Tarea 1

Arruti, Sergio, Jesús

4 de marzo de 2021

1. **Ejercicio 1.**
   Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos.

   a) $im\left(\varphi\right) \leq S$

   b) $Ker\left(\varphi\right) \trianglelefteq R$

   c) $\forall S' \subseteq S, \varphi^{-1}\left(S'\right) \leq R$

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ El hecho de que φ sea un morfismo de anillos con uno garantiza que $\varphi\left(1\right) = 1$ y que $im\left(\varphi\right) \neq \emptyset$.
Por otro lado, sean $a, b \in im\left(\varphi\right)$. Por definición, existen $x, y \in R$ tales que $\varphi\left(x\right) = a$ y $\varphi\left(y\right) = b$. Esto implica que

$$\begin{aligned} a - b &= \varphi\left(x\right) - \varphi\left(y\right) \\ &= \varphi\left(x - y\right) \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} ab &= \varphi\left(x\right)\varphi\left(y\right) \\ &= \varphi\left(xy\right) \end{aligned}$$

Así $a - b, ab \in im\left(\varphi\right)$.
Por tanto $im\left(\varphi\right) \leq S$.

$\boxed{\text{(b)}}$ Primeramente, como $\varphi\left(0\right) = 0$, tenemos que $Ker\left(\varphi\right) \neq \emptyset$. De igual manera, $Ker\left(\varphi\right) \trianglelefteq R$. En efecto, si $x, y \in Ker\left(\varphi\right)$, entonces $\varphi\left(x + y\right) = \varphi\left(x\right) + \varphi\left(y\right) = 0$. Por lo que $x + y \in Ker\left(\varphi\right)$. Ahora, sean $x \in Ker\left(\varphi\right)$ y $a \in R$; de manera que $\varphi\left(ax\right) = \varphi\left(a\right)\varphi\left(x\right) = 0$ y $\varphi\left(xa\right) = \varphi\left(x\right)\varphi\left(a\right) = 0$. Por lo que $ax, xa \in Ker\left(\varphi\right)$ y por tanto, $Ker\left(\varphi\right) \trianglelefteq R$.

$\boxed{\text{(c)}}$ Sea S' un subanillo de S. En este sentido, los hechos de que $1 \in S'$ y de que $\varphi\left(1\right) = 1$ implican que $1 \in \varphi^{-1}\left(S'\right) \neq \emptyset$.
Finalmente, dados $a, b \in \varphi^{-1}\left(S'\right)$, se tiene por la propia definición, que $\varphi\left(a\right), \varphi\left(b\right) \in S'$. De tal manera que $\varphi\left(a - b\right), \varphi\left(ab\right) \in S'$. Por tanto, $a - b, ab \in \varphi^{-1}\left(S'\right)$.
Concluimos que $\varphi^{-1}\left(S'\right)$ es un subanillo de S. $\square$

2. **Ejercicio 4.**
   Para $\alpha : K \times R \longrightarrow R$, $(k, r) \mapsto kr$, en K_{AC}-Rings, pruebe que $\varphi_\alpha : K \longrightarrow R$, con $\varphi_\alpha(k) = k \cdot 1_R$ es un morfismo de anillos tal que $im(\varphi_\alpha) \subseteq C(R)$.

   Demostración. Sean $k, r \in K$. Dado que α es una acción, se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(k+r) &= (k+r)\cdot 1_R\\ &= k\cdot 1_R + r\cdot 1_R\\ &= \varphi_\alpha(k) + \varphi_\alpha(r)\end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(kr) &= (kr)\cdot 1_R\\ &= k\cdot(r\cdot 1_R)\\ &= (k\cdot 1_R)(r\cdot 1_R)\\ &= \varphi_\alpha(k)\,\varphi_\alpha(r)\end{aligned}$$

   Además, por la propia regla de correspondencia de φ_α, se cumple la igualdad $\varphi_\alpha(1) = 1_K \cdot 1_R = 1_R$. Por tanto, φ_α es un morfismo de anillos.

