Lista 4

Arruti, Sergio, Jesús

Ej 1. Sean $M \in Mod(R)$ y $X \subseteq M$. Considere el morfismo de R-módulos $\overline{\varepsilon}_{X,M} : F(X) \longrightarrow M$, dado por $\overline{\varepsilon}_{X,M}\left(\{t_x\}_{x\in X}\right) = \Sigma_{x\in X} t_x x$. Note que la composición $X \xrightarrow{\varepsilon_x} F(X) \xrightarrow{\overline{\varepsilon}_{X,M}} M$ coincide con la inclusión $X \subseteq M$. Pruebe que:

a) $im\left(\overline{\varepsilon}_{X,M}\right) = \langle x \rangle_R$

b) $M = \langle x \rangle_R \Leftrightarrow \overline{\varepsilon}_{X,M}$ es un epimorfismo.

c) X es R-linealmente independiente$\Leftrightarrow \overline{\varepsilon}_{X,M}$ es un monomorfismo.

d) X es una R-base$\Leftrightarrow \overline{\varepsilon}_{X,M}$ es un isomorfismo.

Demostración. $\boxed{\text{a}}$ Primero, como $\langle x \rangle_R$ es un submódulo de M, se tiene que $im\left(\overline{\varepsilon}_{X,M}\right) \subseteq \langle x \rangle_R$. Por otro lado, sea $m \in \langle x \rangle_R$. Entonces m tiene una descomposición $m = \Sigma_{x\in X} t_x x$, donde $t_x \in F(X)$. En consecuencia, $\overline{\varepsilon}_{X,M}\left(\{t_x\}_{x\in X}\right) = \Sigma_{x\in X} t_x x = m$. $\therefore im\left(\overline{\varepsilon}_{X,M}\right) = \langle x \rangle_R$

$\boxed{\text{(b)}}$ Este inciso se deduce del anteior. $M = \langle x \rangle_R \Leftrightarrow M = im\left(\overline{\varepsilon}_{X,M}\right) \Leftrightarrow \overline{\varepsilon}_{X,M}$ es un epimorfismo.

$\boxed{\text{(c)}}\boxed{\Rightarrow)}$ Suponga que $\{t_x\}_{x\in X} \in Ker\left(\overline{\varepsilon}_{X,M}\right)$. De modo que $\Sigma_{x\in X} t_x x = \overline{\varepsilon}_{X,M}\left(\{t_x\}_{x\in X}\right) = 0$. Dado que X es R-linealmente independiente, para cada $x \in X$, $t_x = 0$. Por tanto, $Ker\left(\overline{\varepsilon}_{X,M}\right) = 0$. $\therefore \overline{\varepsilon}_{X,M}$ es monomorfismo.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Sean $x_1, ..., x_n \in X$ y $r_{x_1}, ...r_{x_n} \in R$ tales que $\Sigma_{k=1}^{n} r_{x_k} x_k = 0$. Completamos a un elemento de $F(X)$ como $r_x = 0$, con $x \notin \{x_1, ..., x_n\}$. Con lo cual tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}_{X,M}\left(\{r_x\}_{x\in X}\right) &= \Sigma_{x\in X} r_x x \\ &= \Sigma_{k=1}^{n} r_{x_k} x_k \\ &= 0\end{aligned}$$

Entonces $\{r\}\, xX \in Ker\left(\overline{\varepsilon}_{X,M}\right) = 0$. Por tanto, $r_{x_1} = ... = r_{x_n} = 0$.
$\therefore X$ es R-linealmente independiente.

$\boxed{\text{(d)}}$ Este resultado se concluye de los anteriores. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\overline{\varepsilon}_{X,M} \; es\ un\ isomorfismo &\Leftrightarrow \overline{\varepsilon}_{X,M} \; es\ un\ epimorfismo\ y\ monomorfismo \\
&\Leftrightarrow M = im\left(\overline{\varepsilon}_{X,M}\right)\ y\ X\ es\ R - l.i. \\
&\Leftrightarrow X\ es\ una\ R - base.
\end{aligned}
$$

□

Ej 2. Sean $\psi : B' \longrightarrow B$ un isomorfismo y $f : B \longrightarrow C$ es $Mod\,(R)$. Pruebe que: Si f es minimal a derecha, entonces $f \circ \psi : B' \longrightarrow C$ es minimal a derecha.

