Lista 3

Arruti, Sergio, Jesús

Ej 29. Sea $M_{i\in I}$ una familia de grupos abelianos. Pruebe que $\coprod_{i\in I} M_i$ es un subgrupo abeliano de $\prod_{i\in I} M_i$.

Demostración. Sean $x, y \in \coprod_{i\in I} M_i$, entonces $x, y \in \prod_{i\in I} M_i$ y $|supp(x)| < \infty,\ |supp(y)| < \infty$. Entonces $x - y = (x_i - y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$, pero $x_i = 0, y_j = 0$ para casi toda $i \in I,\ j \in I$, así $(x_i - y_i) \neq 0$ a lo más en $|supp(x)| + |supp(y)| < \infty$ puntos. Por lo tanto $|supp(x - y)| < \infty$ y por lo tanto $(x - y) \in \coprod_{i\in I} M_i$, es decir, $\coprod_{i\in I} M_i$ es subgrupo de $\prod_{i\in I} M_i$.

□

Ej 30. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia en $Mod\,(R)$. Entonces $\coprod_{i\in I} M_i$ es un submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$.

Demostración. Sean $G := \prod_{i\in I} M_i$ y $H := \coprod_{i\in I} M_i$. Si $I = \varnothing$ se tiene lo deseado, pues en tal caso $G = H = \{0\}$.
Supongamos que $I \neq \varnothing$. Por el Ej. 30 H es un subgrupo de G y así, en patícular, $\forall\ a, b \in H,\ a + b \in H$. Sea $r \in R$ y $a = (a_i)_{i\in I} \in H$. Dado que $r \bullet 0_i = 0_i,\ \forall\ i \in I$, se sigue que

$$\begin{aligned} &\{i \in I \mid r \bullet a_i \neq 0\} \subseteq \{i \in i \mid a_i \neq 0\}, \\ \implies\ &supp\,(r \bullet a) \subseteq supp\,(a)\,. \end{aligned}$$

Con lo cual $r \bullet a$ tiene soporte finito, pues a lo tiene. De modo que $r \bullet a \in H$ y por lo tanto $H \in \mathscr{L}\,(G)$.

□

Ej 31. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía en $Mod(R)$. Pruebe que:

a) Para cada $i \in I$, las inclusiones i-ésimas

$$\begin{aligned} inc_i : M_i &\to \coprod_{i\in I} M_i \\ x &\mapsto (y_t)_{t\in I} \end{aligned}$$

con

$$y_t = \begin{cases} x & t = i \\ 0 & t \neq i \end{cases}$$

$$Inc_i : M_i \to \prod_{i \in I} M_i$$

$$x \mapsto inc_i(x),$$

son monomorfismos en $Mod(R)$.

b) Para cada $i \in I$, las proyecciones i-ésimas

$$Proy_i : \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow M_i, \ Proy_i(m) = m_i$$

$$proy_i : \coprod_{i \in I} M_i \longrightarrow M_i, \ proy_i(m) = m_i$$

son epimorfismos en $Mod(R)$.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Primero veamos que estas funciones son morfismos. Considere $i \in I$. En vista que Inc_i está determinada por inc_i, bastará con mostrar que el ser morfismo se satisface para inc_i. Sean $x, y \in M_i$ y $r \in R$. Entonces

$$\begin{aligned}(inc_i(x+y))_t &= \begin{cases} x+y & si\ i = t \\ 0 & si\ i \neq t \end{cases} \\ &= (inc_i(x))_t + (inc_i(y))_t\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(inc_i(rx))_t &= \begin{cases} rx & si\ i = t \\ 0 & si\ i \neq t \end{cases} \\ &= r\begin{cases} x & si\ i = t \\ 0 & si\ i \neq t \end{cases} \\ &= r(inc_i(x))_t\end{aligned}$$

Por lo que inc_i e Inc_i son morfismos.

Ahora, sean $i \in I$ y $x \in Ker(inc_i)$. Entonces $(inc_i(x))_t = (0)_t$. Es decir, en cada entrada $inc_i(x)$ es 0. En particular, para $t = x$. En consecuencia, $x = 0$. Por tanto, $inc_i(x)$ es monomorfismo.

Por otro lado, sean $i \in I$ y $x \in Ker(Inc_i)$. De esta forma, $x \in Ker(inc_i)$. Como inc_i es monomorfismo, $x = 0$. Por lo que Inc_i también lo es.

$\boxed{\text{(b)}}$ Sea $i \in I$. $Proy_i$ es un epimorfismo. Dado $x \in M_i$, el elemento $m = (Inc_i\,(x))_t \in \prod_{i\in I} M_i$ satisface que $Proy_i\,(m) = x$.