   Finalmente, de la quinta condición de ser acción a izquierda, se deduce que $im(\varphi_\alpha) \subseteq C(R)$. En efecto, si $k \in K$ y $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(k)\,r &= (k\cdot 1_R)\,r\\ &= k\cdot(1_R r)\\ &= k\cdot(r 1_R)\\ &= r\cdot(k 1_R)\\ &= r\varphi_\alpha(k)\end{aligned}$$

   Por lo que $im(\varphi_\alpha) \subseteq C(R)$. □

3. **Ejercicio 7.**
   Sea R un anillo. Pruebe que

   a) Dada una representación a derecha (M, ρ), se tiene una acción a derecha $\beta_\rho : M \times R \longrightarrow M$, $(m, r) \mapsto mr = (m)\rho(r)$ tal que $(M, \beta_\rho) \in Mod_R$

   b) Dado un R-módulo a derecha (M, β), se tiene un morfismo de anillos $\rho_\beta : R \longrightarrow End^r_{\mathbb{Z}}(M)$, $(m)\rho_\beta(r) = \beta(m, r) = mr$

   c) Se tiene una biyección $\beta : Rep_R \longrightarrow Mod_R$, $(M, \rho) \mapsto \beta_\rho$, donde $\beta_\rho : M \times R \mapsto M$ está dada por $\beta_\rho(m, r) = (m)\rho(r)$; cuya inversa es $\rho : Mod_R \longrightarrow Rep_R$, con $(\beta : M \times R \longrightarrow M) \mapsto (\rho_\beta : R \longrightarrow End^r_{\mathbb{Z}}(M))$, dada por $(m)\rho_\beta(r) = \beta(m, r)$

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Dado que M es un grupo abeliano, basta probar que se satisfacen las condiciones de la definición de R-módulo a derecha. Sean $r_1, r_2 \in R$ y $m_1, m_2 \in M$.

Primero,

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \cdot r_1 &= (m_1 + m_2)\, \rho\,(r_1) \\ &= (m_1)\, \rho\,(r_1) + (m_2)\, \rho\,(r_2) \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_1\end{aligned}$$

puesto que $\rho\,(r_1)$ es un morfismo de grupos abelianos.

Por otro lado, como ρ es un morfismo de anillos, podemos decir que

$$\begin{aligned}m_1 \cdot (r_1 + r_2) &= (m_1)\, \rho\,(r_1 + r_2) \\ &= (m_1)\, [\rho\,(r_1) + \rho\,(r_2)] \\ &= (m_1)\, \rho\,(r_1) + (m_1)\, \rho\,(r_2) \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_2\end{aligned}$$

También observemos que

$$\begin{aligned}m_1 \cdot 1_R &= (m_1)\, \rho\,(1) \\ &= (m_1)\, Id_R \\ &= m_1\end{aligned}$$

Por último, en virtud de que ρ preserva productos, se tiene que

$$\begin{aligned}m_1 \cdot (r_1 r_2) &= (m_1)\, \rho\,(r_1 r_2) \\ &= (m_1)\, \rho\,(r_1) \circ \rho\,(r_2) \\ &= ((m_1)\, \rho\,(r_1))\, \rho\,(r_2) \\ &= (m_1 \cdot r_1)\, \rho\,(r_2) \\ &= (m \cdot r_1) \cdot r_2\end{aligned}$$

Por tanto, (M, β_ρ) es un R-módulo a derecha.

$\boxed{\text{(b)}}$ Como en el inciso anterior, bastará con probar que ρ_β es un morfismo de anillos. Bajo este contexto, sean $m_1, m_2 \in M$ y $r_1, r_2 \in R$.

