Lista 1

Ej 1. Ejercicio 13.
Sea $f : (L, \leq) \longrightarrow (L', \leq')$ un morfismo de lattices. Pruebe que:

a) f es morfismo de posets.

b) f es un isomorfosmo de lattices si y sólo si lo es de posets.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Sean $x, y \in L$. Probaremos primero que $x \leq y$ si y sólo si $x \wedge y = x$. Si $x \leq y$, entonces $x \leq x \wedge y$, puesto que $x \leq x$ y $x \leq y$. Además, por definición, tenemos que $x \wedge y \leq x$. Así $x = x \wedge y$. Por el contrario, si suponemos que $x = x \wedge y$, entonces observe que $x \leq y$.

La afirmación anterior será útil en el proceso de probar este inciso. En efecto, supongamos que $x \leq y$. Como f es morfismo de lattices, se tiene que $f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$. $\therefore f(x) \leq' f(y)$.

$\boxed{\text{(b)}}\boxed{\Rightarrow)}$ Suponga que f es isomorfismo de lattices. En primer lugar, por el inciso anterior, f es morfismo de posets. Ahora, por hipótesis, existe $g : L' \longrightarrow L$ un morfismo de lattices tal que $f \circ g = Id_{L'}$ y $g \circ f = Id_L$; éste a su vez también es un morfismo de posets. Por tanto, f es un isomorfismo de posets.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Consideremos que f es un isomorfismo de posets. Entonces existe $g : L' \longrightarrow L$ un morfismo de posets tal que $f \circ g = Id_{L'}$ y $g \circ f = Id_L$. Veremos que g es un morfismo de latices. Sean así $r, t \in L'$. Dado que $r \wedge t \leq' r$ y $r \wedge t \leq' t$, se tiene que $g(r \wedge t) \leq g(r)$ y $g(r \wedge t) \leq g(t)$, y por ende $g(r \wedge t) \leq g(r) \wedge g(t)$. Posteriormente, usando el hecho de que f es morfismo de lattices, se deduce que

$$\begin{aligned} r \wedge t &= f(g(r \wedge t)) \\ &\leq' f(g(r) \wedge g(t)) \\ &= f(g(r)) \wedge f(g(t)) \\ &= r \wedge t \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} g\left(r \wedge t\right) &= g\left(f\left(g\left(r\right) \wedge g\left(t\right)\right)\right) \\ &= g\left(r\right) \wedge g\left(t\right) \end{aligned}$$

Dado que g es morfismo de lattices, podemos concluir que la afirmación es cierta. $\square$

Ej 2. Ejercicio 16.
Sean $M \in {}_RMod$ y $n \leq M$. Consideremos $L_N\left(M\right) = \{X \in L\left(M\right) \mid N \leq X\}$. Pruebe que el epimorfismo canónico de R-módulos a izquierda

$$\begin{aligned} \pi_N : M &\to M/N \\ m &\mapsto m + N \end{aligned}$$

induce el isomorfismo de lattices

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_N : L_N\left(M\right) &\to L\left(M/N\right) \\ X &\mapsto X/N \end{aligned}$$

cuyo inverso es $\widehat{\pi}_N^{-1}\left(Z\right) = \{x \in M \mid x + N \in Z\}$.

Demostración. Sea $K \in L_N\left(M\right)$ tal que $\widehat{\pi}_N\left(K\right) = 0$. Notemos que, si $k \in K$, entonces $k + N = 0$. Lo cual implica que $k \in N$, y por ello $K = N$. Esto quiere decir que $\widehat{\pi}_N$ es inyectiva.

Así mismo, dado $T \in L\left(M/N\right)$, se satisface que $\widehat{\pi}_N^{-1}\left(T\right) \in L_N\left(M\right)$. En efecto, para cada $x \in N$, se cumple que $x + N = N \in T$, y en consecuencia $N \subseteq \widehat{\pi}_N^{-1}\left(T\right)$. Adicionalmente, si $x, y \in \widehat{\pi}_N^{-1}\left(T\right)$ y $r \in R$, se cumple que $x + y + N \in T$, $rx + N \in T$. En vista de ésto, se sigue que $x + y, rx \in \widehat{\pi}_N^{-1}\left(T\right)$, y por tanto $\widehat{\pi}_N^{-1}\left(T\right) \in L_N\left(M\right)$.

