Lista 5

Arruti, Sergio, Jesús

Ej 68.

Ej 69. Sean R artiniano a izquierda y $M \in mod\,(R)$. Entonces $\forall\ N \in \mathscr{L}\,(M)$

$$M/N \text{ es semisimple } \implies rad\,(M) \subseteq N.$$

Demostración. Sea $\mathscr{R} := J(R)$. Como $M \in mod\,(R)$, entonces por el Ej. 18 $\exists\ n \in \mathbb{N}$ y $f : R^n \to M$ un epimorfismo en $Mod(R)$. Así, sí π es el epimorfismo canónico en $Mod(R)$ de M en M/N, se tiene que $\pi f : R^n \to M/N$ es un epimorfismo en $Mod(R)$ y por lo tanto, nuevamente por el Ej. 18, $M/N \in mod(R)$. Por lo anterior, dado que $S \in mod(R)$ es semisimple $\iff$ $\mathscr{R}S = 0$ (véase 2.7.13 (c)) y que $rad\,(M) = \mathscr{R}M$ (véase 2.7.17 (b)), basta con verificar la siguiente implicación:

$$\mathscr{R}M/N = 0 \implies \mathscr{R}M \subseteq N.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{R}M &\implies \exists\ t \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^{t} r_i m_i,\ r_i \in \mathscr{R} \text{ y } m_i \in M\ \forall\ i \in [1,t] \\ &\implies \pi\,(x) = \sum_{i=1}^{t} r_i \pi\,(m_i)\,,\ r_i \in \mathscr{R} \text{ y } \pi\,(m_i) \in M/N\ \forall\ i \in [1,t] \\ &\implies \pi\,(x) \in \mathscr{R}M/N = 0 \\ &\implies x \in Ker\,(\pi) = N. \end{aligned}$$

$\implies \mathscr{R}M \subseteq N.$

$\square$

Ej 70.

Ej 71.

Ej 72. Sean $f : P \to M$ y $g : Q \to M$ cubiertas proyectivas de $M \in Nod\,(R)$. Entonces $\exists\ h : P \to Q$ isomorfismo en $Mod\,(R)$ tal que $gh = f$.

Demostración. Se tiene el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\exists\ h"'] \\ Q \arrow[r, "g"'] & M \end{tikzcd}$$

con P proyectivo y g, en partícular por ser un epi-esencial, un epimorfismo en $Mod(R)$. Por lo tanto $\exists\ h \in Hom_R\,(P, Q)$ tal que

$$gh = f. \tag{*}$$

Así pues, basta con verificar que h es un isomorfismo en $Mod(R)$. De (*) se sigue que, como g es un epi-esencial y f es en partícular un epimorfismo en $Mod(R)$, h es un epimorfismo en $Mod(R)$. Con lo cual, si i es la inclusión natural de $Ker\,(h)$ en P, la sucesión

$$0 \longrightarrow Ker\,(h) \xrightarrow{i} P \xrightarrow{h} Q \longrightarrow 0$$

es exacta. Más aún es una sucesión exacta que se parte, puesto que Q es proyectivo (Ej. 62), con lo cual h es un split-epi (Ej. 54) i.e. $\exists\ j \in Hom_R\,(Q, P)$ tal que $hj = Id_Q$. Notemos que lo anterior garantiza que j es un split-mono y así en partícular es un monomorfismo. Además

$$gh = f \implies fj = g,$$

con lo cual j es un epimorfismo, pues g lo es y f es un epi-esencial. Así j es un isomorfismo en $Mod(R)$ y por lo tanto $h = j^{-1}$ también lo es.

$\square$

Ej 73.

Ej 74.

Ej 75. Sean R un anillo no trivial.

a) Sean $e \in R \setminus \{0\}$ un idempotente, $\{P_i\}_{i=1}^n$ una familia en $\mathscr{L}\,(Re)$ y $\mathcal{A} := \{e_i\}_{i=1}^n \subseteq R$. Si $Re = \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ $\forall\ i \in [1, n]$ $e_i \in P_i$ y $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$, entonces $\mathcal{A}$ es una familia de idempotentes ortogonales. Más aún $\forall\ i \in [1, n]$ $Re_i = P_i$.

