



# UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

**FACULTAD DE CIENCIAS  
INGENIERIA MATEMATICA  
EC. DIFERENCIALES IV**

**MODELO MATEMATICO PARA  
DERRAME DE PETROLEO EN  
RIOS**

**GUERRON B.  
DARIO J.**

**2022**



Los accidentes de contaminación tanto en tierra como en los cuerpos de agua resultan inevitables en la industria petrolera, debido a los grandes volúmenes de hidrocarburos que se manejan.

Así, los derrames de petróleo pueden provenir de dos fuentes:

- Terrestres: Ruptura de ductos.
- Marinas:
  - Buque tanque (lavado y limpieza de tanques, carga y descarga, colisiones).
  - Pozos mar adentro (ruptura de ductos, descontrol de producción).

**! Se estima que de cada millón de toneladas de crudo embarcadas se vierte una tonelada !**





## ALGUNAS DE LAS MAYORES MAREAS NEGRAS REGISTRADAS EN ECUADOR.



- En Ecuador entre 2015 y 2021 se registraron cerca de 900 derrames de petróleo, a causa de roturas de tuberías del Oleoducto de Crudos Pesados (OCP) y del estatal Sistema de Oleoductos Transecuatorianos (SOTE).
- El 08 de abril de 2003 → 8.000 barriles de crudo → la reserva Cayambe Coca.
- El 25 de febrero de 2009 → 14.000 barriles de crudo → en un sector entre El Chaco y Reventador varios ríos de la zona se vieron afectados.
- El 31 de mayo de 2013 → cerca de 11.480 barriles de crudo → en la zona del volcán Reventador, donde el petróleo se derramó en una quebrada y llegó hasta el río Coca, donde a través de este, continuó fluyendo por el río Napo.

## ALGUNAS DE LAS MAYORES MAREAS NEGRAS REGISTRADAS.

- El 02 de julio de 2014 → 2.000 barriles de petróleo → la vía Lago Agrio-Tarapoa, el río Parahuaico fue uno de los que se vio afectado.
- El 28 de enero de 2022 → 6.300 barriles de crudo → a causa de la rotura del oleoducto que transporta el petróleo desde el norte de la Amazonía hasta el puerto de Esmeraldas. Este derrame golpeó de nuevo a los ríos Coca y Napo.
- Desde 1964 hasta 1990 → Chevron-Texaco → no menos de 15.8 mil millones (59.9 mil millones de litros) de residuos de petróleo y 28.5 millones de galones (108 millones de litros) de petróleo bruto -> Amazonía, donde más de 2 millones de hectá



