Lista 5

Arruti, Sergio, Jesús

Ej 79.

Ej 80.

Ej 81. Sean R un anillo conmutativo artiniano, $\mathcal{C}$ una categoría tal que $Obj\,(\mathcal{C}) = (*)$ y $\circ$ la composición en $Hom\,(\mathcal{C})$. Entonces

a) $\mathcal{C}$ es una R-categoría $\iff$ $End_{\mathcal{C}}\,\{*\}$, con $\circ$ como producto, es una R-álgebra;

b) $\mathcal{C}$ es una R-categoría Hom-finita $\iff$ $End_{\mathcal{C}}\,\{*\}$, con $\circ$ como producto, $End_{\mathcal{C}}\,\{*\}$, con $\circ$ como producto, es una R-álgebra de Artin.

Demostración. Sea $S := End_{\mathcal{C}}\,\{*\}$.
$\boxed{a)\implies}$ Dado que $Obj\,(\mathcal{C}) = (*)$ entonces el que $\mathcal{C}$ sea una R-categoría es equivalente a:

i) $S \in Mod\,(R)$,

ii) La operación $\circ$ es R-bilineal en S.

Notemos que de i) se sigue que $\exists \bullet : R \times S \to S$ una acción que hace de S un R-módulo, y así en partícular existe una operación $+$ tal que $(End_{\mathcal{C}}\,\{*\}\,, +)$ es un grupo abeliano. De ii) se sigue que en partícular $\circ$ se distribuye con respecto a $+$ (es $\mathbb{Z}$-bilinieal). Dado que S posee identidad con respecto a $\circ$, $Id_{\{*\}}$, y $\circ$ es asociativa se sigue que S posee estructura de anillo con $+$ como suma y $\circ$ como producto.
Notemos que ii) también garantiza que si $r \in R$ y $f, g \in S$, entonces

$$(r \bullet f) \circ g = r \bullet (f \circ g) = f \circ (r \bullet g)\,,$$

de modo que $\bullet$ es una acción compatible del anillo conmutativo R sobre S. Luego, por el Ej. 4, $\bullet$ permite inducir un morfismo de anillos

$$\begin{aligned} \varphi_\bullet : R &\to S \\ r &\mapsto r \bullet Id_* \end{aligned}$$

por medio del cual $(S, +, \circ)$ es una R-álgebra.
$\boxed{a)\impliedby}$ Supongamos que S, con $\circ$ como producto, es una R-álgebra por medio del morfismo φ. Entonces necesariamente $\exists +$ operación en S

tal que $S := (End_{\mathcal{C}}\{*\}, +, \circ)$ es un anillo y, por el Ej. 3, φ induce una acción compatible del anillo conmutativo R en S, $\bullet_\varphi$. Notemos que las propiedades de las acciones compatibles garantizan que por medio de $\bullet_\varphi$ $S \in Mod\,(R)$ y que, si $r \in R$ y $f, g, h \in S$

$$(r \bullet_\varphi f + g) \circ h = (r \bullet_\varphi f) \circ h + g \circ h = r \bullet_\varphi (f \circ h) + g \circ h,$$
$$f \circ (r \bullet_\varphi g + h) = f \circ (r \bullet_\varphi g) + f \circ h = r \bullet_\varphi (f \circ h) + f \circ h.$$

Con lo cual se satisfacen las condiciones i) y ii) enunciadas en la demostración de la necesidad, y por lo tanto $\mathcal{C}$ es una R-categoría.

Observación. Notemos que tanto en la necesidad como en la suficiencia de lo previamente demostrado S posee una estructura de anillo, por medio de la cual puede obtener una estructura natural de S-módulo. Más aún, por el Ej. 5, la estructura que posee S cómo R-módulo coincide con aquella que se puede obtener aplicando un cambio de anillos $\gamma : R \to S$ a ${}_SS$ ($\gamma = \varphi_\bullet$ en la necesidad y $\gamma = \varphi$ en la suficiencia).