Comenzaremos notando que $\rho\,(r_1)$ es un homomorfismo de anillos. En efecto,

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\, \rho\,(r_1) &= (m_1 + m_2) \cdot r_1 \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_1 \\ &= (m_1)\, \rho\,(r_1) + (m_2)\, \rho\,(r_2)\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\rho(r_1) \in End_{\mathbb{Z}}^{r}(M)$.

Análogamente, ρ_β es un homomorfismo de grupos abelianos, puesto que

$$\begin{aligned}
(m_1)\,\rho_\beta(r_1 + r_2) &= m_1 \cdot (r_1 + r_2) \\
&= m_1 \cdot r_1 + m_1 \cdot r_2 \\
&= (m_1)\,\rho_\beta(r_1) + (m_1)\,\rho_\beta(r_2)
\end{aligned}$$

y así $\rho_\beta(r_1 + r_2) = \rho_\beta(r_1) + \rho_\beta(r_2)$. Más aún, ρ_β también preserva productos, toda vez que

$$\begin{aligned}
(m_1)\,\rho_\beta(r_1 r_2) &= m_1 \cdot (r_1 r_2) \\
&= (m_1 \cdot r_1) \cdot r_2 \\
&= ((m_1)\,\rho_\beta(r_1))\,\rho_\beta(r_2) \\
&= (m_1)\,[\rho_\beta(r_1) \circ \rho_\beta(r_2)]
\end{aligned}$$

Para finalizar, ρ_β en efecto es un morfismo de anillos porque, adicionalmente, se satisface que $(m_1)\,\rho_\beta(1) = m_1 \cdot 1_R = m_1$. Ergo, se concluye el resultado.

$\boxed{\text{(c)}}$ La biyección queda resuelta debido a los 2 incisos anteriores. El primero garantiza que toda representación a derecha tiene estructura de R-módulo a derecha; inversamente, todo R-módulo a derecha induce una acción a derecha con la cuál el módulo puede ser visto como una representación a derecha de R. □

4. **Ejercicio 10.**
   Sea K un anillo conmutativo.

   a) Para un anillo R, pruebe que dar una estructura de K-álgebra en R es equivalente a dar una estructura de K-módulo a izquierda en R, vía una acción a izquierda $K \times R \longrightarrow R$, $(k, r) \mapsto k \cdot r$ tal que satisface la propiedad $k \cdot (r_1 r_2)\,(k \cdot r_1)\,r_2 = r_1\,(k \cdot r_2)$, $\forall k \in K$, $\forall r_1, r_2 \in R$.

   b) Sean R, S dos K-álgebras, $f : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos. Pruebe que f es un morfismo de K-álgebras si y sólo si f es un morfismo de K-módulos a izquierda, vía la estructura de K-módulo en R y en S dada por el primer inciso.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Suponga que (R, K, φ) tiene estructura de K-álgebra. Definimos una acción a izquierda de K sobre R como $(k, r) \mapsto \varphi(k)\,r$. Veremos que, bajo este contexto, R es un K-módulo a izquierda.

Sean $x, y \in R$ y $k, r \in K$. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
k \cdot (x + y) &= \varphi(k)\,(x + y) \\
&= \varphi(k)\,x + \varphi(k)\,y \\
&= k \cdot x + k \cdot y
\end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned}(k+r)\cdot x &= [\varphi(k)+\varphi(r)]x\\ &= \varphi(k)\,x+\varphi(r)\,x\\ &= k\cdot x+r\cdot x\end{aligned}$$

Igualmente, se satisface que

$$\begin{aligned}1_K\cdot x &= \varphi(1_K)\\ &= 1_R x\\ &= x\end{aligned}$$

Y así mísmo, $im(\varphi)\subseteq C(R)$, pues (R,K,φ) es K-álgebra. Inclusive, obtenemos

$$\begin{aligned}(kr)\cdot x &= \varphi(kr)\,x\\ &= [\varphi(k)\,\varphi(r)]x\\ &= \varphi(k)\,[\varphi(r)\,x]\\ &= k\cdot(r\cdot x)\end{aligned}$$