Demostración. Sea $g : f \circ \psi \longrightarrow f \circ \psi$ un morfismo en $Mod\,(R)\,/C$. Entonces, por el **ejercicio 50.**, $g : B' \longrightarrow B'$ es un homomorfismo en $Mod\,(R)$. Más aún, $\psi \circ g : B' \longrightarrow B$ también es un homomorfismo. Dado que f es minimal a derecha, se tiene que $\psi \circ g$ es un isomorfismo en $Mod\,(R)$. En virtud de que ψ es un isomorfismo, $g : B' \longrightarrow B'$ es un isomorfismo en $Mod\,(R)$. Aplicando el **ejercicio 50.**, se tiene que $g : f \circ \psi \longrightarrow f \circ \psi$ es un isomorfismo. $\therefore$ $f \circ \psi$ es minimal a derecha. □

Ej 3. Sea $\eta :\ 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{g_2} M_2 \longrightarrow 0$ una sucesión en $Mod\,(R)$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes

a) η es una sucesión que se parte.

b) Existe una sucesión $0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f_2} M \xrightarrow{g_1} M_1 \longrightarrow 0$ en $Mod\,(R)$ tal que $g_1 f_1 = 1_{M_1}$, $g_2 f_2 = 1_{M_2}$, $g_2 f_1 = g_1 f_2 = 0$ y $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1_M$.

c) Existe un isomorfismo $h : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & M_1 \times M_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "h"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f_1"] & M \arrow[r, "g_2"] & M_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Demostración. $\boxed{\text{a)} \Rightarrow \text{c)}}$ Dado que η es una sucesión que se parte, existe un morfismo de R-módulos, $f_2 : M_2 \longrightarrow M$, tal que $g_2 f_2 = 1_{M_2}$. Luego, g_2, f_2 inducen un isomorfismo $h : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$. En efecto, definimos h como el morfismo $h\,(m_1, m_2) = f_1\,(m_1) + f_2\,(m_2)$.

En primer lugar, veremos que h es un monomorfismo. En este sentido, sea $(m_1, m_2) \in Ker\,(h)$, entonces $0 = h\,(m_1, m_2) = f_1\,(m_1) + f_2\,(m_2)$. En consecuencia, $f_2\,(m_2) = -f_1\,(m_1) \in Im\,(f_1) = Ker\,(g_2)$. Así,

$$m_2 = g_2 f_2\,(m_2) = 0$$

Por consiguiente, $f_1(m_1) = h(m_1, m_2) = 0$. Dado que f_1 es mono, $m_1 = 0$. Por lo que h es mono.

Ahora, h es epi. Sea $m \in M$. Entonces

$$g_2(m - f_2 g_2(m)) = g_2(m) - g_2(m) = 0$$

De esta forma, $m - f_2 g_2(m) \in Im(f_1)$. Ésto aunado a la exactitud de η garantiza la existencia de un elemento $x \in M_1$ tal que $f_1(x) = m - f_2 g_2(m)$, con lo cual,

$$\begin{aligned} h(x, g_2(m)) &= f_1(x) + f_2(g_2(m)) \\ &= m \end{aligned}$$

Una vez demostrado que h es un isomorfismo, podemos proceder a mostrar que el diagrama presentado anteriormente conmuta bajo este isomorfismo. Primero, note que para $m \in M_1$ se tiene que

$$\begin{aligned} hi_1(m) &= h(m, 0) \\ &= f_1(m) \\ &= f_1 1_{M_1}(m) \end{aligned}$$

Por el otro lado, dado $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$, se satisface que

$$\begin{aligned} g_2 h(m_1, m_2) &= g_2(f_1(m_1) + f_2(m_2)) \\ &= g_2 f_1(m_1) + g_2 f_2(m_2) \\ &= 0 + m_2 \\ &= m_2 \\ &= 1_{M_2} \pi_2(m_1, m_2) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{c)} \Rightarrow \text{b)}}$ Sea $h : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$ el morfismo proporcionado por la hipótesis. Además, la sucesión $0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{i_2} M_1 \times M_2 \xrightarrow{\pi_1} M_1 \longrightarrow 0$ se parte. Definimos $f_2 : M_2 \longrightarrow M$ como $f_2 = hi_2$, y $g_1 : M \longrightarrow M_1$ como $g_1 = \pi_1 h^{-1}$.

Luego, se satisfacen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} &g_1 f_1 = g_1 h i_1 = \pi_1 h^{-1} h i_1 = \pi_1 i_1 = 1_{M_1} \\ &g_2 f_2 = g_2 h i_2 = \pi_2 i_2 = 1_{M_2} \\ &g_1 f_2 = g_1 h i_2 = \pi_1 h^{-1} h i_2 = \pi_1 i_2 = 0 \\ &g_2 f_1 = g_2 h i_1 = \pi_2 h^{-1} h i_1 = \pi_2 i_1 = 0 \\ &g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1_{M_1} + 1_{M_2} = 1_{M_1 \times M_2} = 1_M \end{aligned}$$

$\boxed{\text{b)} \Rightarrow \text{a)}}$ Por hipótesis, existe un morfismo de R-módulos $f_2 : M_2 \longrightarrow M$ tal que $g_2 f_2 = 1_{M_2}$. Por tanto, η es una sucesión que se parte. $\square$

Ej 4. Sean $\varphi_i : A_i \longrightarrow B_i$, con $i = 1, 2$, minimales a derecha en $Mod\,(R)$. Pruebe que $\varphi_1 \coprod \varphi_2 : A_1 \coprod A_2 \longrightarrow B_1 \coprod B_2$ es minimal a derecha.

Demostración. Sea $\psi : \varphi_1 \coprod \varphi_2 \longrightarrow \varphi_1 \coprod \varphi_2$. Entonces ψ es de la forma $\psi = \psi_1 \coprod \psi_2$, con $\psi_i : A_i \longrightarrow B_i$, $i = 1, 2$. En efecto, si denotamos por $\eta_i : A_1 \coprod A_2 \longrightarrow B_i$, $i = 1, 2$, a la proyección canónica, entonces $\psi = \eta_1 \psi \coprod \eta_2 \psi$.

Suponga, así, que $\psi = \psi_1 \coprod \psi_2$. Luego, $\psi_i \in Hom\,(\varphi_i, \varphi_i)$, con $i = 1, 2$. Por la minimalidad a derecha de cada φ_1, se satisface que ψ_1 y ψ_2 son isomorfismos. Por lo que ψ es un isomorfismo.
$\therefore \varphi_1 \coprod \varphi_2$ es minimal a derecha. □

Ej 5. Sea $X \in {}_RMod_S$. Pruebe que:

a) $Hom_R\,(-, X) : Mod\,(R) \longrightarrow Mod\,(S^{op})$ es un funtor contravariante aditivo.

b) Para $\{M_i\}_{i=1}^n$ en $Mod\,(R)$ se tiene que

$$Hom_R\left(\coprod_{i=1}^n M_i, {}_RX_S\right) = \coprod_{i=1}^n Hom_R\,({}_RM_i, {}_RX_S)$$

en $Mod\,(S^{op})$

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Primeramente, ya sabemos que $Hom_R\,(-, X)$ es un funtor contravariante. Entonces bastará probar que éste es aditivo.

Sean $M, N \in Mod\,(R)$. Veremos que $\varphi = Hom_R\,(-, X)$, con

$$\varphi : Hom_R\,(M, N) \longrightarrow Hom_{S^{op}}\,(Hom_R\,(N, X)\,, Hom_R\,(M, X))\,,$$

es un isomorfismo.

Sea $f \in Hom_R\,(M, N)$. Entonces $\varphi\,(f)\,Hom_{S^{op}}\,(Hom_R\,(N, X)\,, Hom_R\,(M, X))$ es el morfismo $\varphi\,(f)\,(g) = g \circ f$. De esta manera, φ es un morfismo. En efecto, sean $f, g \in Hom_R\,(M, N)$, $r \in R$ y $h \in Hom_R\,(N, X)$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi\,(f + rg)\,(h) &= (f + rg) \circ h \\
&= f \circ h + (rg) \circ h \\
&= f \circ h + r\,(g \circ h) \\
&= \varphi\,(f)\,(h) + r\varphi\,(g)\,(h) \\
&= (\varphi\,(f) + r\varphi\,(g))\,(h)
\end{aligned}$$

Por tanto, φ es morfismo. $\therefore Hom_R\,(-, X)$ es aditivo.

$\boxed{\text{(b)}}$ Definimos $\rho : Hom_R\left(\coprod_{i=1}^{n} M_i, {}_RX_S\right) \longrightarrow \coprod_{i=1}^{n} Hom_R\left({}_RM_i, {}_RX_S\right)$ como $\rho(\varphi) = (\varphi\iota_i)_{i=1}^n$.

Veamos que ρ es un morfismo en $Mod(S^{op})$. Para dicho fin, considere $\varphi, \psi \in Hom_R\left(\coprod_{i=1}^{n} M_i, {}_RX_S\right)$ y $s \in S$.

$$\begin{aligned}\rho(\varphi + \psi s) &= ((\varphi + \psi s)\,\iota_i)_{i=1}^n \\ &= (\varphi\iota_i)_{i=1}^n + ((\psi s)\,\iota_i)_{i=1}^n \\ &= (\varphi\iota_i)_{i=1}^n + (\psi\iota_i)_{i=1}^n s \\ &= \rho(\varphi) + \rho(\psi)\, s\end{aligned}$$

Por otro lado, ρ es un inyectivo. En efecto, si $\rho(\varphi) = 0$, entonces se tiene que $(\varphi\iota_i)_{i=1}^n = 0$. Luego, $\varphi = 0$. Por tanto $Ker(\rho) = 0$.

Ahora, sea $(\varphi_i)_{i=1}^n \in \coprod_{i=1}^{n} Hom_R\left({}_RM_i, {}_RX_S\right)$. Entonces cada φ_i es un morfismo $\varphi_i : M_i \longrightarrow X$. Así, por la propiedad universal del coproducto, existe $\varphi : \coprod_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow X$ tal que $\varphi\iota_i = \varphi_i$. De esta manera, $\rho(\varphi) = (\varphi_i)_{i=1}^n$.
Por tanto, ρ es un isomorfismo.
$\therefore Hom_R\left(\coprod_{i=1}^{n} M_i, {}_RX_S\right) = \coprod_{i=1}^{n} Hom_R\left({}_RM_i, {}_RX_S\right)$ $\square$

Ej 6. Sea $M \in Mod(R)$. Pruebe que:
M es proyectivo y f.g.$\Leftrightarrow$existe $n \in \mathbb{N}$ tal que M es isomorfo a un sumando directo de ${}_RR^n$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow)}$ Puesto que M es f.g., existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la siguiente sucesión en $Mod(R)$ $\;0 \longrightarrow Ker(f) \longrightarrow R^n \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0\;$ es exacta. Ésta a su vez se parte, toda vez que M es proyectivo.
$\therefore M$ es sumando directo de R^n.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Suponga que ${}_RR^n \simeq M \oplus K$. Entonces M es f.g., y la sucesión en $Mod(R)$ $\;0 \longrightarrow K \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0\;$ se parte.
$\therefore M$ es proyectivo y f.g. $\square$

Ej 7. Sea R un anillo no trivial. Pruebe que:
R es semisimple y conmutativo$\Leftrightarrow$ $R \simeq \bigtimes_{i=1}^{t} K_i$ como anillos, donde K_i es un campo $\forall i \in [1, t]$

Demostración. $\boxed{\Leftarrow)}$ Dado que cada K_i es un campo y $R \simeq \bigtimes_{i=1}^{t} K_i$, se satisface que R es semisimple y conmutativo.

$\boxed{\Rightarrow)}$ En virtud del teorema de **Wedderburn-Artin**, R es isomorfo a $\bigtimes_{i=1}^{t} Mat_{n_i \times n_i}(D_i)$, con $n_i \in \mathbb{N}$ y D_i un anillo con división. Ahora, por la conmutatividad de R, la única posibilidad es que $n_i = 1$ y D_i sea conmutativo, para $i \in [1, t]$.

$\therefore R \simeq \bigtimes_{i=1}^{t} K_i$, con K_i un campo, $\forall i \in [1, t]$ $\square$