## COMPORTAMIENTO DEL PETRÓLEO EN EL AGUA. (FACTORES)

### Factores que afectan una mancha de petróleo:

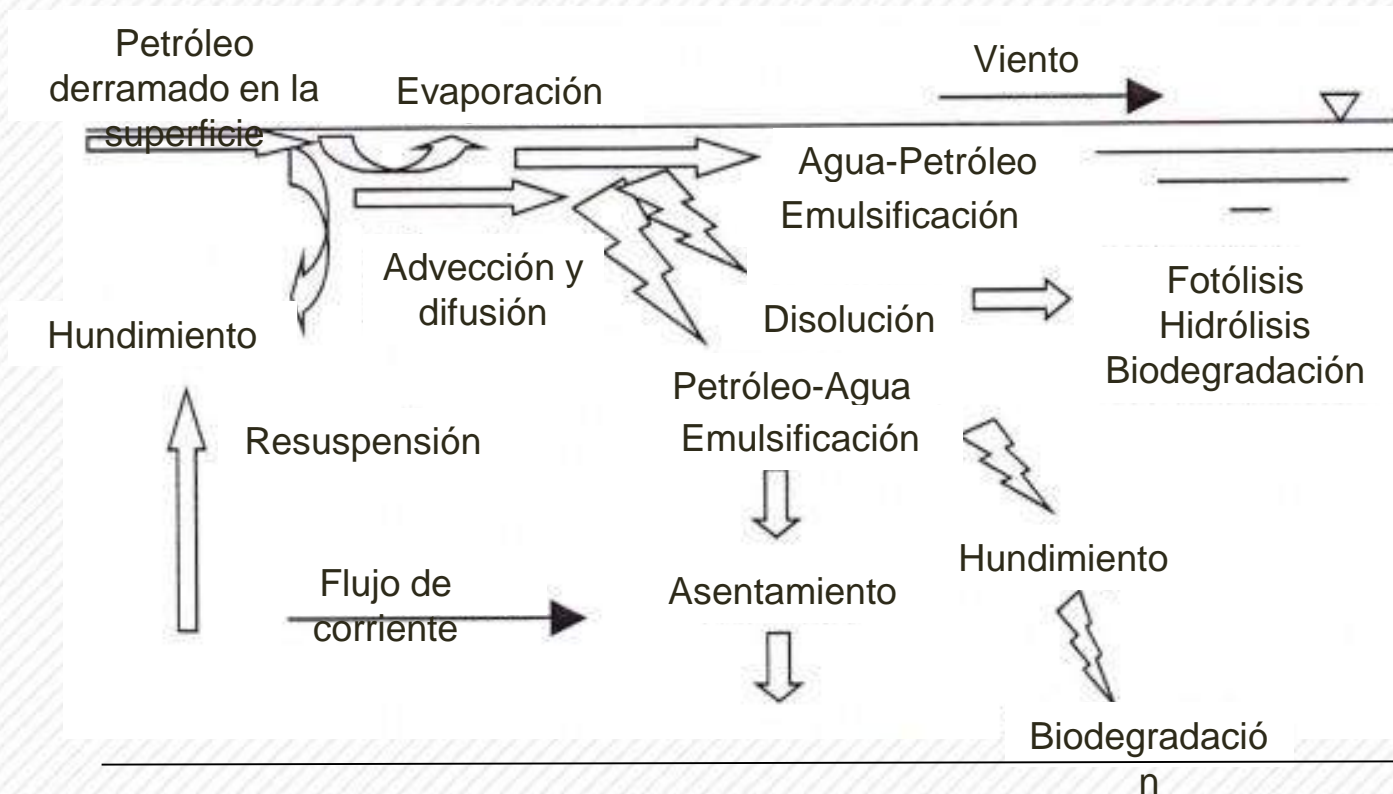
- Esparcimiento.
  - Tipo de petróleo derramado.
    - ✓ Composición química.
    - ✓ Gravedad específica.
    - ✓ Tensión superficial.
    - ✓ Viscosidad.
  - Tasa de esparcimiento.
- Movimiento.
  - Viento.
  - Oleaje.
  - Mareas.
  - Corrientes.
  - Despojos flotación.

✓ Punto de fluidez.  
✓ Punto de inflamación.  
✓ Solubilidad.  
de

en



## COMPORTAMIENTO DEL PETRÓLEO EN EL AGUA. (PROCESOS)



## COMPORTAMIENTO DEL PETRÓLEO EN EL AGUA. (PROCESOS)

- **Intemperización:** Pérdida de ciertos componentes del petróleo a través de una serie de procesos naturales que comienzan una vez que ocurre el derrame y continúan indefinidamente.
- **Emulsificación:** Proceso por el cual un líquido se dispersa en otro líquido en forma de pequeñas gotas. Estas emulsiones a menudo son extremadamente viscosas y como resultados de estos los demás procesos que harían que el hidrocarburo se disipe se ven retardados.
- **Evaporación:** Afecta a la composición del producto derramado: aumenta su densidad, viscosidad y decrece su solubilidad en el agua. En la medida que los compuestos más volátiles se evaporan, el petróleo se hace más pesado y puede llegar a hundirse.
- **Disolución:** Es aquel por el cual parte del hidrocarburo se disuelve en el volumen de la columna de agua y en los alrededores del derrame. El tiempo de disolución depende de la composición, tasa de esparcimiento, temperatura del agua, turbulencia y grado de dispersión.
- **Oxidación:** Combinación química de hidrocarburos con el oxígeno atmosférico y contribuye a la descomposición o degradación final del petróleo. Este proceso es lento puesto que sólo una pequeña cantidad de oxígeno puede penetrar en una mancha de petróleo.
- **Sedimentación:** Puede suceder por dos mecanismos: el primero se define en la medida que el hidrocarburo se intemperiza resultando en un incremento de su densidad respecto al agua circundante y por consiguiente se hunde. El segundo ocurre por la adhesión de las partículas suspendidas en la columna de agua al petróleo.
- **Biodegradación:** Proceso por el cual la mancha desaparece del medio ambiente. Ciertas especies de bacterias marinas, hongos y otros organismos utilizan los hidrocarburos como

