Lista 2

Arruti, Sergio, Jesús

Definición 1. Sean R y S anillos. Decimos que un grupo abeliano, M, es un R-derecho y S-derecho bimódulo si

i) $M \in \mathrm{Mod}_R \cap \mathrm{Mod}_S$;

ii) $(mr)s = (ms)r$, $\forall\ r \in R$, $\forall\ s \in S$ y $\forall\ m \in M$.

En tal caso denotamos a M como M_{R-S}.

Ej 12. Sea $M \in {}_R\mathrm{Mod} \cap {}_S\mathrm{Mod}$. Entonces $M \in {}_{R-S}\mathrm{Mod}$ si y sólo si $M \in {}_R\mathrm{Mod}_{S^{op}}$.

Demostración. Como $M \in {}_R\mathrm{Mod} \cap {}_S\mathrm{Mod}$ y, por el Ej. 8, $M \in \mathrm{Mod}_{S^{op}}$, entonces $M \in {}_R\mathrm{Mod} \cap \mathrm{Mod}_{M^{op}}$.
Sean $r \in R$, $s \in S$ y $m \in M$. Dado que, ver Ej 8, $sm = ms^{op}$ entonces

$$\begin{aligned} r(sm) = s(rm) &\iff r(ms^{op}) = (rm)s^{op} \\ \therefore\ M \in {}_{R-S}\mathrm{Mod} &\iff M \in {}_R\mathrm{Mod}_{S^{op}}. \end{aligned}$$

□

Ej 13. Sea $f : (L, \leq) \longrightarrow (L', \leq')$ un morfismo de lattices. Pruebe que:

a) f es morfismo de posets.

b) f es un isomorfismo de lattices si y sólo si lo es de posets.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Sean $x, y \in L$. Probaremos primero que $x \leq y$ si y sólo si $x \wedge y = x$. Si $x \leq y$, entonces $x \leq x \wedge y$, puesto que $x \leq x$ y $x \leq y$. Además, por definición, tenemos que $x \wedge y \leq x$. Así $x = x \wedge y$. Por el contrario, si suponemos que $x = x \wedge y$, entonces observe que $x \leq y$.

La afirmación anterior será útil en el proceso de probar este inciso. En efecto, supongamos que $x \leq y$. Como f es morfismo de lattices, se tiene que $f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$. $\therefore f(x) \leq' f(y)$.

$\boxed{\text{(b)}}\boxed{\Rightarrow)}$ Suponga que f es isomorfismo de lattices. En primer lugar, por el inciso anterior, f es morfismo de posets. Ahora, por hipótesis, existe $g : L' \longrightarrow L$ un morfismo de lattices tal que $f \circ g = Id_{L'}$ y $g \circ f = Id_L$;

éste a su vez también es un morfismo de posets. Por tanto, f es un isomorfismo de posets.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Consideremos que f es un isomorfismo de posets. Entonces existe $g : L' \longrightarrow L$ un morfismo de posets tal que $f \circ g = Id_{L'}$ y $g \circ f = Id_L$. Veremos que g es un morfismo de latices. Sean así $r, t \in L'$. Dado que $r \wedge t \leq' r$ y $r \wedge t \leq' t$, se tiene que $g\,(r \wedge t) \leq g\,(r)$ y $g\,(r \wedge t) \leq g\,(t)$, y por ende $g\,(r \wedge t) \leq g\,(r) \wedge g\,(t)$. Posteriormente, usando el hecho de que f es morfismo de lattices, se deduce que

$$\begin{aligned} r \wedge t &= f\,(g\,(r \wedge t)) \\ &\leq' f\,(g\,(r) \wedge g\,(t)) \\ &= f\,(g\,(r)) \wedge f\,(g\,(t)) \\ &= r \wedge t. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} g\,(r \wedge t) &= g\,(f\,(g\,(r) \wedge g\,(t))) \\ &= g\,(r) \wedge g\,(t)\,. \end{aligned}$$

Dado que g es morfismo de lattices, podemos concluir que la afirmación es cierta. $\square$

Ej 14. Sean $X, M \in {}_R Mod$ tal que $X \subseteq M$. Pruebe que $X \leq M \iff$ la inclusión $i_X : X \longrightarrow M, i_X(x) := x \quad \forall x \in X$, es un morfismo de R módulos.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $X \leq M$, entonces dados $x, y \in X$ y $r \in R$ se tiene que

$$i_x(rx + y) = rx + y = ri_X(x) + i_X(y).$$

Por lo que i_X es morfismo.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que $i_X : X \longrightarrow M$ es un morfismo de R módulos.

Sean $x, y \in X$ y $r \in R$, como X es un R módulo a izquierda entonces $x + y \in X$ y como i_X es morfismo se tiene que, si $\cdot : R \times X \longrightarrow X$ es la acción de R módulo en X, entonces $r \cdot x = r \cdot i_X(x) = i_X(rx) = rx$. Así, como $X \subset M$, entonces $X \leq M$.

$\square$

Definición 2. Sean $M \in {}_R\text{Mod}$ y $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de R-submódulos de M. Definimos la suma de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ como

$$\sum_{i \in I} X_i := \left\langle \bigcup_{i \in I} X_i \right\rangle_R .$$

Ej 15. Sean $M \in {}_R\text{Mod}$ y $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de R-submódulos de M. Entonces

(a)

$$\sum_{i\in I} X_i = \begin{cases} \{0\} & , I = \varnothing \\ \left\{ \sum_{j\in\{i_1,\ldots,i_n\}\subseteq I} x_j \;\middle|\; x_j \in X_j,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\} & , I \neq \varnothing \end{cases}$$

(b) $\{\mathscr{L}(M), \leq\}$ es un reticulado completo. Más aún, si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia no vacía de R-submódulos de M,

$$sup\{X_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} X_i,$$
$$inf\{X_i\}_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} X_i.$$

Demostración. Verifiquemos primeramente el siguiente lema:

Lema 1. Sea $M \in {}_R\text{Mod}$. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{L}(M)$ entonces $\bigcap \mathcal{A} \in \mathscr{L}(M)$.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} &0 + 0 = 0; \\ &r \bullet 0 = r \bullet (0+0) = r\bullet 0 + r \bullet 0 \\ &\qquad \Longrightarrow r\bullet 0 = 0,\ \forall\ r \in R. \\ &\Longrightarrow \{0\} \in \mathscr{L}(M). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} 0_R \bullet x &= (0_R + 0_R)\bullet x = 0_R \bullet x + 0_R \bullet x \\ &\Longrightarrow 0_R \bullet x = 0,\ \forall\ x \in M. \end{aligned}$$

Por lo anterior, y dado que si $X \in \mathscr{L}(M)$ entonces $X \neq \varnothing$, se tiene que

$$\{0\} \subseteq X,\ \forall\ X \in \mathscr{L}(M).$$

Con lo cual $\bigcap \mathcal{A} \neq \varnothing$, pues $\{0\} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$. Sean $r \in R,\ a, b \in \bigcap \mathcal{A}$ y $A \in \mathcal{A}$. Como $A \leq M$

$$\begin{aligned} &ra, a+b \in A \\ \Longrightarrow\ &ra, a+b \in A, \forall\ A \in \mathcal{A} \\ \Longrightarrow\ &ra, a+b \in A, \forall\ \bigcap \mathcal{A} \\ &\qquad \Longrightarrow \bigcap \mathcal{A} \in \mathscr{L}(M). \end{aligned}$$

□

Por el lema anterior el submódulo generado por un conjunto $A \supseteq X$ está bien definido y, más aún, es el mínimo submódulo de M, con respecto a $\subseteq$, que contiene a A. $\boxed{\text{(a)}}$ Supongamos que $I = \varnothing$, entonces $\bigcup_{i \in I} X_i = \varnothing$, y así

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} X_i &= \bigcap \{X \in \mathscr{L}(M) \mid \varnothing \subseteq X\} \\ &= \bigcap \mathscr{L}(M). \end{aligned}$$

Del lema se tiene que $0 \in X, \ \forall \ X \in \mathscr{L}(M)$ y que $\{0\} \in \mathscr{L}(M)$, con lo cual

$$\{0\} \subseteq \bigcap_{X \in \mathscr{L}(M)} X = \bigcap \mathscr{L}(M) \subseteq \{0\}$$

$$\therefore \ \sum_{i \in I} X_i = \{0\}.$$

Supongamos ahora que $I \neq \varnothing$. Si

$$S := \left\{ \sum_{j \in \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I} x_j \ \middle| \ x_j \in X_j, \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

afirmamos que $S \in \mathscr{L}(M)$. En efecto:
Como $I \neq \varnothing$ y $X_i \neq \varnothing$, $\forall \ i \in I$, entonces $S \neq \varnothing$. Sean $r \in R$ y $a, b \in S$, luego $\exists \ n, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} a &= \sum_{j \in \{i_1, \ldots, i_n\}} x_j \\ b &= \sum_{j \in \{k_1, \ldots, k_m\}} y_j. \end{aligned}$$

