UNIVERSIDAD FIDÉLITAS

II-115 INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

Coordinación: Lic. Marco Corrales Chacón

mcorrales@ufidelitas.ac.cr

Elaborado por: Lic. Hernán Víquez Céspedes

Editado por: Prof. Edwin Villalobos Martínez

Índice

Contenidos **Página**

1. Trigonometría

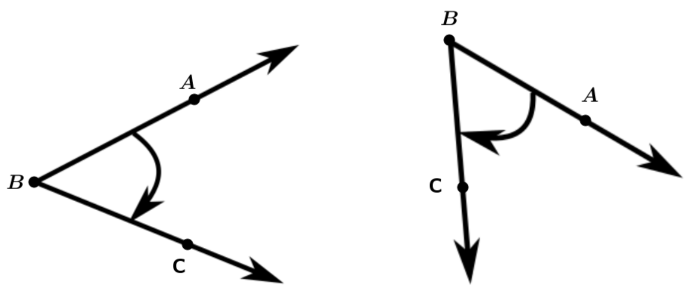
ya hay cosas subrayadas, lo importante

Conceptos Básicos

Definición: Ángulo

Una ángulo ABC, se denota por $\sphericalangle ABC$, y corresponde a la rotación del rayo $\overrightarrow{AB}$ con respecto al rayo $\overrightarrow{BC}$, observe:

Tomar uno



Nota: El rayo $\overrightarrow{AB}$ se llama **lado inicial** del ángulo, mientras que el rayo $\overrightarrow{BC}$ se llama **lado terminal**.

1.1. Medición de ángulos

En este curso para medir ángulos se utilizan dos unidades de medida: el **grado** y el **radian**. A continuación se muestran las fórmulas que permiten pasar de una unidad de medida a otra:

a) **Medida en grados:** Conversión de grados (G) a radianes (R)

$$R = \frac{G \cdot \pi}{180°}$$

b) **Medida en radianes:** Conversión de radianes (R) a grados (G)

$$G = \frac{R \cdot 180^{\circ}}{\pi}$$

Ejemplo: Paso de grados a radianes y viceversa

Determine el equivalente en grados o radianes de cada uno de los siguientes ángulos.

a) 60°

Solución

$G = 60^{\circ}$

Fórmula

$R = \dfrac{G \cdot \pi}{180°}$

$R = \dfrac{60^{\circ} \cdot \pi}{180°}$

$R = \dfrac{1}{3}\pi rad$

b) 720°

Solución

$G = 720^{\circ}$

Fórmula

$R = \dfrac{G \cdot \pi}{180°}$

$R = \dfrac{720^{\circ} \cdot \pi}{180°}$

$R = 4\pi rad$

c) $\dfrac{\pi}{6}$

Solución

$R = \dfrac{\pi}{6}$

Fórmula

$G = \dfrac{R \cdot 180^{\circ}}{\pi}$

$G = \dfrac{\frac{\pi}{6} \cdot 180^{\circ}}{\pi}$

$G = 30^{\circ}$

d) $\dfrac{11\pi}{3}$

Solución

$R = \dfrac{11\pi}{3}$

Fórmula

$G = \dfrac{R \cdot 180^{\circ}}{\pi}$

$G = \dfrac{\frac{11\pi}{3} \cdot 180^{\circ}}{\pi}$

$G = 660^{\circ}$

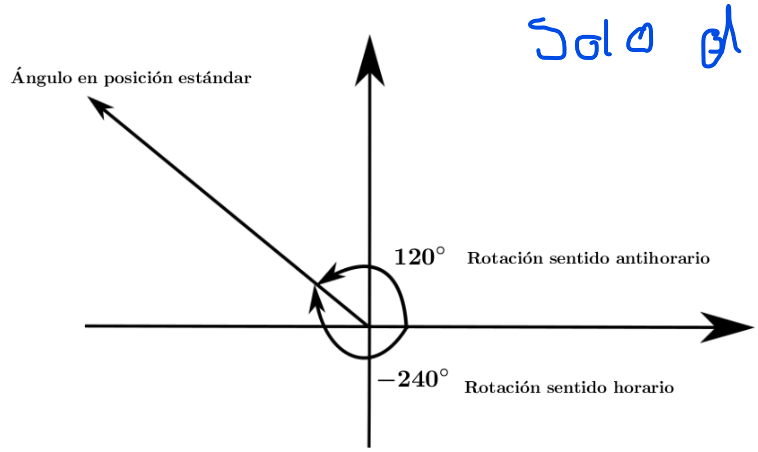
Definición: Ángulos positivos y negativos

Se define la medida positiva de un ángulo cuando éste rota en movimiento contrario a las agujas del reloj y la medida negativa cuando rota en sentido horario.

Definición: Ángulos en posición estándar

En trigonometría para medir la posición estándar de un ángulo se introduce un sistema de coordenadas rectangulares, de manera que el vértice del ángulo se hace corresponder con el origen y el lado inicial con el eje x positivo.

Solo el dibujo

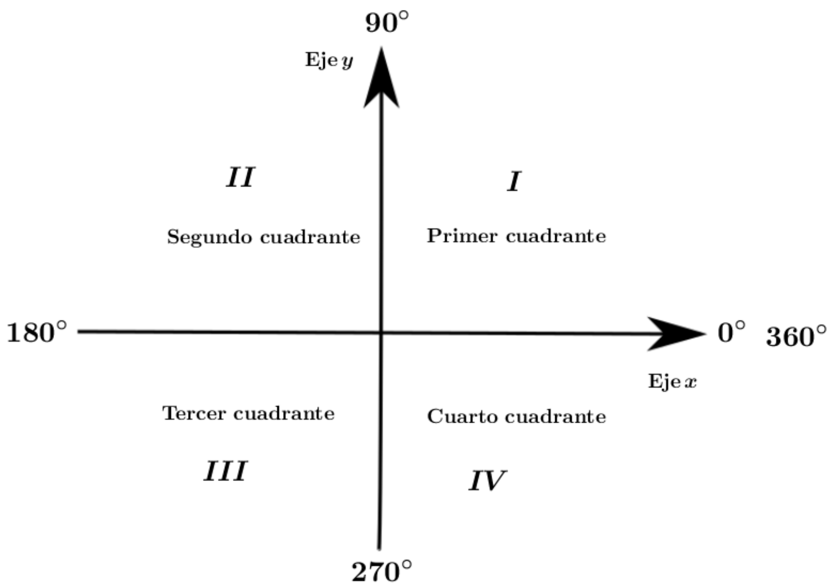


Definición: Cuadrantes

Los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro partes bien definidas, llamadas cuadrantes, las cuales son numeradas con números romanos de derecha a izquierda y de arriba a bajo.

Definición: Ángulos cuadrantales

Un ángulo en posición estándar se llama cuadrantal si su lado terminal coincide con alguno de los ejes cartesianos en cualquier vuelta, por lo que los ángulos cuadrantales son múltiplos enteros de 90° o $\frac{\pi}{2}$. Los ángulos $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ y 360° son ejemplos de ángulos cuadrantales ubicados en la primera vuelta.



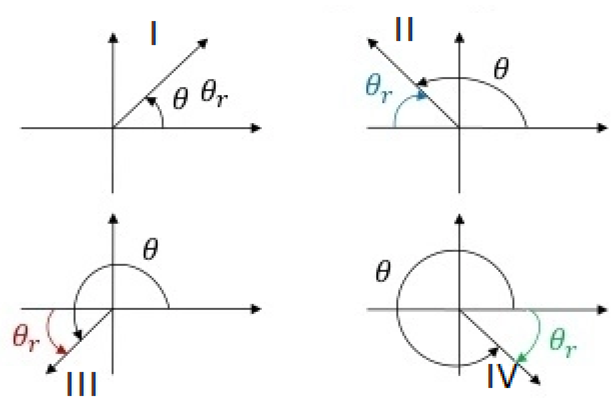
Definición: Ángulos coterminales

Dos o más ángulos en posición estándar se llaman coterminales si y sólo si poseen el mismo lado terminal, aunque estén ubicados en diferentes vueltas.

NG

Definición: Ángulo de referencia

Dado un ángulo α en posición estándar no cuadrantal, su ángulo de referencia α_R es el ángulo agudo positivo formado por el lado terminal de α y un semieje x.



Dibujo y Fórmulas

Los ángulos de referencia se determinan por cuadrante:

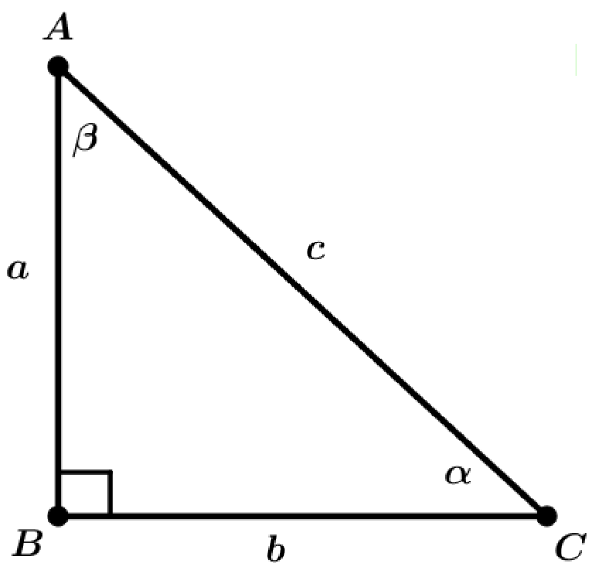
Cuadrante	Fórmula Grados	Fórmula Radianes
I	$\alpha = \alpha_R$	$\alpha = \alpha_R$
II	$\alpha = 180 - \alpha_R$	$\alpha = \pi - \alpha_R$
III	$\alpha = 180 + \alpha_R$	$\alpha = \pi + \alpha_R$
IV	$\alpha = 360 - \alpha_R$	$\alpha = 2\pi - \alpha_R$

El ángulo de referencia se usan para la determinación de las soluciones de ecuaciones trigonométricas y para la determinación de las razones trigonométricas para´ángulos no agudos.

1.2. Trigonometría del triangulo rectángulo

Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en B. Se definen las seis razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente para un angulo agudo α de la siguiente manera:

Triángulo Rectángulo



Razones Trigonométricas

a) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto a }\alpha}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\text{Cateto adyacente a }\alpha}{\text{Hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$

c) $\tan\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto a }\alpha}{\text{Cateto adyacente a }\alpha} = \dfrac{a}{b}$

d) $\csc\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto a }\alpha} = \dfrac{c}{a}$

e) $\sec\alpha = \dfrac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a }\alpha} = \dfrac{c}{b}$

f) $\cot\alpha = \dfrac{\text{Cateto adyacente a }\alpha}{\text{Cateto opuesto a }\alpha} = \dfrac{b}{a}$

Ángulos inversos

Determina el valor de un ángulo a partir de una razón trigonométrica (calculadora) Las razones son;

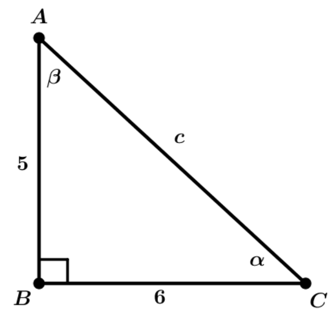
- $\arcsin x$ o bien en la calculadora con la secuencia de teclas $\boxed{\text{shift}}$ y $\boxed{\text{sin}}$.
- $\arccos x$ o bien en la calculadora con la secuencia de teclas $\boxed{\text{shift}}$ y $\boxed{\text{cos}}$.
- $\arctan x$ o bien en la calculadora con la secuencia de teclas $\boxed{\text{shift}}$ y $\boxed{\text{tan}}$.

Para manejar la calculadora en radianes tome en cuenta la programación en la calculadora.

- Modelo Calculadora: **CASIO CLASSWIZ** secuencia de teclas: Shift, Menu, opción 2, opción 2 (Radian)
- Modelo Calculadora: **CASIO fx-115ES PLUS** o modelos anteriores. Secuencias de teclas: Shift, Mode, opción 4 (Rad).

Ejemplo: Uso de las razones trigonométricas

1) Considere la siguiente figura que corresponde al triángulo ABC, rectángulo en B.



De acuerdo con los datos de la figura anterior, determine lo que se le solicita en cada caso.

a) El valor numérico de c, usando una razón trigonométrica.

b) El valor en grados del ángulo α.

Solución

Item $b)$, por la ausencia de datos de los ángulos, empezamos por este item

Tomando el ángulo α, tenemos que el lado $\overline{AB}$ (que mide 5) es el cateto opuesto del ángulo mencionado, mientras $\overline{BC}$ (que mide 6), es el cateto adyacente del ángulo mencionado. Podemos usar la razón trigonométrica $\tan\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto a}\,\alpha}{\text{Cateto adyacente a}\,\alpha}$, en nuestro caso tenemos que:

$\tan\alpha = \dfrac{5}{6}$, con esto y usando ángulos inversos tenemos que:

$\alpha = \arctan\left(\dfrac{5}{6}\right)$, recuerde que en grados, así lo solicita el ejercicio

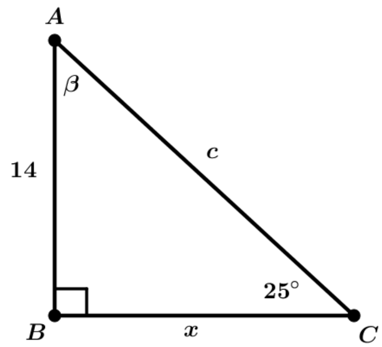
$\alpha \approx 39{,}81^\circ$

Item $a)$, para averiguar el c, el lado $\overline{AB}$ (que mide 5) es el cateto opuesto del ángulo mencionado, mientras el ángulo determinado en el punto anterior que es $\alpha \approx 39,81^\circ$, usando la razón trigonométrica, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{Cateto opuesto a}\,\alpha}{\text{Hipotenusa}}$, donde c corresponde a la hipotenusa.

$\sin(39,81) = \dfrac{5}{c} \rightarrow c \cdot \sin(39,81) = 5$

$\rightarrow c = \dfrac{5}{\sin(39,81)} \rightarrow c \approx 7,81$

b) Considere la siguiente figura que corresponde al triángulo ABC, rectángulo en B.



De acuerdo con los datos de la figura anterior, determine lo que se le solicita en cada caso.

a) El valor numérico de c b) El valor numérico de x c) El valor numérico de β.

Solución

Item $a)$, tomando el ángulo conocido que mide 25°, además del lado $\overline{AB}$ que mide 14 y corresponde al cateto opuesto para el ángulo que estamos trabajando, y el lado $\overline{AC}$ que su medida corresponde a c, que es la hipotenusa para el ángulo, usando la razón trigonométrica seno:

$\sin(25) = \dfrac{14}{c}$, despejamos:

$c \cdot \sin(25) = 14$

$c = \dfrac{14}{\sin(25)}$

$c \approx 33,12$

Item $b)$ tomando el ángulo conocido que mide 25°, además del lado $\overline{AB}$ que mide 14 y corresponde al cateto opuesto para el ángulo que estamos trabajando, y el lado $\overline{BC}$ que su medida corresponde a x, que es el cateto adyacente para el ángulo, usando la razón trigonométrica tangente:

$\tan(25) = \dfrac{14}{x}$, despejamos:

$x \cdot \tan(25) = 14$

$x = \dfrac{14}{\tan(25)}$

$x \approx 30,02$

Item $c)$, puede usarse razones trigonométricas, pero también puede usarse lo siguiente *la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo cualquiera deben sumar* 180, así:

$\beta = 180 - 90 - 25 \rightarrow \beta = 65^{\circ}$

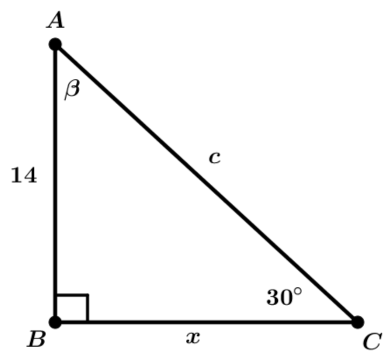
2. Ejercicios para la casa

1. Determine el equivalente en grados o radianes de cada uno de los siguientes ángulos.

   a) 720°

   b) $\dfrac{7\pi}{6}$

   Considere la siguiente figura que corresponde al triángulo ABC, rectángulo en B.



   De acuerdo con los datos de la figura anterior, determine lo que se le solicita en cada caso.

   a) El valor numérico de c

   b) El valor numérico de x

   c) El valor numérico de β.

   d) Las 6 razones trigonométricas del ángulo β

3. Razones trigonométricas de ángulos no agudos

Para definir las razones trigonométricas de un ángulo no agudo, se deben analizar los signos resultantes de éstas cuando se consideran ángulos cuyo lado terminal no se ubica en el primer cuadrante.

Definición: Signo de las razones trigonométricas

Las coordenadas rectangulares de todo punto (x, y) ubicado en el lado terminal de un ángulo en posición estándar, tienen un signo que depende de la ubicación del punto en el plano cartesiano, por lo que las razones trigonométricas de un ángulo no agudo tendrán un signo que está determinado por los signos respectivos de x y y. Dicho signo se determina de la siguiente manera:

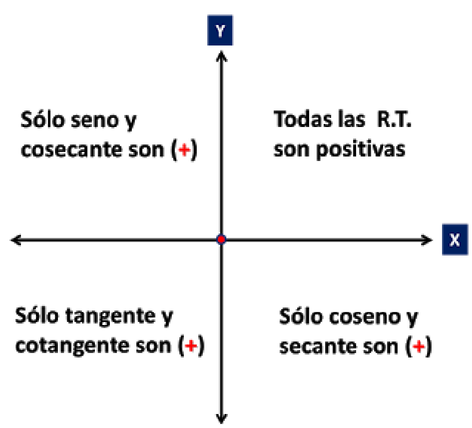
a) Si el lado terminal de un ángulo α en posición estándar se ubica en el **primer** cuadrante **todas** las razones trigonométricas de α son positivas.

b) Si el lado terminal de un ángulo α en posición estándar se ubica en el **segundo** cuadrante, entonces: $\operatorname{sen}\alpha > 0, \cos\alpha < 0, \tan\alpha < 0, \csc\alpha > 0, \sec\alpha < 0$ y $\cot\alpha < 0$.

c) Si el lado terminal de un ángulo α en posición estándar se ubica en el **tercer** cuadrante, entonces: $\operatorname{sen}\alpha < 0, \cos\alpha < 0, \tan\alpha > 0, \csc\alpha < 0, \sec\alpha < 0$ y $\cot\alpha > 0$.

d) Si el lado terminal de un ángulo α en posición estándar se ubica en el **cuarto** cuadrante, entonces: $\operatorname{sen}\alpha < 0, \cos\alpha > 0, \tan\alpha < 0, \csc\alpha < 0, \sec\alpha > 0$ y $\cot\alpha < 0$.

Nota: Si α es un ángulo en posición estándar no cuadrantal cuyo lado terminal se ubica en cualquier cuadrante excepto el primero, entonces las razones trigonométricas de α coinciden en valor absoluto con las razones trigonométricas de su ángulo de referencia, el signo queda determinado por los criterios anteriores.

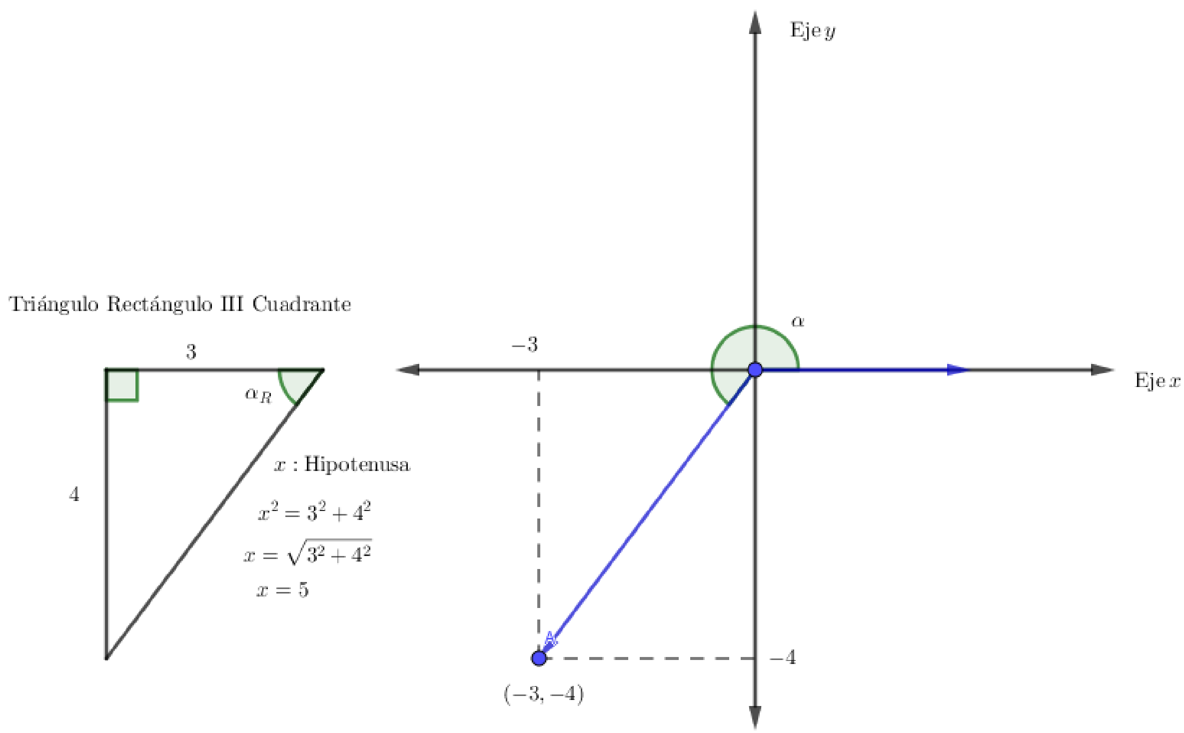


Ejemplo: Razones trigonométricas de ángulos no agudos

a) Hallar el valor de las 6 razones trigonométricas para un ángulo no agudo α en posición estándar, cuyo lado terminal pasa por el punto $A(-3,-4)$. Además, determine el valor numérico en grados del ángulo α.

Solución

Vamos a ubicar el punto en un plano cartesiano, ubicar el ángulo en posición estándar, finalmente construir un triángulo rectángulo en con el lado terminal del ángulo y un semieje x, este caso, vamos a ver que es el semieje x^-



Construimos las razones trigonométricas, respetando el signo de cada razón, al estar ubicado en el III cuadrante

$$\sin\alpha = \frac{-4}{5} \qquad \csc\alpha = \frac{-5}{4} \qquad \cos\alpha = \frac{-3}{5} \qquad \sec\alpha = \frac{-5}{3} \qquad \tan\alpha = \frac{4}{3} \qquad \cot\alpha = \frac{3}{4}$$

Para determinar el ángulo vamos a usar la razón trigonométrica tangente, pues con ella podemos apoyarnos en la calculadora, además este ángulo que se obtiene es el de referencia, como el ángulo se ubica en el tercer cuadrante, entonces usamos la fórmula para determinar la medida del ángulo en dicho cuadrante.

$$\tan\alpha_R = \frac{4}{3}$$

$$\alpha_R = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\alpha_R \approx 53,13^\circ$$

Ahora como el ángulo está en el III Cuadrante, entonces:

$$\alpha = 180 + \alpha_R$$

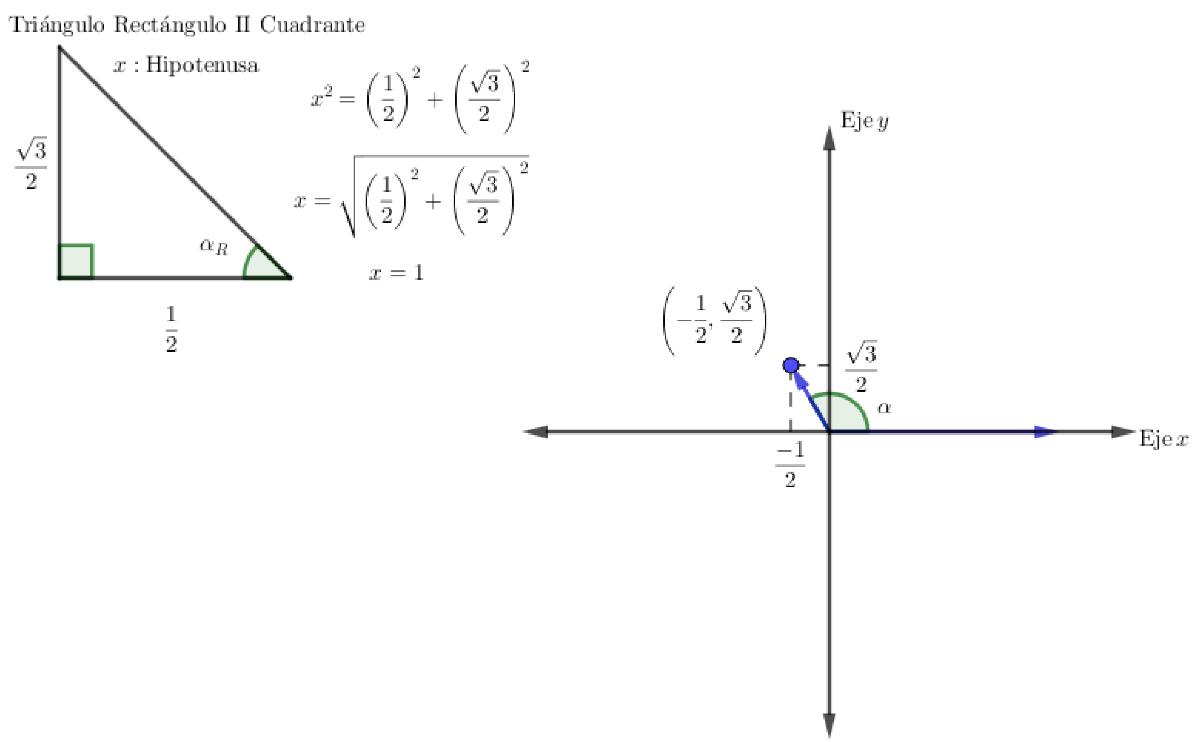
$$\alpha = 180 + 53,13$$

$$\alpha \approx 233,13^{\approx}$$

b) Hallar el valor de las 6 razones trigonométricas para un ángulo no agudo α en posición estándar, cuyo lado terminal pasa por el punto $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Además, determine el valor numérico en grados del ángulo α.

Solución

Vamos a ubicar el punto en un plano cartesiano, ubicar el ángulo en posición estándar, finalmente construir un triángulo rectángulo en con el lado terminal del ángulo y un semieje x, este caso, vamos a ver que es el semieje x^{-}



$$\sin\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{-\frac{1}{2}}{1} \qquad \sec\alpha = \frac{-1}{\frac{1}{2}} \qquad \tan\alpha = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \qquad \cot\alpha = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \cos\alpha = \frac{-1}{2} \qquad \sec\alpha = -2 \qquad \tan\alpha = -\sqrt{3} \qquad \cot\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

Para determinar el ángulo vamos a usar la razón trigonométrica seno, pues con ella podemos apoyarnos en la calculadora, además este ángulo que se obtiene es el de referencia, como el ángulo se ubica en el segundo cuadrante, entonces usamos la fórmula para determinar la medida del ángulo en dicho cuadrante.

$$\sin \alpha_R = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha_R = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\alpha_R = 60^{\circ}$$

Ahora como el ángulo está en el II Cuadrante, entonces:

$$\alpha = 180 - \alpha_R$$

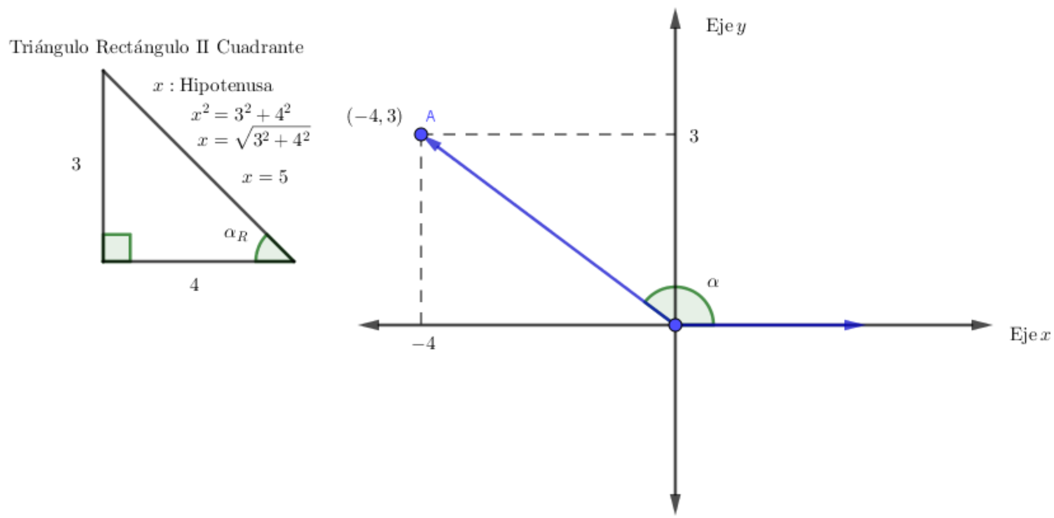
$$\alpha = 180 - 60$$

$$\alpha = 120^{\approx}$$

c) Hallar el valor de las otras 5 razones trigonométricas para un ángulo no agudo α en posición estándar cuyo lado terminal se ubica en el segundo cuadrante y si se sabe que $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$.

Solución

Según el dato del problema, vamos a ubicar nuestro ángulo en el segundo cuadrante, tomando en cuenta que $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$, observe:



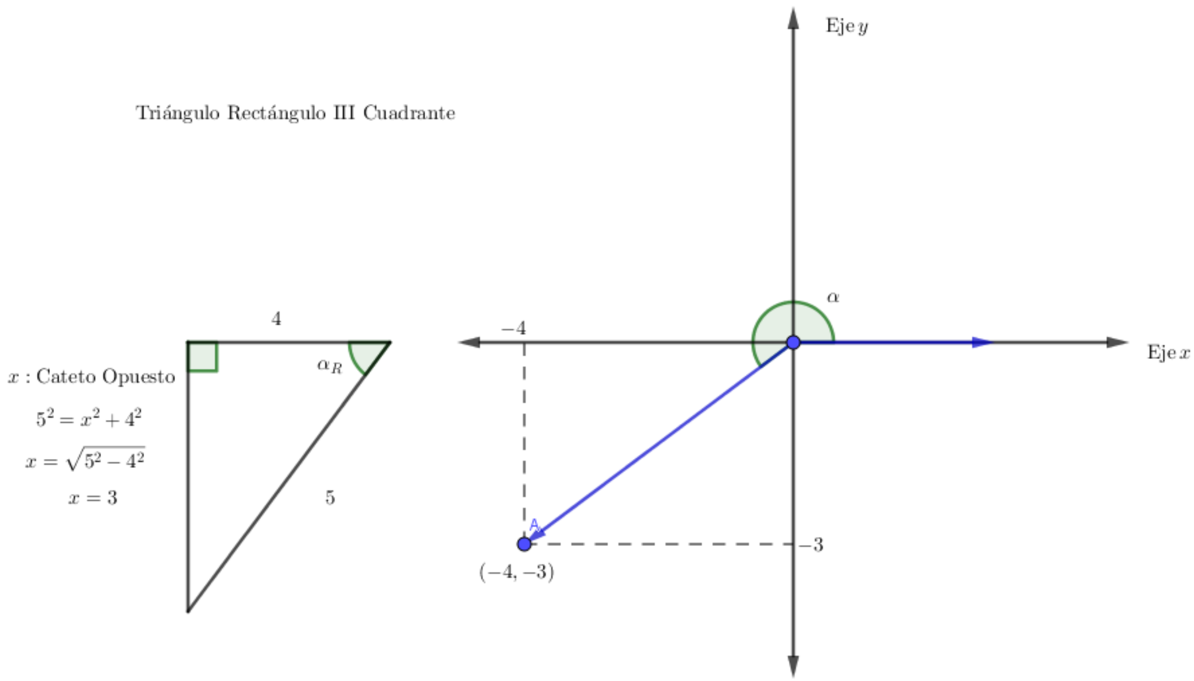
De lo anterior, deducimos las razones trigonométricas restantes, y respetando el signo de acuerdo al cuadrante donde nos ubica el ejercicio.

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ $\quad \csc\alpha = \frac{5}{3}$ $\quad \cos\alpha = -\frac{4}{5}$ $\quad \sec\alpha = -\frac{5}{4}$ $\quad \tan\alpha = -\frac{3}{4}$ $\quad \cot\alpha = -\frac{4}{3}$

d) Hallar el valor de las otras 5 razones trigonométricas para un ángulo no agudo α en posición estándar cuyo lado terminal se ubica en el tercer cuadrante y si se sabe que $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$.

Solución

Según el dato del problema, vamos a ubicar nuestro ángulo en el tercer cuadrante, tomando en cuenta que $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, observe:



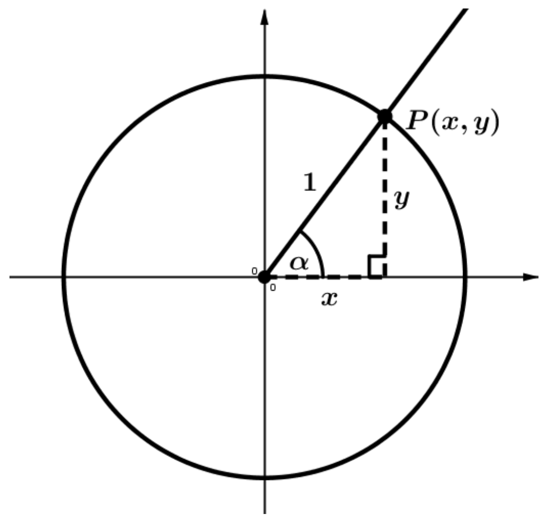
De lo anterior, deducimos las razones trigonométricas restantes, y respetando el signo de acuerdo al cuadrante donde nos ubica el ejercicio.

$\sin\alpha = \dfrac{-3}{5}$ $\quad \csc\alpha = \dfrac{-5}{3}$ $\quad \cos\alpha = \dfrac{-4}{5}$ $\quad \sec\alpha = \dfrac{-5}{4}$ $\quad \tan\alpha = \dfrac{3}{4}$ $\quad \cot\alpha = \dfrac{4}{3}$

3.1. Identidades Trigonométricas

Identidades Pitagóricas

Considere un círculo trazado en el plano cartesiano, centrado en el origen y de radio 1. Sea α un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal interseca a dicho círculo en el punto $P(x, y)$, tal y como lo muestra la siguiente figura:



Note que $\operatorname{sen}\alpha = y$ y $\cos\alpha = x$, por lo que si se aplica el teorema de pitágoras al triangulo rectángulo resultante se obtiene que:

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ (*)$$

Ahora bien, si se divide todos los términos de la ecuación $(*)$ por la expresion $\operatorname{sen}^2 x$, se obtiene:

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

De manera análoga, si se divide todos los términos de la ecuación $(*)$ por la expresión $\cos^2\alpha$, se obtiene:

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

Resumen de las identidades Pitagóricas

Identidad	**Despeje**
$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$	$1 - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$ $1 - \cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha$
$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$	$\tan^2\alpha = \sec^2\alpha - 1$ $\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$
$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$	$\cot^2\alpha = \csc^2\alpha - 1$ $\csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1$

Otras identidades importantes

a) $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

b $\csc\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

c) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

d) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

e) $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$

f) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Ejemplo: Comprobación de identidades trigonométricas

NO

Compruebe cada una de las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

b) $\dfrac{1+\cos 3t}{\operatorname{sen} 3t} + \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{1+\cos 3t} = 2\csc 3t$

c) $(\cot\alpha + \csc\alpha)(\tan\alpha - \operatorname{sen}\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$

d) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

a) $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

Solución

$= \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ Iniciamos del lado izquierdo de la igualdad

$= \dfrac{2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{\sec^2 x}$ Uso de identidades trigonométricas

NO

$= \dfrac{2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}$ Uso de la identidad trigonométrica.

$= \dfrac{2\sin x\cdot\cos^2 x}{\cos x}$ Se simplifica

$= 2\sin x\cdot\cos x$ Uso de identidades

$= \sin 2x$

∴ Se cumple la igualdad.

b) $\dfrac{1+\cos 3t}{\operatorname{sen} 3t}+\dfrac{\operatorname{sen} 3t}{1+\cos 3t}=2\csc 3t$

Solución

$$\frac{1+\cos 3t}{\operatorname{sen} 3t}+\frac{\operatorname{sen} 3t}{1+\cos 3t}$$
Se desarrolla el lado izquierdo, realizando suma de fracciones.

$$=\frac{(1+\cos 3t)\cdot(1+\cos 3t)+\sin 3t\cdot\sin 3t}{\sin 3t\,(1+\cos 3t)}$$
Denominador Común, suma de fracciones.

Considere: $(1+\cos 3t)\cdot(1+\cos 3t)=(1+\cos 3t)^2=1+2\cos 3t+\cos^2 3t$.

Además: $\sin 3t\cdot\sin 3t=\sin^2 3t$

$$=\frac{1+2\cos 3t+\cos^2 3t+\sin^2 3t}{\sin 3t\,(1+\cos 3t)}$$
Desarollo de fórmulas notables, y leyes de potencia.

$$=\frac{1+2\cos 3t+\cos^2 3t+\sin^2 3t}{\sin 3t\,(1+\cos 3t)}$$
Agrupamos términos semejantes.

$$=\frac{1+2\cos 3t+1}{\sin 3t\,(1+\cos 3t)}$$
Uso de la identidad trigonométrica.

$$=\frac{2+2\cos 3t}{\sin 3t\,(1+\cos 3t)}$$
Suma de términos semejantes.

ND

$$=\frac{2\,(1+\cos 3t)}{\sin 3t\,(1+\cos 3t)}$$
Factor común: 2 para el numerador.

$$=\frac{2}{\sin 3t}=2\cdot\frac{1}{\sin 3t}$$
Simplificamos

$$=2\cdot\csc 3t$$

$\therefore$ se cumple la igualdad

c) $(\cot\alpha + \csc\alpha)(\tan\alpha - \operatorname{sen}\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$

Solución

$(\cot\alpha + \csc\alpha)(\tan\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$ Desarrollamos el lado izquierdo, haciendo uso de identidades.

$$= \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1}\right)$$ Suma de fracciones.

$$= \left(\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{\sin\alpha \cdot 1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha}\right)$$ Fracciones Homogéneas, Denominador común.

$$= \left(\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{\sin\alpha\,(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha}\right)$$ Factor común.

$$= \frac{\sin\alpha\,(1 + \cos\alpha)\,(1 - \cos\alpha)}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$ Multiplicación de fracciones racionales.

Tome en cuenta que $(1 + \cos\alpha)\,(1 - \cos\alpha)$ es una diferencia de cuadrados de la forma $(a - b)\,(a + b) = a^2 - b^2$, donde $a = 1, b = \cos\alpha$.

$$= \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos\alpha}$$ Diferencia de cuadrados.

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$$ Uso de la identidad trigonométrica.

$\therefore$ se cumple la igualdad

No

d) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

Solución

$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2$	Se desarrolla el lado izquierdo de la igualdad, fórmula notable.
$= \sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x$	Agrupamos términos.
$= \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$	Uso de la identidad.
$= 1 + \operatorname{sen} 2x$	

$\therefore$ se cumple la igualdad

3.2. Ecuaciones Trigonométricas

Definición: Ecuación Trigonométrica

Una ecuación que involucra razones trigonométricas recibe el nombre de ecuación trigonométrica, la incógnita de esta ecuación está presente como argumento en al menos una de estas razones. Para efectos de este curso, sólo se trabajarán soluciones de ecuaciones ubicadas en la primera vuelta, es decir en el intervalo $[0, 2\pi[$

Ejemplo: Solución de ecuaciones trigonométricas

Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $3\tan\alpha + \sqrt{3} = 0$

b) $\csc x + 2 = 0$

c) $(2\cos x + \sqrt{3})(2 - 2\tan x) = 0$

d) $(2\cos x - 1)(\sqrt{3}\sec x - 2) = 0$

e) $(2\cos x - \sqrt{3})(\sec x - 2) = 0$

f) $\operatorname{sen} x \cdot \tan x = \operatorname{sen} x$

a) $3\tan\alpha + \sqrt{3} = 0$

Solución

$3\tan\alpha = -\sqrt{3}$ Se despeja la razón trigonométrica.

$\tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\alpha = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ se aplica la razón trigonométrica inversa.

El signo negativo indica **¿en qué cuadrante la tangente es negativo?**

$\alpha_r = 30^\circ$

Se determina el ángulo de referencia en los cuadrantes donde la tangente es negativa.

II Cuadrante: $\alpha = 180 - 30 \to \alpha = 150^\circ$, IV Cuadrante: $\alpha = 360 - 30 \to \alpha = 330^\circ$

$$S = \{150^\circ, 330^\circ\}$$

b) $\csc x + 2 = 0$

Solución

$\dfrac{1}{\sin x} = -2$ Se despeja la razón trigonométrica, recuerde $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

$1 = -2 \sin x$

$\dfrac{-1}{2} = \sin x$

$x = \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$ **¿En qué cuadrante el seno es negativo?**

$x_r = 30^{\circ}$

III Cuadrante: $x = 180 + 30 \Rightarrow x = 210^{\circ}$ IV Cuadrante: $x = 360 - 30 \Rightarrow x = 330^{\circ}$

$$S = \{210^{\circ}, 330^{\circ}\}$$

c) $(2\cos x + \sqrt{3})(2 - 2\tan x) = 0$

d) $\sin x \cdot \tan x = \sin x$

3.3. Ejercicios para la casa

1. Sea α un ángulo en posición estándar, cuyo lado terminal pasa por el punto $(-6, 2\sqrt{3})$. Hallar las seis razones trigonométricas para el ángulo α, así como el valor numérico en grados del ángulo α.

2. Hallar el valor de las otras 5 razones trigonométricas para un ángulo no agudo α en posición estándar cuyo lado terminal se ubica en el cuarto cuadrante y si se sabe que $\tan\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

3. Comprueba la siguiente identidad triginométrica

$$\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = 2 \cdot \operatorname{sen}(2x) \cdot \sec^3 x$$

4. Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica en el intervalo $[0, 2\pi[$

$$(2\cos x - \sqrt{3})(\sec x - 2) = 0$$

4. Práctica Complementaria

Comprobación de identidades trigonométricas

1. Compruebe cada una de las siguientes identidades trigonométricas.

   a) $\left(\dfrac{2}{1-\cos 2x}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sec^2 x}\right)=1$

   b) $\dfrac{\sec x+\csc x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\cdot \operatorname{sen} 2x=2$

   c) $\dfrac{\cos 2x+1-\cos^2 x}{\cos x}=\cos x$

   d) $\dfrac{1+\cos 2\beta}{\operatorname{sen} 2\beta}=\cot \beta$

   e) $\dfrac{\sec^2 \alpha}{2-\sec^2 \alpha}=\sec 2\alpha$

   f) $\dfrac{1+\cos 3t}{\operatorname{sen} 3t}+\dfrac{\operatorname{sen} 3t}{1+\cos 3t}=2\csc 3t$

Ecuaciones trigonométricas

2. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

   a) $4\operatorname{sen}^2 x\cdot \tan x-\tan x=0$ R/$S=\left\{0^\circ,30^\circ,150^\circ,180^\circ,210^\circ,330^\circ\right\}$

   b) $(3\cos^2 x-1)(1-2\operatorname{sen} x)=0$ R/$S=\left\{30^\circ,54{,}73^\circ,150^\circ,125{,}26^\circ,234{,}74^\circ,305{,}26^\circ\right\}$

   c) $2\cos^2 x+\operatorname{sen} x=1$ R/$S=\left\{90^\circ,210^\circ,330^\circ\right\}$

d) $\sqrt{3}\csc x - 2 = 0$ R/$S = \{60^\circ, 120^\circ\}$

e) $7\cos^2 x = 2\cos x$ R/$S = \{73{,}4^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 286{,}4^\circ\}$

f) $\tan^2 x + 4\sec x = 4$ R/$S = \{0^\circ, 101{,}54^\circ, 258{,}46^\circ\}$

Trigonometría del triángulo rectángulo y de ángulos no agudos

3. Sea P un punto donde pasa el lado final de un ángulo en posición estándar α, tal que el valor del coseno del ángulo es negativo y cumple que $\cot\alpha = \dfrac{-2}{3}$. Entonces calcule:

   a) El valor de $\operatorname{sen}\alpha, \sec\alpha$ y $\cos\alpha$ R/ $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$; $\sec\alpha = \dfrac{-\sqrt{13}}{2}$; $\cos\alpha = \dfrac{-2}{\sqrt{13}}$

   b) El valor de $\dfrac{\cos^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}$ R/ $\dfrac{2\sqrt{13}}{39}$

   c) El valor del ángulo α R/ $123,69^\circ$

4. Considere al ángulo β en posición estándar, cuyo lado terminal pasa por el punto P, dado por $P = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-\sqrt{5}}{2}\right)$. Con base a dicho ángulo determine:

   a) El valor de $\operatorname{sen}\beta, \cot\beta$ y $\sec\beta$. R/ $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{-\sqrt{4}}{\sqrt{14}}$, $\cot\beta = \dfrac{-3\sqrt{5}}{5}$, $\sec\beta = -\sqrt{3}$

   b) El valor de $\dfrac{\cos^2\beta - \tan\beta}{2\sec\beta} - 5\operatorname{sen}\beta$ R/ $\dfrac{81 + 462\sqrt{5}}{84\sqrt{14}} \approx 3,54$

   c) El valor, en grados, del ángulo β. R/ $323,31^\circ$

5. Sea θ un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal pasa por el punto $P(2,-2\sqrt{3})$. Con base en este ángulo determine:

   a) El valor de $\operatorname{sen}\theta, \csc\theta$ y $\cot\theta$. R/ $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, $\csc\theta = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$, $\cot\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

   b) El valor en grados del ángulo θ. R/ 300°

   c) El valor de $\operatorname{sen}^2\theta + \tan^2\theta - 4$ R/ $\dfrac{-1}{4}$

6. Determine el valor de las 6 razones trigonométricas para el ángulo α en posición estándar, cuyo lado final pasa por el punto $(2,-15)$. Además determine el valor de α en radianes.

7. Si el punto P dado por $P(-2,\sqrt{5})$ pertenece al lado terminal de un ángulo β en posición estándar, entonces determine el valor de la siguiente expresión

$$\frac{\operatorname{sen}\beta\tan\beta - \csc^2\beta}{1+\sec\beta}$$

R/ $\dfrac{79}{15}$

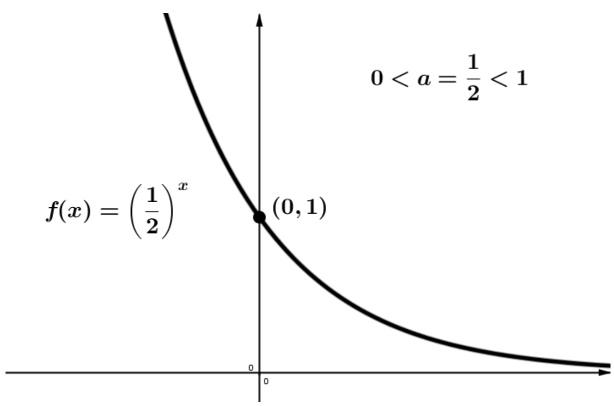
5. Función Exponencial

Definición: Función Exponencial

Una función exponencial es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por el criterio $f(x) = a^x$, donde $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.

Nota: Como el número a (llamado base) debe ser siempre positivo y distinto de uno, entonces esto nos direcciona el análisis de la función exponencial en dos rumbos, el primero de ellos cuando $0 < a < 1$, y el segundo cuando $a > 1$, de acuerdo al caso donde se encuentre así se analiza la función, observe:

Caso: $0 < a < 1$



Características

a) Dominio: $\mathbb{R}$

b) Ámbito: $\mathbb{R}^+$

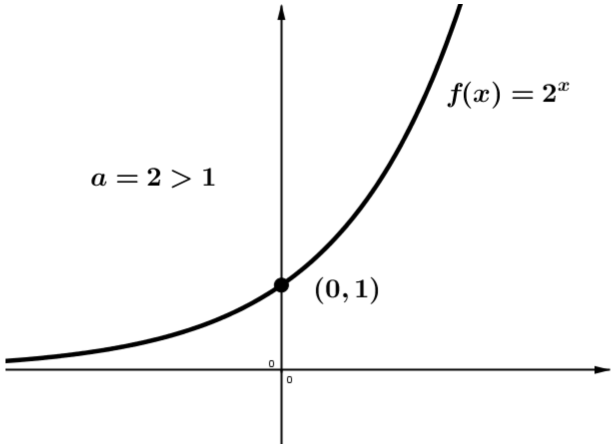
c) $I_y : (0, 1)$

d) Asintótica el eje x por la derecha

e) Estrictamente decreciente en todo su dominio

f) Biyectiva e invertible

Caso: $a > 1$



Características

a) Dominio: $\mathbb{R}$

b) Ámbito: $\mathbb{R}^+$

c) $I_y : (0, 1)$

d) Asintótica el eje x por la izquierda

e) Estrictamente creciente en todo su dominio

f) Biyectiva e invertible

Leyes de potencia

Sean $a, b \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{Z}$

$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$

$a^1 = a$

$1^n = 1$

$0^n = 0, n \neq 0$

$a^0 = 1, n \neq 0$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a^n \div a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

5.1. Ecuaciones Exponenciales

Definición: Ecuación Exponencial

Si $a \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq 1$, entonces la ecuación $a^{p(x)} = a^{q(x)}$ es equivalente a la ecuación $p(x) = q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son expresiones algebraicas en la variable x.