Por último, observe que

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_N\left(\widehat{\pi}_N^{-1}\left(T\right)\right) &= \left\{x + N \in M/N \,\middle|\, x \in \widehat{\pi}_N^{-1}\left(T\right)\right\} \\ &= \{x + N \in M/N \mid x \in T\} \\ &= T \end{aligned}$$

Más aún, para cualesquiera $T_1, T_2 \in L\left(M/N\right)$, se identifican

$$\widehat{\pi}_N^{-1}\left(T_1 \cap T_2\right) = \widehat{\pi}_N^{-1}\left(T_1\right) \cap \widehat{\pi}_N^{-1}\left(T_2\right)$$

y

$$\widehat{\pi}_N^{-1}\left(T_1 + T_2\right) = \widehat{\pi}_N^{-1}\left(T_1\right) + \widehat{\pi}_N^{-1}\left(T_2\right)$$

$\therefore \widehat{\pi}_N$ es un isomorfismo de retículas. $\square$

Ej 3. Ejercicio 19.

Pruebe que todo anillo no trivial R admite R-módulos simples a izquierda (y a derecha también).

Demostración. Observe que R es finitamente generado como R-módulo, de hecho $R = \langle 1 \rangle$. Entonces, por el **teorema 1.8.1**, R tiene ideales máximos. Sea I un ideal izquierdo máximo de R. Por el **Ejercicio 16**, R/I es un R-módulo simple. De manera análoga, Mod_R posee R-módulos derechos simples. $\square$

Ej 4. Ejercicio 22.

Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos. Pruebe que:

a) La correspondencia de cambio de anillos $F_\varphi : Mod\,(S) \longrightarrow Mod\,(R)$ es un funtor.

b) Para cualesquiera $M, N \in Mod\,(S)$, se tiene que

$$\begin{aligned} Hom_S\,(M,N) &\leq Hom_R\,(F_\varphi\,(M)\,, F_\varphi\,(N)) \\ &= Hom_{\varphi(R)}\,(F_\varphi\,(M)\,, F_\varphi\,(N)) \\ &\leq Hom_{\mathbb{Z}}\,(M,N) \end{aligned}$$

como grupos abelianos. En particular, F_φ es fiel y éste es pleno si $\varphi\,(R) = S$.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Primero, por la propia correspondencia, a todo S-módulo M se le asigna un R-módulo $F_\varphi\,(M) = M$. En vista de lo anterior, bastará probar que $F_\varphi\,(f) = f \in Hom_R\,(F_\varphi\,(M)\,, F_\varphi\,(N))$, para $f \in Hom_S\,(M,N)$ y $M, N \in Mod\,(S)$.

Sea $f : M \longrightarrow N$ un morfismo de S-módulos. Ahora, dados $r \in R$ y $m, n \in M$, se satisface que

$$\begin{aligned} F_\varphi\,(f)\,(r \cdot m + n) &= f\,(\varphi\,(r) * m + n) \\ &= \varphi\,(r) * f\,(m) + f\,(n) \\ &= r \cdot f\,(m) + f\,(n) \\ &= r \cdot F_\varphi\,(f)\,(m) + F_\varphi\,(f)\,(n) \end{aligned}$$

Con lo cual, $F_\varphi\,(f)$ es un morfismo de R-módulos. $\therefore F_\varphi$ es un funtor.

$\boxed{\text{(b)}}$ Note que, por el inciso anterior, todo morfismo de S-módulos es un morfismo de R-módulos. Más aún, como todo R-módulo es un grupo abeliano y como todo morfismo de R-módulos preserva sumas, se tiene que $Hom_S\,(M,N) \leq Hom_R\,(F_\varphi\,(M)\,, F_\varphi\,(N))\, Hom_{\varphi(R)}\,(F_\varphi\,(M)\,, F_\varphi\,(N))$ y que $Hom_R(F_\varphi(M), F_\varphi(N)) \leq Hom_{\mathbb{Z}}(M, N)$.