- El modelo que se desarrollará a continuación reposa sobre las siguientes hipótesis.
  1. La frontera del río es fija.
  2. La densidad  $\rho_p$  del fluido es constante, y  $\rho_a > \rho_p$ ; con  $\rho_a$  la densidad del agua.
  3. El fluido es considerado newtoniano (fluido cuya viscosidad puede considerarse constante).
  4. El flujo es laminar. (La curvatura de las líneas de corriente es muy pequeña y la aceleración vertical del fluido es despreciable).
  5. El flujo es isotérmico (Flujo en el que su temperatura no cambia.).
- Con estas hipótesis, el transporte del fluido puede ser descrito en todo punto y en todo tiempo mediante una variable de estado: la descarga o caudal de fluido  $Q$  en  $\frac{m^3}{s}$ .



# HIPÓTESIS DEL MODELO

- Se analizará el transporte de petróleo en la superficie del río, es decir, se calculará  $Q(x, t)$  a la distancia  $x$  del punto de derrame y al instante  $t$ .
- Se tomará en cuenta, en este modelo, la retención del fluido en las riberas del río que depende obviamente del volumen total derramado, de la densidad y viscosidad del fluido, proceso que se conoce como la sorción.
- Por otro lado, el procedimiento que se seguirá es una descripción Euleriana que se caracteriza por utilizar un dominio fijo.
- La técnica del balance sobre un dominio fijo que corresponde a la descripción Euleriana es la que responde y mejor se adapta a los requerimientos de la modelación matemática de derrames de fluidos en ríos.

## DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BALANCE DEL FLUIDO.

- Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un dominio fijo,  $\Gamma$  su frontera de clase  $C^1$  a trozos. Este dominio representa el lecho del río.
- Suponemos que  $\Omega$  es un conjunto medible y que en este se mueven dos masas de fluido agua y petróleo que son objeto de un balance.
- Tendremos una referida a la variable extensiva del agua que lo notamos  $C_a(x, y, z, t)$  y la otra relacionada con el petróleo que lo notamos  $C_p(x, y, z, t)$ ; con  $(x, y, z) \in \Omega$  la posición o variables espaciales,  $t \geq 0$  el tiempo.
- De manera general notaremos con  $C(x, y, z, t)$  a la densidad volumétrica de la magnitud extensiva, donde  $(x, y, z) \in \Omega$  y  $t \geq 0$ .
- Denotamos con  $K_p(t)$  la cantidad total de masa de petróleo contenida en  $\Omega$  al instante  $t$ ; esto es,

$$K_p(t) = \int_{\Omega} C_p(x, y, z, t) dx, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

## DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BALANCE DEL FLUIDO.

- La variación de  $K_p(t)$  durante un tiempo  $dt$  puede deberse a las siguientes causas: transporte advectivo; fuentes o sumideros al interior del dominio  $\Omega$ ; transporte difusivo-dispersivo o a la adsorción.

- Transporte advectivo:** Existe un flujo de la magnitud  $C_p$  a través de la frontera  $\Gamma$  ligada al movimiento del soporte material. Este flujo está representado por el campo vectorial,

$$\vec{\varphi}_\Gamma = C_p \vec{v}_p. \quad (2)$$

- $\vec{v}_p$  : es el vector velocidad de la magnitud  $C_p$ .
- El flujo total a través de la frontera  $\Gamma$  se define como

$$Q_\Gamma(t) = \int_\Gamma \vec{\varphi}_\Gamma \cdot \vec{n} \, ds = \int_\Gamma C_p \vec{v}_p \cdot \vec{n} \, ds. \quad (3)$$

- Donde  $\vec{n}$ , es el vector normal exterior a  $\Gamma$ . Por el teorema de la divergencia de Gauss, se tiene

$$Q_\Gamma(t) = \int_\Gamma C_p \vec{v}_p \cdot \vec{n} \, ds = \int_\Gamma \text{div}(C_p \vec{v}_p) \, dx. \quad (4)$$



## DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BALANCE DEL FLUIDO.

2. **Fuentes o sumideros:** Existen fuentes o sumideros de la magnitud  $C_p$  al interior de  $\Omega$  que la notamos con

$$\varphi_{int}(x, y, z, t) \text{ con } (x, y, z) \in \Omega, t \geq 0.$$

- Si  $\varphi_{int} > 0$  corresponde a una fuente en el sentido estricto, si  $\varphi_{int} < 0$  corresponde a un sumidero. El caso  $\varphi_{int} = 0$  significa que de esta magnitud no existe ni fuentes ni sumideros al interior de  $\Omega$ . Se define

$$Q_{int}(t) = \int_{\Omega} \varphi_{int}(x, y, z, t) dx, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