Ejemplo: Solución de ecuaciones exponenciales

Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $4^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x} = 8 \cdot (2^x)^2$

Solución

$$\left(2^2\right)^x \cdot \left(2^{-1}\right)^{3-2x} = 2^3 \cdot (2^x)^2$$

$$2^{2x} \cdot 2^{-(3-2x)} = 2^3 \cdot 2^{2x}$$

$$2^{2x+-3+2x} = 2^{3+2x}$$

$$2x - 3 + 2x = 3 + 2x$$

$$2x + 2x - 2x = 3 + 3$$

$$2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2}$$

$$\boxed{S = \{3\}}$$

b) $3^{2-x} = \sqrt[3]{\dfrac{27^{x+1}}{9}}$

Solución

$$3^{2-x} = \sqrt[3]{\frac{(3^3)^{x+1}}{3^2}}$$

$$3^{2-x} = \sqrt[3]{\frac{3^{3(x+1)}}{3^2}}$$

$$3^{2-x} = \sqrt[3]{3^{3x+3-2}}$$

$$3^{2-x} = 3^{\frac{3x+1}{3}}$$

$$2-x = \frac{3x+1}{3}$$

$$2-x = x+\frac{1}{3}$$

$$-x-x = \frac{1}{3}-2$$

$$-2x = \frac{-5}{3}$$

$$x = \frac{-5}{3} \div -2$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{5}{6}\right\}}$$

c) $9^{2x} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2} = 27 \cdot (3^x)^{-2}$

Solución

$$9^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 27 \cdot (3^x)^{-2}$$

$$(3^2)^{2x} \cdot (3^{-1})^{x+2} = 3^3 \cdot (3^x)^{-2}$$

$$3^{4x} \cdot 3^{-1(x+2)} = 3^3 \cdot 3^{-2x}$$

$$3^{4x-x-2} = 3^{3+-2x}$$

$$4x-x-2 = 3-2x$$

$$4x-x+2x = 3+2$$

$$5x = 5$$

$$x = \frac{5}{5}$$

$$x = 1$$

$$\boxed{S = \{1\}}$$

d) *(Opcional)* $5^{2x+1} \cdot \dfrac{1}{125^{4x-2}} = \dfrac{\sqrt{625^{x+1}}}{25^{4x+8}}$ $\boxed{S = \left\{\dfrac{21}{4}\right\}}$

6. Función Logarítmica

Definición: Función Logarítmica

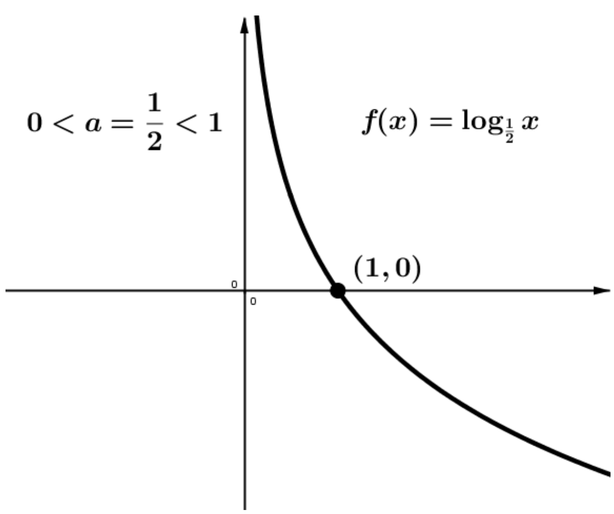
Una función logarítmica es una función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por el criterio $f(x) = \log_a x$, donde $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, y está definida como:

$$\boxed{\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$$

Al número a se le conoce como **base** del logaritmo y a la expresión x como **argumento** de la función.

Nota: Dado que a es un número real positivo distinto de uno, se tienen dos posibilidades para la base de una función logarítmica: que sea un número entre cero y uno, es decir $0 < a < 1$, o bien que sea mayor que uno, $a > 1$. De acuerdo a la forma en que se escoja la base así serán las características que se analicen en la función logarítmica, observe:

Caso: $0 < a < 1$



Características

a) Dominio $\mathbb{R}^+$

b) Ámbito $\mathbb{R}$

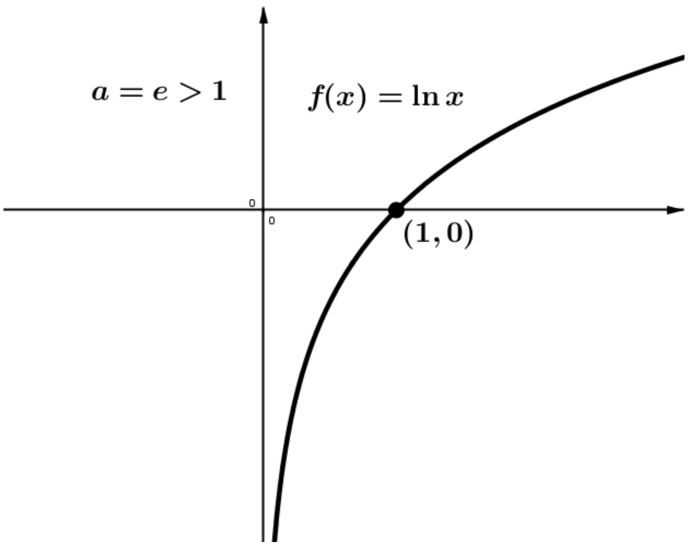
c) $I_x = (1, 0)$

d) Asintótica al eje y por arriba

e) Estrictamente decreciente

f) Biyectiva e invertible

Caso: $a > 1$



Características

a) Dominio $\mathbb{R}^+$

b) Ámbito $\mathbb{R}$

c) I_x= $(1, 0)$

d) Asintótica al eje y por abajo

e) Estrictamente creciente

f) Biyectiva e invertible

6.1. Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de los logaritmos resultan útiles en la resolución de ecuaciones logarítmicas. Considere $x, y, a \in \mathbb{R}^+$; $a \neq 1$, entonces:

a) **Por definición:** Dado que $a > 0$, $a \neq 1$, se tiene

$$\log_a 1 = 0 \quad ; \quad \log_a a^n = n$$

b) **Composición de logaritmo y exponencial:** Como la función exponencial es la inversa de la función logarítmica y viceversa se satisface que:

$$\log_a a^x = x \quad ; \quad a^{\log_a x} = x$$

c) **Logaritmo de un producto:** El logaritmo del producto es igual a la suma de los logaritmos de cada factor

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

d) **Logaritmo de un cociente:** El logaritmo del cociente es igual a la resta del logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

e) **Logaritmo de una potencia:** El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente y el logaritmo de la base de la potencia

$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$$

f) **Logaritmos particulares:** La particularidad del logaritmo natural y el decimal

$$\log_e x = \ln x \quad ; \quad \log_{10} x = \log x$$

6.2. Ecuaciones Logarítmicas

En las ecuaciones logarítmicas, se trabajarán dos casos: el caso que se reduce a la forma $\log_a x = b$ en el cual se aplica la definición $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ que conduce a una ecuación conocida; y el caso de ecuaciones exponenciales que no se pueden reducir a una misma base.

Ejemplo: Solución de ecuaciones logarítmicas

Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log x = 1 - \log(x+9)$

Solución

$\log x + \log(x+9) = 1$

$\log x(x+9) = 1$

$10^1 = x^2 + 9x$

$0 = x^2 + 9x - 10$

$x_1 = 1, x_2 = -10$

Se realiza la prueba en la **ecuación original**

$\underline{x = 1}$

$\log 1 = 1 - \log(1+9)$

$0 = 0$, por lo cual $x = 1$ es solución.

$\underline{x = -10}$

$\log -10 = 1 - \log(-10+9)$ no esta definido el logaritmo de un argumento negativo.

$S = \{1\}$

b) $\ln\left(x^2+x-3\right)-\ln\left(x+1\right)=0$

Solución

$\ln\left(x^2+x-3\right)=\ln\left(x+1\right)$

$x^2+x-3=x+1$

$x^2+x-3-x-1=0$

$x^2-4=0$

$x_1=2, x_2=-2$

Prueba con los valores obtenidos

$\underline{x=2}$

$\ln\left(2^2+2-3\right)-\ln\left(x+1\right)=0$

$0=0$, $x=2$ es solución

$\underline{x=-2}$

$\ln\left((-2)^2+-2-3\right)-\ln\left(-2+1\right)=0$, no está definido el logaritmo de un número negativo.