Por último, el hecho de que $im(\varphi)\subseteq C(R)$ implica las siguientes dos igualdades

$$\begin{aligned}k\cdot(xy) &= \varphi(k)\,(xy)\\ &= (\varphi(k)\,x)\,y\\ &= (k\cdot x)\,y\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}k\cdot(xy) &= \varphi(k)\,(xy)\\ &= (\varphi(k)\,x)\,y\\ &= (x\varphi(k))\,y\\ &= x\,(\varphi(k)\,y)\\ &= x\,(k\cdot y)\end{aligned}$$

Por lo que $R\in {}_K Mod$.

Inversamente, en el supuesto de que R sea un K-módulo a izquierda, vía una acción $K\times R\longrightarrow R$, $(k,r)\mapsto k\cdot r$ con la propiedad de que para cualesquiera $k\in K$ y $r_1,r_2\in R$ se tiene que$k\cdot(r_1r_2)=(k\cdot r_1)\,r_2=r_1\,(k\cdot r_2)$, se puede definir una función $\varphi:K\longrightarrow R$ como $\varphi(k)=k\cdot 1_R$. Mostraremos que φ es un homomorfismo de anillos tal que $im(\varphi)\subseteq C(R)$.

Sean $k, r \in K$. Comencemos notando que

$$\begin{aligned}\varphi(k+r) &= (k+r)\cdot 1_R \\ &= k\cdot 1_R + r\cdot 1_R \\ &= \varphi(k)+\varphi(r)\end{aligned}$$

Y que, a su vez,

$$\begin{aligned}\varphi(kr) &= (kr)\cdot 1_R \\ &= k\cdot(r\cdot 1_R) \\ &= k\cdot\varphi(r) \\ &= k\cdot(1_R\varphi(r)) \\ &= (k\cdot 1_R)\varphi(r) \\ &= \varphi(k)\varphi(r)\end{aligned}$$

Incluso, en este sentido, se tiene que $\varphi(1_K) = 1_K \cdot 1_R = 1_R$. Lo cual implica que φ es un homomorfismo de anillos. Para terminar, veamos que $im(\varphi) \subseteq C(R)$. Sean $x \in K$, $y \in R$. Por hipótesis,

$$\begin{aligned}(k\cdot 1_R)r &= k\cdot(1_R r) \\ &= k\cdot r \\ &= k\cdot(r1_R) \\ &= r(k\cdot 1_R)\end{aligned}$$

Luego,

$$\varphi(k)r = r\varphi(k)$$

En vista de lo anterior, R adquiere estructura de K-álgebra.

$\boxed{\text{(b)}}$ Empecemos suponiendo que f es un morfismo de K-álgebras, con (R, K, φ) y (S, K, ψ). Sean $k \in K$ y $r \in R$. En virtud de la correspondencia del inciso anterior se tiene que

$$\begin{aligned}k\cdot r &= k\cdot(1_R r) \\ &= (k\cdot 1_R)r \\ &= \varphi(k)r\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}f(k\cdot r) &= f(\varphi(k)r) \\ &= \psi(k)f(r) \\ &= k\cdot f(r)\end{aligned}$$

Por lo que f es un morfismo de K-módulos a izquierda.

De la misma forma, el converso también es válido. Considere las K-álgebras (R, K, φ) y (S, K, ψ). Sean $t \in K$ y $x \in R$. Note que

$$\begin{aligned}\varphi(k)\, r &= (k \cdot 1_R)\, r \\ &= k \cdot (1_R r) \\ &= k \cdot r\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}f(\varphi(k)\, r) &= f(k \cdot r) \\ &= k \cdot f(r) \\ &= \psi(k)\, f(r)\end{aligned}$$

De ahí, concluimos que f es un morfismo de K-álgebras. $\square$