3. **Transporte difusivo-dispersivo:** Existen fuentes o sumideros de la magnitud  $C_p$  en la frontera  $\Gamma$  de  $\Omega$  a las que designaremos como

$$F_{\Gamma}(x, y, z, t) \text{ con } (x, y, z, t) \in \Omega, t \in [T_1, T_2].$$

- Asociado a  $F_{\Gamma}$  existe un vector de densidad de flujo de fuentes o de sumideros  $\vec{q}_{\Gamma}$  en  $\Gamma$  de modo que  $F_{\Gamma} = \vec{q}_{\Gamma} \cdot \vec{n}$ , se define

$$Q_s(t) = \int_{\Gamma} \vec{q}_{\Gamma} \cdot \vec{n} ds = \int_{\Gamma} \text{div}(\vec{q}_{\Gamma}) dx. \quad (6)$$

## DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BALANCE DEL FLUIDO.

### 4. Adsorción:

- A menudo retardará o atenuará el transporte del derrame de petróleo.
- Descrita por medio de una isoterma de adsorción (Indica como las moléculas adsorbidas se distribuyen entre la fase líquida y sólida cuando el proceso de adsorción alcanza un estado de equilibrio).
- Notada  $Q_{ad}$  ligada con la isoterma de adsorción lineal de Freundlich.

$$F(C_p) = d_p C_p^\eta.$$

- Donde  $d_p$  es la constante de adsorción que depende de la posición, del tiempo, de la temperatura (cuando es independiente de la posición y el tiempo), con dimensiones de masa por unidad de volumen  $\frac{g}{cm^3}$  o  $\frac{kg}{l}$ .
- $\eta > 0$ , cuando  $0 < \eta < 1$ ,  $F$  crece al punto que puede haber dificultades en este proceso; si  $\eta > 1$  decrece el proceso de adsorción; cuando  $\eta = 1$ , la isoterma es lineal.

$$Q_{ad}(t) = \int_{\Omega} d_p(x, y, z, t) C_p(x, y, z, t) dx, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

## DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BALANCE DEL FLUIDO.

- El balance de las magnitudes  $K_p(t)$  sobre  $\Omega$  durante un tiempo  $dt$  se expresa como sigue:

$$\frac{\partial K_p}{\partial t} dt = Q_{int}(t)dt + Q_s(t)dt - Q_{\Gamma}(t)dt - Q_{ad}(t)dt. \quad (8)$$

- Que se conoce como balance local en  $\Omega$  al instante  $t$ , esta formulación la podemos expresar como

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} C_p dx + \int_{\Gamma} C_p \vec{v}_p \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega} \varphi_{int} dx - \int_{\Gamma} \vec{q}_{\Gamma} \cdot \vec{n} ds - \int_{\Omega} d_p C_p dx. \quad (9)$$

- Una de las leyes de comportamiento de difusión-dispersión del fluido en otro fluido, es la ley de Fick que se define como

$$\vec{q}_{p,\Gamma} = -D_{ap} \nabla C_p. \quad (10)$$

- Donde  $D_{ap}$  es el coeficiente de difusión-dispersión del fluido notado con  $p$  respecto del otro notado con  $a$ . Por lo tanto

$$Q_s(t) = \int_{\Omega} \text{div}(\vec{q}_{\Gamma}) dx = - \int_{\Omega} \text{div}(D_{ap} \nabla C_p) dx. \quad (11)$$



## DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BALANCE DEL FLUIDO.

- Consecuentemente,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} C_p dx + \int_{\Gamma} C_p \vec{v}_p \cdot \vec{n} ds = \int_{\Omega} \varphi_{p,int} dx - \int_{\Omega} \text{div}(D_{ap} \nabla C_p) dx - \int_{\Omega} d_p C_p dx. \quad (12)$$

- Por el teorema de la derivación bajo el signo de integración se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} C_p dx = \int_{\Omega} \frac{\partial C_p}{\partial t} dx. \quad (13)$$

- La ecuación de balance del fluido  $p$  se expresa como

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial C_p}{\partial t} + \text{div}(C_p \vec{v}_p) - \varphi_{p,int} - \text{div}(D_{ap} \nabla C_p) + d_p C_p \right] dx = 0. \quad (14)$$

- Que se conoce como ecuación de balance integral de la magnitud  $C_p$  sobre  $\Omega$ .
- La otra ecuación de balance para el agua, que la notamos  $K_a(t)$  sobre  $\Omega$  durante un tiempo  $dt$  se obtiene en forma similar a la precedente.