De manera análoga, para cada $i \in I$, la proyección $proy_i$ es un epimorfismo, sustituyendo Inc_i por inc_i. $\square$

Ej 32. Sea $C = \coprod_{i\in I} M_i$ en $Mod(R)$, via las inclusiones naturales $\{\mu_i \colon M_i \longrightarrow C\}_{i\in I}$. Pruebe que, para cada $H \in Mod(R)$, la función $\varphi_H \colon \operatorname{Hom}\left(\coprod_{i\in I} M_i, H\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R\,(M_i, H)\,,\ g \mapsto (g\circ\mu_i)_{i\in I}$, es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Morfismo:
Sean $f, g \in \operatorname{Hom}\left(\coprod_{i\in I} M_i, H\right)$ entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_H(f+g)(m) &= ((f+g)\circ\mu_i)_{i\in I}(m) = [(f+g)(\mu_i(m))]_{i\in I} \\
&= (f(\mu_i(m_i)))_{i\in I} + (g(\mu_i(m_i)))_{i\in I} \\
&= (f\circ\mu_i)_{i\in I}(m) + (g\circ\mu_i)_{i\in I}(m) \\
&= \varphi_H(f)(m) + \varphi_H(g)(m).
\end{aligned}$$

Por lo tanto es morfismo de grupos.

Inyectividad y buena definición.

Como $\varphi_H(g) = (g\circ\mu_i)_{i\in I}$ entonces φ es el producto de composiciones de funciones, así que está bien definida. Ahora, si $\varphi_H(f) = \varphi_H(g)$ entonces $f_i = (f\circ\mu_i) = (g\circ\mu_i) = g_i \quad \forall i \in I$ y se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} M_i \arrow[r, "f"] & H \\
M_i \arrow[u, "\mu_i"] \arrow[ur, "f_i = f\circ\mu_i"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} M_i \arrow[r, "g"] & H \\
M_i \arrow[u, "\mu_i"] \arrow[ur, "g_i = g\circ\mu_i"']
\end{tikzcd}$$

por la propiedad universal del coproducto existe un único morfismo h tal que $h\circ\mu_i = g_i = f_i = h\circ\mu_i$, por lo que $f = g$.

Suprayectividad:
Sea $f \in \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R\,(M_i, H)$, entonces $f = (f_i)_{i\in I}$ con $f_i \in \operatorname{Hom}_R\,(M_i, H)$.
Así por la propiedad universal del coproducto existe una única

$g\colon \coprod_{i\in I} M_i \longrightarrow H$ en $Mod(R)$ tal que $g \circ \mu_i = f_i \quad \forall i \in I$. Por lo tanto $\varphi_H(g) = (g \circ \mu_i)_{i\in I} = (f_i)_{i\in I} = f$ por lo que φ_H es isomorfismo. $\square$

Ej 33. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia en $Mod\,(R)$, $N \in Mod\,(R)$ y $\{g_i : N \to M_i\}_{i\in I}$ una familia de morfismos de R-módulos. Entonces $\exists!\ g : N \to \prod_{i\in I} M_i$ morfismo de R-módulos tal que $Proy_i \circ g = g_i$, $\forall\ i \in I$.

Demostración. Si $I = \varnothing$ entonces $\prod_{i\in I} M_i = \{0\}$ y el enunciado se reduce a verificar que existe un único morfismo de R-módulos de N en $\{0\}$, lo cual es inmediato.
Supongamos que $I \neq \varnothing$. Notemos que la función

$$\begin{aligned} g : N &\to \prod_{i\in I} M_i \\ n &\mapsto (g_i\,(n))_{i\in I} \end{aligned}$$

es un morfismo de R-módulos, pues g_i lo es $\forall\ i \in I$, $(a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I} = (a_i + b_i)_{i\in I}$ y $r \bullet (a_i)_{i\in I} = (r \bullet a_i)_{i\in I}$. Sea $j \in I$, entonces

$$\begin{aligned} Proy_j\,(g\,(n)) &= Proy_j\left((g_i\,(n))_{i\in I}\right) \\ &= g_j\,(n)\,. \\ \Longrightarrow\ Proy_j \circ g &= g_j,\ \forall\ j \in I. \end{aligned}$$