En caso que $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{k_1, \ldots, k_n\}$

$$a + b = \sum_{j \in \{i_1, \ldots, i_n\}} (x_j + y_j)$$

Como $X_j \leq M$, $x_j + y_j \in X_j$, $\forall \ j \in \{i_1, \ldots, i_n\}$; luego $a + b \in S$. Si ahora $\{i_1, \ldots, i_n\} \cap \{k_1, \ldots, k_n\} = \varnothing$ consideremos

$$\begin{aligned} l_r &:= i_r, \ \forall r \in [1, n] \\ l_{n+r} &:= k_r, \ \forall r \in [1, m]. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} a + b &= \sum_{j \in \{l_1, \ldots, l_{n+m}\}} z_j \\ &\implies a + b \in S. \end{aligned}$$

Finalmente, reetiquetando de ser necesario, si

$$\begin{aligned}
A &:= \{i_1, \ldots, i_n\} \\
B &:= \{k_1, \ldots, k_m\} \\
D &:= \{i_1, \ldots, i_n\} \cap \{k_1, \ldots, k_n\} \\
E &:= \{i_1, \ldots, i_n\} \cup \{k_1, \ldots, k_n\} = \{l_1, \ldots, l_r, l_{r+1}, \ldots, l_t\},
\end{aligned}$$

con $|D| = r > 0$, $|E \setminus D| = t > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
a + b &= \sum_{j \in D} (x_j + y_j) + \sum_{j \in A \setminus D} x_j + \sum_{j \in B \setminus D} y_j \\
&= \sum_{j \in E} z_j \\
&\implies a + b \in S.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$r \bullet a = r \bullet \sum_{j \in A} x_j = \sum_{j \in A} r \bullet x_j.$$

De modo que $r \bullet a \in S$, pues $A \subseteq I$ es finito y, como $X_j \leq M$, $r \bullet x_j \in X_j$, $\forall\ j \in A$; y por lo tanto $S \leq M$.
Como $\{i\} \subseteq I$, $\forall\ i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} X_i \subseteq S$. De modo que

$$\sum_{i \in I} X_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} X_i \right\rangle_R \subseteq S.$$

Ahora si $Y \leq M$ es tal que $Y \supseteq \bigcup_{i \in I} X_i$, $J := \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ y $a_j \in X_j \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$, $\forall\ j \in J$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{j \in J} a_j \in Y \\
&\implies S \subseteq Y,\ \forall\ Y \in \mathscr{L}(M) \text{ tal que } Y \supseteq \bigcup_{i \in I} X_i \\
&\implies S \subseteq \left\langle \bigcup_{i \in I} X_i \right\rangle_R = \sum_{i \in I} X_i \\
&\therefore\ S = \sum_{i \in I} X_i.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{(b)}}$ El par $(\mathscr{L}(M), \leq)$ es un CPO puesto que la relación $\subseteq$ es un orden parcial.
Sea $C \leq M$ cota superior de S. Entonces $X_i \leq C$, $\forall\ i \in I$; luego $C \supseteq \bigcup_{i \in I} X_i$. Dado $\sum_{i \in I} X_i$ es el mínimo submódulo, con respecto a $\subseteq$, que

contiene a $\bigcup_{i\in I} X_i$ se tiene que $\sum_{i\in I} X_i \leq C$ y por lo tanto $sup\,(S) = \sum_{i\in I} X_i$.
Sea $c \leq M$ cota inferior de S. Entonces $c \leq X_i$, $\forall\, i \in I$; luego $c \subseteq \bigcap_{i\in I} X_i$. Como $\bigcap_{i\in I} X_i \in \mathscr{L}\,(M)$ y $\bigcap_{i\in I} X_i$ es cota inferior de S se sigue que $inf\,(S) = \bigcap_{i\in I} X_i$.

$$\therefore\ (\mathscr{L}\,(M)\,, \leq) \text{ es un reticulado completo.}$$

□

Ej 16. Sean $M \in {}_R Mod$ y $N \leq M$. Consideremos $L_N\,(M) = \{X \in L\,(M) \mid N \leq X\}$. Pruebe que el epimorfismo canónico de R-módulos a izquierda

$$\begin{aligned} \pi_N : M &\to M/N \\ m &\mapsto m + N \end{aligned}$$

induce el isomorfismo de lattices

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_N : L_N\,(M) &\to L\,(M/N) \\ X &\mapsto X/N \end{aligned}$$

cuyo inverso es $\widehat{\pi}_N^{-1}\,(Z) = \{x \in M \mid x + N \in Z\}$.

Demostración. Sea $K \in L_N\,(M)$ tal que $\widehat{\pi}_N\,(K) = 0$. Notemos que, si $k \in K$, entonces $k + N = 0$. Lo cual implica que $k \in N$, y por ello $K = N$. Esto quiere decir que $\widehat{\pi}_N$ es inyectiva.

Así mismo, dado $T \in L\,(M/N)$, se satisface que $\widehat{\pi}_N^{-1}\,(T) \in L_N\,(M)$. En efecto, para cada $x \in N$, se cumple que $x + N = N \in T$, y en consecuencia $N \subseteq \widehat{\pi}_N^{-1}\,(T)$. Adicionalmente, si $x, y \in \widehat{\pi}_N^{-1}\,(T)$ y $r \in R$, se cumple que $x + y + N \in T$, $rx + N \in T$. En vista de ésto, se sigue que $x + y, rx \in \widehat{\pi}_N^{-1}\,(T)$, y por tanto $\widehat{\pi}_N^{-1}\,(T) \in L_N\,(M)$.

Por último, observe que

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_N\left(\widehat{\pi}_N^{-1}\,(T)\right) &= \left\{x + N \in M/N \,\middle|\, x \in \widehat{\pi}_N^{-1}\,(T)\right\} \\ &= \{x + N \in M/N \mid x + N \in T\} \\ &= T. \end{aligned}$$

Más aún, para cualesquiera $T_1, T_2 \in L\,(M/N)$, se identifican

$$\widehat{\pi}_N^{-1}\,(T_1 \cap T_2) = \widehat{\pi}_N^{-1}\,(T_1) \cap \widehat{\pi}_N^{-1}\,(T_2)$$

y

$$\widehat{\pi}_N^{-1}\,(T_1 + T_2) = \widehat{\pi}_N^{-1}\,(T_1) + \widehat{\pi}_N^{-1}\,(T_2)\,.$$

$\therefore\ \widehat{\pi}_N$ es un isomorfismo de retículas.

□

Ej 17. Para un $M \in {}_R Mod$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) M es simple.

b) 0 es un submódulo maximal de M.

c) M es un submódulo minimal de M.

d) $M \neq 0$ y $M = < m >_R \quad \forall m \in M - \{0\}$.

e) $M \neq 0$ y $\forall X \in {}_R Mod$, $\forall f \in Hom_R(M, X)$ se tiene que $f = 0$ o bien $Ker(f) = 0$.

f) $M \neq 0$ y $\forall X \in {}_R Mod$, $\forall g \in Hom_R(X, M)$ se tiene que $g = 0$ o bien $Im(g) = 0.$.

Demostración. Notemos que si $M = 0$, ningúna de los incisos se satisface, así que podemos tomar $M \neq 0$.

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Supongamos M es simple, entonces $\mathscr{L}(M) = \{0, M\}$ por lo que 0 es el único submódulo de M propio y por lo tanto es maximal.

$\boxed{b) \Rightarrow c)}$ Supongamos 0 es un submódulo maximal de M, como $\forall N \in \mathscr{L}(M) - \{M\}$ se tiene que $0 \leq N$, entonces $\forall N \in \mathscr{L}(M) - \{M\}, \quad N = 0$, por lo que M es minimal al ser el único submódulo en $(\mathscr{L}(M) - \{0\}, \leq)$ tal que $M \neq 0$ y si $0 \lneq N$ entonces $(N \leq M \ \Rightarrow N = M)$.

$\boxed{c) \Rightarrow d)}$ Supongamos M es un submódulo minimal de M. Por definición $M \neq 0$ entonces $\forall m \in M - \{0\}$, pasa que $< m >_R \neq 0$, pero $< m >_R \in \mathscr{L}(M)$, entonces $< m >_R \geq M$ por ser M minimal. Sin embargo $< m >_R \leq M$ pues $m \in M$, por lo tanto $M = < m >_R \quad \forall m \in M - \{0\}$.

$\boxed{d) \Rightarrow a)}$ Como $M \neq 0$, si $N \neq 0$ y $N \in \mathscr{L}(M)$, entonces $N \subset M$, $\forall n \in N - \{0\} \quad n \in M - \{0\}$ y $M = < n >_M \leq N \leq M$. Por lo tanto $N = M$ y $\mathscr{L}(M) = \{0, M\}$.

Con lo anterior tenemos que las primeras cuatro proposiciones son equivalentes, entonces para terminar se demostrarán las siguientes equivalencias.

$\boxed{a) \Rightarrow e)}$ Ya sabemos que $M \neq 0$. Sea $f \in Hom_R(M, X)$ con $X \in {}_R Mod$. Si $f = 0$ no hay nada que demostrar. Supongamos $f \neq 0$, como $Ker(f) \leq M$ con M simple, entonces $Ker(f) = 0$ o $Ker(f) = M$, pero $f \neq 0$, entonces $Ker(f) \neq M$ y en consecuencia $Ker(f) = 0$.

$\boxed{e) \Rightarrow f)}$ Ya sabemos que $M \neq 0$. Sea $g \in Hom_R(X, M)$ con $X \in {}_RMod$. Si $g = 0$ no hay nada que probar. Supongamos $g \neq 0$, como $Im(g) \leq M$ entonces podemos tomar ${}^{M}\!/_{Im(g)} \in {}_RMod$ y así $\pi_{Im(g)} \in Hom_R\left(M, {}^{M}\!/_{Im(g)}\right)$, con $\pi_{Im(g)} \neq 0$. Entonces por e) tenemos que, $Ker(g) = 0$, y así $Im(g) = M$.