$\boxed{b)}$ Como R es artiniano, por el Teorema 2.7.15a) se tiene que

$$S \in f.l.\,(R) \iff S \in mod\,(R)\,.$$

De lo anterior, el inciso a) y la Observación, se tiene lo deseado.

□

Ej 82.

Ej 83.

Ej 84. Sean R un anillo y

$$M_1 \xrightarrow{f} M_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

una sucesión exacta en $Mod(R)$. Entonces, $\forall\ N \in Mod\,(R)$

$$0 \longrightarrow Hom_R\,(M, N) \xrightarrow{(g,N)} Hom_R\,(M_0, N) \xrightarrow{(f,N)} Hom_R\,(M_1, N) \qquad (**)$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Demostración. Sea $N \in Mod\,(R)$. Notemos que (**) se obtiene de aplicar el funtor contravariante $F_N := Hom_R\,(-, N)$ a (*). Bajo esta notación se tiene $(g, N) = F_N\,(g)$ y $(f, N) = F_N\,(f)$. Como $Mod\,(R)$ es una categoría preaditiva entonces (**) es una sucesión en Ab (ver Ej. 60) y por tanto únicamente resta verificar que

a) $F_N\,(g)$ es un monomorfismo (de grupos abelianos),

b) $Im\,(F_N\,(g)) = Ker\,(F_N\,(f))$.

$\boxed{a)}$ Sean $\alpha, \beta \in F_N\,(M)$ tales que $F_N\,(g)\,(\alpha) = F_N\,(g)\,(\beta)$, entonces $\alpha g = \beta g$. Dado que g es en partícular sobre por ser (*) exacta, entonces esta es invertible por la derecha, lo cual aplicado a la igualdad anterior garantiza que $\alpha = \beta$.
$\boxed{b)}$ Sea $\alpha \in F_N\,(M)$, entonces

$$\begin{aligned} F_N\,(f) \circ F_N\,(g)\,(\alpha) &= \alpha \circ (gf) \\ &= \alpha \circ (0)\,, && (*) \text{ es exacta} \\ &= 0, \\ \Longrightarrow\ F_N\,(f) \circ F_N\,(g) &= 0, \\ \Longrightarrow\ Im\,(F_N\,(g)) &\subseteq Ker\,(F_N\,(f))\,. \end{aligned}$$

Verifiquemos ahora que $Ker\,(F_N\,(f)) \subseteq Im\,(F_N\,(g))$, esto es que si $\nu \in F_N\,(M_0)$ es tal que $F_N\,(f)\,(\nu) = 0$, entonces $\exists\ \mu \in F_N\,(M)$ tal que $\nu = F_N\,(g)\,(\mu)$. Lo anterior es equivalente a verificar que si $\nu \in Hom_R\,(M_0, N)$ es tal que

$$\nu f = 0, \tag{I}$$

entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & N \\ M_0 \arrow[ur, "\nu"] \arrow[r, "g"'] & M \arrow[u, dashed, "\exists\ \mu"'] \end{tikzcd}$$

Notemos primeramente que si $a, b \in M$ son tales que $a - b \in Im\,(f)$, entonces $\exists\ c \in M_1$ tal que

$$\begin{aligned} a - b &= f\,(c) \\ \Longrightarrow\ \nu\,(a - b) &= \nu f\,(c) = 0, && \text{(I)} \\ \Longrightarrow\ \nu\,(a) &= \nu\,(b)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la correspondencia

$$\begin{aligned} \overline{\nu} : {}^{M_0}\!/_{Im\,(f)} &\to M \\ a + Im\,(f) &\mapsto \nu\,(a) \end{aligned}$$

es una función bien definida y más aún es un morfismo de R-módulos, pues ν lo es.
Por otra parte, dado que g es epi en $Mod(R)$ por el Primer Teorema de Isomorfisomos para R-módulos se tiene que la función

$$\begin{aligned} \overline{g} : {}^{M_0}\!/_{Ker\,(g)} &\to M \\ x + Ker\,(g) &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

es un isomorfismo en $Mod(R)$, con inversa

$$\begin{aligned}\overline{g}^{-1} : M &\to {M_0}/{Ker\,(g)}\\ g(x) &\mapsto x + Ker\,(g)\,.\end{aligned}$$