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial C_a}{\partial t} + \text{div}(C_a \vec{v}_a) - \varphi_{a,int} - \text{div}(D_a \nabla C_a) \right] dx = 0. \quad (15)$$

## DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE BALANCE DEL FLUIDO.

- En muchas aplicaciones, a más de considerar el transporte advectivo, la difusión-dispersión, la adsorción, las fuentes o sumideros, se tienen reacciones químicas de los dos fluidos.
- La adsorción y las reacciones químicas las vamos a designar como la función  $R(C_p)$ .
- Además, en el flujo  $C_p \vec{v}_p = D_{ap} \nabla C_p$ ,  $D_{ap}$  depende, a más de la posición y del tiempo, de  $C_p$ ; que lo escribiremos  $D_{ap}(C_p)$ ; de modo la ecuación en derivadas parciales anterior se escribe como  $\frac{\partial C_p}{\partial t} + \text{div}(C_p \vec{v}_p) - \text{div}(D_{ap}(C_p) \nabla C_p) + R(C_p) = \varphi_{p,int}$ , sobre  $\Omega \times ]0.T[$ . (16)
- Que es una ecuación en derivadas parciales no lineal sea del tipo hiperbólico o parabólico.

## CONDICIONES INICIALES O DE FRONTERA.

- La ecuación (16) se complementa con las condiciones iniciales y de frontera.
- La condición inicial se expresa como sigue:

$$C_p(x, y, z, 0) = 0, \quad \forall (x, y, z) \in \Omega. \quad (17)$$

- La condición de frontera se manifiesta por la entrada de fluido que se expresa como flujo entrante en el punto  $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ , esto es,

$$\nabla C_p \cdot \vec{n} = -Q_v(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (18)$$

- Donde  $Q_v(t)$  designa el caudal vertido en el punto inicial  $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$  en cada instante  $t \geq 0$ . Esta función se supone continua en  $[0, T]$ .



## DEDUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA DERRAME DE PETRÓLEO EN RÍOS.

- Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un dominio fijo,  $\Gamma$  su frontera de clase  $C^1$  a trozos.
- Suponemos que  $\Omega$  es un conjunto medible y que en este se mueven dos masas de fluido agua y petróleo que son objeto de un balance.
- En el caso de derrame de petróleo tendremos una referida a la variable extensiva del agua que lo notamos  $C_a(x, y, z, t)$  y la otra relacionada con el petróleo que lo notamos  $C_p(x, y, z, t)$ ; con  $(x, y, z) \in \Omega$  la posición o variables espaciales,  $t \geq 0$  el tiempo.
- La ecuación de balance del petróleo se expresa como (14)

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial C_p}{\partial t} + \operatorname{div}(C_p \vec{v}_p) - \varphi_{p,int} - \operatorname{div}(D_{ap} \nabla C_p) \right] dx = 0.$$

- Que se conoce como ecuación de balance integral de la magnitud extensiva  $C_p$ .

## DEDUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA DERRAME DE PETRÓLEO EN RÍOS.

- Ecuación de balance de la magnitud extensiva del agua (15) que la notamos  $K_a(t)$ .

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial C_a}{\partial t} + \operatorname{div}(C_a \vec{v}_a) - \varphi_{a,int} - \operatorname{div}(D_a \nabla C_a) \right] dx = 0.$$

- Como  $\Omega$  es medible y arbitrario, por el primer teorema fundamental del cálculo de variaciones, se tiene

$$\frac{\partial C_p}{\partial t} + \operatorname{div}(C_p \vec{v}_p) - \operatorname{div}(D_{ap} \nabla C_p) - \varphi_{p,int} = 0, \quad \text{sobre } \Omega \times ]0, T[. \quad (19)$$