$\boxed{f) \Rightarrow a)}$ Como $M \neq 0$ tenemos que para cada $N \in \mathscr{L}(M) - \{0\}$ la inclusión $i_N : N \longrightarrow M$ es morfismo y más aun $i_N \neq 0$. Entonces por f) se tiene que $N = Im(i_N) = M$ y así $\mathscr{L}(M) = \{0, M\}$. $\square$

Ej 18. Sea $M \in {}_R$Mod. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) M es finitamente generado.

(b) $\exists\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $f : \mathbb{R}^n \to M$ epimorfismo de R-módulos.

Demostración. Verifiquemos primero el siguiente lema:

Lema 2. Sea $M \in {}_R$Mod. Si $X \subseteq M$ entonces

$$\langle X \rangle_R = \begin{cases} \{0\} & , X = \varnothing \\ \{\sum_{i=1}^n r_i x_i \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ r_i \in R,\ x_i \in X\ \forall\ i \in [1, n]\} & , X \neq \varnothing \end{cases}$$

Demostración. El caso $X = \varnothing$ se verificó en el Ej. 15(a) (en el caso $I = \varnothing$). Supongamos que $X \neq \varnothing$.
Sea $S := \{\sum_{i=1}^n r_i x_i \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ r_i \in R,\ x_i \in X\ \forall\ i \in [1, n]\}$. $S \neq \varnothing$, pues $R \neq \varnothing \neq X$ y $S \subseteq M$, pues $M \in {}_R$Mod.
Sean $a, b \in S$. Existen $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $r_i, s_i \in R$, $x_i, y_i \in X$ tales que $a = \sum_{i=1}^n r_i x_i$ y $b = \sum_{i=1}^m s_i y_i$ y

$$t_i = \begin{cases} r_i & , i \in [1, n] \\ s_{i-n} & , i \in [n+1, n+m] \end{cases}$$
$$z_i = \begin{cases} r_i & , i \in [1, n] \\ s_{i-n} & , i \in [n+1, n+m] \end{cases} .$$

Entonces

$$\begin{aligned} a + b &= \sum_{i=1}^n r_i x_i + \sum_{i=1}^m s_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n+m} t_i z_i \\ &\Longrightarrow\ a + b \in S. \end{aligned}$$

Sea $r \in R$. Entonces

$$ra = r\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (rr_i)\, x_i$$

Si $u_i := rr_i$ entonces

$$ra = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \in S$$
$$\implies S \in \mathscr{L}(M).$$

Además, si $x \in X$ entonces $x = 1_R x \in S$, con lo cual $X \subseteq S$ y por lo tanto $\langle X \rangle_R \subseteq S$.
Por otro lado, si $Y \leq M$, $X \subseteq Y$, $r_i \in R, x_i \in X\ \forall\ i \in [1,n], n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in Y$$
$$\implies S \subseteq Y$$
$$\implies S \subseteq \langle X \rangle_R$$
$$\therefore S = \langle X \rangle_R.$$

$\square$

$\boxed{\implies}$ Existe $X \subseteq M$ finito tal que $M = \langle X \rangle_R$. Si $X = \varnothing$ entonces $M = \{0\}$ y en tal caso la aplicación

$$f : R \to M$$
$$r \mapsto 0$$

es un epimorfismo de R-módulos a izquierda.
Supongamos ahora que $X \neq \varnothing$. Entonces $\exists\ m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Consideremos la aplicación

$$f : R^m \to M$$
$$(r_i)_{i=1}^m \mapsto \sum_{i=1}^{m} r_i x_i.$$

Sean $r \in R$ y $(s_i)_{i=1}^m, (t_i)_{i=1}^m \in R^m$

$$\begin{aligned} f\left(r\left((s_i)_{i=1}^m + (t_i)_{i=1}^m\right)\right) &= f\left((rs_i + rt_i)_{i=1}^m\right) = \sum_{i=1}^{m} (rs_i + rt_i)\, x_i \\ &= \sum_{i=1}^{m}(rs_i)x_i + \sum_{i=1}^{m}(rt_i)x_i = r\left(\sum_{i=1}^{m} s_i x_i + \sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \\ &= r\left(f\left((s_i)_{i=1}^n\right) + f\left((t_i)_{i=1}^n\right)\right) \\ &\implies f \text{ es un morfismo de } R \text{ módulos a izquierda.} \end{aligned}$$

Notemos que por el Lema 2, dado que $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ y, $\forall\ m \in M$, $0_R m = 0$, se tiene que

$$\langle X \rangle_R = \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i x_i \,\middle|\, r_i \in R\ \forall\ i \in [1, n] \right\}.$$

Sea $y \in M = \langle X \rangle_R$. Por la observación anterior $\exists\ r_i \in R$ tales que $y = \sum_{i=1}^{m} x_i$, con lo cual, si $x := (r_i)_{i=1}^{m}$, $y = f(x)$. Por lo tanto f es un epimorfismo de R-módulos a izquierda.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Verifiquemos primero los siguientes resultados:

Lema 3. Sea $f : M \to N$ un morfismo de R-módulos a izquierda. Entonces $f(A) \in \mathscr{L}(N)$, $\forall\ A \in \mathscr{L}(M)$.

Demostración. Sea $A \in \mathscr{L}(M)$. Como $A \neq \varnothing$ entonces $f(A) \neq \varnothing$, además $f(A) \subseteq M$. Sean $r \in R$ y $x, y \in f(A)$. Existen $a, b \in A$ tales que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Así

$$\begin{aligned} rx + y = rf(x) + f(b) = f(rx + b) \qquad & f \in Hom_R(M, N) \\ f(rx + b) \in f(A) \qquad & A \in \mathscr{L}(M) \\ \Longrightarrow f(A) \in \mathscr{L}(N). \qquad & \end{aligned}$$

$\square$

Lema 4. Sea $f : M \to N$ un morfismo de R-módulos a izquierda. Entonces $f(\langle A \rangle_R) = \langle f(A) \rangle_R$, $\forall\ A \subseteq M$.

Demostración. Sea $A \subseteq M$. Como $A \subseteq \langle A \rangle_R$ entonces $f(A) \subseteq f(\langle A \rangle_R)$, de modo que, por el Lema 3, $f(\langle A \rangle_R)$ es un R-submódulo de N que contiene a $f(A)$ y por lo tanto $\langle f(A) \rangle_R \subseteq f(\langle A \rangle_R)$.
Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y, $\forall\ i \in [1, n], r_i \in R$ y $x_i \in A$. Así, como $f \in Hom_R(M, N)$,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i) \in \langle f(A) \rangle_R \\ &\Longrightarrow\ f(\langle A \rangle_R) \subseteq \langle f(A) \rangle_R \\ \therefore\ f(\langle A \rangle_R) &= \langle f(A) \rangle_R. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 5. Sea $f : M \to N$ un epimorfismo de R-módulos a izquierda. Si $M \in {}_R\text{mod}$ entonces $N \in {}_R\text{mod}$.

Demostración. Como $M \in {}_R\text{mod}$ $\exists\ X \subseteq M$ finito tal que $M = \langle X \rangle_R$ y así

$$\begin{aligned} N &= f(M) \qquad && f \text{ es sobre} \\ &= f(\langle X \rangle_R) = \langle f(X) \rangle_R \qquad && \text{Lema 4} \end{aligned}$$

Y como $|f(X)| \leq |X|$ entonces $f(X)$ es finito. Por lo tanto $N \in {}_R\text{mod}$.

$\square$

Así, como $\exists\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $f : R^n \to M$ epimorfismo de R-módulos a izquierda, por el Lema 5 basta verificar que $R^n \in {}_R\text{mod}$.
Sean $e_j := \left(u_i^j\right)_{i=1}^n \in R^n$, donde

$$u_i^j = \begin{cases} 0_R & , i \neq j \\ 1_R & , i = j \end{cases},$$

$\forall\ j \in [1, n]$, y $E := \{e_1, \ldots, e_n\}$. Así si $(r_i)_{i=1}^n \in R^n$, entonces $(r_i)_{i=1}^n = \sum_{i=1}^n r_i e_i$, con lo cual $R^n = \langle E \rangle_R$. Por lo tanto $R^n \in {}_R\text{mod}$.

$\square$

Ej 19. Pruebe que todo anillo no trivial R admite R-módulos simples a izquierda (y a derecha también).

Demostración. Observe que R es finitamente generado como R-módulo, de hecho $R = \langle 1 \rangle$. Entonces, por el **teorema 1.8.1**, R tiene ideales máximos. Sea I un ideal izquierdo máximo de R. Por el **Ejercicio 16**, R/I es un R-módulo simple. De manera análoga, Mod_R posee R-módulos derechos simples.

$\square$

Ej 20. Para una K-álgebra R, defina de manera natural una estructura de K-módulo (a izquierda y a derecha) en $Hom_R(M, N) \quad \forall M, N \in Mod(R)$.