Por otra parte, F_φ es fiel, toda vez que a cualesquiera 2 morfismos $f \neq g$ se le asignan morfismos $F_\varphi(f) = f \neq g = F_\varphi(g)$. Por otro lado, suponga que $\varphi(R) = S$. Dado $f \in Hom_R(M, N)$, éste es un morfismo de S-módulos. En efecto, si $s \in S$, entonces $s = \varphi(r)$, para alguna $r \in R$. De esta forma, definimos $f(s * m)$ como $f(s * m) = f(rm)$, e inclusive tenemos $F_{\varphi^{-1}}(f) = f$. $\therefore F_\varphi$ es pleno. □

Ej 5. Ejercicio 25.
Sean R y S anillos, y $M \in {}_R Mod_S$. Pruebe que:

a) $\rho : {}_R M_S \longrightarrow Hom_R({}_R R_R, {}_R M_S)$, con $\rho(m)(r) = rm$, es un isomorfismo en ${}_R Mod_S$

b) $\lambda : {}_R M_S \longrightarrow Hom_S({}_S S_S, {}_R M_S)$, con $\lambda(m)(s) = ms$, es un isomorfismo en ${}_R Mod_S$

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Sea $m \in M$. Probaremos que $\rho(m)$ un morfismo de R-S-bimódulos. Considere $r, t \in R$, en virtud de que M es un R-módulo a izquierda, se tiene que

$$\begin{aligned} \rho(m)(r+t) &= (r+t)m \\ &= rm + tm \\ &= \rho(m)(r) + \rho(m)(t) \end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned} \rho(m)(rt) &= (rt)m \\ &= r(tm) \\ &= r\rho(m)(t) \end{aligned}$$

Por tanto, $\rho \in Hom_R({}_R R_R, {}_R M_S)$.

Además, ρ es un morfismo de R-módulos a izquierda. En efecto, si $a, b \in R$ y $x, y \in M$, entonces

$$\begin{aligned} \rho(x+y)(a) &= a(x+y) \\ &= ax + ay \\ &= \rho(x)(a) + \rho(y)(a) \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} \rho(x)(ab) &= (ab)x \\ &= a(bx) \\ &= a\rho(bx) \end{aligned}$$

Posteriormente, si $m \in Ker(\rho)$, entonces $\rho(m) = 0$. De esta forma, $rm = 0$, para cualquier $r \in R$. Como M es unitario, el único de sus elementos que es anulado por cada elemento de R es el 0; en este sentido, $Ker(\rho) = 0$. Por consiguiente, ρ es monomorfismo.

Finalmente, sea $g \in Hom_R(R, M)$. Si consideramos $g(1)$, se satisface que $\rho(g(1)) = g$. $\therefore \rho$ es isomorfismo.

$\boxed{\text{(b)}}$ De manera análoga al inciso anterior, podemos probar este inciso, por lo cual nos centraremos más en las cuentas. Bajo este contexto, tenemos que:

- Sean $m \in M$ y $s, u \in S$.

$$\begin{aligned} \rho(m)(su) &= m(su) \\ &= (ms)u \\ &= \rho(m)(s)u \end{aligned}$$

- Sean $m, n \in M$ y $s \in S$.

$$\begin{aligned} \rho(m+n)(s) &= (m+n)s \\ &= ms + ns \\ &= \rho(m)(s) + \rho(n)(s) \end{aligned}$$

- Sean $m \in M$ y $s, u \in S$

$$\begin{aligned} \rho(m)(su) &= m(su) \\ &= (ms)u \\ &= \rho(m)(s)u \end{aligned}$$

