

Lista 2

Arruti, Sergio, Jesús

Definición 1. Sean R y S anillos. Decimos que un grupo abeliano, M , es un R -derecho y S -derecho bimódulo si

- i) $M \in \text{Mod}_R \cap \text{Mod}_S$;
- ii) $(mr)s = (ms)r, \forall r \in R, \forall s \in S \text{ y } \forall m \in M$.

En tal caso denotamos a M como M_{R-S} .

Ej 12. Sea $M \in {}_R\text{Mod} \cap {}_S\text{Mod}$. Entonces $M \in {}_{R-S}\text{Mod}$ si y sólo si $M \in {}_R\text{Mod}_{S^{op}}$.

Demostración. Como $M \in {}_R\text{Mod} \cap {}_S\text{Mod}$ y, por el Ej. 8, $M \in \text{Mod}_{S^{op}}$, entonces $M \in {}_R\text{Mod} \cap \text{Mod}_{M^{op}}$.

Sean $r \in R, s \in S$ y $m \in M$. Dado que, ver Ej 8, $sm = ms^{op}$ entonces

$$\begin{aligned} r(sm) &= s(rm) \iff r(ms^{op}) = (rm)s^{op} \\ \therefore M &\in {}_{R-S}\text{Mod} \iff M \in {}_R\text{Mod}_{S^{op}}. \end{aligned}$$

□

Ej 13. Sea $f : (L, \leq) \longrightarrow (L', \leq')$ un morfismo de lattices. Pruebe que:

- a) f es morfismo de posets.
- b) f es un isomorfismo de lattices si y sólo si lo es de posets.

Demostración. (a) Sean $x, y \in L$. Probaremos primero que $x \leq y$ si y sólo si $x \wedge y = x$. Si $x \leq y$, entonces $x \leq x \wedge y$, puesto que $x \leq x$ y $x \leq y$. Además, por definición, tenemos que $x \wedge y \leq x$. Así $x = x \wedge y$. Por el contrario, si suponemos que $x = x \wedge y$, entonces observe que $x \leq y$.

La afirmación anterior será útil en el proceso de probar este inciso. En efecto, supongamos que $x \leq y$. Como f es morfismo de lattices, se tiene que $f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$. $\therefore f(x) \leq' f(y)$.

(b) \Rightarrow Suponga que f es isomorfismo de lattices. En primer lugar, por el inciso anterior, f es morfismo de posets. Ahora, por hipótesis, existe $g : L' \longrightarrow L$ un morfismo de lattices tal que $f \circ g = Id_{L'}$ y $g \circ f = Id_L$;

éste a su vez también es un morfismo de posets. Por tanto, f es un isomorfismo de posets.

$\boxed{\Leftarrow}$ Consideremos que f es un isomorfismo de posets. Entonces existe $g : L' \longrightarrow L$ un morfismo de posets tal que $f \circ g = Id_{L'}$ y $g \circ f = Id_L$. Veremos que g es un morfismo de lattices. Sean así $r, t \in L'$. Dado que $r \wedge t \leq' r$ y $r \wedge t \leq' t$, se tiene que $g(r \wedge t) \leq g(r)$ y $g(r \wedge t) \leq g(t)$, y por ende $g(r \wedge t) \leq g(r) \wedge g(t)$. Posteriormente, usando el hecho de que f es morfismo de lattices, se deduce que

$$\begin{aligned} r \wedge t &= f(g(r \wedge t)) \\ &\leq' f(g(r) \wedge g(t)) \\ &= f(g(r)) \wedge f(g(t)) \\ &= r \wedge t. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} g(r \wedge t) &= g(f(g(r) \wedge g(t))) \\ &= g(r) \wedge g(t). \end{aligned}$$

Dado que g es morfismo de lattices, podemos concluir que la afirmación es cierta. \square

Ej 14. Sean $X, M \in {}_R\text{Mod}$ tal que $X \subseteq M$. Pruebe que $X \leq M \iff$ la inclusión $i_X : X \longrightarrow M, i_X(x) := x \quad \forall x \in X$, es un morfismo de R módulos.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $X \leq M$, entonces dados $x, y \in X$ y $r \in R$ se tiene que

$$i_x(rx + y) = rx + y = ri_X(x) + i_X(y).$$

Por lo que i_X es morfismo.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que $i_X : X \longrightarrow M$ es un morfismo de R módulos.

Sean $x, y \in X$ y $r \in R$, como X es un R módulo a izquierda entonces $x + y \in X$ y como i_X es morfismo se tiene que, si $\cdot : R \times X \longrightarrow X$ es la acción de R módulo en X , entonces $r \cdot x = r \cdot i_X(x) = i_X(rx) = rx$. Así, como $X \subset M$, entonces $X \leq M$. \square

Definición 2. Sean $M \in {}_R\text{Mod}$ y $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de R -submódulos de M . Definimos la suma de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ como

$$\sum_{i \in I} X_i := \left\langle \bigcup_{i \in I} X_i \right\rangle_R.$$

Ej 15. Sean $M \in {}_R\text{Mod}$ y $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de R -submódulos de M . Entonces

(a)

$$\sum_{i \in I} X_i = \begin{cases} \{0\} & , I = \emptyset \\ \left\{ \sum_{j \in \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I} x_j \mid x_j \in X_j, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} & , I \neq \emptyset \end{cases}$$

(b) $\{\mathcal{L}(M), \leq\}$ es un reticulado completo. Más aún, si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia no vacía de R -submódulos de M ,

$$\begin{aligned} \sup\{X_i\}_{i \in I} &= \sum_{i \in I} X_i, \\ \inf\{X_i\}_{i \in I} &= \bigcap_{i \in I} X_i. \end{aligned}$$

Demostración. Verifiquemos primeramente el siguiente lema:

Lema 1. Sea $M \in {}_R\text{Mod}$. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(M)$ entonces $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{L}(M)$.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0; \\ r \bullet 0 &= r \bullet (0 + 0) = r \bullet 0 + r \bullet 0 \\ &\implies r \bullet 0 = 0, \forall r \in R. \\ &\implies \{0\} \in \mathcal{L}(M). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} 0_R \bullet x &= (0_R + 0_R) \bullet x = 0_R \bullet x + 0_R \bullet x \\ &\implies 0_R \bullet x = 0, \forall x \in M. \end{aligned}$$

Por lo anterior, y dado que si $X \in \mathcal{L}(M)$ entonces $X \neq \emptyset$, se tiene que

$$\{0\} \subseteq X, \forall X \in \mathcal{L}(M).$$

Con lo cual $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$, pues $\{0\} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$. Sean $r \in R$, $a, b \in \bigcap \mathcal{A}$ y $A \in \mathcal{A}$. Como $A \leq M$

$$\begin{aligned} ra, a + b &\in A \\ \implies ra, a + b &\in A, \forall A \in \mathcal{A} \\ \implies ra, a + b &\in A, \forall \bigcap \mathcal{A} \\ &\implies \bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{L}(M). \end{aligned}$$

□

Por el lema anterior el submódulo generado por un conjunto $A \supseteq X$ está bien definido y, más aún, es el mínimo submódulo de M , con respecto a \subseteq , que contiene a A . (a) Supongamos que $I = \emptyset$, entonces $\bigcup_{i \in I} X_i = \emptyset$, y así

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} X_i &= \bigcap \{X \in \mathcal{L}(M) \mid \emptyset \subseteq X\} \\ &= \bigcap \mathcal{L}(M). \end{aligned}$$

Del lema se tiene que $0 \in X$, $\forall X \in \mathcal{L}(M)$ y que $\{0\} \in \mathcal{L}(M)$, con lo cual

$$\begin{aligned} \{0\} &\subseteq \bigcap_{X \in \mathcal{L}(M)} X = \bigcap \mathcal{L}(M) \subseteq \{0\} \\ \therefore \sum_{i \in I} X_i &= \{0\}. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $I \neq \emptyset$. Si

$$S := \left\{ \sum_{j \in \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I} x_j \mid x_j \in X_j, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

afirmamos que $S \in \mathcal{L}(M)$. En efecto:

Como $I \neq \emptyset$ y $X_i \neq \emptyset$, $\forall i \in I$, entonces $S \neq \emptyset$. Sean $r \in R$ y $a, b \in S$, luego $\exists n, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} a &= \sum_{j \in \{i_1, \dots, i_n\}} x_j \\ b &= \sum_{j \in \{k_1, \dots, k_m\}} y_j. \end{aligned}$$

En caso que $\{i_1, \dots, i_n\} = \{k_1, \dots, k_n\}$

$$a + b = \sum_{j \in \{i_1, \dots, i_n\}} (x_j + y_j)$$

Como $X_j \leq M$, $x_j + y_j \in X_j$, $\forall j \in \{i_1, \dots, i_n\}$; luego $a + b \in S$. Si ahora $\{i_1, \dots, i_n\} \cap \{k_1, \dots, k_m\} = \emptyset$ consideremos

$$\begin{aligned} l_r &:= i_r, \quad \forall r \in [1, n] \\ l_{n+r} &:= k_r, \quad \forall r \in [1, m]. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} a + b &= \sum_{j \in \{l_1, \dots, l_{n+m}\}} z_j \\ \implies a + b &\in S. \end{aligned}$$

Finalmente, reetiquetando de ser necesario, si

$$\begin{aligned} A &:= \{i_1, \dots, i_n\} \\ B &:= \{k_1, \dots, k_m\} \\ D &:= \{i_1, \dots, i_n\} \cap \{k_1, \dots, k_n\} \\ E &:= \{i_1, \dots, i_n\} \cup \{k_1, \dots, k_n\} = \{l_1, \dots, l_r, l_{r+1}, \dots, l_t\}, \end{aligned}$$

con $|D| = r > 0$, $|E \setminus D| = t > 0$, entonces

$$\begin{aligned} a + b &= \sum_{j \in D} (x_j + y_j) + \sum_{j \in A \setminus D} x_j + \sum_{j \in B \setminus D} y_j \\ &= \sum_{j \in E} z_j \\ &\implies a + b \in S. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$r \bullet a = r \bullet \sum_{j \in A} x_j = \sum_{j \in A} r \bullet x_j.$$

De modo que $r \bullet a \in S$, pues $A \subseteq I$ es finito y, como $X_j \leq M$, $r \bullet x_j \in X_j$, $\forall j \in A$; y por lo tanto $S \leq M$.