Demostración. Sean M y N R-módulos a izquierda y (R, K, φ) una K-álgebra. Para toda $k \in K,\ f \in Hom_R(M, N),\ l \in R$ y $m \in M$, definiremos $\alpha : K \times Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_R(M, N)$ dada por

$$\alpha(k, f)(\varphi)(lm) = k \cdot l(\varphi)(lm) := l * (\varphi(k) * f(m)),$$

donde $\cdot$ es la acción a izquierda de N como R-módulo.
Así
$\boxed{AC1}$

$$\begin{aligned}(k \cdot (f_1 + f_2))(lm) &= l * (\varphi(k) * (f_1 + f_2)(m)) \\ &= l * (\varphi(k) * (f_1)(m) + \varphi(k) * (f_2)(m)) \\ &= l * (\varphi(k) * (f_1)(m)) + l * (\varphi(k) * (f_2)(m)) \\ &= k \cdot (f_1)(lm) + k \cdot (f_2)(lm).\end{aligned}$$

$\boxed{AC2}$

$$\begin{aligned}((k_1 + k_2) \cdot (f))(lm) &= l * (\varphi(k_1 + k_2) * f(m)) \\ &= l * (\varphi(k_1) * f(m) + \varphi(k_2) * f(m)) \\ &= l * (\varphi(k_1) * f(m)) + l * (\varphi(k_2) * f(m)) \\ &= k_1 \cdot f(lm) + k_2 \cdot f(lm).\end{aligned}$$

$\boxed{AC3}$

$$\begin{aligned}(1_K \cdot f)(lm) &= l * (\varphi(1_K) * f(m))\\ &= l * (1_R * f(m))\\ &= l * (f(m))\\ &= f(lm).\end{aligned}$$

$\boxed{AC4}$

$$\begin{aligned}((k_1k_2) \cdot f)(lm) =& l * (\varphi(k_1k_2) * f(m))\\ &= l * (\varphi(k_1)\varphi(k_2) * f(m))\\ &= l * (\varphi(k_1) * (\varphi(k_2) * f(m)))\\ &= l * [\varphi(k_1) * (k_2 \cdot f)(m)]\\ &= (k_1 \cdot (k_2 \cdot f))(lm).\end{aligned}$$

Entonces $\cdot$ es una acción a izquierda de R-módulos.

Por el ejercicio 8, se tiene que si M y N son R-módulos derechos entonces son R^{op} módulos izquierdos.Asi $\cdot$ es una acción para $Hom_{R^{op}}(M, N)$ y por el ejercicio 8, $\cdot^{op}$ es una acción que vuelve a $Hom_R(M, N)$ un módulo derecho.

□

Ej 21. Sean R y S anillos.

(a) Sean

$$\begin{aligned}Obj\,(\mathcal{C}) &:= \text{Mod}_{R-S},\\ Hom\,(\mathcal{C}) &:= \bigcup_{(M,N)\in Obj(\mathcal{C})^2} Hom\,(M_{R-S}, N_{R-S})\,,\end{aligned}$$

con

$$Hom\,(M_{R-S}, N_{R-S}) := Hom_R\,(M_R, N_R) \cap Hom_S\,(M_S, N_S)\,,$$

y $\circ$ la composición usual de funciones.
Entonces la clase Mod_{R-S} tiene estructura de categoría por medio de la tercia $(Obj\,(\mathcal{C})\,, Hom\,(\mathcal{C})\,, \circ)$.

(b) ${}_R\text{Mod}_S \simeq \text{Mod}_{R^{op}-S}$, ${}_R\text{Mod}_S \simeq {}_{R-S^{op}}\text{Mod}$ y ${}_{R-S}\text{Mod} \simeq {}_R\text{Mod}_{S^{op}}$.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Si $M, N \in \text{Mod}_{R-S}$, entonces M y N son conjuntos, con lo cual

$$N^M := \{f : M \to N \mid f \text{ es una función}\}$$

es un conjunto y así $Hom_R(M_R, N_R)$ es un conjunto, pues

$$Hom_R(M_R, N_R) \subseteq B^A.$$

Similarmente se encuentra que $Hom_S(M_S, N_S)$ es un conjunto, y así $Hom(M_{R-S}, N_{R-S})$ es un conjunto $\forall\ M, N \in \mathrm{Mod}_{R-S}$. Además por definición $Hom(\mathcal{C}) = \bigcup_{(M,N)\in Obj(\mathcal{C})^2} Hom(M_{R-S}, N_{R-S})$, con lo cual se satisface (P1).

Recordemos que, si W, X, Y, Z son conjuntos y $f : W \to X, g : Y \to Z$ son funciones entonces $f = g$ si y sólo si $W = Y$, $X = Z$ y $f(w) = g(w)\ \forall\ w \in W$. Con lo cual si $(M, N) \neq (O, P)$ entonces $N^M \cap P^O = \varnothing$ y por lo tanto $Hom(M_{R-S}, N_{R-S}) \cap Hom(O_{R-S}, P_{R-S}) = \varnothing$. Por lo tanto se satisface (P2).

Finalmente para verificar que (P3) se satisface, dado que la composición usual de funciones es asociativa y claramente $Id_X \in Hom(M_{R-S}, M_{R-S})$ $\forall\ M \in \mathrm{Mod}_{R-S}$, basta probar que si $f \in Hom_R(N, O)\,, g \in Hom_R(M, N)$ entonces $f \circ g \in Hom_R(M, O)$; ya que en tal caso se tiene que la composición usual de funciones se restringe a una función asociativa

$$\circ : Hom(N_{R-S}, O_{R-S}) \times Hom(M_{R-S}, N_{R-S}) \to Hom(M_{R-S}, O_{R-S})$$

que admite identidades.

Sean $f \in Hom_R(N, O)]$ y $g \in Hom_R(M, N)$. En partícular $f : N \to O$ y $g : M \to N$ son morfismos de grupo abelianos, con lo cual $f \circ g$ es un morfismo de grupos abelianos. Sean $r \in R$ y $m \in M$, así

$$\begin{aligned} f \circ g(rm) &= f(g(rm)) = f(rg(m)) = rf(g(m)) \\ &= r(f \circ g(m))\,. \\ \Longrightarrow f \circ g &\in Hom_R(M, O)\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(b)}}$ Recordemos que, por el Ej. 8, $(M, \bullet) \in {}_RM$ si y sólo si $(M, \bullet^{op}) \in M_{R^{op}}$ (en adelante no haremos mención explícita de $\bullet$ y $\bullet^{op}$). Por lo cual, si $r \in R, s \in S$ y $m \in M$,

$$r(ms) = (rm)s \iff (ms)r^{op} = (mr^{op})s \tag{$*$}$$

y así

$$M \in {}_R\mathrm{Mod}_S \iff M \in \mathrm{Mod}_{R^{op}-S}. \tag{I}$$

Más aún, si $f : M \to N$ es un morfismo de grupos abelianos, entonces

$$\begin{aligned} f(r(ms)) = r(f(m)s) \iff f((ms)r^{op}) = (f(m)s)\,r^{op}, \\ \forall\ r \in R, \forall\ s \in S, \forall\ m \in M. \end{aligned}$$

De modo que, considerando el caso partícular $s = 1_S$, se tiene que

$$\begin{aligned} f \in Hom_R({}_RM, {}_RN) &\iff f \in Hom_{R^{op}}(M_{R^{op}}, N_{R^{op}}) \\ \therefore\ f \in Hom({}_RM_S, {}_RN_S) &\iff f \in Hom(M_{R^{op}-S}, N_{R^{op}-S})\,. \end{aligned} \tag{II}$$

De (I) y (II) se sigue que la correspondencia de categorías

$$\begin{aligned} {}_R\mathrm{Mod}_S &\xrightarrow{\quad F_1 \quad} \mathrm{Mod}_{R^{op}-S} \\ {}_RM_S \xrightarrow{f} {}_RN_S &\longmapsto M_{R^{op}-S} \xrightarrow{f} N_{R^{op}-S} \end{aligned}$$

está bien definida y, más aún, por construcción $F\left(Id_M\right) = Id_{F(M)}$, $\forall M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$.
Sean $M \xrightarrow{f} N, N \xrightarrow{g} O \in {}_R\mathrm{Mod}_S$, entonces

$$F\left(g \circ f\right) = g \circ f = F(g) \circ F(f)$$
$$\therefore\ F \text{ es un funtor.}$$

Empleando que $\left(R^{op}\right)^{op} = R$ en conjunto a los puntos $(*)$, (I) y (II), se tiene que la correspondencia de categorías

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}_{R^{op}-S} &\xrightarrow{\quad G_1 \quad} {}_R\mathrm{Mod}_S \\ M_{R^{op}-S} \xrightarrow{g} N_{R^{op}-S} &\longmapsto {}_RM_S \xrightarrow{g} {}_RN_S \end{aligned}$$

es un funtor que satisface $G_1F_1 = 1_{{}_R\mathrm{Mod}_S}$ y $F_1G_1 = 1_{\mathrm{Mod}_{R^{op}-S}}$, y por lo tanto ${}_R\mathrm{Mod}_S \simeq \mathrm{Mod}_{R^{op}-S}$.
Aplicando ahora el Ej. 8 al anillo S, por medio de un procedimiento análogo a lo previamente desarrollado, se verifica que $M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$ si y sólo si $M \in {}_{R-S^{op}}\mathrm{Mod}$, y que $f \in Hom\left({}_RM_S, {}_RN_S\right)$ si y sólo si $f \in Hom\left({}_{R^{op}-S}M, {}_{R^{op}-S}N\right)$. De modo que

$$\begin{aligned} {}_R\mathrm{Mod}_S &\xrightarrow{\quad F_2 \quad} {}_{R-S^{op}}\mathrm{Mod} \\ {}_RM_S \xrightarrow{f} {}_RN_S &\longmapsto {}_{R-S^{op}}M \xrightarrow{f} {}_{R-S^{op}}N \end{aligned}$$

es un isomorfismo de categorías, con inversa

$$\begin{aligned} {}_{R-S^{op}}\mathrm{Mod} &\xrightarrow{\quad G_2 \quad} {}_R\mathrm{Mod}_S \\ {}_{R-S^{op}}M \xrightarrow{g} {}_{R-S^{op}}N &\longmapsto {}_RM_S \xrightarrow{g} {}_RN_S. \end{aligned}$$