Dado que $Im\,(f) = Ker\,(g)$ por ser (*) exacta, se tiene que

$${M_0}/{Ker\,(g)} = {M_0}/{Im\,(f)}$$

y así si $m \in M_0$ y $\mu := \overline{\nu} \circ \overline{g}^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned}\mu g\,(m) &= \overline{\nu}\,(m + Ker\,(g)) = \overline{\nu}\,(m + Im\,(f))\\ &= \nu\,(m)\,.\end{aligned}$$

$$\therefore\ \mu g = \nu.$$

□

Ej 85.

Ej 86.

Ej 87. Sean $f : M \to I$ y $f' : M \to I'$ cubiertas inyectivas de $M \in Nod\,(R)$. Entonces $\exists\ t : I \xrightarrow{\sim} I'$ en $Mod\,(R)$ tal que $tf = f'$.

Demostración. Se tiene el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & I \arrow[dl, dashed, "\exists\ t"] \\ I' & \end{tikzcd}$$

con I' inyectivo y f, en partícular, un monomorfismo en $Mod(R)$ por ser un mono-esencial. Por lo tanto $\exists\ t \in Hom_R\,(I, I')$ tal que

$$tf = f'.$$

Como f es un mono-esencial y f' es en partícular un monomorfismo en $Mod(R)$, de la igualdad anterior se sigue que t es un monomorfismo en $Mod(R)$. Con lo cual, si π es el epi canónico de I' en ${I'}/{Im\,(t)}$, la sucesión

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ t\ } I' \xrightarrow{\ \pi\ } {I'}/{Im\,(t)} \longrightarrow 0$$

es exacta. De modo que es una sucesión exacta que se parte, puesto que I es inyectivo (ver Ej. 65), con lo cual t es un split-mono (ver Ej. 54) i.e. $\exists$

$t' \in Hom_R(I', I)$ tal que $t't = Id_I$. La igualdad anterior garantiza que j es un split-epi. Además

$$tf = f' \implies f = t'f',$$

con lo cual t' es un monomorfismo, pues f lo es y f' es un mono-esencial. Así t' es un isomorfismo en $Mod(R)$ y por lo tanto $t = (t')^{-1}$ también lo es.

□

Ej 88.

Ej 89.

Ej 90. Sean R un anillo y $M \in Mod(R)$. Entonces

a) M es simple $\implies$ M es irreducible $\implies$ M es indescomponible;

b) ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ es irreducible pero no simple;

c) M es irreducible $\implies$ $Soc(M) = \langle 0 \rangle$ ó $Soc(M)$ es simple;

d) M es semisimple $\iff$ $Soc(M) = M$;

e) $Soc(Soc(M)) = Soc(M)$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Supongamos que M es simple. Entonces $M \neq \langle 0 \rangle$ y $\mathscr{L}(M) \setminus \{\langle 0 \rangle\} = \{M\}$, y, dado que la inclusión i de M en sí mismo es Id_M, así se tiene que si $X \in Mod(R)$ y $f \in Hom_R(M, X)$, entonces

$$f \circ i \text{ es monomorfismo } \iff f \text{ es monomorfismo }.$$

i.e. i es un mono-esencial y por lo tanto M es irreducible.

Supongamos ahora que M es irreducible. Sean $M_1, M_2 \in \mathscr{L}(M)$ tales que $M = M_1 \oplus M_2$ y supongamos, sin pérdida de generalidad que $M_1 \neq \langle 0 \rangle$. Como M_1 es un sumando directo de M entonces la inclusión i de M_1 en M es un split-mono (ver el Teorema 1.12.5), es decir, $\exists\ j \in Hom_R(M, M_1)$ tal que

$$ji = Id_{M_1}. \tag{*}$$

Como i es un mono-esencial, por ser M irreducible, y Id_{M_1} es un monomorfismo, entonces j es un monomorfismo y, por (*), un split-epi. De modo que j es en partícular biyectiva y por lo tanto $i = j^{-1}$ también lo es. Así $M_1 = M$ y