Finalmente, verifiquemos la unicidad. Sea $h : N \to \prod_{i\in I} M_i$ tal que $Proy_j \circ h = g_j$, $\forall\ j \in I$. Notemos que por lo anterior $Proy_j \circ h = Proy_j \circ g\ \forall\ j \in I$. Sea $n \in N$, $(y_i)_{i\in I} = g\,(n)$ y $(z_i)_{i\in I} = h(n)$, entonces

$$\begin{aligned} y_j &= Proy_j\left((y_i)_{i\in I}\right) = Proy_j\left((g_i\,(n))_{i\in I}\right) = Proy_j\,(g\,(n)) \\ &= Proy_j\,(h\,(n)) = z_j,\ \forall\ j \in I. \\ &\Longrightarrow\ g\,(n) = h\,(n)\ \ \forall\ n \in N. \\ &\Longrightarrow\ g = h. \end{aligned}$$

$\square$

Ej 34. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ en $Mod\,(R)$, $P \in Mod\,(R)$ y $\{\pi_i : P \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) Existe un isomorfismo $\varphi : \prod_{i\in I} Mi \longrightarrow P$ en $Mod(R)$ tal que para $i \in I$, $\pi_i \circ \varphi = Proy_i$

b) P y $\{\pi_i : P \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ son un producto para $\{M_i\}_{i\in I}$

Demostración. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Sean $M \in Mod\,(R)$ y $\{f_i : M \longrightarrow M_i\}i \in I$ una familia de morfismos en $Mod\,(R)$. Dado que $\prod_{i\in I} M_i$ es un producto para $\{M_i\}_{i\in I}$, existe un único morfismo $f : M \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ tal que, para cada $i \in I$, $Proy_i \circ f = f_i$. Además, por hipótesis, existe $\varphi : \prod_{\in I} Mi \longrightarrow P$ en $Mod(R)$ tal que para $i \in I$, $\pi_i \circ \varphi = Proy_i$. De modo que

$$\pi_i \circ \varphi \circ f = Proy_i \circ f = f_i$$

Más aún, esta $\varphi \circ f$ es única. En efecto, si $g : M \longrightarrow P$ un morfismo tal que, para $i \in I$, $\pi_i \circ g = f_i$, entonces $\varphi^{-1} \circ g \in Hom_R\left(M, \prod_{i\in I} M_1\right)$ y

$$\begin{aligned} Proy_i \circ \varphi^{-1} \circ g &= \pi_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ g \\ &= \pi_i \circ g \\ &= f_i \end{aligned}$$

Como $\prod_{i\in I} M_i$ y $\{Proy_i\}_{i\in I}$ es un producto para $\{M_i\}_{i\in I}$, $f = \varphi^{-1} \circ g$. Así, $\varphi \circ f = g$. En consecuencia, se tiene que P y $\{\pi_i : P \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ son un producto para $\{M_i\}_{i\in I}$.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Observe que $\left\{Proy_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i\right\}_{i\in I}$ es una familia de morfismos en $Mod\,(R)$. En virtud de que P y $\{\pi_i : P \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ son un producto para $\{M_i\}_{i\in I}$, existe un único morfismo $\varphi : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow P$ tal que, para cada $i \in I$, $\pi_i \circ \varphi = Proy_i$. En vista de ésto, se concluye el resultado. □

Ej 35. Sea $P = \prod_{i\in I} M_i$ en $Mod(R)$ via las proyecciones naturales $\{\pi_i \colon P \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$. Pruebe que, para cada $H \in Mod(R)$, la función $\phi_H \colon \mathrm{Hom}_R(H, \prod_{i\in I} M_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(H, M_i)$, $g \mapsto (\pi_i \circ g)_{i\in I}$, es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Primero veamos que es morfismo.
Como π es morfismo $\forall i \in I$

$$\begin{aligned} \phi_H(g+f) = [\pi_i \circ (g+f)]_{i\in I} = [(\pi_i \circ g) + (\pi_i \circ f)]_{i\in I} \\ = (\pi_i \circ g)_{i\in I} + (\pi_i \circ f)_{i\in I} = \phi_H(g) + \phi_H(f). \end{aligned}$$

Por lo tanto en morfismo de grupos abelianos.

Inyectividad y buena definición.

Como $\phi_H(g) = (\mu_i \circ g)_{i\in I}$ entonces ϕ_H es el producto de composiciones de funciones, así que está bien definida. Ahora, si $\phi_H(f) = \phi_H(g)$ entonces $f_i = (\mu_i \circ f) = (\mu_i \circ g) = g_i \quad \forall i \in I$ y se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_i=\mu_i\circ f"'] & \prod_{i\in I} M_i \arrow[dl, "\mu_i"'] \\ M_i & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g_i=\mu_i\circ g"'] & \prod_{i\in I} M_i \arrow[dl, "\mu_i"'] \\ M_i & \end{tikzcd}$$

por la propiedad universal del producto existe un único morfismo h tal que $\mu_i \circ h = g_i = f_i = \mu_i \circ h$, por lo que $f = g$.

