\lambda_{n1}^2\right) i}{2\pi n} + \frac{\tau}{2}\lambda_{n1}^2;$$

$$\lambda = \sqrt{\varepsilon}\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}\lambda_3 + \mathrm{o}(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \quad \text{при} \quad \lambda_0 = 0, \quad \text{где}$$

$$\lambda_1 = \frac{\pm i}{\sqrt{\tau k}} \qquad \text{и} \qquad \lambda_2 = \frac{-1}{2k}.$$

Аналогичные построения можно провести и при $\beta = -1$.

Теорема 3. *При $\beta = -1$ корни характеристического уравнения допускают асимптотическое представление вида*

$$\lambda_n = \lambda_{n0} + \varepsilon\lambda_{n1} + \varepsilon^2\lambda_{n2} + \mathrm{o}(\varepsilon^2), \quad \text{где}$$

$$\lambda_{n0} = \frac{2\pi n i + \pi i}{\tau}, \qquad \lambda_{n1} = \frac{\left(\dfrac{-\pi^2(2n+1)^2}{\tau^2} + \dfrac{1}{k}\right) i}{\pi(2n+1)},$$

$$\lambda_{n2} = \frac{\left(\dfrac{2\pi(2n+1)i}{\tau}\lambda_{n1} + \tau\lambda_{n1}^2\right)i}{\pi(2n+1)} + \frac{\tau}{2}\lambda_{n1}^2;$$

$$\lambda = \frac{-\varepsilon}{2k} + o(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \lambda_0 = 0.$$

3. Заключение

Рассмотрена модель оптико-электронного осциллятора, найдено его состояние равновесия. Для изучения локальной динамики уравнения построен характеристический квазиполином. Определены критические значения параметра β, при которых меняется устойчивость состояния равновесия. Найдено асимптотическое представление корней характеристического квазиполинома при критическом значении параметра β. При этом оказывается, что кроме основной «цепочки» стремящихся к мнимой оси корней существует еще один близкий к нулю корень характеристического уравнения.

Литература

1. *Larger L., Maistrenko Y., Penkovskyi B.* Virtual Chimera States for Delayed-Feedback Systems // Physical Review Letters, 2013. Vol. 111. pp. 054103.

2. Григорьева Е. В., Кащенко С. А., Глазков Д. В. Особенности локальной динамики модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. Т. 25, №1, 2018, с. 71-82.

3. *Кащенко И. С.* Асимптотическое разложение решений уравнений: методические указания. Ярославль : ЯрГУ, 2011.

4. *Кащенко И. С.* Метод квазинормальных форм в уравнениях с запаздыванием : методические указания. Ярославль : ЯрГУ, 2011.

5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова