

Lista 4

Arruti, Sergio, Jesús

Ej 68. Sea R un anillo artiniiano (noetheriano) a izquierda. Pruebe que $\forall M \in \text{mod}(R)$, M es artiniiano (noetheriano).

Demostración. Sea M un R -módulo finitamente generado, como $\bigoplus_{m \in M} R_m$ genera a M entonces existe un subconjunto finito A de M tal que $M \cong \bigoplus_{m \in A} R_m$, por lo que si $m_0 \in A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow R_{m_0} \xrightarrow{i_0} M \xrightarrow{\pi_0} \bigoplus_{m \in M \setminus \{m_0\}} R_m \longrightarrow 0.$$

Ahora, si R es artiniiano (noetheriano) entonces R_{m_0} y $\bigoplus_{m \in M \setminus \{m_0\}} R_m$ también son artiniianos (noetherianos) por ser A finito. Y por la proposición 10.12 del libro de Anderson-Fuller, M es artiniiano (noetheriano). \square

Ej 69.

Ej 70.

Ej 71. Para un anillo R y $M \in \text{Mod}(R)$, pruebe que

- a) Si $e \in \text{End}(R M)$ es tal que $e^2 = e$, entonces $M = eM \oplus (1 - e)M$ y $eM = \{m \in M \mid e(m) = m\}$.
- b) Sean $M_1, M_2 \in \mathcal{L}(M)$. Si $M = M_1 \oplus M_2$, entonces existe $e \in \text{End}(R M)$ tal que: $e^2 = e$, $eM = M_1$ y $(1 - e)M = M_2$.

Demostración. a)

Supongamos $x \in M \cap (1 - e)M$, entonces $x = ey = (1 - e)z$, es decir, $ey = z - ez$ por lo que $e(y + z) = z$,
Así

$$x = (1 - e)(e(y + z)) = e(y + z) - e^2(y + z) = e(y + z) - e(y + z) = 0.$$

por lo tanto $M \cap (1 - e)M = \{0\}$.

Sea $x \in M$ entonces $x = (x - ex) + ex$ donde $(x - ex) = (1 - e)x \in (1 - e)M$ y $ex \in eM$. Así $x \in eM \oplus (1 - e)M$.

Por último, sea $y \in eM$ entonces $y = ex$ para alguna $x \in M$, y por lo anterior, $e(y) = eex = ex = y$. Así $eM = \{m \in M \mid e(m) = m\}$.

b)

Sea $e = \mu_1 \pi_1$ donde $\pi: M \rightarrow M_1$ es la proyección canónica y $\mu_1: M_1 \rightarrow M$ es la inclusión canónica. Entonces $\pi_1 \mu_1 = Id_{M_1}$, por lo que $e^2(m_1) = \mu_1 \pi_1 \mu_1 \pi_1(m_1) = \mu_1 \pi_1(m_1) = e(m_1)$ para toda $m_1 \in M_1$.

Sea $m \in M$ entonces $e(m) = \mu_1 \pi_1(m) = \mu_1(\pi_1(m)) \in M_1$, por lo que $eM \subseteq M_1$ y todo elemento $x \in M_1$ cumple que $e(x) = \mu_1 \pi_1(x) = \mu_1(x) = x$ por lo que $M_1 = eM$.

Por otra parte, por a), $M = M_1 \oplus (1 - e)M$ y por hipótesis $M = M_1 \oplus M_2$, entonces $M_2 = (1 - e)M$ pues si $x \in M$, existe $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ y $m_3 \in M$ tales que $x = m_1 + m_2 = m_1 + (1 - e)m_3$ por lo que $m_2 = (1 - e)m_3$. \square

Ej 72.

Ej 73.

Ej 74. Para un anillo artiniiano a izquierda R , pruebe que R es local $\iff R^{op}$ es local.

Demostración. Por definición un anillo A es local si $A \neq 0$ y satisface alguna de las condiciones de 2.7.20 (en particular c) de esta proposición). Dado que $R^{op} - U(R^{op}) = R - U(R)$ y $J(R) = J(R^{op})$, entonces R es local si y sólo si

$$R - U(R) = J(R)$$

si y sólo si

$$R^{op} - U(R^{op}) = J(R^{op})$$

si y sólo si R^{op} es local. \square

Ej 75.

Ej 76.

Ej 77. Para un anillo R y $M \in Mod(R)$, pruebe que

a) M es proyectivo $\iff pd(M)=0$.

b) M es inyectivo $\iff id(M)=0$.

Demostración. a)

Supongamos M es proyectivo, entonces tenemos la sucesión exacta

$$P_{\bullet}: \dots \longrightarrow P_1 = 0 \xrightarrow{0} M = P_0 \xrightarrow{Id_M} M \longrightarrow 0$$

donde, como M es proyectivo, P_{\bullet} es resolución proyectiva. Así $pd(M) = l(P_{\bullet}) = 0$.

Por otra parte, si $pd(M) = 0$ entonces existe resolución proyectiva P_{\bullet} tal que $l(P_{\bullet}) = 0$, es decir, se tiene la siguiente sucesión exacta con P_0 proyectivo,

$$P_{\bullet}: \dots \longrightarrow P_1 = 0 \xrightarrow{0} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

pero por el ejercicio 38 esto implica que P_0 es isomorfo a M , por lo tanto M es proyectivo.

b)

Supongamos M es inyectivo, entonces tenemos la siguiente corelación inyectiva:

$$I_{\bullet}: 0 \longrightarrow M \xrightarrow{Id_M} M = P_0 \longrightarrow 0 = P_1 \longrightarrow \dots$$

entonces $l(I_{\bullet}) = 0$ y por lo tanto $id(M) = 0$.

Por otra parte, si $id(M) = 0$ entonces existe una correlación inyectiva de longitud cero, es decir, una sucesión exacta de la siguiente forma:

$$I_{\bullet}: 0 \longrightarrow M \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0 = P_1 \longrightarrow \dots$$

Como la sucesión es exacta, entonces por el ejercicio 38 se tiene que M es isomorfo a P_0 el cual es inyectivo, por lo tanto M es inyectivo.

□