Ej 1. Para un anillo R pruebe que:

a) $C(R)$ es un subanillo conmutativo de R.

b) $C(R) = C(R[op])$.

c) $R = R^{op}$ como anillos $\Leftrightarrow$ $C(R) = R$ $\Leftrightarrow$ R es conmutativo.

Demostración. $\boxed{\text{a)}}$ Sean $a, b \in C(R)$, por definición $ax = xa$ y $bx = xb \quad \forall x \in R$, entonces

$$(a - b)x = ax - (bx) = xa - (xb) = x(a - b).$$

Por lo tanto $a - c \in C(R)$. Ahora, $abx = axb = xab$, por lo que $a, b \in C(R)$ y en consecuencia $C(R) \leq R$.

$\boxed{\text{b)}}$ Sea $* : R^{op} \times R^{op} \to R^{op}$ la operación de anillo en R^{op}. Así se tiene que

$$\begin{aligned} a \in C(R^{op}) &\Leftrightarrow \quad \forall x \in R \quad a * x = x * a \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in R \quad xa = ax \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in R \quad a \in C(R). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{c)}}$ $\boxed{\cdot) \Rightarrow \cdot\cdot)}$ Supongamos $R = R^{op}$ como anillos, entonces sus operaciones coincides, es decir, $\forall a \in R$ se tiene que $\forall x \in R \quad ax = a * x = xa$, entonces $R \subset C(R) \subset R$ por lo que $R = C(R)$.

$\boxed{\cdot\cdot) \Rightarrow \cdots)}$ Si $R = C(R)$, entonces $\forall x, y \in R \quad xy = yx$, por lo que R es conmutativo.

$\boxed{\cdots) \Rightarrow \cdot)}$ Si R es conmutativo, entonces $\forall x, a \in R \quad xa = ax = x * a$, $\boxed{\text{a)}}$ y como R y R^{op} coinciden como grupos abelianos, entonces $R = R^{op}$ como anillos. ◻

Ej 2. Para un anillo conmutativo K, pruebe que se tiene una biyección $\alpha : K - Alg \longrightarrow K_{AC} - Rings, \quad (R, K, \varphi) \longmapsto \alpha_\varphi$, donde $\alpha_\varphi : K \times R \to R$ está dada por $\alpha_\varphi(k, r) := \varphi(k)r$; cuya inversa está dada por $\varphi_\alpha := \alpha(k, 1_R)$.

Demostración. Para evitar abusos de notación en la prueba se redefinirán las funciones de la siguiente forma. Sean $D = \{\varphi : (R, K, \varphi) \in K - Alg\}$ y

$$f : D \longrightarrow K_{AC} - Rings, \quad f(\varphi) = f_\varphi$$

donde $f_\varphi : K \times R \to R$ está dada por $f_\varphi(k, r) := \varphi(k)r$. Y definimos $f^{-1} : K_{AC} - Rings \longrightarrow D$ como $f^{-1}(\alpha) := f_\alpha^{-1}$, donde $\alpha : K \times R \to R$ y

$f_\alpha^{-1}(k) := \alpha(k, 1_R) = K \cdot 1_R$.

Entonces

$$\left((ff^{-1})(\alpha)\right)(k,r) = \left(f(f_\alpha^{-1})\right)(k,r) = f_\alpha^{-1}(k)r = \alpha(k,1_R)r = \alpha(k,r)$$

y

$$\left((f^{-1}f)(\varphi)\right)(k) = \left(f^{-1}f_\varphi\right)(k) = f_\varphi(k,1_R) = \varphi(k)1_R = \varphi(k).$$

Por lo que f es biyectiva con f^{-1} su inversa. □

Ej 3. Sea R un anillo, $(M,+)$ un grupo abeliano y $\varphi : R \times M \to M$ una función. La acción opuesta $\varphi^{op} : M \times R^{op} \to M$, se define como sigue:

$$\varphi^{op}(m, r^{op}) := \varphi(r,m) \quad \forall r \in R,\ \forall m \in M.$$

Pruebe que

$$({}_RM, \varphi) \in {}_RMod \Leftrightarrow (M_{R^{op}}, \varphi^{op}) \in Mod_{R^{op}}.$$

Demostración. Recordando que $r_2^{op} r_1^{op} = (r_2 r_1)^{op}$, se tiene que:

$(M_{R^{op}}, \varphi^{op}) \in Mod_{R^{op}}$.

$\Longleftrightarrow$

i) $\varphi^{op}[(m_1+m_2), r^{op}] = \varphi^{op}(m_1, r^{op}) + \varphi^{op}(m_2, r^{op})$.
ii) $\varphi^{op}[m, (r_1^{op} + r_2^{op})] = \varphi^{op}(m, r_1^{op}) + \varphi^{op}(m, r_2^{op})$.
iii) $\varphi^{op}(m, 1_R^{op}) = m$.
iv) $\varphi^{op}(m, r_1^{op} r_2^{op}) = \varphi^{op}(\varphi^{op}(m, r_1^{op}), r_2^{op})$.

$\Longleftrightarrow$

i) $\varphi[r, (m_1+m_2)] = \varphi(r, m_1) + \varphi(r, m_2)$.
ii) $\varphi[(r_1+r_2), m] = \varphi(r_1, m) + \varphi(r_2, m)$.
iii) $\varphi(1_R, m) = m$.
iv) $\varphi(r_2 r_1, m) = \varphi(r_2, \varphi(r_1, m))$.

$\Longleftrightarrow$

$({}_RM, \varphi) \in {}_RMod$. □

Ej 4. Dado un morfismo de anillos $\varphi : R \to S$, construya la correspondencia análoga (a la de módulos) $F_\varphi : {}_SRep \longrightarrow {}_RRep$.

Demostración. Sean $\varphi : R \to S$ un morfismo de anillos y $(\lambda, M) \in {}_S Rep$ una representación a izquierda del anillo S. Se define la correspondencia **Cambio de anillos** $F_\varphi : {}_S Rep \longrightarrow {}_R Rep$. Como grupos abelianos, $F_\lambda(M) := M$ y la representación $R \to End^l_{\mathbb{Z}}(M), \quad (r) \longmapsto \lambda'(r)$, se define por $\lambda'(r) := \lambda(\varphi(r))$. Cabe observar que, como λ y φ son morfismos de anillos entonces λ' es morfismo de anillos.

$\square$