Así mismo, ρ es isomorfismo. En efecto, si $x \in Ker(\rho)$, entonces $\rho(x) = 0$; de donde $x = 0$. Más aún, si $g \in Hom_S(S, M)$, entonces $\rho(g(1)) = g$.
$\therefore \rho$ es isomorfismo. □

Ej 6. Ejercicio 28.
Para un anillo R, pruebe que:

a) Para $M \in Mod(R)$, se tiene que $M \in Mod(End({}_RM))$, via la acción a izquierda, $End({}_RM) \times M \longrightarrow M$, $(f, m) \mapsto f \cdot m = f(m)$. Más aún, vale que $M \in {}_{R-End({}_RM)}Mod$.

b) Para $N \in Mod(R^{op})$, se tiene que $N \in Mod(End(N_R))$, vía la acción a izquierda, $End(N_R) \times N \longrightarrow N$, $(g, n) \mapsto g \cdot n = g(n)$. Más aún, vale que $N \in {}_{End(N_R)}Mod_R$.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ En virtud de que M es un grupo abeliano, bastará probar que la acción a izquierda $(f, m) \mapsto f \cdot m = f(m)$ induce una estructura de $End({}_RM)$-módulo a izquierda. Para dicho fin, se tiene que:

- Sean $f, g \in End\left({}_RM\right)$ y $m \in M$

$$\begin{aligned}(f+g)\cdot m &= (f+g)(m)\\ &= f(m)+g(m)\\ &= f\cdot m+g\cdot m\end{aligned}$$

- Sean $f \in End\left({}_RM\right)$ y $m, n \in M$

$$\begin{aligned}f\cdot(m+n) &= f(m+n)\\ &= f(m)+f(n)\\ &= f\cdot m+f\cdot n\end{aligned}$$

- Sean $f, g \in End\left({}_RM\right)$ y $m \in M$

$$\begin{aligned}(fg)\cdot m &= (fg)(m)\\ &= f(g(m))\\ &= f(g\cdot m)\\ &= f\cdot(g\cdot m)\end{aligned}$$

- $Id\cdot m = Id(m) = m$

Por ello, $M \in End\left({}_RM\right)$. Más aún, el hecho de que todo morfismo h preserva productos por escalar garantiza que

$$\begin{aligned}h\cdot(rx) &= h(rx)\\ &= rh(x)\\ &= r(h\cdot x)\end{aligned}$$

$\therefore M \in {}_{R-End({}_RM)}Mod$.

$\boxed{\text{(b)}}$ Considere $N \in Mod\left(R^{op}\right)$. Veremos que bajo la acción a izquierda $(g, n) \mapsto g\cdot n = g(n)$, N es un ${}_{End(N_R)}Mod_R$-bimódulo. De tal forma que:

- Sean $\varphi, \psi \in End(N_R)$, $m \in M$

$$\begin{aligned}(\varphi+\psi)\cdot m &= (\varphi+\psi)(m)\\ &= \varphi(m)+\psi(m)\\ &= \varphi\cdot m+\psi\cdot m\end{aligned}$$

- Sean $\varphi \in End(N_R)$, $m \in M$

$$\begin{aligned}\varphi\cdot(m+n) &= \varphi(m+n)\\ &= \varphi(m)+\varphi(n)\\ &= \varphi\cdot m+\varphi\cdot n\end{aligned}$$

- Sean $\varphi, \psi \in End\,(N_R)$, $m \in M$

$$\begin{aligned}(\varphi\psi) \cdot m &= (\varphi\psi)\,(m) \\ &= \varphi\,(\psi\,(m)) \\ &= \varphi\,(\psi \cdot m) \\ &= \varphi \cdot (\psi \cdot m)\end{aligned}$$

- $Id \cdot m = Id\,(m) = m$

De aquí, N es un $End\,(N_R)$-módulo. Finalmente, apartir de que todo morfismo τ induce

$$\begin{aligned}\tau \cdot (ts) &= \tau\,(ts) \\ &= \tau\,(t)\,s \\ &= (\tau \cdot t)\,s\end{aligned}$$

$\therefore N \in {}_{End(N_R)}Mod_S$. $\square$