$S=\{2\}$

c) $3^{2-3x}=4^{2x+1}$

Solución

$\ln 3^{2-3x}=\ln 4^{2x+1}$

$(2-3x)\ln 3=(2x+1)\ln 4$

$2\ln 3-3x\ln 3=2x\ln 4+\ln 4$

$-3x\ln 3-2x\ln 4=\ln 4-2\ln 3$

$x\left(-3\ln 3-2\ln 4\right)=\ln 4-2\ln 3$

$$x=\frac{\ln 4-2\ln 3}{-3\ln 3-2\ln 4}$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{\ln 4-2\ln 3}{-3\ln 3-2\ln 4}\right\}}$$

Opcionales

d) $\log_3(x-2)=\log_3 27-\log_3(x-4)-5^{\log_3 1}$ $\boxed{S=\left\{3+\sqrt{10}\right\}}$

e) $2^{x+1}=6^{2-x}$ $\boxed{S=\left\{\frac{2\ln(6)-\ln 2}{\ln(2)+\ln(6)}\right\}}$

f) $e^{\pi x}-9=0$ $\boxed{S=\left\{\frac{\ln(9)}{\pi}\right\}}$

7. Práctica Complementaria

1. Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación

$$\frac{625^{2x-3}}{5^{x-7}} \cdot 125^{x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{4x-2} \cdot \frac{\sqrt[3]{25^{2x}}}{5^{x-2}}$$

2. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas.

   a) $-\log_5 (2x) + \log_5 (x^2 - 9) = \log_5(x-3)$

   b) $\log_6 (a+1) + \log_6 (a+2) = 1$

3. Use las propiedades de los logaritmos para verificar que

$$\log_2 \left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2}\right) - 2\log_2 x + \log_2 \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}\right) = 0$$

4. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones exponenciales.

   a) $2^{x+1} = 6^{2-x}$ R/ $S = \left\{\frac{2\ln 6 - \ln 2}{\ln 2 + \ln 6}\right\}$

   b) $27^{5-x}\dot{8}1^{2x+1} = \frac{1}{9^{-x-3}}$ R/ $S = \left\{\frac{-13}{3}\right\}$

   c) $3^{2x+1} = 7^{x+2}$ R/ $S = \left\{\frac{2\ln 7 - \ln 3}{2\ln 3 - \ln 7}\right\}$

   d) $5^{x+1} = \frac{1}{e^{-x+3}}$ R/ $S = \left\{\frac{-3 - \ln 5}{\ln 5 - 1}\right\}$

5. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas.

   a) $\ln (2-x) - \ln (4-x^2) = 0$ R/ $S = \{-1\}$

   b) $\log_2 x + 4 + \log_2 (x+1) = \log_2 (x+3) + 5$ R/ $S = \{3\}$

   c) $\log_5 (x^2 + 2x - 3) - \log_5 (x-1) = 2$ R/ $S = \{22\}$

   d) $\log_2 (x^2 - 3x + 6) - \log_2 (x-1) = \log_2 8 - 1$ R/$S = \{2, 5\}$

PRÁCTICA EXAMEN FINAL [1]

1. ¿Cuál es una solución de la ecuación $\sqrt{3}\csc x - 2 = 0$?

   a) $\frac{\pi}{3}$
   b) $\frac{-\pi}{3}$
   c) $\frac{\pi}{4}$
   d) $\frac{3\pi}{4}$

   Considere la siguiente información para contestar las preguntas 2 y 3: Sea P un punto donde pasa el lado final de un ángulo en posición estándar α, tal que el valor del coseno es negativo, y cumple que $\tan\alpha = \frac{-3}{2}$.

2. ¿Cuál es el valor de $\sin\alpha$?

   a) $\frac{-2}{\sqrt{13}}$
   b) $\frac{2}{3}$
   c) $\frac{3}{\sqrt{13}}$
   d) $\frac{-3}{\sqrt{13}}$

3. ¿Cuál es el valor aproximado de la medida del ángulo α?

   a) $\alpha \approx 56,31^\circ$
   b) $\alpha \approx 303,69^\circ$
   c) $\alpha \approx -123,69^\circ$
   d) $\alpha \approx 123,69^\circ$

[1] Práctica elaborado por el profesor Edwin Villalobos Martínez

4. Dada la expresión $\dfrac{1+\cos(2\beta)}{\sin(2\beta)}$ es equivalente a:

   a) $\sin\beta$

   b) $-\tan\beta$

   c) $-cos\beta$

   d) $\cot\beta$

5. ¿Cuál es el conjunto de solución de la ecuación $\log_2\left(x^2-3x+6\right)-\log_2(x-1)=\log_2 8-1$?

   a) $S=\{2\}$

   b) $S=\{5,2\}$

   c) $S=\{\}$

   d) $S=\{-2,-5\}$

6. ¿Cuál es la solución de la ecuación $5^{x+1}=\dfrac{1}{e^{-x+3}}$?

   a) $x=\dfrac{-3-\ln(5)}{\ln(5)-1}$

   b) $x=\dfrac{3+\ln(5)}{\ln(5)-1}$

   c) $x=\dfrac{-3-\ln(5)}{\ln(5)+1}$

   d) $x=\dfrac{3-\ln(5)}{\ln(5)-1}$

7. Dada la función $f(x)=\left(\dfrac{5}{4}\right)^x$. Determine:

   Considere $a=\dfrac{5}{4}=1,25>0$

   a) Dominio: $\mathbb{R}$

   b) Ámbito: $\mathbb{R}^+$

   c) Intersección con el eje x: No interseca al eje x

   d) Intersección con el eje y: $(0,1)$

   e) Monotonía: Esctrictamente creciente

   f) Asíntota: Asíntota al eje x, por la izquierda.

g) La imagen de -2: $\frac{16}{25}$

h) La preimagen de 8: $\log_{\frac{5}{4}} 8 \approx 9{,}31$

Item g: La imagen de -2.

Solución

Tenemos que $x = -2$, buscamos y, basta con sustituir: $f(-2) = \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{25}$

Item h. La preimagen de 8.

Solución

Tenemos que $y = 8$, pues nos preguntan por la imagen, igualamos la función a y, y usamos el valor de $8 = y$.

$y = \left(\frac{5}{4}\right)^{x} \rightarrow 8 = \left(\frac{5}{4}\right)^{x}$, usamos la propiedad que relaciona la función logaritmo con la exponencial: $\log_{\frac{5}{4}} 8 = x \Longrightarrow x \approx 9{,}31$

8. Dada la función cuadrática $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como:

$$k(x) = -x^2 + 4x - 4$$

Realice el estudio completo, guiado de la siguiente manera:

a) Concavidad

b) Intersecciones con los ejes cartesianos.

c) Eje de simetría y vértice.

d) Bosquejo de la gráfica.

e) Ámbito de la función

f) Intervalos de monotonía

a) $a = -1 < 0$, de donde k es cóncava hacia abajo.

b) $\cap_y : (0, -4)$, recuerde $c = -4$

$\cap_x$ estudie el discriminante, de donde $\triangle = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \to \triangle\ (4)^2 - 4 \cdot -1 \cdot -4 \Rightarrow \triangle = 0$, por lo cual k interseca al eje x en un único punto, se obtiene igualando la función a 0, así

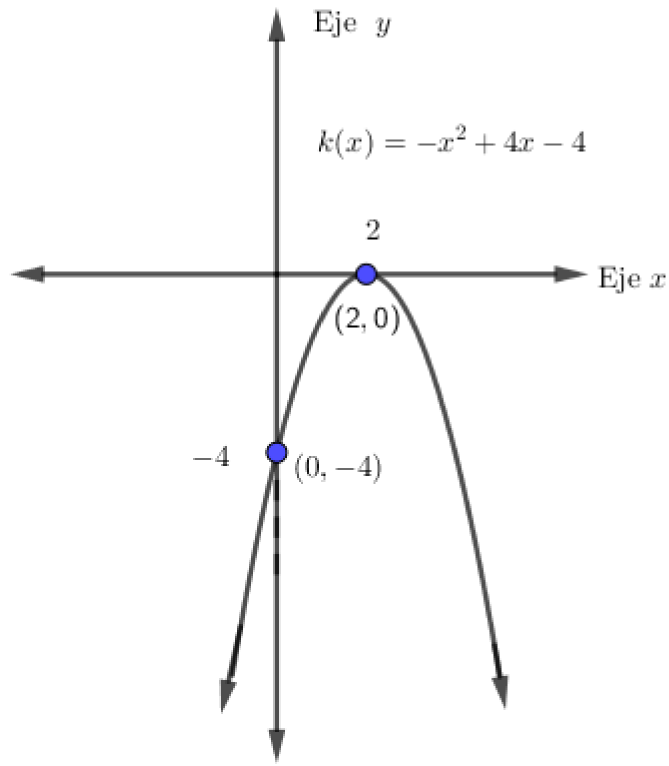
$$-x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\cap_x : (2, 0)$$

c) Eje de simetría $x = -\dfrac{b}{2 \cdot a} \Rightarrow x = \dfrac{-(4)}{2 \cdot -1} \Rightarrow x = 2$

Vértice: $V = \left(\dfrac{-(4)}{2 \cdot -1}, \dfrac{0}{4 \cdot -1}\right) \Rightarrow V = (2, 0)$, de donde $a = -1 < 0$, el vértice es punto máximo.

d) Bosquejo



e) Ámbito: $]-\infty, 0]$

f) Monotonía: creciente: $]-\infty, 2[$, decreciente: $]2, +\infty[$

Solucionario

1. a
2. c
3. d
4. d
5. b
6. a