b) Si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una familia de idempotentes ortogonales en R y $e := \sum_{i=1}^{n} e_i$, entonces $\forall\ i \in [1, n]$ $Re_i \in \mathscr{L}\,({}_R Re)$ y $Re = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Sea $u \in [1, n]$. Notemos primeramente que como $e_u \in Re$, entonces $\exists\ r_u \in R$ tal que $e_u = r_u e$, y así

$$\begin{aligned} e_u e &= (r_u e)\, e = r_u\, (ee) \\ &= r_u e, && e^2 = e \\ &= e_u. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} e_u = e_u e = e_u \sum_{i=1}^{n} e_i \\ = \sum_{i=1}^{n} e_u e_i \\ = e_u^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{n} e_u e_i. \end{aligned}$$

Como $e_u \in P_u$, $\forall\ i \in [1, n]$ $e_u e_i \in P_i$ y la desomposición en suma en $\sum_{i=1}^{n} P_i$ es única, por formar $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ una suma directa para Re, lo anterior garantiza que $e_u = e_u^2$ y que $\forall\ i \neq u$ $e_u e_i = 0$. Por lo tanto $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de idempotentes ortogonales (f.i.o.).
Por su parte, como $e_u \in P_u \leq Re$ entonces $Re_u \subseteq P_u$, así que basta con probar que $P_u \subseteq Re_u$. Sea $p \in P_u \leq Re$, entonces $\exists\ q \in R$ tal que

$$\begin{aligned} p = qe = q \sum_{i=1}^{n} e_i \\ \Longrightarrow p - qe_u = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{n} qe_i, \end{aligned}$$

con

$$p - qe_u \in P_u,\ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{n} qe_i \in \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{n} P_i.$$

Dado que $P_u \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{n} P_i = \langle 0 \rangle$, se sigue que $p = qe_u \in Re_u$

$\boxed{b)}$ Sea $r \in R$. Como $\forall\ i \in I$ $Re_i \in Mod(R)$, para verificar que $Re_i \in \mathscr{L}\left({}_R Re\right)$ basta con probar que $Re_i \subseteq Re$, y esto último es consecuencia de que si $re_i \in Re_i$ entonces $(re_i)\, e \in Re$ y

$$\begin{aligned}
(re_i)\, e &= r\,(e_i e) \\
&= r\left(e_i \sum_{j=1}^{n} e_j\right) \\
&= re_i. && \{e_j\}_{j=1}^{n} \text{ es una f. i. o.}
\end{aligned}$$

Más aún, así se tiene que $\sum\limits_{i=1}^{n} Re_i \subseteq Re$. Notemos que $re = \sum\limits_{i=1}^{n} re_i \in \sum\limits_{i=1}^{n} Re_i$, así para verificar que $Re = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} Re_i$ basta con verificar que esta descomposición es única. Sea $s \in R$ tal que $re = \sum\limits_{i=1}^{n} se_i$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} re_i &= \sum_{i=1}^{n} se_i \\
\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (r-s)\, e_i &= 0.
\end{aligned}$$

Sea $j \in [1, n]$. Multiplicando a ambos lados de la igualdad por e_j y empleando nuevamente que $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ es una f. i. o. se obtiene que

$$\begin{aligned}
(r-s)\, e_j &= 0, \ \forall\, j \in [1, n] \\
\Longrightarrow\ re_j &= se_j, \ \forall\, j \in [1, n]
\end{aligned}$$

y así se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 76.

Ej 77.

Ej 78. Sea R un anillo. R es semisimple si y sólo si $gldim\,(R) = 0$.

Demostración. Afirmamos que M es proyectivo, $\forall\, M \in Mod\,(R)$, si y sólo sí $gldim\,(R) = 0$. En efecto:
$\boxed{\Longrightarrow}$ Se tiene que si M es proyectivo, entonces por el Ej. 77a) $pd\,(M) = 0$. Luego bajo estas condiciones, como por el Teorema 2,9,1 (a)

$$gldim\,(R) = \sup_{M \in Mod(R)} \{pd\,\{M\}\},$$

se tiene que $gldim\,(R) = \sup\limits_{M \in Mod(R)} \{0\} = 0$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $M \in Mod\,(R)$. Como en partícular $gldim\,(R)$ es cota superior de $\{pd\,\{M\} \mid M \in Mod\,(R)\}$, entonces $pd\,(M) \leq 0$. En tal caso

$pd\,(M) \in \mathbb{N}$ y por tanto $pd\,(M) \geq 0$. Con lo cual $pd\,(M) = 0$, así que, por el Ej. $77a$), M es proyectivo.
Por la equivalencia previamente demostrada, y dado que por la Proposición 2.6.8

$$M \text{ es proyectivo, } \forall\ M \in Mod\,(R) \iff R \text{ es semisimple,}$$

se tiene lo deseado.

$\square$