$$M_2 = M \cap M_2 = M_1 \cap M_2 = \langle 0 \rangle.$$

$$\therefore\ M \text{ es indescomponible.}$$

$\boxed{b)}$ Sea $M := {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$. Dado que la estructura que posee M como $\mathbb{Z}$-módulo viene dada por su multiplicación, la cual es conmutativa, entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(M) &= \{I \subseteq \mathbb{Z} \mid I \trianglelefteq \mathbb{Z}\}\\ &= \{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Así

$$\mathscr{L}(M) \setminus \{\langle 0 \rangle\} = \{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}.$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq 1$, i la inclusión de $n\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$. Supongamos que $i^{-1}(m\mathbb{Z}) = \langle 0 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned}\langle 0 \rangle = i^{-1}(m\mathbb{Z}) &= \{a \in n\mathbb{Z} \mid i(a) \in m\mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}\\ &= mcm\,(n, m)\,\mathbb{Z},\\ \implies 0 &= mcm\,(n, m)\\ \implies m &= 0, \qquad\qquad n \neq 0\end{aligned}$$

Así $m\mathbb{Z} = \langle 0 \rangle$, de modo que por la Proposición 3.3.1 i es un mono-esencial. Por lo tanto M es irreducible.
Finalmente si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, entonces $\langle 0 \rangle \subsetneq n\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$ y por tanto M no es simple.

$\boxed{c}$ Supongamos que $Soc\,(M) \neq \langle 0 \rangle$, entonces $Simp\,(M) \neq \varnothing$ y así sea $N \in \mathscr{L}(M) \neq \{\langle 0 \rangle\}$ simple. Como $N \subseteq Soc\,(M)$, pues $Soc\,(M)$ está generado por $\bigcup Simp\,(M)$, entonces si i_N es la inclusión de N en M, $i_N{}'$ la de N en $Soc\,(M)$ e $i_{Soc(M)}$ la de $Soc\,(M)$ en M, se tiene la siguiente sucesión

$$N \xrightarrow{i_N{}'} Soc\,(M) \xrightarrow{i_{Soc(M)}} M\ ,$$

con $i_N = i_{Soc(M)} i_N{}'$. Por lo anterior, como i_N es un mono-esencial por ser M irreducible y todas las inclusiones antes mencionadas son monomorfismos, aplicando la Proposición 3.3.3 a) se tiene que, en partícular, $i_N{}'$ es un mono-esencial. Así, dado que $Soc\,(M)$ es semisimple, de la Proposición 3.3.3 b) se tiene que $i_N{}'$ es un isomorfismo. De modo que $Soc\,(M) = N$ y por lo tanto es simple.

$\boxed{c)}$ Se tiene que $Soc\,(M)$ es semisimple, de lo cual se sigue la sucificiencia. Más aún se tiene que $Soc\,(M)$ es el máximo submódulo semisimple de M (ver la Proposición 3.3.6a)), de modo que $M \leq Soc\,(M)$ si M es semisimple y así se verifica la necesidad.

$\boxed{e)}$ Se sigue de aplicar el inciso anterior al modulo semisimple $M' := Soc\,(M)$.

$\square$

Ej 91.

Ej 92.

Ej 93. Sean R un anillo artiniano a izquierda y $M \in Mod\,(R)$. Si $M \neq 0$ es no trivial, entonces $Soc(M) \neq 0$.

Demostración. Basta con verificar que $Simp\,(M) \neq \varnothing$. Sea $0 \neq m \in M$, luego $0 \neq \langle m \rangle \in mod\,(R) = f.l.\,(R)$ (pues R es artiniano a izquierda) y por lo tanto $\langle m \rangle$ es en partícular artiniano (ver la Proposición 2.1.4). Así, por el Ej. 43, $(\mathscr{L}\,(\langle m \rangle)\,, \leq)$ posee por lo menos un elemento mínimal, digamos S. La minimalidad de S con respecto a $\leq$ junto al hecho de que $\mathscr{L}\,(S) \subseteq \mathscr{L}\,(\langle m \rangle)$ garantizan que S es un submódulo simple de M.