Finalmente empleando, el Ej. 12 y un procedimiento análogo al previamente desarrollado se verifica que $M \in {}_{R-S}\mathrm{Mod}$ si y sólo si $M \in {}_R\mathrm{Mod}_{S^{op}}$, y que $f \in Hom\left({}_{R-S}M, {}_{R-S}N\right)$ si y sólo si $f \in Hom\left({}_RM_{S^{op}}, {}_RN_{S^{op}}\right)$; y así

$$\begin{aligned} {}_{R-S}\mathrm{Mod} &\xrightarrow{\quad F_3 \quad} {}_R\mathrm{Mod}_{S^{op}} \\ {}_{R-S}M \xrightarrow{f} {}_{R-S}N &\longmapsto {}_RM_{S^{op}} \xrightarrow{f} {}_RN_{S^{op}} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de categorías, con inversa

$$
\begin{array}{ccc}
{}_{R-S^{op}}\mathrm{Mod} & \xrightarrow{\quad G_3 \quad} & {}_R\mathrm{Mod}_S \\
{}_{R-S^{op}}M \xrightarrow{g} {}_{R-S^{op}}N & \longmapsto & {}_RM_S \xrightarrow{g} {}_RN_S.
\end{array}
$$

□

Ej 22. Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos. Pruebe que:

a) La correspondencia de cambio de anillos $F_\varphi : Mod\,(S) \longrightarrow Mod\,(R)$ es un funtor.

b) Para cualesquiera $M, N \in Mod\,(S)$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
Hom_S\,(M, N) &\leq Hom_R\,(F_\varphi\,(M)\,, F_\varphi\,(N)) \\
&= Hom_{\varphi(R)}\,(F_\varphi\,(M)\,, F_\varphi\,(N)) \\
&\leq Hom_{\mathbb{Z}}\,(M, N)
\end{aligned}
$$

como grupos abelianos. En particular, F_φ es fiel y éste es pleno si $\varphi\,(R) = S$.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Primero, por la propia correspondencia, a todo S-módulo M se le asigna un R-módulo $F_\varphi\,(M) = M$. En vista de lo anterior, bastará probar que $F_\varphi\,(f) = f \in Hom_R\,(F_\varphi\,(M)\,, F_\varphi\,(N))$, para $f \in Hom_S\,(M, N)$ y $M, N \in Mod\,(S)$; y que $F_\varphi\,(fg) = F_\varphi\,(f)\,F_\varphi\,(g)$, para $f, g \in Hom_S\,(M, N)$.

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de S-módulos. Ahora, dados $r \in R$ y $m, n \in M$, se satisface que

$$
\begin{aligned}
F_\varphi\,(f)\,(r \cdot m + n) &= f\,(\varphi\,(r) * m + n) \\
&= \varphi\,(r) * f\,(m) + f\,(n) \\
&= r \cdot f\,(m) + f\,(n) \\
&= r \cdot F_\varphi\,(f)\,(m) + F_\varphi\,(f)\,(n)
\end{aligned}
$$

Con lo cual, $F_\varphi\,(f)$ es un morfismo de R-módulos.

Por otro lado, sean $f, g : M \longrightarrow N$ morfismos de S-módulos y $x \in M$. Entonces se tiene que

$$F_\varphi\,(fg)\,(x) = (fg)\,(x) = f\,(g\,(x)) = F_\varphi\,(f)\,F_\varphi\,(g)\,(x)$$

Por tanto, $F_\varphi\,(fg) = F_\varphi\,(f)\,F_\varphi\,(g)$ $\therefore F_\varphi$ es un funtor.

$\boxed{\text{(b)}}$ Note que, por el inciso anterior, todo morfismo de S-módulos es un morfismo de R-módulos. Más aún, como todo R-módulo es un grupo abeliano y como todo morfismo de R-módulos preserva sumas, se tiene que

$Hom_S(M,N) \leq Hom_R(F_\varphi(M), F_\varphi(N))\, Hom_{\varphi(R)}(F_\varphi(M), F_\varphi(N))$ y que $Hom_R(F_\varphi(M), F_\varphi(N)) \leq Hom_{\mathbb{Z}}(M,N)$.

Por otra parte, F_φ es fiel, toda vez que a cualesquiera 2 morfismos $f \neq g$ se le asignan morfismos $F_\varphi(f) = f \neq g = F_\varphi(g)$. Por otro lado, suponga que $\varphi(R) = S$. Dado $f \in Hom_R(M,N)$, éste es un morfismo de S-módulos. En efecto, si $s \in S$, entonces $s = \varphi(r)$, para alguna $r \in R$. De esta forma, definimos $f(s * m)$ como $f(s*m) = f(rm)$, e inclusive tenemos $F_{\varphi^{-1}}(f) = f$. $\therefore F_\varphi$ es pleno.

$\square$

Ej 23. Sea R un anillo e $I \lhd R$. Considere el epimorfismo canónico de anillos $\pi : R \longrightarrow R/I$, $r \mapsto r + I$.

a) Pruebe que el funtor de cambio de anillos $F_\pi : Mod\left(R/I\right) \longrightarrow Mod(R)$ es fiel y pleno.

b) Sea ζ_I la subcategoría plena de $Mod(R)$ cuyos objetos son los $M \in Mod(R)$ que son aniquilados por I, i.e.

$$M \in \zeta_I \iff I \subseteq ann_R(M) := \{r \in R : rm = 0\ \forall m \in M\}.$$

Pruebe que $F_\pi\left(Mod\left(R/I\right)\right) = \zeta_I$ y que $F_\pi : Mod\left(R/I\right) \longrightarrow \zeta_I$ es un isomorfismo de categorías.

Demostración. $\boxed{a)}$ Sean $A, B \in Mod(R)$. Por el ejercicio 22 a), F es un funtor, y como $\pi(R) = R/I$, entonces por el ejercicio 22 b), F_π es fiel y pleno.

$\boxed{b)}$ Sea $A \in Mod\left(R/I\right)$, entonces tenemos que $F_\pi(A) \in Mod(R)$. Ahora, si $m \in F_\pi(A)$, entonces para cada $x \in I$, $x \cdot m = \pi(X) * m = 0 * m = 0$, donde $\cdot$ y $*$ son las acciones definidas en A y $F_\pi(A)$ respectivamente.
Por lo tanto $I \subseteq ann_R(M)$ y $F_\pi(A) \in \zeta_I$.

Ahora, sea $A \in \zeta_I$, entonces $I \subseteq ann_R(A) := \{r \in R : rm = 0\ \forall m \in A\}$, en particular $A \in Mod(R)$, así definimos la función $* : R/I \times A \longrightarrow A$ dada por $[r] * m = (r + I) * m := r \cdot m + I \cdot m$ donde $\cdot$ es la acción de A como R-módulo, y se tiene que, como $I \cdot m = \{im : i \in I, m \in A\}$ y $A \in \zeta_I$, $I \cdot m = \{0\}$.

Por lo tanto, si $r, s \in [x]$ con $r = x + k_1$ y $s = x + k_2$, entonces $r*m = s*m$, en particular $[r] * m = r \cdot m\ \forall r \in R$, es decir, $*$ es una acción de A (bien definida) como R/I -módulo, es un R-módulo y $[r] * m = r \cdot m\ \forall r \in R$, es decir, $A \in F_\pi\left(Mod\left(R/I\right)\right)$. Y en consecuencia $Mod\left(R/I\right) = \zeta_I$

Con esto podemos ver que $F_\pi : Mod\left(R/I\right) \longrightarrow \zeta_I$ es funtor, y más aun, definiendo $G_\pi : \zeta_I \longrightarrow Mod\left(R/I\right)$ dado por $G_\pi(M) = M$ para cada $M \in \zeta_I$ y $G_\pi(f)([r] *_M m) = [r] *_N f(m)$ para cada $f \in Hom(M, N)$ donde $*$ es la acción a izquierda de M como R/I -módulo, es un funtor pues $G_\pi(1_M)([r]*_M m) = [r]*_M m = 1_M([r]*_M m)$ y para $f \in Hom_R(M, N), g \in Hom_R(N, L)$

$$\begin{aligned} G_\pi(gf)([r] *_M m) =& [r] *_L gf(m) = G_\pi(g)\left([r] *_N f(m)\right) \\ &= \left(G_\pi(g) \circ G_\pi(f)\right)([r] *_M m). \end{aligned}$$

Así $F_\pi \circ G_\pi(A) = A = G_\pi \circ F_\pi(A) \quad \forall A \in Mod\left(R/I\right) = \zeta_I$, y cumple las siguientes condiciones

i) $F_\pi \circ G_\pi(1_A) = F_\pi(1_A) = 1_A = G_\pi(1_A) = G_\pi \circ F_\pi(1_A)$.

ii) Considerando a $\cdot$ y $*$ como las acciones a izquierda como R -módulo y R/I -módulo respectivamente. Para cualquier $r \in R, m \in M$, $f \in Hom_R(M, N)$ y $g \in Hom_{R/I}(M, N)$, se tiene lo siguiente.

$$(F\pi \circ G_\pi(f))\,(r\cdot_M m) = [r]*_N G_\pi(f)(m) = [r]*_N f(m) = r\cdot_N f(m) = f(r\cdot_M m).$$

$$(G\pi \circ F_\pi(g))\,([r]*_M m) = r\cdot_N F_\pi(g)(m) = r\cdot_N g(m) = [r]*_N g(m) = g([r]*_M m).$$

Por lo tanto $F\pi \circ G_\pi(f) = 1_{\zeta_I}$ y $G\pi \circ F_\pi(g) = 1_{Mod\left(R/I\right)}$, es decir, F_π es un isomorfismo de categorías. □

Ej 24. Sean R, S y T anillos.

(a) Sean $M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$, $N \in {}_R\mathrm{Mod}_T$, $H := Hom_R\left({}_RM_S, {}_RN_T\right)$ y las siguientes aplicaciones, denotadas por medio del mismo simbolo para simplificar la notación,

$$\begin{aligned} \bullet : S \times H &\to H \\ (s, f) &\mapsto s \bullet f, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} s \bullet f : M &\to N \\ x &\mapsto f(xs); \\ \bullet : H \times T &\to H \\ (f, t) &\mapsto f \bullet t, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} f \bullet t : M &\to N \\ x &\mapsto f(x)t. \end{aligned}$$

A través de las aplicaciones anteriores $H \in {}_S\text{Mod}_T$.

(b) Sean $M \in {}_S\text{Mod}_R$, $N \in {}_T\text{Mod}_R$, $H' := Hom_R\left({}_SM_R, {}_TN_R\right)$ y las siguientes aplicaciones, denotadas por medio del mismo simbolo para simplificar la notación,

$$\begin{aligned} \bullet : T \times H &\to H \\ (t, f) &\mapsto t \bullet f, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} t \bullet f : M &\to N \\ x &\mapsto tf(x); \\ \bullet : H \times S &\to H \\ (f, s) &\mapsto f \bullet s, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} f \bullet s : M &\to N \\ x &\mapsto f(sx). \end{aligned}$$

A través de las aplicaciones anteriores $H \in {}_T\text{Mod}_S$.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Notemos primeramente que $G := Hom\,(M, N)$ es un grupo con la suma usual de funciones, pues M y N lo son con sus respectivas operaciones, y que, si $f, g \in H$, $r \in R$ y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned} (f - g)\,(rm) &= f(rm) - g(rm) = rf(m) - rg(m) = r\left(f(m) - g(m)\right) \\ &= r\left((f - g)\,(m)\right). \\ &\implies f - g \in H \\ &\implies H \leq G. \end{aligned}$$

Así, en partícular, H es un grupo abeliano. Verifiquemos ahora que por medio de la primera aplicación $H \in {}_S\text{Mod}$. Sean $f, g \in H, s, s' \in S$ y

$m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
((s+s')\bullet f)(m) &= f(m(s+s')) \\
&= f(ms+ms') && M \in \mathrm{Mod}_S \\
&= f(ms)+f(ms') && f \in Hom(M,N) \\
&= s \bullet f(m) + s' \bullet f(m) \\
&= (s \bullet f + s' \bullet f)(m). \\
\Longrightarrow \ (s+s')\bullet f &= s\bullet f + s'\bullet f. \\
(s\bullet (f+g))(m) &= (f+g)(ms) \\
&= f(ms)+g(ms) \\
&= s\bullet f(m) + s\bullet g(m) \\
&= (s\bullet f + s\bullet g)(m). \\
\Longrightarrow \ s\bullet (f+g) &= s\bullet f + s\bullet g. \\
(s\bullet (s'\bullet f))(m) &= (s'\bullet f)\{ms\} \\
&= f((ms)s') \\
&= f(m(ss')) && M \in \mathrm{Mod}_S \\
&= ((ss')\bullet f)(m). \\
\Longrightarrow \ s\bullet (s'\bullet f) &= (ss')\bullet f. \\
(1_S \bullet f)(m) &= f(m1_s) \\
&= f(m) && M \in \mathrm{Mod}_S. \\
\Longrightarrow \ 1_S\bullet f &= f. \\
&\therefore \ H \in {}_S\mathrm{Mod}.
\end{aligned}$$

Verifiquemos ahora que por medio de la segunda aplicación $H \in \mathrm{Mod}_T$.

Sean $f, g \in H, t, t' \in S$ y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
((f+g)\bullet t)(m) &= ((f+g)(m))\,t \\
&= (f(m)+g(m))\,t \\
&= f(m)t + g(m)t && N \in \mathrm{Mod}_T \\
&= f \bullet t(m) + g \bullet t(m) \\
&= ((f+g)\bullet t)(m). \\
\implies (f+g)\bullet t &= (f+g)\bullet t. \\
(f \bullet (t+t'))(m) &= f(m)\,(t+t') \\
&= f(m)t + f(m)t' \\
&= f \bullet t(m) + f \bullet t'(m) \\
&= (f \bullet t + f \bullet t')\,(m). \\
\implies f \bullet (t+t') &= f \bullet t + f \bullet t'. \\
((f \bullet t)\bullet t')(m) &= ((f \bullet t)(m))\,t' \\
&= (f(m)t)\,t' \\
&= f(m)\,(tt') && N \in \mathrm{Mod}_T \\
&= (f \bullet (tt'))\,(m). \\
\implies (f \bullet t)\bullet t' &= f \bullet (tt')\,. \\
(f \bullet 1_T)(m) &= f(m)1_T \\
&= f(m) && N \in \mathrm{Mod}_T. \\
\implies f \bullet 1_T &= f. \\
&\therefore\ H \in \mathrm{Mod}_T.
\end{aligned}$$

Así

$$H \in {}_S\mathrm{Mod} \cap \mathrm{Mod}_T.$$

Finalmente, notemos que

$$\begin{aligned}
((s \bullet f)\bullet t)(m) &= ((s \bullet f)(m))\,t \\
&= f(ms)t \\
&= (f \bullet t)(ms) \\
&= (s \bullet (f \bullet t))(m). \\
\implies (s \bullet f)\bullet t &= s \bullet (f \bullet t)\,. \\
&\therefore\ H \in {}_S\mathrm{Mod}_T.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{(b)}}$ Es análogo a lo demostrado en (a), empleando ahora las propiedades de los morfismos de R-módulos a derecha para verificar que H' es un grupo abeliano con la suma usual de funciones, y que $M \in {}_S\mathrm{Mod}, N \in {}_T\mathrm{Mod}$ para verificar que $H \in {}_T\mathrm{Mod}_S$. $\square$

Ej 25. Sean R y S anillos, y $M \in {}_RMod_S$. Pruebe que:

a) $\rho :_R M_S \longrightarrow Hom_R\left({}_RR_R,{}_R M_S\right)$, con $\rho\left(m\right)\left(r\right) = rm$, es un isomorfismo en ${}_RMod_S$

b) $\lambda :_R M_S \longrightarrow Hom_S\left({}_SS_S,{}_R M_S\right)$, con $\lambda\left(m\right)\left(s\right) = ms$, es un isomorfismo en ${}_RMod_S$

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Sea $m \in M$. Probaremos que $\rho\left(m\right)$ un morfismo de R-S-bimódulos. Considere $r, t \in R$, en virtud de que M es un R-módulo a izquierda, se tiene que

$$\begin{aligned}\rho\left(m\right)\left(r+t\right) &= \left(r+t\right)m\\ &= rm + tm\\ &= \rho\left(m\right)\left(r\right) + \rho\left(m\right)\left(t\right).\end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned}\rho\left(m\right)\left(rt\right) &= \left(rt\right)m\\ &= r\left(tm\right)\\ &= r\rho\left(m\right)\left(t\right).\end{aligned}$$

Por tanto, $\rho \in Hom_R\left({}_RR_R,{}_R M_S\right)$.

Además, ρ es un morfismo de R-módulos a izquierda. En efecto, si $a, b \in R$ y $x, y \in M$, entonces

$$\begin{aligned}\rho\left(x+y\right)\left(a\right) &= a\left(x+y\right)\\ &= ax + ay\\ &= \rho\left(x\right)\left(a\right) + \rho\left(y\right)\left(a\right).\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}\rho\left(x\right)\left(ab\right) &= \left(ab\right)x\\ &= a\left(bx\right)\\ &= a\rho\left(bx\right).\end{aligned}$$

Posteriormente, si $m \in Ker\left(\rho\right)$, entonces $\rho\left(m\right) = 0$. De esta forma, $rm = 0$, para cualquier $r \in R$. Como M es unitario, el único de sus elementos que es anulado por cada elemento de R es el 0; en este sentido, $Ker\left(\rho\right) = 0$. Por consiguiente, ρ es monomorfismo.

Finalmente, sea $g \in Hom_R\left(R, M\right)$. Si consideramos $g\left(1\right)$, se satisface que $\rho\left(g\left(1\right)\right) = g$. $\therefore$ ρ es isomorfismo.

$\boxed{\text{(b)}}$ De manera análoga al inciso anterior, podemos probar este inciso, por lo cual nos centraremos más en las cuentas. Bajo este contexto, tenemos que:

- Sean $m \in M$ y $s, u \in S$.

$$\begin{aligned}\rho\left(m\right)\left(su\right) &= m\left(su\right)\\ &= \left(ms\right)u\\ &= \rho\left(m\right)\left(s\right)u\end{aligned}$$

- Sean $m, n \in M$ y $s \in S$.

$$\begin{aligned}\rho\left(m+n\right)\left(s\right) &= \left(m+n\right)s\\ &= ms+ns\\ &= \rho\left(m\right)\left(s\right)+\rho\left(n\right)\left(s\right)\end{aligned}$$

- Sean $m \in M$ y $s, u \in S$

$$\begin{aligned}\rho\left(m\right)\left(su\right) &= m\left(su\right)\\ &= \left(ms\right)u\\ &= \rho\left(m\right)\left(s\right)u\end{aligned}$$

Así mismo, ρ es un isomorfismo. En efecto, si $x \in Ker\left(\rho\right)$, entonces $\rho\left(x\right) = 0$; de donde $x = 0$. Más aún, si $g \in Hom_S\left(S, M\right)$, entonces $\rho\left(g\left(1\right)\right) = g$. $\therefore$ ρ es un isomorfismo.

$\square$

Ej 26. Sea R un anillo y $e^2 = e \in R$, un idempotente en R.

a) Pruebe que la estructura de anillo en R induce, de manera natural, una estructura de anillo en $eRe := \{ere : r \in R\}$. ¿Es eRe un subanilo de R?

b) Para cada $M \in Mod(R)$, pruebe que la acción a izquierda $eRe \times eM \longrightarrow eM, \quad (ere, em) \mapsto erem$ induce una estructura de eRe-módulo a izquierda en eM.

c) Pruebe que la correspondencia $m_e : Mod(R) \longrightarrow Mod(eRe)$, dada por $\left(M \xrightarrow{f} N\right) \longmapsto \left(eM \xrightarrow{f|_{eM}} eN\right)$, es funtorial.

Demostración. $\boxed{a)}$ Como R es anillo, se tienen los siguientes resultados: $\forall a, b \in R$

$$eae - ebe = e(ae - be) = e(a-b)e \in eRe$$

(por lo que eRe es subgrupo abeliano bajo la suma),

$$(eae)(ebe) = eae^2be = e(aeb)e \in eRe$$

y

$$e(eae) = e^2ae = eae = eae^2 = (eae)e.$$

Por lo tanto R es un anillo con e su inverso, y por esto mismo no puede ser subanillo de R exepto en el caso en que $e = 1_R$.

$\boxed{b)}$ Observemos que $\forall a \in eM$ y $\forall s \in eRe$.

$$a = em \quad \text{y} \quad s = ere \quad \text{para alguna} \quad m \in M \quad \text{y} \quad r \in R,$$

así, llamando $*$ a la acción que definida como $(ere, em) \mapsto erem$, entonces

$$s * a = (ere)(em) = erem = ere^2m = (ere)(em).$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
(er_1e + er_2e) * (em) &= (er_1e + er_2e)(em) \\
&= er_1eem + er_2eem \\
&= (er_1e) * (em) + (er_2e) * (em). \\
(ere) * (em_1 + em_2) &= (ere)(em_1 + em_2) \\
&= ereem_1 + ereem_2 \\
&= (ere) * (em_1) + (ere) * (em_2). \\
1_{eRe} * (em) &= e(em) = e^2m = em.
\end{aligned}$$

$$[(er_1e)(er_2e)] * (em) = [(er_1e)(er_2e)](em) = er_1eer_2eem.$$

Por otro lado

$$(er_1e) * [(er_2e) * (em)] = (er_1e) * (er_2eem) = er_1eer_2eem.$$

Así $*$ es una acción de módulos.

$\boxed{c)}$ Para que la correspondencia sea funtorial debe preservar identidades y composición de morfismos, es decir:

$\boxed{i)}$ $m_e(1_M) = 1_{me(M)}$.
$\boxed{ii)}$ Si $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$, se tiene que $m_e(gf) = m_e(g) \circ m_e(f)$.

Sea $m \in M$ entonces

$\boxed{i)}$ $m_e(1_M)(em) = 1_M|_{eM}(em) = em$, entonces $m_e(1_M) = 1_{e_m(M)} = 1_{eM}$.

$$\begin{aligned}
\boxed{ii)}\ m_e(gf)(em) &= (gf)|_{eM}(em) = gf(em) = g(f(em)) = g(f|_{eM}(em)) \\
&= g(f|_{eM}(em)) = g|_{eM}(f|_{eM}(em)) \\
&= (g|_{eM} \circ f|_{eM})(em).
\end{aligned}$$

$\square$

Ej 27. Sean R y S anillos, $e \in R$ y $\epsilon \in S$ idempotentes, $M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$, $R' := eRe$ y $S' := \epsilon S \epsilon$. Entonces:

(a) existen acciones tales que $Re \in {}_R\mathrm{Mod}_{R'}$, $\epsilon S \in {}_{S'}\mathrm{Mod}_S$, $eM \in {}_{R'}\mathrm{Mod}_S$ y $M\epsilon \in {}_R\mathrm{Mod}_{S'}$;

(b) las siguientes aplicaciones son morfismos de bimódulos

(i)

$$\begin{aligned} \rho : {}_{R'}eM_S &\to Hom_R\left({}_RRe_{R'}, {}_RM_S\right) \\ em &\mapsto \rho(em), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \rho\left(em\right) : {}_RRe_{R'} &\to {}_RM_S \\ re &\mapsto \left(re\right)m; \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \lambda : {}_RM\epsilon_{S'} &\to Hom_S\left({}_{S'}\epsilon S_S, {}_RM_S\right) \\ m\epsilon &\mapsto \lambda(m\epsilon), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \lambda\left(m\epsilon\right) : {}_{S'}\epsilon S_S &\to {}_RM_S \\ \epsilon s &\mapsto m\epsilon s; \end{aligned}$$

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Por el Ej. 26 R' y S' son anillos. Además, notemos que $R \in {}_R\mathrm{Mod}_R$, a través de las acciones naturales inducidas por el producto en R. Así pues, si se considera $M = R = S$ y $e = \epsilon$, se tiene que $Re \in {}_R\mathrm{Mod}_{R'}$ como consecuencia de que $M\epsilon \in {}_R\mathrm{Mod}_{S'}$; similarmente $\epsilon S \in {}_{S'}\mathrm{Mod}_S$ se sigue de que $eM \in {}_{R'}\mathrm{Mod}_S$.
Sea $s \in S$. Notemos que

$$\begin{aligned} ms + (-m)s = \left(m - m\right)s = 0_M s = 0_M. \\ \implies -\left(ms\right) = (-m)s. \end{aligned}$$

Por lo anterior, si $ms \in Ms$ entonces $-(ms) \in Ms$. Además, si $m's \in Ms$,

$$\begin{aligned} ms + m's = \left(m + m'\right)s \in Ms. \\ \implies Ms \leq M. \end{aligned}$$

Así, en partícular $M\epsilon$ es un grupo abeliano.
Consideremos las siguientes aplicaciones, denotadas por medio del mismo

simbolo para simplificar la notación e inducidas a partir de las acciones como R-izquierdo S-derecho bimódulo en M,

$$\begin{aligned} * : R \times M\epsilon &\to M\epsilon \\ (r, m\epsilon) &\mapsto rm\epsilon, \\ * : M\epsilon \times S' &\to M\epsilon \\ (m\epsilon, \epsilon s\epsilon) &\mapsto m\epsilon s\epsilon. \end{aligned}$$

Sean $m, m' \in M$, $r, r' \in R$. Entonces

$$\begin{aligned} (r + r') * m\epsilon &= (r + r')\, m\epsilon = (rm + r'm)\, \epsilon = rm\epsilon + r'm\epsilon \\ &= r * m\epsilon + r' * m\epsilon. \\ r * (m\epsilon + m'\epsilon) &= r * (m + m')\, \epsilon = (r\,(m + m'))\, \epsilon = rm\epsilon + rm'\epsilon \\ &= r * m\epsilon + r * m'\epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon^2 = \epsilon$

$$\begin{aligned} (rr') * (m\epsilon) &= (rr')\, m\epsilon = (r\,(r'm))\, \epsilon\epsilon = r\,(r'm\epsilon)\, \epsilon \\ &= r * (r' * m\epsilon)\,. \\ 1_R * (m\epsilon) &= (1_R m)\, \epsilon = m\epsilon. \\ &\implies M \in {}_R\mathrm{Mod}. \end{aligned}$$