- Esta ecuación se complementa con las condiciones iniciales y de frontera.
- La frontera  $\Gamma$  se descompone en dos porciones de frontera  $\Gamma_F$  y  $\Gamma_H$  de modo que  $\Gamma = \Gamma_F \cup \Gamma_H$ ; y en  $\Gamma_F$  se tiene la condición de frontera de Neumann (18), mientras que en  $\Gamma_H$  se tiene la condición de frontera de Dirichlet homogénea (17), esto es

$$\begin{aligned} \nabla C_p \cdot \vec{n} &= -Q_v(x, y, z, t), & \forall (x, y, z, t) \in \Gamma_F, t \in [T_1, T_2]. \\ C_p(x, y, z, 0) &= 0, & \forall (x, y, z) \in \Gamma_H, t \in [T_1, T_2]. \end{aligned}$$

## DEDUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA DERRAME DE PETRÓLEO EN RÍOS.

- Se supone que el curso del río y las condiciones de la cuenca, así como sus caudales del río no varía por lo que nos interesa exclusivamente el flujo del petróleo en el río.
- Sean  $L > 0$  la longitud de un tramo del río suficientemente grande,  $T > 0$  el tiempo del evento de derrame de petróleo en el río. Se define

$$C_p(x, t) = \rho_p Q_p(x, t).$$

- Con  $Q_p$  el caudal de petróleo (en  $\frac{m^3}{s}$ ) en cada punto  $x \in [0, L]$  del tramo del río,  $t \in [0, T]$  y  $\rho_p$  la densidad del petróleo (en  $\frac{kg}{m^3}$ ) que se asume constante. Se aprecia inmediatamente que  $C_p(x, t)$  tiene unidades de  $\frac{kg}{s}$  es decir que representa el caudal másico.
- La función incógnita es  $Q_p(x, t)$  solución de la ecuación

$$\frac{\partial Q_p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{D}_{ap} \frac{\partial Q_p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}_p Q_p) - \frac{1}{\rho_p} \varphi_{p,int} = 0, \text{ sobre } ]0, L[ \times ]0, T[. \quad (20)$$

- Donde  $\bar{D}_{ap}$  es una función no negativa dependiente de  $Q_p$  que lo notaremos  $\bar{D}_{ap}(Q_p)$ ; en el caso en que es constante se conoce como coeficiente de difusión-dispersión de petróleo con respecto del agua para régimen laminar,  $\bar{v}_p$  es la velocidad media del petróleo en el curso del río.



## DEDUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA DERRAME DE PETRÓLEO EN RÍOS.

- Debido a la turbulencia del agua en la orilla, aun cuando consideramos flujo laminar, se tiene adhesión o sorción de petróleo en la orilla, por lo que  $\varphi_{p,int}$  no es nulo, más aún este constituye un sumidero, por lo que  $\varphi_{p,int} < 0$  se supone que

$$\varphi_{p,int}(x, t) = -\rho_p g \left( Q_p(x, t) \right), \quad \forall x \in [0, L], t \in [0, T].$$

- Donde  $g$  es una función real no negativa. En el caso lineal, se tiene  $\varphi(u) = \lambda u$ ,  $\forall u \geq 0$ .
- Donde  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ . La ecuación (20) se escribe como

$$\frac{\partial Q_p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{D}_{ap}(Q_p) \frac{\partial Q_p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{v}_p Q_p) + g(Q_p) = 0. \quad (21)$$

- La ecuación de conservación de cantidad de movimiento 1d del flujo se expresa como

$$\frac{\partial Q_a}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (Q_a v_a) + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0. \quad (22)$$

- Donde el área de la sección transversal del río  $A$  y la profundidad del mismo  $y$  están relacionadas como  $\frac{\partial A}{\partial y} = T_h \frac{\partial y}{\partial x}$ ; con  $T_h$  el tirante hidráulico. Además

$$Q_a = v_a A.$$

## DEDUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA DERRAME DE PETRÓLEO EN RÍOS.

- La ecuación (22) se expresa como

$$\frac{\partial v_a}{\partial t} + v_a \frac{\partial v_a}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} + g(S_f - S_0) = 0. \quad (23)$$

- Para régimen laminar  $\frac{\partial v_a}{\partial t} \simeq 0$ ;  $\frac{\partial v_a}{\partial x} \simeq 0$ ; y,  $\frac{\partial y}{\partial x} \simeq 0$  con lo que  $S_f \simeq S_0$ . La ecuación (23) se reduce a

$$S_f = \frac{h_f}{L} = f \frac{1}{8gR_h} v_a^2 = f \frac{1}{4gT_h} v_a^2. \quad (24)$$