Como $\{i\} \subseteq I$, $\forall i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} X_i \subseteq S$. De modo que

$$\sum_{i \in I} X_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} X_i \right\rangle_R \subseteq S.$$

Ahora si $Y \leq M$ es tal que $Y \supseteq \bigcup_{i \in I} X_i$, $J := \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$ y $a_j \in X_j \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$, $\forall j \in J$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_j &\in Y \\ \implies S &\subseteq Y, \forall Y \in \mathcal{L}(M) \text{ tal que } Y \supseteq \bigcup_{i \in I} X_i \\ \implies S &\subseteq \left\langle \bigcup_{i \in I} X_i \right\rangle_R = \sum_{i \in I} X_i \\ \therefore S &= \sum_{i \in I} X_i. \end{aligned}$$

(b) El par $(\mathcal{L}(M), \leq)$ es un CPO puesto que la relación \subseteq es un orden parcial.

Sea $C \leq M$ cota superior de S . Entonces $X_i \leq C$, $\forall i \in I$; luego $C \supseteq \bigcup_{i \in I} X_i$. Dado $\sum_{i \in I} X_i$ es el mínimo submódulo, con respecto a \subseteq , que

contiene a $\bigcup_{i \in I} X_i$ se tiene que $\sum_{i \in I} X_i \leq C$ y por lo tanto $\sup(S) = \sum_{i \in I} X_i$.
 Sea $c \leq M$ cota inferior de S . Entonces $c \leq X_i, \forall i \in I$; luego $c \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i$.
 Como $\bigcap_{i \in I} X_i \in \mathcal{L}(M)$ y $\bigcap_{i \in I} X_i$ es cota inferior de S se sigue que $\inf(S) = \bigcap_{i \in I} X_i$.

$\therefore (\mathcal{L}(M), \leq)$ es un reticulado completo.

□

Ej 16. Sean $M \in {}_R\text{Mod}$ y $N \leq M$. Consideremos $L_N(M) = \{X \in L(M) \mid N \leq X\}$. Pruebe que el epimorfismo canónico de R -módulos a izquierda

$$\begin{aligned} \pi_N : M &\rightarrow M/N \\ m &\mapsto m + N \end{aligned}$$

induce el isomorfismo de lattices

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_N : L_N(M) &\rightarrow L(M/N) \\ X &\mapsto X/N \end{aligned}$$

cuyo inverso es $\hat{\pi}_N^{-1}(Z) = \{x \in M \mid x + N \in Z\}$.

Demostración. Sea $K \in L_N(M)$ tal que $\hat{\pi}_N(K) = 0$. Notemos que, si $k \in K$, entonces $k + N = 0$. Lo cual implica que $k \in N$, y por ello $K = N$. Esto quiere decir que $\hat{\pi}_N$ es inyectiva.

Así mismo, dado $T \in L(M/N)$, se satisface que $\hat{\pi}_N^{-1}(T) \in L_N(M)$. En efecto, para cada $x \in N$, se cumple que $x + N = N \in T$, y en consecuencia $N \subseteq \hat{\pi}_N^{-1}(T)$. Adicionalmente, si $x, y \in \hat{\pi}_N^{-1}(T)$ y $r \in R$, se cumple que $x + y + N \in T$, $rx + N \in T$. En vista de esto, se sigue que $x + y, rx \in \hat{\pi}_N^{-1}(T)$, y por tanto $\hat{\pi}_N^{-1}(T) \in L_N(M)$.

Por último, observe que

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_N(\hat{\pi}_N^{-1}(T)) &= \{x + N \in M/N \mid x \in \hat{\pi}_N^{-1}(T)\} \\ &= \{x + N \in M/N \mid x + N \in T\} \\ &= T. \end{aligned}$$

Más aún, para cualesquiera $T_1, T_2 \in L(M/N)$, se identifican

$$\hat{\pi}_N^{-1}(T_1 \cap T_2) = \hat{\pi}_N^{-1}(T_1) \cap \hat{\pi}_N^{-1}(T_2)$$

y

$$\hat{\pi}_N^{-1}(T_1 + T_2) = \hat{\pi}_N^{-1}(T_1) + \hat{\pi}_N^{-1}(T_2).$$

$\therefore \hat{\pi}_N$ es un isomorfismo de retículas.

□

Ej 17. Para un $M \in {}_R\text{Mod}$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

- a) M es simple.
- b) 0 es un submódulo maximal de M .
- c) M es un submódulo minimal de M .
- d) $M \neq 0$ y $M = \langle m \rangle_R \quad \forall m \in M - \{0\}$.
- e) $M \neq 0$ y $\forall X \in {}_R\text{Mod}, \forall f \in \text{Hom}_R(M, X)$ se tiene que $f = 0$ o bien $\text{Ker}(f) = 0$.
- f) $M \neq 0$ y $\forall X \in {}_R\text{Mod}, \forall g \in \text{Hom}_R(X, M)$ se tiene que $g = 0$ o bien $\text{Im}(g) = 0$.

Demostración. Notemos que si $M = 0$, ninguna de los incisos se satisface, así que podemos tomar $M \neq 0$.

$a) \Rightarrow b)$ Supongamos M es simple, entonces $\mathcal{L}(M) = \{0, M\}$ por lo que 0 es el único submódulo de M propio y por lo tanto es maximal.

$b) \Rightarrow c)$ Supongamos 0 es un submódulo maximal de M , como $\forall N \in \mathcal{L}(M) - \{M\}$ se tiene que $0 \leq N$, entonces $\forall N \in \mathcal{L}(M) - \{M\}, N = 0$, por lo que M es minimal al ser el único submódulo en $(\mathcal{L}(M) - \{0\}, \leq)$ tal que $M \neq 0$ y si $0 \leq N$ entonces $(N \leq M \Rightarrow N = M)$.

$c) \Rightarrow d)$ Supongamos M es un submódulo minimal de M . Por definición $M \neq 0$ entonces $\forall m \in M - \{0\}$, pasa que $\langle m \rangle_R \neq 0$, pero $\langle m \rangle_R \in \mathcal{L}(M)$, entonces $\langle m \rangle_R \geq M$ por ser M minimal. Sin embargo $\langle m \rangle_R \leq M$ pues $m \in M$, por lo tanto $M = \langle m \rangle_R \quad \forall m \in M - \{0\}$.

$d) \Rightarrow a)$ Como $M \neq 0$, si $N \neq 0$ y $N \in \mathcal{L}(M)$, entonces $N \subset M$, $\forall n \in N - \{0\} \quad n \in M - \{0\}$ y $M = \langle n \rangle_M \leq N \leq M$. Por lo tanto $N = M$ y $\mathcal{L}(M) = \{0, M\}$.

Con lo anterior tenemos que las primeras cuatro proposiciones son equivalentes, entonces para terminar se demostrarán las siguientes equivalencias.

$a) \Rightarrow e)$ Ya sabemos que $M \neq 0$. Sea $f \in \text{Hom}_R(M, X)$ con $X \in {}_R\text{Mod}$. Si $f = 0$ no hay nada que demostrar. Supongamos $f \neq 0$, como $\text{Ker}(f) \leq M$ con M simple, entonces $\text{Ker}(f) = 0$ o $\text{Ker}(f) = M$, pero $f \neq 0$, entonces $\text{Ker}(f) \neq M$ y en consecuencia $\text{Ker}(f) = 0$.

$\boxed{e) \Rightarrow f)}$ Ya sabemos que $M \neq 0$. Sea $g \in \text{Hom}_R(X, M)$ con $X \in {}_R\text{Mod}$. Si $g = 0$ no hay nada que probar. Supongamos $g \neq 0$, como $\text{Im}(g) \leq M$ entonces podemos tomar $M/\text{Im}(g) \in {}_R\text{Mod}$ y así $\pi_{\text{Im}(g)} \in \text{Hom}_R(M, M/\text{Im}(g))$, con $\pi_{\text{Im}(g)} \neq 0$. Entonces por e) tenemos que, $\text{Ker}(g) = 0$, y así $\text{Im}(g) = M$.

$\boxed{f) \Rightarrow a)}$ Como $M \neq 0$ tenemos que para cada $N \in \mathcal{L}(M) - \{0\}$ la inclusión $i_N : N \rightarrow M$ es morfismo y más aun $i_N \neq 0$. Entonces por f) se tiene que $N = \text{Im}(i_N) = M$ y así $\mathcal{L}(M) = \{0, M\}$. \square

Ej 18. Sea $M \in {}_R\text{Mod}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) M es finitamente generado.
- (b) $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ epimorfismo de R -módulos.

Demostración. Verifiquemos primero el siguiente lema:

Lema 2. Sea $M \in {}_R\text{Mod}$. Si $X \subseteq M$ entonces

$$\langle X \rangle_R = \begin{cases} \{0\} & , X = \emptyset \\ \{\sum_{i=1}^n r_i x_i \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, r_i \in R, x_i \in X \forall i \in [1, n]\} & , X \neq \emptyset \end{cases}$$

Demostración. El caso $X = \emptyset$ se verificó en el Ej. 15(a) (en el caso $I = \emptyset$). Supongamos que $X \neq \emptyset$.

Sea $S := \{\sum_{i=1}^n r_i x_i \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, r_i \in R, x_i \in X \forall i \in [1, n]\}$. $S \neq \emptyset$, pues $R \neq \emptyset \neq X$ y $S \subseteq M$, pues $M \in {}_R\text{Mod}$.

Sean $a, b \in S$. Existen $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $r_i, s_i \in R, x_i, y_i \in X$ tales que $a = \sum_{i=1}^n r_i x_i$ y $b = \sum_{i=1}^m s_i y_i$ y

$$t_i = \begin{cases} r_i & , i \in [1, n] \\ s_{i-n} & , i \in [n+1, n+m] \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} r_i & , i \in [1, n] \\ s_{i-n} & , i \in [n+1, n+m] \end{cases} .$$

Entonces

$$\begin{aligned} a + b &= \sum_{i=1}^n r_i x_i + \sum_{i=1}^m s_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n+m} t_i z_i \\ &\implies a + b \in S. \end{aligned}$$

Sea $r \in R$. Entonces

$$ra = r \left(\sum_{i=1}^n r_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n (rr_i) x_i$$

Si $u_i := rr_i$ entonces

$$\begin{aligned} ra &= \sum_{i=1}^n u_i x_i \in S \\ \implies S &\in \mathcal{L}(M). \end{aligned}$$

Además, si $x \in X$ entonces $x = 1_R x \in S$, con lo cual $X \subseteq S$ y por lo tanto $\langle X \rangle_R \subseteq S$.

Por otro lado, si $Y \leq M$, $X \subseteq Y$, $r_i \in R$, $x_i \in X \forall i \in [1, n]$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n r_i x_i &\in Y \\ \implies S &\subseteq Y \\ \implies S &\subseteq \langle X \rangle_R \\ \therefore S &= \langle X \rangle_R. \end{aligned}$$

□

$\boxed{\implies}$ Existe $X \subseteq M$ finito tal que $M = \langle X \rangle_R$. Si $X = \emptyset$ entonces $M = \{0\}$ y en tal caso la aplicación

$$\begin{aligned} f &: R \rightarrow M \\ r &\mapsto 0 \end{aligned}$$

es un epimorfismo de R -módulos a izquierda.

Supongamos ahora que $X \neq \emptyset$. Entonces $\exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f &: R^m \rightarrow M \\ (r_i)_{i=1}^m &\mapsto \sum_{i=1}^m r_i x_i. \end{aligned}$$

Sean $r \in R$ y $(s_i)_{i=1}^m, (t_i)_{i=1}^m \in R^m$

$$\begin{aligned} f(r((s_i)_{i=1}^m + (t_i)_{i=1}^m)) &= f((rs_i + rt_i)_{i=1}^m) = \sum_{i=1}^m (rs_i + rt_i) x_i \\ &= \sum_{i=1}^m (rs_i) x_i + \sum_{i=1}^m (rt_i) x_i = r \left(\sum_{i=1}^m s_i x_i + \sum_{i=1}^m t_i x_i \right) \\ &= r(f((s_i)_{i=1}^m) + f((t_i)_{i=1}^m)) \\ \implies f &\text{ es un morfismo de } R \text{ módulos a izquierda.} \end{aligned}$$

Notemos que por el Lema 2, dado que $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ y, $\forall m \in M$, $0_R m = 0$, se tiene que

$$\langle X \rangle_R = \left\{ \sum_{i=1}^m r_i x_i \mid r_i \in R \forall i \in [1, m] \right\}.$$

Sea $y \in M = \langle X \rangle_R$. Por la observación anterior $\exists r_i \in R$ tales que $y = \sum_{i=1}^m r_i x_i$, con lo cual, si $x := (r_i)_{i=1}^m$, $y = f(x)$. Por lo tanto f es un epimorfismo de R -módulos a izquierda.

$\boxed{\Leftarrow}$ Verifiquemos primero los siguientes resultados:

Lema 3. Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de R -módulos a izquierda. Entonces $f(A) \in \mathcal{L}(N)$, $\forall A \in \mathcal{L}(M)$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{L}(M)$. Como $A \neq \emptyset$ entonces $f(A) \neq \emptyset$, además $f(A) \subseteq M$. Sean $r \in R$ y $x, y \in f(A)$. Existen $a, b \in A$ tales que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Así

$$\begin{aligned} rx + y &= rf(x) + f(b) = f(rx + b) & f &\in \text{Hom}_R(M, N) \\ f(rx + b) &\in f(A) & A &\in \mathcal{L}(M) \\ \implies f(A) &\in \mathcal{L}(N). \end{aligned}$$

□

Lema 4. Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo de R -módulos a izquierda. Entonces $f(\langle A \rangle_R) = \langle f(A) \rangle_R$, $\forall A \subseteq M$.

Demostración. Sea $A \subseteq M$. Como $A \subseteq \langle A \rangle_R$ entonces $f(A) \subseteq f(\langle A \rangle_R)$, de modo que, por el Lema 3, $f(\langle A \rangle_R)$ es un R -submódulo de N que contiene a $f(A)$ y por lo tanto $\langle f(A) \rangle_R \subseteq f(\langle A \rangle_R)$.

Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y, $\forall i \in [1, n]$, $r_i \in R$ y $x_i \in A$. Así, como $f \in \text{Hom}_R(M, N)$,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n r_i x_i\right) &= \sum_{i=1}^n r_i f(x_i) \in \langle f(A) \rangle_R \\ \implies f(\langle A \rangle_R) &\subseteq \langle f(A) \rangle_R \\ \therefore f(\langle A \rangle_R) &= \langle f(A) \rangle_R. \end{aligned}$$

□

Lema 5. Sea $f : M \rightarrow N$ un epimorfismo de R -módulos a izquierda. Si $M \in {}_R\text{mod}$ entonces $N \in {}_R\text{mod}$.

Demostración. Como $M \in {}_R\text{mod}$ $\exists X \subseteq M$ finito tal que $M = \langle X \rangle_R$ y así

$$\begin{aligned} N &= f(M) & f &\text{es sobre} \\ &= f(\langle X \rangle_R) = \langle f(X) \rangle_R & \text{Lema 4} \end{aligned}$$

Y como $|f(X)| \leq |X|$ entonces $f(X)$ es finito. Por lo tanto $N \in {}_R\text{mod}$. \square

Así, como $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $f : R^n \rightarrow M$ epimorfismo de R -módulos a izquierda, por el Lema 5 basta verificar que $R^n \in {}_R\text{mod}$.

Sean $e_j := \left(u_i^j\right)_{i=1}^n \in R^n$, donde

$$u_i^j = \begin{cases} 0_R & , i \neq j \\ 1_R & , i = j \end{cases},$$

$\forall j \in [1, n]$, y $E := \{e_1, \dots, e_n\}$. Así si $(r_i)_{i=1}^n \in R^n$, entonces $(r_i)_{i=1}^n = \sum_{i=1}^n r_i e_i$, con lo cual $R^n = \langle E \rangle_R$. Por lo tanto $R^n \in {}_R\text{mod}$. \square

Ej 19. Pruebe que todo anillo no trivial R admite R -módulos simples a izquierda (y a derecha también).

Demostración. Observe que R es finitamente generado como R -módulo, de hecho $R = \langle 1 \rangle$. Entonces, por el **teorema 1.8.1**, R tiene ideales máximos. Sea I un ideal izquierdo máximo de R . Por el **Ejercicio 16**, R/I es un R -módulo simple. De manera análoga, Mod_R posee R -módulos derechos simples. \square

Ej 20. Para una K -álgebra R , defina de manera natural una estructura de K -módulo (a izquierda y a derecha) en $\text{Hom}_R(M, N) \quad \forall M, N \in \text{Mod}(R)$.

Demostración. Sean M y N R -módulos a izquierda y (R, K, φ) una K -álgebra. Para toda $k \in K$, $f \in \text{Hom}_R(M, N)$, $l \in R$ y $m \in M$, definiremos $\alpha : K \times \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N)$ dada por

$$\alpha(k, f)(\varphi)(lm) = k \cdot l(\varphi)(lm) := l * (\varphi(k) * f(m)),$$

donde \cdot es la acción a izquierda de N como R -módulo.

Así

AC1

$$\begin{aligned} (k \cdot (f_1 + f_2))(lm) &= l * (\varphi(k) * (f_1 + f_2)(m)) \\ &= l * (\varphi(k) * (f_1)(m) + \varphi(k) * (f_2)(m)) \\ &= l * (\varphi(k) * (f_1)(m)) + l * (\varphi(k) * (f_2)(m)) \\ &= k \cdot (f_1)(lm) + k \cdot (f_2)(lm). \end{aligned}$$

AC2

$$\begin{aligned} ((k_1 + k_2) \cdot (f))(lm) &= l * (\varphi(k_1 + k_2) * f(m)) \\ &= l * (\varphi(k_1) * f(m) + \varphi(k_2) * f(m)) \\ &= l * (\varphi(k_1) * f(m)) + l * (\varphi(k_2) * f(m)) \\ &= k_1 \cdot f(lm) + k_2 \cdot f(lm). \end{aligned}$$

AC3

$$\begin{aligned}
 (1_K \cdot f)(lm) &= l * (\varphi(1_K) * f(m)) \\
 &= l * (1_R * f(m)) \\
 &= l * (f(m)) \\
 &= f(lm).
 \end{aligned}$$

AC4

$$\begin{aligned}
 ((k_1 k_2) \cdot f)(lm) &= l * (\varphi(k_1 k_2) * f(m)) \\
 &= l * (\varphi(k_1) \varphi(k_2) * f(m)) \\
 &= l * (\varphi(k_1) * (\varphi(k_2) * f(m))) \\
 &= l * [\varphi(k_1) * (k_2 \cdot f)(m)] \\
 &= (k_1 \cdot (k_2 \cdot f))(lm).
 \end{aligned}$$

Entonces \cdot es una acción a izquierda de R -módulos.

Por el ejercicio 8, se tiene que si M y N son R -módulos derechos entonces son R^{op} módulos izquierdos. Así \cdot es una acción para $Hom_{R^{op}}(M, N)$ y por el ejercicio 8, \cdot^{op} es una acción que vuelve a $Hom_R(M, N)$ un módulo derecho.

□

Ej 21. Sean R y S anillos.

(a) Sean

$$\begin{aligned}
 Obj(\mathcal{C}) &:= Mod_{R-S}, \\
 Hom(\mathcal{C}) &:= \bigcup_{(M,N) \in Obj(\mathcal{C})^2} Hom(M_{R-S}, N_{R-S}),
 \end{aligned}$$

con

$$Hom(M_{R-S}, N_{R-S}) := Hom_R(M_R, N_R) \cap Hom_S(M_S, N_S),$$

y \circ la composición usual de funciones.

Entonces la clase Mod_{R-S} tiene estructura de categoría por medio de la terna $(Obj(\mathcal{C}), Hom(\mathcal{C}), \circ)$.

(b) ${}_R Mod_S \simeq Mod_{R^{op}-S}$, ${}_R Mod_S \simeq {}_{R-S^{op}} Mod$ y ${}_{R-S} Mod \simeq {}_R Mod_{S^{op}}$.

Demostración. (a) Si $M, N \in Mod_{R-S}$, entonces M y N son conjuntos, con lo cual

$$N^M := \{f : M \rightarrow N \mid f \text{ es una función}\}$$

es un conjunto y así $\text{Hom}_R(M_R, N_R)$ es un conjunto, pues

$$\text{Hom}_R(M_R, N_R) \subseteq B^A.$$

Similarmente se encuentra que $\text{Hom}_S(M_S, N_S)$ es un conjunto, y así $\text{Hom}(M_{R-S}, N_{R-S})$ es un conjunto $\forall M, N \in \text{Mod}_{R-S}$. Además por definición $\text{Hom}(\mathcal{C}) = \bigcup_{(M,N) \in \text{Obj}(\mathcal{C})^2} \text{Hom}(M_{R-S}, N_{R-S})$, con lo cual se satisface (P1).

Recordemos que, si W, X, Y, Z son conjuntos y $f : W \rightarrow X, g : Y \rightarrow Z$ son funciones entonces $f = g$ si y sólo si $W = Y, X = Z$ y $f(w) = g(w) \forall w \in W$. Con lo cual si $(M, N) \neq (O, P)$ entonces $N^M \cap P^O = \emptyset$ y por lo tanto $\text{Hom}(M_{R-S}, N_{R-S}) \cap \text{Hom}(O_{R-S}, P_{R-S}) = \emptyset$. Por lo tanto se satisface (P2).

Finalmente para verificar que (P3) se satisface, dado que la composición usual de funciones es asociativa y claramente $\text{Id}_X \in \text{Hom}(M_{R-S}, M_{R-S}) \forall M \in \text{Mod}_{R-S}$, basta probar que si $f \in \text{Hom}_R(N, O), g \in \text{Hom}_R(M, N)$ entonces $f \circ g \in \text{Hom}_R(M, O)$; ya que en tal caso se tiene que la composición usual de funciones se restringe a una función asociativa

$$\circ : \text{Hom}(N_{R-S}, O_{R-S}) \times \text{Hom}(M_{R-S}, N_{R-S}) \rightarrow \text{Hom}(M_{R-S}, O_{R-S})$$

que admite identidades.

Sean $f \in \text{Hom}_R(N, O)$ y $g \in \text{Hom}_R(M, N)$. En particular $f : N \rightarrow O$ y $g : M \rightarrow N$ son morfismos de grupo abelianos, con lo cual $f \circ g$ es un morfismo de grupos abelianos. Sean $r \in R$ y $m \in M$, así

$$\begin{aligned} f \circ g(rm) &= f(g(rm)) = f(rg(m)) = rf(g(m)) \\ &= r(f \circ g(m)). \\ \implies f \circ g &\in \text{Hom}_R(M, O). \end{aligned}$$

(b) Recordemos que, por el Ej. 8, $(M, \bullet) \in {}_R M$ si y sólo si $(M, \bullet^{op}) \in M_{R^{op}}$ (en adelante no haremos mención explícita de \bullet y \bullet^{op}). Por lo cual, si $r \in R, s \in S$ y $m \in M$,

$$r(ms) = (rm)s \iff (ms)r^{op} = (mr^{op})s \quad (*)$$

y así

$$M \in {}_R \text{Mod}_S \iff M \in \text{Mod}_{R^{op}-S}. \quad (\text{I})$$

Más aún, si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo de grupos abelianos, entonces

$$\begin{aligned} f(r(ms)) &= r(f(m)s) \iff f((ms)r^{op}) = (f(m)s)r^{op}, \\ &\forall r \in R, \forall s \in S, \forall m \in M. \end{aligned}$$

De modo que, considerando el caso particular $s = 1_S$, se tiene que

$$\begin{aligned} f \in \text{Hom}_R({}_R M, {}_R N) &\iff f \in \text{Hom}_{R^{op}}(M_{R^{op}}, N_{R^{op}}) \\ \therefore f \in \text{Hom}({}_R M_S, {}_R N_S) &\iff f \in \text{Hom}(M_{R^{op}-S}, N_{R^{op}-S}). \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

De (I) y (II) se sigue que la correspondencia de categorías

$$\begin{aligned}
{}_R\text{Mod}_S &\xrightarrow{F_1} \text{Mod}_{R^{op}-S} \\
{}_RM_S \xrightarrow{f} {}_RN_S &\longmapsto M_{R^{op}-S} \xrightarrow{f} N_{R^{op}-S}
\end{aligned}$$

está bien definida y, más aún, por construcción $F(Id_M) = Id_{F(M)}$, $\forall M \in {}_R\text{Mod}_S$.

Sean $M \xrightarrow{f} N, N \xrightarrow{g} O \in {}_R\text{Mod}_S$, entonces

$$\begin{aligned}
F(g \circ f) &= g \circ f = F(g) \circ F(f) \\
\therefore F &\text{ es un funtor.}
\end{aligned}$$

Empleando que $(R^{op})^{op} = R$ en conjunto a los puntos (*), (I) y (II), se tiene que la correspondencia de categorías

$$\begin{aligned}
\text{Mod}_{R^{op}-S} &\xrightarrow{G_1} {}_R\text{Mod}_S \\
M_{R^{op}-S} \xrightarrow{g} N_{R^{op}-S} &\longmapsto {}_RM_S \xrightarrow{g} {}_RN_S
\end{aligned}$$

es un funtor que satisface $G_1 F_1 = 1_{{}_R\text{Mod}_S}$ y $F_1 G_1 = 1_{\text{Mod}_{R^{op}-S}}$, y por lo tanto ${}_R\text{Mod}_S \simeq \text{Mod}_{R^{op}-S}$.