$\square$

Ej 94.

Ej 95.

Ej 96. Sean R un anillo, $I \trianglelefteq R$, $\pi : R \to {}^{R}\!/\!_{I}$ el epi-canónico de anillos y $M \in Mod\left({}^{R}\!/\!_{I}\right)$. Se tiene que

a) $\pi\,(ann_R\,(M)) = ann_{R/I}\,(M)$;

b) ${}_{R/I}M$ es fiel $\iff I = ann_R\,(M)$.

Demostración. Consideraremos la estructura de M como R-módulo como aquella obtenida a partir del cambio de anillos dado por π.

$\boxed{a)}$ Notemos que

$$\begin{aligned} a \in \pi\,(ann_R\,(M)) &\iff a = r + I, r \in ann_R\,(M) \\ &\iff a = r + I, rm = 0\ \forall\ m \in M \\ &\iff a = r + I, (r + I)\,m = \pi\,(r)\,m = 0\ \forall\ m \in M \\ &\iff a \in ann_{R/I}. \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene lo deseado.

$\boxed{b)}$ Notemos primeramente que, si $r \in I$ y $m \in M$, entonces $rm = (r + I)\,m = (I)\,m = 0$, pues I es el neutro aditivo de ${}^{R}\!/\!_{I}$. Así

$$I \subseteq ann_R\,(M)\,. \tag{*}$$

Ahora

$$\begin{aligned} {}_{R/I}M \text{ es fiel} &\iff ann_{R/I}\,(M) = \langle I \rangle \\ &\iff \pi\,(ann_R\,(M)) = \langle I \rangle\,, && a) \\ &\iff ann_R\,(M) \subseteq Ker\,(\pi) = I \\ &\iff ann_R\,(M) = I. && (*) \end{aligned}$$

$\square$

Ej 97.

Ej 98.

Ej 99. Sean Λ una R-álgebra de Artin, $D_\Lambda = Hom_R(-, I) : mod(\lambda) \to mod(\lambda^{op})$ la dualidad usual, $M \in mod(\Lambda)$ y $N \in mod(\Lambda^{op})$. Entonces

a) $(ann_\Lambda(M))^{op} = ann_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M))$;

b) $ann_\Lambda(D_{\Lambda^{op}}(N))^{op} = ann_{\Lambda^{op}}(N)$.

Demostración. Recordemos que $D_\Lambda(M) \in mod(\Lambda^{op})$ via la acción $\lambda^{op} \bullet f$, con $\lambda^{op} \bullet f(m) := f(\lambda m)$ y λm dado por la acción de λ sobre M. Sea $\lambda \in \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda \in ann_\Lambda(M) &\implies \lambda m = 0, \forall\, m \in M \\
&\implies f(\lambda m) = f(0) = 0, \forall\, m \in M, \forall\, f \in D_\Lambda(M) \\
&\implies \lambda^{op} \bullet f = 0, \forall\, f \in D_\Lambda(M) \\
&\implies \lambda \in (ann_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)))^{op} \\
&\implies ann_\Lambda(M) \subseteq (ann_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)))^{op}, \qquad (*) \\
&\therefore\ (ann_\Lambda(M))^{op} \subseteq ann_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)).
\end{aligned}$$

Dado que Λ es un álgebra de Artin arbitraria y M es un Λ-módulo arbitrario, le contención (*) es válida para Λ^{op} y $D_\Lambda(M) \in mod(\Lambda^{op})$, de modo que

$$\begin{aligned}
ann_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)) &\subseteq (ann_\Lambda(D_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M))))^{op} \\
&= ann_\Lambda(M)^{op}.
\end{aligned}$$

$\boxed{b)}$ Se sigue de a) aplicado a $D_{\Lambda^{op}}(N) \in mod(\Lambda)$.

$\square$

Ej 100.

Ej 101.