Technische Universität Kaiserslautern
Fachbereich Mathematik

# VORKURS MATHEMATIK

für Studierende der Mathematik, Informatik und Physik

## Übungsblatt 4

**Aufgabe 4.1**

Ein Zahlenschema der Form

$$M = \boxed{\begin{array}{ccc} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{array}}$$

mit Einträgen $m_{ij} \in \mathbb{R}$ heißt *magisches Quadrat* mit 3 Zeilen und 3 Spalten, wenn die Summen der Zahlen in jeder Spalte, jeder Zeile und jeder Diagonalen gleich sind.

Zum Beispiel ist

$$M = \boxed{\begin{array}{ccr} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}}$$

ein magisches Quadrat mit Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme 3 und

$$N = \boxed{\begin{array}{ccc} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{array}}$$

ein magisches Quadrat mit Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme 15.

a) Finden Sie mindestens zwei neue magische Quadrate mit 3 Zeilen und 3 Spalten und überlegen Sie sich anhand dieser und obiger Beispiele, wie eine geeignete Addition und Skalarmultiplikation für diese aussehen könnte.

b) Definieren Sie allgemein für die Menge $\mathcal{M}$ aller magischen Quadrate mit 3 Zeilen und 3 Spalten eine Addition und Skalarmultiplikation.

c) **(Zusatzaufgabe)**
Beweisen Sie, dass $\mathcal{M}$ mit der in b) definierten Addition und Skalarmultiplikation zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum wird.

*In der Mathematik gibt es keine Autoritäten.*
*Das einzige Argument für die Wahrheit ist der Beweis.*
Kazimierz Urbanik

**Aufgabe 4.2**

Betrachten Sie folgende Abbildung (wobei $|x_i|$ den Betrag von $x_i$ für $i = 1, 2$ bezeichnet):

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_M : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \underline{x} &\longmapsto \|\underline{x}\|_M := |x_1| + |x_2| \end{aligned}$$

a) Beginnen Sie zunächst damit, die Abbildung zu verstehen, indem Sie einige Zahlenbeispiele für $\underline{x}$ und $\|\underline{x}\|_M$ betrachten und sich diese geometrisch in der Ebene $\mathbb{R}^2$ veranschaulichen.

b) Zeigen Sie: $\|\cdot\|_M$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$. **(Zusatzaufgabe)**
Man nennt sie die *Manhattan-Norm* oder *Mannheim-Norm* (warum?).

c) Skizzieren Sie die Menge aller Einheitsvektoren (Vektoren der Länge 1) des $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Manhattan-Norm, also die Menge $K_{\|\|_M} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|\underline{x}\|_M = |x_1| + |x_2| = 1\}$ (*Einheitskreis bzgl. Manhattan-Norm*) und vergleichen Sie diese mit der Skizze der Menge der Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Euklidischen Norm, also $K_{\|\cdot\|_E} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|\underline{x}\|_E = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} = 1\}$ (*Einheitskreis bzgl. Euklidischer Norm*).

**Aufgabe 4.3**

Geben Sie für die folgenden Systeme von Vektoren an, ob sie linear unabhängig oder linear abhängig sind und beweisen Sie Ihre Behauptung.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$