Aplicando ahora el Ej. 8 al anillo S , por medio de un procedimiento análogo a lo previamente desarrollado, se verifica que $M \in {}_R\text{Mod}_S$ si y sólo si $M \in {}_{R-S^{op}}\text{Mod}$, y que $f \in \text{Hom}({}_RM_S, {}_RN_S)$ si y sólo si $f \in \text{Hom}({}_{R^{op}-S}M, {}_{R^{op}-S}N)$. De modo que

$$\begin{aligned}
{}_R\text{Mod}_S &\xrightarrow{F_2} {}_{R-S^{op}}\text{Mod} \\
{}_RM_S \xrightarrow{f} {}_RN_S &\longmapsto {}_{R-S^{op}}M \xrightarrow{f} {}_{R-S^{op}}N
\end{aligned}$$

es un isomorfismo de categorías, con inversa

$$\begin{aligned}
{}_{R-S^{op}}\text{Mod} &\xrightarrow{G_2} {}_R\text{Mod}_S \\
{}_{R-S^{op}}M \xrightarrow{g} {}_{R-S^{op}}N &\longmapsto {}_RM_S \xrightarrow{g} {}_RN_S.
\end{aligned}$$

Finalmente empleando, el Ej. 12 y un procedimiento análogo al previamente desarrollado se verifica que $M \in {}_{R-S}\text{Mod}$ si y sólo si $M \in {}_R\text{Mod}_{S^{op}}$, y que $f \in \text{Hom}({}_{R-S}M, {}_{R-S}N)$ si y sólo si $f \in \text{Hom}({}_RM_{S^{op}}, {}_RN_{S^{op}})$; y así

$$\begin{aligned}
{}_{R-S}\text{Mod} &\xrightarrow{F_3} {}_R\text{Mod}_{S^{op}} \\
{}_{R-S}M \xrightarrow{f} {}_{R-S}N &\longmapsto {}_RM_{S^{op}} \xrightarrow{f} {}_RN_{S^{op}}
\end{aligned}$$

es un isomorfismo de categorías, con inversa

$$\begin{array}{ccc}
{}_R\text{-}S^{\text{op}}\text{Mod} & \xrightarrow{G_3} & {}_R\text{Mod}_S \\
{}_R\text{-}S^{\text{op}}M \xrightarrow{g} {}_R\text{-}S^{\text{op}}N & \longmapsto & {}_RM_S \xrightarrow{g} {}_RN_S.
\end{array}$$

□

Ej 22. Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos. Pruebe que:

- a) La correspondencia de cambio de anillos $F_\varphi : \text{Mod}(S) \longrightarrow \text{Mod}(R)$ es un funtor.
- b) Para cualesquiera $M, N \in \text{Mod}(S)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\text{Hom}_S(M, N) &\leq \text{Hom}_R(F_\varphi(M), F_\varphi(N)) \\
&= \text{Hom}_{\varphi(R)}(F_\varphi(M), F_\varphi(N)) \\
&\leq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)
\end{aligned}$$

como grupos abelianos. En particular, F_φ es fiel y éste es pleno si $\varphi(R) = S$.

Demostración. (a) Primero, por la propia correspondencia, a todo S -módulo M se le asigna un R -módulo $F_\varphi(M) = M$. En vista de lo anterior, bastará probar que $F_\varphi(f) = f \in \text{Hom}_R(F_\varphi(M), F_\varphi(N))$, para $f \in \text{Hom}_S(M, N)$ y $M, N \in \text{Mod}(S)$.

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de S -módulos. Ahora, dados $r \in R$ y $m, n \in M$, se satisface que

$$\begin{aligned}
F_\varphi(f)(r \cdot m + n) &= f(\varphi(r) * m + n) \\
&= \varphi(r) * f(m) + f(n) \\
&= r \cdot f(m) + f(n) \\
&= r \cdot F_\varphi(f)(m) + F_\varphi(f)(n)
\end{aligned}$$

Con lo cual, $F_\varphi(f)$ es un morfismo de R -módulos. $\therefore F_\varphi$ es un funtor.

(b) Note que, por el inciso anterior, todo morfismo de S -módulos es un morfismo de R -módulos. Más aún, como todo R -módulo es un grupo abeliano y como todo morfismo de R -módulos preserva sumas, se tiene que $\text{Hom}_S(M, N) \leq \text{Hom}_R(F_\varphi(M), F_\varphi(N)) \text{Hom}_{\varphi(R)}(F_\varphi(M), F_\varphi(N))$ y que $\text{Hom}_R(F_\varphi(M), F_\varphi(N)) \leq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N)$.

Por otra parte, F_φ es fiel, toda vez que a cualesquiera 2 morfismos $f \neq g$ se le asignan morfismos $F_\varphi(f) = f \neq g = F_\varphi(g)$. Por otro lado, suponga que $\varphi(R) = S$. Dado $f \in \text{Hom}_R(M, N)$, éste es un morfismo de S -módulos. En efecto, si $s \in S$, entonces $s = \varphi(r)$, para alguna $r \in R$. De esta

forma, definimos $f(s * m)$ como $f(s * m) = f(rm)$, e inclusive tenemos $F_{\varphi^{-1}}(f) = f \therefore F_{\varphi}$ es pleno. \square

Ej 23. Sea R un anillo e $I \triangleleft R$. Considere el epimorfismo canónico de anillos $\pi : R \longrightarrow R/I, r \mapsto r + I$.

a) Pruebe que el funtor de cambio de anillos

$F_{\pi} : Mod(R/I) \longrightarrow Mod(R)$ es fiel y pleno.

b) Sea ζ_I la subcategoría plena de $Mod(R)$ cuyos objetos son los $M \in Mod(R)$ que son aniquilados por I , i.e.

$$M \in \zeta_I \iff I \subseteq ann_R(M) := \{r \in R : rm = 0 \forall m \in M\}.$$

Pruebe que $F_{\pi}(Mod(R/I)) = \zeta_I$ y que $F_{\pi} : Mod(R/I) \longrightarrow \zeta_I$ es un isomorfismo de categorías.

Demostración. $\boxed{a)}$ Sean $A, B \in Mod(R)$. Por el ejercicio 22 a), F es un funtor, y como $\pi(R) = R/I$, entonces por el ejercicio 22 b), F_{π} es fiel y pleno.

$\boxed{b)}$ Sea $A \in Mod(R/I)$, entonces tenemos que $F_{\pi}(A) \in Mod(R)$. Ahora, si $m \in F_{\pi}(A)$, entonces para cada $x \in I, x \cdot m = \pi(x) * m = 0 * m = 0$, donde \cdot y $*$ son las acciones definidas en A y $F_{\pi}(A)$ respectivamente. Por lo tanto $I \subseteq ann_R(m)$ y $F_{\pi}(A) \in \zeta_I$.

Ahora, sea $A \in \zeta_I$, entonces $I \subseteq ann_R(A) := \{r \in R : rm = 0 \forall m \in A\}$, en particular $A \in Mod(R)$, así definimos la función $* : R/I \times A \longrightarrow A$ dada por $[r] * m = (r + I) * m := r \cdot m + I \cdot m$ donde \cdot es la acción de A como R -módulo, y se tiene que, como $I \cdot m = \{im : i \in I, m \in A\}$ y $A \in \zeta_I, I \cdot m = \{0\}$.

Por lo tanto, si $r, s \in [x]$ con $r = x + k_1$ y $s = x + k_2$, entonces $r * m = s * m$, en particular $[r] * m = r \cdot m \forall r \in R$, es decir, $*$ es una acción de A (bien definida) como R/I -módulo, es un R -módulo y $[r] * m = r \cdot m \forall r \in R$, es decir, $A \in F_{\pi}(Mod(R/I))$. Y en consecuencia $Mod(R/I) = \zeta_I$

Con esto podemos ver que $F_{\pi} : Mod(R/I) \longrightarrow \zeta_I$ es funtor, y más aun, definiendo $G_{\pi} : \zeta_I \longrightarrow Mod(R/I)$ dado por $G_{\pi}(M) = M$ para cada $M \in \zeta_I$ y $G_{\pi}(f)([r] * m) = [r] * f(m)$ para cada $f \in Hom(M, N)$ donde $*$ es la acción a izquierda de M como R/I -módulo, es un funtor pues

$G_\pi(1_M)([r] *_M m) = [r] *_M m = 1_M([r] *_M m)$ y para $f \in \text{Hom}_R(M, N), g \in \text{Hom}_R(N, L)$

$$\begin{aligned} G_\pi(gf)([r] *_M m) &= [r] *_L gf(m) = G_\pi(g)([r] *_N f(m)) \\ &= (G_\pi(g) \circ G_\pi(f))([r] *_M m). \end{aligned}$$

Así $F_\pi \circ G_\pi(A) = A = G_\pi \circ F_\pi(A) \quad \forall A \in \text{Mod}\left(\frac{R}{I}\right) = \zeta_I$, y cumple las siguientes condiciones

- i) $F_\pi \circ G_\pi(1_A) = F_\pi(1_A) = 1_A = G_\pi(1_A) = G_\pi \circ F_\pi(1_A)$.
- ii) Considerando $a \cdot y *$ como las acciones a izquierda como R -módulo y $\frac{R}{I}$ -módulo respectivamente. Para cualquier $r \in R, m \in M, f \in \text{Hom}_R(M, N)$ y $g \in \text{Hom}_{\frac{R}{I}}(M, N)$, se tiene lo siguiente.

$$(F_\pi \circ G_\pi(f))(r \cdot_M m) = [r] *_N G_\pi(f)(m) = [r] *_N f(m) = r \cdot_N f(m) = f(r \cdot_M m).$$

$$(G_\pi \circ F_\pi(g))([r] *_M m) = r \cdot_N F_\pi(g)(m) = r \cdot_N g(m) = [r] *_N g(m) = g([r] *_M m).$$

Por lo tanto $F_\pi \circ G_\pi(f) = 1_{\zeta_I}$ y $G_\pi \circ F_\pi(g) = 1_{\text{Mod}(\frac{R}{I})}$, es decir, F_π es un isomorfismo de categorías. \square

Ej 24. Sean R, S y T anillos.

- (a) Sean $M \in {}_R\text{Mod}_S, N \in {}_R\text{Mod}_T, H := \text{Hom}_R({}_R M_S, {}_R N_T)$ y las siguientes aplicaciones, denotadas por medio del mismo simbolo para simplificar la notación,

$$\begin{aligned} \bullet : S \times H &\rightarrow H \\ (s, f) &\mapsto s \bullet f, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} s \bullet f : M &\rightarrow N \\ x &\mapsto f(xs); \\ \bullet : H \times T &\rightarrow H \\ (f, t) &\mapsto f \bullet t, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} f \bullet t : M &\rightarrow N \\ x &\mapsto f(x)t. \end{aligned}$$

A través de las aplicaciones anteriores $H \in {}_S\text{Mod}_T$.

- (b) Sean $M \in {}_S\text{Mod}_R$, $N \in {}_T\text{Mod}_R$, $H' := \text{Hom}_R({}_S M_R, {}_T N_R)$ y las siguientes aplicaciones, denotadas por medio del mismo simbolo para simplificar la notación,

$$\begin{aligned} \bullet : T \times H &\rightarrow H \\ (t, f) &\mapsto t \bullet f, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} t \bullet f : M &\rightarrow N \\ x &\mapsto tf(x); \\ \bullet : H \times S &\rightarrow H \\ (f, s) &\mapsto f \bullet s, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} f \bullet s : M &\rightarrow N \\ x &\mapsto f(sx). \end{aligned}$$

A través de las aplicaciones anteriores $H \in {}_T\text{Mod}_S$.

Demostración. (a) Notemos primeramente que $G := \text{Hom}(M, N)$ es un grupo con la suma usual de funciones, pues M y N lo son con sus respectivas operaciones, y que, si $f, g \in H$, $r \in R$ y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned} (f - g)(rm) &= f(rm) - g(rm) = rf(m) - rg(m) = r(f(m) - g(m)) \\ &= r((f - g)(m)). \\ \implies f - g &\in H \\ \implies H &\leq G. \end{aligned}$$

Así, en particular, H es un grupo abeliano. Verifiquemos ahora que por medio de la primera aplicación $H \in {}_S\text{Mod}$. Sean $f, g \in H$, $s, s' \in S$ y

$m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
((s + s') \bullet f)(m) &= f(m(s + s')) \\
&= f(ms + ms') & M \in \text{Mod}_S \\
&= f(ms) + f(ms') & f \in \text{Hom}(M, N) \\
&= s \bullet f(m) + s' \bullet f(m) \\
&= (s \bullet f + s' \bullet f)(m). \\
\implies (s + s') \bullet f &= s \bullet f + s' \bullet f. \\
(s \bullet (f + g))(m) &= (f + g)(ms) \\
&= f(ms) + g(ms) \\
&= s \bullet f(m) + s \bullet g(m) \\
&= (s \bullet f + s \bullet g)(m). \\
\implies s \bullet (f + g) &= s \bullet f + s \bullet g. \\
(s \bullet (s' \bullet f))(m) &= (s' \bullet f)\{ms\} \\
&= f((ms)s') \\
&= f(m(ss')) & M \in \text{Mod}_S \\
&= ((ss') \bullet f)(m). \\
\implies s \bullet (s' \bullet f) &= (ss') \bullet f. \\
(1_S \bullet f)(m) &= f(m1_S) \\
&= f(m) & M \in \text{Mod}_S. \\
\implies 1_S \bullet f &= f. \\
&\therefore H \in {}_S\text{Mod}.
\end{aligned}$$

Verifiquemos ahora que por medio de la segunda aplicación $H \in \text{Mod}_T$.

Sean $f, g \in H, t, t' \in S$ y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
((f + g) \bullet t)(m) &= ((f + g)(m))t \\
&= (f(m) + g(m))t \\
&= f(m)t + g(m)t & N \in \text{Mod}_T \\
&= f \bullet t(m) + g \bullet t(m) \\
&= ((f + g) \bullet t)(m). \\
\implies (f + g) \bullet t &= (f + g) \bullet t. \\
(f \bullet (t + t'))(m) &= f(m)(t + t') \\
&= f(m)t + f(m)t' \\
&= f \bullet t(m) + f \bullet t'(m) \\
&= (f \bullet t + f \bullet t')(m). \\
\implies f \bullet (t + t') &= f \bullet t + f \bullet t'. \\
((f \bullet t) \bullet t')(m) &= ((f \bullet t)(m))t' \\
&= (f(m)t)t' \\
&= f(m)(tt') & N \in \text{Mod}_T \\
&= (f \bullet (tt'))(m). \\
\implies (f \bullet t) \bullet t' &= f \bullet (tt'). \\
(f \bullet 1_T)(m) &= f(m)1_T \\
&= f(m) & N \in \text{Mod}_T. \\
\implies f \bullet 1_T &= f. \\
&\therefore H \in \text{Mod}_T.
\end{aligned}$$

Así

$$H \in {}_S\text{Mod} \cap \text{Mod}_T.$$

Finalmente, notemos que

$$\begin{aligned}
((s \bullet f) \bullet t)(m) &= ((s \bullet f)(m))t \\
&= f(ms)t \\
&= (f \bullet t)(ms) \\
&= (s \bullet (f \bullet t))(m). \\
\implies (s \bullet f) \bullet t &= s \bullet (f \bullet t). \\
&\therefore H \in {}_S\text{Mod}_T.
\end{aligned}$$

(b) Es análogo a lo demostrado en (a), empleando ahora las propiedades de los morfismos de R -módulos a derecha para verificar que H' es un grupo abeliano con la suma usual de funciones, y que $M \in {}_S\text{Mod}, N \in {}_T\text{Mod}$ para verificar que $H \in {}_T\text{Mod}_S$. \square

Ej 25. Sean R y S anillos, y $M \in {}_R\text{Mod}_S$. Pruebe que:

- a) $\rho : {}_R M_S \longrightarrow \text{Hom}_R({}_R R_{R,R} M_S)$, con $\rho(m)(r) = rm$, es un isomorfismo en ${}_R\text{Mod}_S$
- b) $\lambda : {}_R M_S \longrightarrow \text{Hom}_S({}_S S_{S,R} M_S)$, con $\lambda(m)(s) = ms$, es un isomorfismo en ${}_R\text{Mod}_S$

Demostración. (a) Sea $m \in M$. Probaremos que $\rho(m)$ un morfismo de R - S -bimódulos. Considere $r, t \in R$, en virtud de que M es un R -módulo a izquierda, se tiene que

$$\begin{aligned}\rho(m)(r+t) &= (r+t)m \\ &= rm + tm \\ &= \rho(m)(r) + \rho(m)(t).\end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned}\rho(m)(rt) &= (rt)m \\ &= r(tm) \\ &= r\rho(m)(t).\end{aligned}$$

Por tanto, $\rho \in \text{Hom}_R({}_R R_{R,R} M_S)$.

Además, ρ es un morfismo de R -módulos a izquierda. En efecto, si $a, b \in R$ y $x, y \in M$, entonces

$$\begin{aligned}\rho(x+y)(a) &= a(x+y) \\ &= ax + ay \\ &= \rho(x)(a) + \rho(y)(a).\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}\rho(x)(ab) &= (ab)x \\ &= a(bx) \\ &= a\rho(x)(b).\end{aligned}$$

Posteriormente, si $m \in \text{Ker}(\rho)$, entonces $\rho(m) = 0$. De esta forma, $rm = 0$, para cualquier $r \in R$. Como M es unitario, el único de sus elementos que es anulado por cada elemento de R es el 0; en este sentido, $\text{Ker}(\rho) = 0$. Por consiguiente, ρ es monomorfismo.

Finalmente, sea $g \in \text{Hom}_R(R, M)$. Si consideramos $g(1)$, se satisface que $\rho(g(1)) = g$. $\therefore \rho$ es isomorfismo.

(b) De manera análoga al inciso anterior, podemos probar este inciso, por lo cual nos centraremos más en las cuentas. Bajo este contexto, tenemos que:

- Sean $m \in M$ y $s, u \in S$.

$$\begin{aligned}\rho(m)(su) &= m(su) \\ &= (ms)u \\ &= \rho(m)(s)u\end{aligned}$$

- Sean $m, n \in M$ y $s \in S$.

$$\begin{aligned}\rho(m+n)(s) &= (m+n)s \\ &= ms + ns \\ &= \rho(m)(s) + \rho(n)(s)\end{aligned}$$

- Sean $m \in M$ y $s, u \in S$

$$\begin{aligned}\rho(m)(su) &= m(su) \\ &= (ms)u \\ &= \rho(m)(s)u\end{aligned}$$

Así mismo, ρ es un isomorfismo. En efecto, si $x \in \text{Ker}(\rho)$, entonces $\rho(x) = 0$; de donde $x = 0$. Más aún, si $g \in \text{Hom}_S(S, M)$, entonces $\rho(g(1)) = g$. $\therefore \rho$ es un isomorfismo.

□

Ej 26. Sea R un anillo y $e^2 = e \in R$, un idempotente en R .

- Pruebe que la estructura de anillo en R induce, de manera natural, una estructura de anillo en $eRe := \{ere : r \in R\}$. ¿Es eRe un subanillo de R ?
- Para cada $M \in \text{Mod}(R)$, pruebe que la acción a izquierda $eRe \times eM \rightarrow eM$, $(ere, em) \mapsto erem$ induce una estructura de eRe -módulo a izquierda en eM .
- Pruebe que la correspondencia $m_e : \text{Mod}(R) \rightarrow \text{Mod}(eRe)$, dada por $(M \xrightarrow{f} N) \mapsto (eM \xrightarrow{f|_{eM}} eN)$, es funtorial.

Demostración. a) Como R es anillo, se tienen los siguientes resultados:
 $\forall a, b \in R$

$$eae - ebe = e(ae - be) = e(a - b)e \in eRe$$

(por lo que eRe es subgrupo abeliano bajo la suma),

$$(eae)(ebe) = eae^2be = e(aeb)e \in eRe$$

y

$$e(eae) = e^2ae = eae = eae^2 = (eae)e.$$

Por lo tanto R es un anillo con e su inverso, y por esto mismo no puede ser subanillo de R exepcto en el caso en que $e = 1_R$.

b) Observemos que $\forall a \in eM$ y $\forall s \in eRe$.

$$a = em \quad \text{y} \quad s = ere \quad \text{para alguna} \quad m \in M \quad \text{y} \quad r \in R,$$

así, llamando $*$ a la acción que definida como $(ere, em) \mapsto erem$, entonces

$$s * a = (ere)(em) = erem = ere^2m = (ere)(em).$$

Por lo que

$$\begin{aligned} (er_1e + er_2e) * (em) &= (er_1e + er_2e)(em) \\ &= er_1eem + er_2eem \\ &= (er_1e) * (em) + (er_2e) * (em). \\ (ere) * (em_1 + em_2) &= (ere)(em_1 + em_2) \\ &= ereem_1 + ereem_2 \\ &= (ere) * (em_1) + (ere) * (em_2). \\ 1_{eRe} * (em) &= e(em) = e^2m = em. \end{aligned}$$

$$[(er_1e)(er_2e)] * (em) = [(er_1e)(er_2e)](em) = er_1eer_2eem.$$

Por otro lado

$$(er_1e) * [(er_2e) * (em)] = (er_1e) * (er_2eem) = er_1eer_2eem.$$

Así $*$ es una acción de módulos.

c) Para que la correspondencia sea funtorial debe preservar identidades y composición de morfismos, es decir:

$$\text{i) } m_e(1_M) = 1_{m_e(M)}.$$

$$\text{ii) } \text{ Si } M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L, \text{ se tiene que } m_e(gf) = m_e(g) \circ m_e(f).$$

Sea $m \in M$ entonces

$$\text{i) } m_e(1_M)(em) = 1_M|_{eM}(em) = em, \text{ entonces } m_e(1_M) = 1_{e_m(M)} = 1_{eM}.$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } m_e(gf)(em) &= (gf)|_{eM}(em) = gf(em) = g(f(em)) = g(f|_{eM}(em)) \\ &= g(f|_{eM}(em)) = g|_{eM}(f|_{eM}(em)) \\ &= (g|_{eM} \circ f|_{eM})(em). \end{aligned}$$

□

Ej 27. Sean R y S anillos, $e \in R$ y $\epsilon \in S$ idempotentes, $M \in {}_R\text{Mod}_S$, $R' := eRe$ y $S' := \epsilon S \epsilon$. Entonces:

- (a) existen acciones tales que $Re \in {}_R\text{Mod}_{R'}$, $\epsilon S \in {}_{S'}\text{Mod}_S$, $eM \in {}_{R'}\text{Mod}_S$ y $M\epsilon \in {}_R\text{Mod}_{S'}$;
- (b) las siguientes aplicaciones son morfismos de bimódulos

(i)

$$\begin{aligned} \rho : {}_{R'}eM_S &\rightarrow \text{Hom}_R({}_RRe_{R'}, {}_RM_S) \\ em &\mapsto \rho(em), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \rho(em) : {}_RRe_{R'} &\rightarrow {}_RM_S \\ re &\mapsto (re)m; \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \lambda : {}_RM_{\epsilon S'} &\rightarrow \text{Hom}_S({}_{S'}\epsilon S_S, {}_RM_S) \\ m\epsilon &\mapsto \lambda(m\epsilon), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \lambda(m\epsilon) : {}_{S'}\epsilon S_S &\rightarrow {}_RM_S \\ \epsilon s &\mapsto m\epsilon s; \end{aligned}$$

Demostración. (a) Por el Ej. 26 R' y S' son anillos. Además, notemos que $R \in {}_R\text{Mod}_R$, a través de las acciones naturales inducidas por el producto en R . Así pues, si se considera $M = R = S$ y $e = \epsilon$, se tiene que $Re \in {}_R\text{Mod}_{R'}$ como consecuencia de que $M\epsilon \in {}_R\text{Mod}_{S'}$; similarmente $\epsilon S \in {}_{S'}\text{Mod}_S$ se sigue de que $eM \in {}_{R'}\text{Mod}_S$. Sea $s \in S$. Notemos que

$$\begin{aligned} ms + (-m)s &= (m - m)s = 0_M s = 0_M. \\ \implies -(ms) &= (-m)s. \end{aligned}$$

Por lo anterior, si $ms \in Ms$ entonces $-(ms) \in Ms$. Además, si $m's \in Ms$,

$$\begin{aligned} ms + m's &= (m + m')s \in Ms. \\ \implies Ms &\leq M. \end{aligned}$$

Así, en particular $M\epsilon$ es un grupo abeliano. Consideremos las siguientes aplicaciones, denotadas por medio del mismo

simbolo para simplificar la notación e inducidas a partir de las acciones como R -izquierdo S -derecho bimódulo en M ,

$$\begin{aligned} * : R \times M\epsilon &\rightarrow M\epsilon \\ (r, m\epsilon) &\mapsto rm\epsilon, \\ * : M\epsilon \times S' &\rightarrow M\epsilon \\ (m\epsilon, \epsilon s\epsilon) &\mapsto m\epsilon s\epsilon. \end{aligned}$$

Sean $m, m' \in M$, $r, r' \in R$. Entonces

$$\begin{aligned} (r + r') * m\epsilon &= (r + r') m\epsilon = (rm + r'm) \epsilon = rm\epsilon + r'm\epsilon \\ &= r * m\epsilon + r' * m\epsilon. \\ r * (m\epsilon + m'\epsilon) &= r * (m + m') \epsilon = (r(m + m')) \epsilon = rm\epsilon + rm'\epsilon \\ &= r * m\epsilon + r * m'\epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon^2 = \epsilon$

$$\begin{aligned} (rr') * (m\epsilon) &= (rr') m\epsilon = (r(r'm)) \epsilon = r(r'm\epsilon) \epsilon \\ &= r * (r' * m\epsilon). \\ 1_R * (m\epsilon) &= (1_R m) \epsilon = m\epsilon. \\ \implies M &\in {}_R\text{Mod}. \end{aligned}$$

Ahora, sean $s, s' \in S$. Entonces

$$\begin{aligned} m\epsilon * (\epsilon s\epsilon + \epsilon s'\epsilon) &= m\epsilon * (\epsilon(s + s')\epsilon) = (m\epsilon(s + s')) \epsilon \\ &= (m\epsilon s) \epsilon + (m\epsilon s') \epsilon = m\epsilon * \epsilon s\epsilon + m\epsilon * \epsilon s'\epsilon. \\ (m\epsilon + m'\epsilon) * \epsilon s\epsilon &= (m + m') \epsilon * \epsilon s\epsilon = (m + m') \epsilon s\epsilon \\ &= m\epsilon s\epsilon + m'\epsilon s\epsilon = m\epsilon * \epsilon s\epsilon + m'\epsilon * \epsilon s\epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon^2 = \epsilon$

$$\begin{aligned} m\epsilon * ((\epsilon s\epsilon)(\epsilon s'\epsilon)) &= m\epsilon * \epsilon(s\epsilon s'\epsilon) = (m\epsilon(s\epsilon s')) \epsilon = ((m\epsilon s)\epsilon) s\epsilon \\ &= (m\epsilon s\epsilon) s\epsilon = (m\epsilon * \epsilon s\epsilon) * \epsilon s'\epsilon. \\ (m\epsilon) * 1_{S'} &= (m\epsilon) * \epsilon = (m\epsilon) \epsilon = m(\epsilon\epsilon) \\ &= m\epsilon. \\ \implies M &\in \text{Mod}_{S'}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} r * (m\epsilon * \epsilon s\epsilon) &= r * (m\epsilon s\epsilon) = r(m\epsilon s) \epsilon \\ &= (rm) \epsilon s\epsilon & M \in {}_R\text{Mod}_S \\ &= (rm) \epsilon * \epsilon s\epsilon \\ &= (r * m\epsilon) * \epsilon s\epsilon. \\ \implies M\epsilon &\in {}_R\text{Mod}_{S'}. \end{aligned}$$

En forma análoga a lo desarrollado anteriormente se verifica que, a través de las aplicaciones

$$\begin{aligned} \cdot : R' \times eM &\rightarrow eM \\ (ere, em) &\mapsto erem, \\ \cdot : eM \times S &\rightarrow eM \\ (em, s) &\mapsto ems, \end{aligned}$$

$eM \in {}_{R'}\text{Mod}_S$.

(b) Sean $a, b, r \in R$. Entonces

$$\begin{aligned} \rho(em)(r(ae + be)) &= (r(ae + be))m = r((ae + be)m) \\ &= r((ae)m + (be)m) \\ &= r(\rho(em)(ae) + \rho(em)(be)). \\ \implies \rho(em) &\in \text{Hom}_R({}_R Re_{R'}, {}_R M_S). \end{aligned}$$

Por lo anterior, y dado que por el Ej. 24 $\text{Hom}_R({}_R Re_{R'}, {}_R M_S) \in {}_{R'}\text{Mod}_S$, ρ es una función bien definida. Ahora, sean $m, m' \in M$, $s \in S$ y $x \in R$ y

- las acciones definidas en el Ej. 24(a), entonces

$$\begin{aligned} \rho(ere \cdot (em + em') \cdot s)(xe) &= \rho(ere \cdot e(m + m') \cdot s)(xe) \\ &= \rho(ere(m + m')s)(xe) \\ &= (xe)(re(m + m')s) \\ &= (xe)(rem + rem's) \\ &= (xe)rem + (xe)rem's \\ &= ((xere)m)s + ((xere)m')s \\ &= (\rho(em)(xere))s + (\rho(em')(xere))s \\ &= (\rho(em)(xe * ere))s + (\rho(em')(xe * ere))s \\ &= (ere \bullet \rho(em)(xe))s + (ere \bullet \rho(em')(xe))s \\ &= (ere \bullet \rho(em) \bullet s)(xe) + (ere \bullet \rho(em') \bullet s)(xe) \\ &= (ere \bullet \rho(em) \bullet s + ere \bullet \rho(em') \bullet s)(xe) \\ \implies \rho(ere \cdot (em + em') \cdot s) &= ere \bullet \rho(em) \bullet s + ere \bullet \rho(em') \bullet s \\ \therefore \rho &\in \text{Hom}({}_{R'} eM_S, \text{Hom}_R({}_R Re_{R'}, {}_R M_S)). \end{aligned}$$

i.e. ρ es un morfismo de R -izquierda S' -derecha bimódulos, de eM en $\text{Hom}_R({}_R Re_{R'}, {}_R M_S)$. En forma análoga, empleando ahora las acciones previamente definidas en conjunto a las acciones definidas en el Ej. 24(b), se verifica que λ un morfismo de R' -izquierda S -derecha bimódulos, de M en $\text{Hom}_S({}_{S'} Re_S, {}_R M_S)$.

□

Ej 28. Para un anillo R , pruebe que:

- a) Para $M \in \text{Mod}(R)$, se tiene que $M \in \text{Mod}(\text{End}({}_R M))$, via la acción a izquierda, $\text{End}({}_R M) \times M \longrightarrow M$, $(f, m) \mapsto f \cdot m = f(m)$. Más aún, vale que $M \in {}_{R-\text{End}({}_R M)}\text{Mod}$.
- b) Para $N \in \text{Mod}(R^{op})$, se tiene que $N \in \text{Mod}(\text{End}(N_R))$, vía la acción a izquierda, $\text{End}(N_R) \times N \longrightarrow N$, $(g, n) \mapsto g \cdot n = g(n)$. Más aún, vale que $N \in {}_{\text{End}(N_R)}\text{Mod}_R$.

Demostración. (a) En virtud de que M es un grupo abeliano, bastará probar que la acción a izquierda $(f, m) \mapsto f \cdot m = f(m)$ induce una estructura de $\text{End}({}_R M)$ -módulo a izquierda. Para dicho fin, se tiene que:

- Sean $f, g \in \text{End}({}_R M)$ y $m \in M$

$$\begin{aligned} (f + g) \cdot m &= (f + g)(m) \\ &= f(m) + g(m) \\ &= f \cdot m + g \cdot m. \end{aligned}$$

- Sean $f \in \text{End}({}_R M)$ y $m, n \in M$

$$\begin{aligned} f \cdot (m + n) &= f(m + n) \\ &= f(m) + f(n) \\ &= f \cdot m + f \cdot n. \end{aligned}$$

- Sean $f, g \in \text{End}({}_R M)$ y $m \in M$

$$\begin{aligned} (fg) \cdot m &= (fg)(m) \\ &= f(g(m)) \\ &= f(g \cdot m) \\ &= f \cdot (g \cdot m). \end{aligned}$$

- $Id \cdot m = Id(m) = m$.

Por ello, $M \in \text{End}({}_R M)$. Más aún, el hecho de que todo morfismo h preserva productos por escalar garantiza que

$$\begin{aligned} h \cdot (rx) &= h(rx) \\ &= rh(x) \\ &= r(h \cdot x) \end{aligned}$$

$\therefore M \in {}_{R-\text{End}({}_R M)}\text{Mod}$.

(b) Considere $N \in \text{Mod}(R^{op})$. Veremos que bajo la acción a izquierda $(g, n) \mapsto g \cdot n = g(n)$, N es un ${}_{\text{End}(N_R)}\text{Mod}_R$ -bimódulo. De tal forma que:

- Sean $\varphi, \psi \in \text{End}(N_R)$, $m \in M$

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi) \cdot m &= (\varphi + \psi)(m) \\ &= \varphi(m) + \psi(m) \\ &= \varphi \cdot m + \psi \cdot m. \end{aligned}$$

- Sean $\varphi \in \text{End}(N_R)$, $m \in M$

$$\begin{aligned} \varphi \cdot (m + n) &= \varphi(m + n) \\ &= \varphi(m) + \varphi(n) \\ &= \varphi \cdot m + \varphi \cdot n. \end{aligned}$$

- Sean $\varphi, \psi \in \text{End}(N_R)$, $m \in M$

$$\begin{aligned} (\varphi\psi) \cdot m &= (\varphi\psi)(m) \\ &= \varphi(\psi(m)) \\ &= \varphi(\psi \cdot m) \\ &= \varphi \cdot (\psi \cdot m). \end{aligned}$$

- $\text{Id} \cdot m = \text{Id}(m) = m.$

De aquí, N es un $\text{End}(N_R)$ -módulo. Finalmente, a partir de que todo morfismo τ induce

$$\begin{aligned} \tau \cdot (ts) &= \tau(ts) \\ &= \tau(t)s \\ &= (\tau \cdot t)s. \end{aligned}$$

$$\therefore N \in \text{End}(N_R)\text{Mod}_S.$$

□

Lema 6. Sean \mathcal{A} una categoría y $f : A \rightarrow B \in \text{Hom}(\mathcal{A})$. Si f es un split-epi y un monomorfismo, entonces f es un isomorfismo.

Demostración. Dado que f es un isomorfismo si y sólo si es un monomorfismo y un epimorfismo basta con probar que, bajo estas condiciones, f es un epimorfismo. Sean $C \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ y $g, h : B \rightarrow C \in \text{Hom}(\mathcal{A})$ tales que $gf = hf$. Como f es un split-epi $\exists k : B \rightarrow A \in \text{Hom}(\mathcal{A})$ tal que $fk = 1_B$, entonces

$$\begin{aligned} (gf)k &= (hf)k \implies g(fk) = h(fk) \\ &\implies g1_B = h1_B \\ &\implies g = h. \end{aligned}$$

□