- Luego

$$\frac{f}{4gT_h} v_a^2 \simeq \tan\theta(x).$$

- Donde  $f$  es el factor de fricción del agua con las paredes del río. Para oleoductos, este factor de fricción está tabulado o se conocen sus gráficas como en los diagramas de Moody. Para flujo laminar se prueba que el factor de fricción está definido como

$$f = \frac{64}{Re}.$$

## DEDUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA DERRAME DE PETRÓLEO EN RÍOS.

- con  $R_e$  el número de Reynolds definido como

$$R_e = \frac{\rho_a v_a d}{\mu_a} = \frac{v_a d}{\nu_a}.$$

- Donde  $d$  es el diámetro de la tubería. Luego

$$f = \frac{64}{\frac{v_a d}{\nu_a}} = \frac{64 \nu_a}{v_a T_h}.$$

- Consecuentemente de la relación  $S_f \simeq S_0$ ; se obtiene

$$\frac{v_a^2}{4gT_h} \frac{64\nu_a}{v_a T_h} \approx \tan\theta(x).$$

$$v_a = \frac{gT_h^2}{16\nu_a} \tan\theta(x).$$

- La velocidad  $v_p$  del petróleo en la superficie del agua del río, está relacionada con la fricción entre el petróleo y el agua, y a su vez con la velocidad del río  $v_a$ ; depende de la posición y del tiempo. Supondremos que es independiente del tiempo y que tiene el mismo comportamiento que  $v_a$



## DEDUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA DERRAME DE PETRÓLEO EN RÍOS.

- Así

$$\bar{v}_p(x) = \frac{gT_h^2}{16v_p} \tan\theta(x), \quad x \in [0, L].$$

- Consecuentemente

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{D}_{ap}(Q_p) \frac{\partial Q_p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{gT_h^2}{16v_p} \tan\theta(x) Q_p \right) + g(Q_p) &= 0. \\ \frac{\partial Q_p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{D}_{ap}(Q_p) \frac{\partial Q_p}{\partial x} \right) + \frac{g}{16v_p} \frac{\partial}{\partial x} (T_h^2 \tan\theta(x) Q_p) + g(Q_p) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

- El número de Peclet  $Pe$  es una medida de la relación entre la advección y la difusión (difusión dispersión). Este número es adimensional y se define como

$$Pe = \frac{\bar{v}_a \Delta x}{\bar{D}_{ap}}.$$

- Cuando uno de los dos  $\Delta x$  o  $\bar{v}_a$  son grandes, o cuando  $\bar{D}_{ap}$  es pequeño, resulta que el número de Peclet es muy grande con respecto de 1; en cuyo caso el término de la difusión-dispersión puede despreciarse con lo que el transporte del petróleo es advectivo dominante.

## DEDUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA DERRAME DE PETRÓLEO EN RÍOS.

- Si el número de Peclet  $Pe$  es pequeño, la ecuación es del tipo parabólico. De manera general, para flujos laminares, es del tipo parabólico.
- El modelo matemático para derrame de petróleo en ríos es el siguiente

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{D}_{ap}(Q_p) \frac{\partial Q_p}{\partial x} \right) + \frac{g}{16\nu_p} \frac{\partial}{\partial x} (T_h^2 \tan \theta(x) Q_p) + g(Q_p) = 0. & \text{sobre } ]0, T[ \times ]0, T[. \\ Q_p(x, 0) = 0, & \forall x \in [0, L[. \\ \frac{\partial Q_p}{\partial x}(0, t) = -Q_v(t), & \forall t \in [0, T]. \\ Q_p(L, t) = 0, & \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (26)$$

- Se requiere de algunas simplificaciones. La función  $\bar{D}_{ap}(Q_p)$  para flujos laminares de ríos en la región oriental no es del todo conocida. Nos limitaremos al caso en que  $\bar{D}_{ap}(Q_p) = D > 0$  constante.
- La función  $g$  relacionada con la sorción en las orillas tampoco es del todo conocida, nos limitaremos al caso en que la sorción es proporcional al caudal  $Q_p$ ; es decir,

$$g(Q_p) = \lambda Q_p, \text{ con } \lambda \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$$

## DEDUCCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA DERRAME DE PETRÓLEO EN RÍOS.

- Con estos argumentos se considera el siguiente problema.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q_p}{\partial t} - D \frac{\partial^2 Q_p}{\partial x^2} + \bar{v}_p \frac{\partial Q_p}{\partial x} + \lambda Q_p = 0. \quad \text{sobre } ]0, T[ \times ]0, L[. \\ Q_p(x, 0) = 0, \quad \forall x \in [0, L[. \\ \frac{\partial Q_p}{\partial x}(0, t) = -Q_v(t), \quad \forall t \in [0, T]. \\ Q_p(L, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (27)$$