Ahora, sean $s, s' \in S$. Entonces

$$\begin{aligned} m\epsilon * (\epsilon s\epsilon + \epsilon s'\epsilon) &= m\epsilon * (\epsilon\,(s + s')\, \epsilon) = (m\epsilon\,(s + s'))\, \epsilon \\ &= (m\epsilon s)\, \epsilon + (m\epsilon s')\, \epsilon = m\epsilon * \epsilon s\epsilon + m\epsilon * \epsilon s'\epsilon. \\ (m\epsilon + m'\epsilon) * \epsilon s\epsilon &= (m + m')\, \epsilon * \epsilon s\epsilon = (m + m')\, \epsilon s\epsilon \\ &= m\epsilon s\epsilon + m'\epsilon s\epsilon = m\epsilon * \epsilon s\epsilon + m'\epsilon * \epsilon s\epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon^2 = \epsilon$

$$\begin{aligned} m\epsilon * ((\epsilon s\epsilon)\,(\epsilon s'\epsilon)) &= m\epsilon * \epsilon\,(s\epsilon s')\, \epsilon = (m\epsilon\,(s\epsilon s'))\, \epsilon = ((m\epsilon s)\, \epsilon\epsilon)\, s\epsilon \\ &= (m\epsilon s\epsilon)\, s\epsilon = (m\epsilon * \epsilon s\epsilon) * \epsilon s'\epsilon. \\ (m\epsilon) * 1_{S'} &= (m\epsilon) * \epsilon = (m\epsilon)\, \epsilon = m\,(\epsilon\epsilon) \\ &= m\epsilon. \\ &\implies M \in \mathrm{Mod}_{S'}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} r * (m\epsilon * \epsilon s\epsilon) &= r * (m\epsilon s\epsilon) = r\,(m\epsilon s)\epsilon \\ &= (rm)\, \epsilon s\epsilon \qquad\qquad M \in {}_R\mathrm{Mod}_S \\ &= (rm)\, \epsilon * \epsilon s\epsilon \\ &= (r * m\epsilon) * \epsilon s\epsilon. \\ &\implies M\epsilon \in {}_R\mathrm{Mod}_{S'}. \end{aligned}$$

En forma análoga a lo desarrollado anteriormente se verifica que, a través de las aplicaciones

$$\begin{aligned} \cdot : R' \times eM &\to eM \\ (ere, em) &\mapsto erem, \\ \cdot : eM \times S &\to eM \\ (em, s) &\mapsto ems, \end{aligned}$$

$eM \in {}_{R'}\mathrm{Mod}_S$.

$\boxed{\text{(b)}}$ Sean $a, b, r \in R$. Entonces

$$\begin{aligned} \rho(em)(r(ae + be)) &= (r(ae + be))m = r((ae + be)m) \\ &= r((ae)m + (be)m) \\ &= r(\rho(em)(ae) + \rho(em)(be)). \\ &\implies \rho(em) \in Hom_R({}_R Re_{R'}, {}_R M_S). \end{aligned}$$

Por lo anterior, y dado que por el Ej. 24 $Hom_R({}_R Re_{R'}, {}_R M_S) \in {}_{R'}\mathrm{Mod}_S$, ρ es una función bien definida. Ahora, sean $m, m' \in M$, $s \in S$ y $x \in R$ y $\bullet$ las acciones definidas en el Ej. 24(a), entonces

$$\begin{aligned} \rho(ere \cdot (em + em') \cdot s)(xe) &= \rho(ere \cdot e(m + m') \cdot s)(xe) \\ &= \rho(ere(m + m')s)(xe) \\ &= (xe)(re(m + m')s) \\ &= (xe)(rems + rem's) \\ &= (xe)rems + (xe)rem's \\ &= ((xere)m)s + ((xere)m')s \\ &= (\rho(em)(xere))s + (\rho(em')(xere))s \\ &= (\rho(em)(xe * ere))s + (\rho(em')(xe * ere))s \\ &= (ere \bullet \rho(em)(xe))s + (ere \bullet \rho(em')(xe))s \\ &= (ere \bullet \rho(em) \bullet s)(xe) + (ere \bullet \rho(em') \bullet s)(xe) \\ &= (ere \bullet \rho(em) \bullet s + ere \bullet \rho(em') \bullet s)(xe) \\ \implies \rho(ere \cdot (em + em') \cdot s) &= ere \bullet \rho(em) \bullet s + ere \bullet \rho(em') \bullet s \\ \therefore\ \rho &\in Hom({}_{R'}eM_S, Hom_R({}_R Re_{R'}, {}_R M_S)). \end{aligned}$$

i.e. ρ es un morfismo de R-izquierda S'-derecha bimódulos, de eM en $Hom_R({}_R Re_{R'}, {}_R M_S)$. En forma análoga, empleando ahora las acciones previamente definidas en conjunto a las acciones definidas en el Ej. 24(b), se verifica que λ un morfismo de R'-izquierda S-derecha bimódulos, de $M\epsilon$ en $Hom_S({}_{S'}Re_S, {}_R M_S)$.

$\square$

Ej 28. Para un anillo R, pruebe que:

a) Para $M \in Mod\,(R)$, se tiene que $M \in Mod\,(End\,({}_RM))$, via la acción a izquierda, $End\,({}_RM) \times M \longrightarrow M$, $(f, m) \mapsto f \cdot m = f\,(m)$. Más aún, vale que $M \in {}_{R-End({}_RM)}Mod$.

b) Para $N \in Mod\,(R^{op})$, se tiene que $N \in Mod\,(End\,(N_R))$, vía la acción a izquierda, $End\,(N_R) \times N \longrightarrow N$, $(g, n) \mapsto g \cdot n = g\,(n)$. Más aún, vale que $N \in {}_{End(N_R)}Mod_R$.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ En virtud de que M es un grupo abeliano, bastará probar que la acción a izquierda $(f, m) \mapsto f \cdot m = f\,(m)$ induce una estructura de $End\,({}_RM)$-módulo a izquierda. Para dicho fin, se tiene que:

- Sean $f, g \in End\,({}_RM)$ y $m \in M$

$$\begin{aligned}(f+g)\cdot m &= (f+g)\,(m)\\ &= f\,(m) + g\,(m)\\ &= f\cdot m + g\cdot m.\end{aligned}$$

- Sean $f \in End\,({}_RM)$ y $m, n \in M$

$$\begin{aligned}f\cdot(m+n) &= f\,(m+n)\\ &= f\,(m) + f\,(n)\\ &= f\cdot m + f\cdot n.\end{aligned}$$

- Sean $f, g \in End\,({}_RM)$ y $m \in M$

$$\begin{aligned}(fg)\cdot m &= (fg)\,(m)\\ &= f\,(g\,(m))\\ &= f\,(g\cdot m)\\ &= f\cdot(g\cdot m)\,.\end{aligned}$$

- $Id \cdot m = Id\,(m) = m.$

Por ello, $M \in End\,({}_RM)$. Más aún, el hecho de que todo morfismo h preserva productos por escalar garantiza que

$$\begin{aligned}h\cdot(rx) &= h\,(rx)\\ &= rh\,(x)\\ &= r\,(h\cdot x)\end{aligned}$$

$\therefore M \in {}_{R-End({}_RM)}Mod.$

$\boxed{\text{(b)}}$ Considere $N \in Mod\,(R^{op})$. Veremos que bajo la acción a izquierda $(g, n) \mapsto g \cdot n = g\,(n)$, N es un ${}_{End(N_R)}Mod_R$-bimódulo. De tal forma que:

- Sean $\varphi, \psi \in End\,(N_R)$, $m \in M$

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi) \cdot m &= (\varphi + \psi)\,(m) \\ &= \varphi\,(m) + \psi\,(m) \\ &= \varphi \cdot m + \psi \cdot m.\end{aligned}$$

- Sean $\varphi \in End\,(N_R)$, $m \in M$

$$\begin{aligned}\varphi \cdot (m + n) &= \varphi\,(m + n) \\ &= \varphi\,(m) + \varphi\,(n) \\ &= \varphi \cdot m + \varphi \cdot n.\end{aligned}$$

- Sean $\varphi, \psi \in End\,(N_R)$, $m \in M$

$$\begin{aligned}(\varphi\psi) \cdot m &= (\varphi\psi)\,(m) \\ &= \varphi\,(\psi\,(m)) \\ &= \varphi\,(\psi \cdot m) \\ &= \varphi \cdot (\psi \cdot m)\,.\end{aligned}$$

- $Id \cdot m = Id\,(m) = m.$

De aquí, N es un $End\,(N_R)$-módulo. Finalmente, a partir de que todo morfismo τ induce

$$\begin{aligned}\tau \cdot (ts) &= \tau\,(ts) \\ &= \tau\,(t)\,s \\ &= (\tau \cdot t)\,s.\end{aligned}$$

$\therefore\; N \in {}_{End(N_R)}Mod_S.$

$\square$

Lema 6. Sean $\mathcal{A}$ una categoria y $f : A \to B \in Hom\,(\mathcal{A})$. Si f es un split-epi y un monomorfismo, entonces f es un isomorfismo.

Demostración. Dado que f es un isomorfismo si y sólo si es un monomorfismo y un epimorfismo basta con probar que, bajo estas condiciones, f es un epimorfismo. Sean $C \in Obj(\mathcal{A})$ y $g, h : B \to C \in Hom\,(\mathcal{A})$ tales que $gf = hf$. Como f es un split-epi $\exists\; k : B \to A \in Hom\,(\mathcal{A})$ tal que $fk = 1_B$, entonces

$$\begin{aligned}(gf)\,k = (hf)\,k &\implies g\,(fk) = h\,(fk) \\ &\implies g1_B = h1_B \\ &\implies g = h.\end{aligned}$$

$\square$