- Promover el tema de la modelación matemática de derrames de petróleo en los ríos como herramienta fundamental para planes de contingencias.
- Una simulación numérica del transporte de petróleo derramado adquiere importancia cuando se trata de pronosticar en tiempo y espacio la secuencia de espesores superficiales del petróleo y su trayectoria, con vistas a tomar medidas de remediación y mitigación de los efectos adversos sobre los ecosistemas.
- La exactitud del modelo será mayor mientras mejor se conciba la geografía de la zona de estudio, cuando el sistema de ecuaciones esté compuesto por los miembros más representativos en el lugar y cuando se utilicen elevados órdenes de exactitud en el procesamiento numérico.
- La modelación para un hidrocarburo complejo (que cambia constantemente) en un ambiente abierto, tridimensional, resulta ser un proceso extremadamente complicado que se puede intentar imitar mediante el uso de ecuaciones matemáticas, las cuales invariablemente incluyen una gran cantidad de suposiciones.
- Para proceder a escoger un determinado método o técnica numérica que responda de la manera más efectiva a un sistema de ecuaciones, es necesario realizar un balance entre

- Benalcázar, H. (2018). Modelización con ecuaciones en derivadas parciales. Pag 182-184,196-200.
- Calzada, A. Marin, J. (). Los accidentes por derrames de hidrocarburos en el mar. Historia de la modelación matemática de sus procesos físicos. Disponible en [\(PDF\) Los accidentes por derrames de hidrocarburos en el mar. Historia de la modelación matemática de sus procesos físicos \(researchgate.net\)](#)
- Dávila, J. (2018). Derrames petroleros en el agua MATERIAL DE APOYO. Disponible en [https://www.academia.edu/37512206/Derrames\\_petroleros\\_en\\_el\\_agua\\_MATERIAL\\_DE\\_APOYO](https://www.academia.edu/37512206/Derrames_petroleros_en_el_agua_MATERIAL_DE_APOYO)
- DW.COM; Deutsche Welle. (n.f). Derrames de petróleo en Ecuador: un mal crónico. Disponible en <https://www.dw.com/es/derrames-de-petr%C3%B3leo-en-ecuador-un-mal-cr%C3%B3nico/g-60615653>
- Jim21. (2013). Derrame de hidrocarburos. Disponible en [https://www.academia.edu/9029373/DERRAMES\\_DE\\_HIDROCARBUROS](https://www.academia.edu/9029373/DERRAMES_DE_HIDROCARBUROS)
- Lonin, S. (2022). Predicción del comportamiento de las manchas de hidrocarburo derramado en el mar. Boletín Científico CIOH. Disponible en [https://www.academia.edu/69504801/Predicci%C3%B3n\\_del\\_comportamiento\\_de\\_las\\_manchas\\_de\\_hidr ocarburo derramado en el mar](https://www.academia.edu/69504801/Predicci%C3%B3n_del_comportamiento_de_las_manchas_de_hidrocarburo_derramado_en_el_mar)
- Ministerio de Relaciones Exteriores y Movilidad Humana. (2015). El caso Chevron / Texaco en Ecuador. Una lucha por la justicia ambiental y social. Disponible en <https://www.cancilleria.gob.ec/wp-content/uploads/2015/06/Expediente-Caso-Chevron-abril-2015.pdf>
- Pierini, J. (2014). Transporte y dispersión tridimensional de un derrame de petróleo en el mar debido a un evento "blowout. Dyna. Disponible en [https://www.academia.edu/58375350/Transporte\\_y\\_dispersi%C3%B3n\\_tridimensional\\_de\\_un\\_derrame\\_d e petr%C3%B3leo en el mar debido a un evento blowout](https://www.academia.edu/58375350/Transporte_y_dispersi%C3%B3n_tridimensional_de_un_derrame_de_petr%C3%B3leo_en_el_mar_debido_a_un_evento_blowout)
- Trento, A. Alvarez, A. (2015). Simulación del derrame de petróleo en un escenario fluvial. Disponible en [\(PDF\) Simulación del derrame de petróleo en un escenario fluvial \(researchgate.net\)](#)