Suprayectividad:
Sea $h \in \prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom_R}(H, M_i)$, entonces $h = (h_i)_{i\in I}$ con $h_i \in \mathrm{Hom_R}(H, M_i)$, así por la propiedad universar del producto existe un único $g\colon H \longrightarrow P$ tal que $\pi_i \circ g = h_i$, por lo que $\phi_H(g) = (\pi_i \circ g)_{i\in I} = (h_i)_{i\in I} = h$. Entonces ϕ_H es isomorfismo de grupos.

$\square$

Ej 36. Sea $\{\pi_i : M \to M_i\}_{i=1}^n \subseteq Mod\,(R)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\{\pi_i : M \to M_i\}_{i=1}^n$ es un producto para $\{M_i\}_{i\in I}$;

b) $\exists\ \{\mu_i : M_i \to M\}_{i=1}^n \in Mod\,\{R\}$ tal que $\sum_{i=1}^n \mu_i\pi_i = Id_M$ y $\pi_i\mu_i = {\delta_{ij}}^M\ \forall\ i, j \in [1, n]$.

Demostración. Sea $I = [1, n]$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ La propiedad universal del producto aplicada a cada elemento de la familia (de familias en $Mod\,(R)$) $\left\{\left\{{\delta_{ij}}^M : M_i \to M_i\right\}_{i\in I}\right\}_{j\in I}$ garantiza que $\forall\ j \in I\ \exists\ \mu_j : \exists!\ \mu_j : M_j \to M$ tal que

$$\pi_i\mu_j = \delta_{ij}^M \quad \forall\ i \in I.$$

Así pues, consideremos $\{\mu_i\}_{i\in I}$. Notemos que nuevamente por la propiedad universal del producto, $f : M \to M \in Mod\,(R)$ es tal que $\forall\ i'I\ \pi_i \circ f = \pi_i$

si, y sólo si, $f = Id_M$; y que

$$\pi_i \sum_{j=1}^{n} (\mu_j \pi_j) = \sum_{j=1}^{n} ((\pi_i \pi_j) \pi_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\delta_{ij}^{M} \right) \pi_j \right) = \delta_{ii}^{M} \pi_i = Id_{M_i} \pi_i$$
$$= \pi_i.$$
$$\implies \sum_{j=1}^{n} (\mu_j \pi_j) = Id_M.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $\{\eta : N \to M_i\}_{i \in I} \subseteq Mod(R)$ y

$$f : N \to M$$
$$n \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \eta_i \right) (n)$$

. Así $f : N \to M \in Mod(R)$ y, si $j \in I$,

$$\pi_j \circ f = \pi_j \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \eta_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\pi_j \mu_i) \eta_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ji} \eta_i = \eta_j.$$
$$\implies \pi_j f = \eta_j \ \forall \ j \in I.$$

Finalmente, sea $g : N \to M \in Mod(R)$ tal que $\pi_i g = \eta_i \ \forall \ i \in I$. Así

$$g = Id_M g = \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \pi_i \right) g = \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i (\pi_i g) \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \eta_i \right) = f.$$
$$\implies g = f.$$

$\square$

Ej 37. Para $M \in f.l.(R)$, pruebe que:

a) $l(M) = 0$ si y sólo si $M = 0$

b) $l(M) = 1$ si y sólo si M es simple

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Observe que si $M = 0$, entonces $0 = M_0 = M$ es la única serie de composición de M, salvo repeticiones. De esta manera $l(M) = 0$. Inversamente, si $l(M) = 0$, entonces la única serie de composición de M, salvo repeticiones, es $0 = M_0 = M$. $\therefore M = 0$.

$\boxed{\text{(b)}}$ Para este inciso suponga que M es un R-módulo simple. En consecuencia, $L(M) = \{0, M\}$. Con lo cual, M tiene una serie de composición $0 = M_0 \leq M_1 = M$. De modo que $l(M) = 1$. Por otro lado, suponga que $l(M) = 1$, y sea $0 = M_0 \leq M_1 = M$ una serie de composición para M. $\therefore M \cong M/0 \cong M_1/M_0$ es simple. $\square$

Ej 38. Para un anillo R pruebe que

a) Una sucesión de la forma $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$ es exacta si y sólo si $Ker(f) = 0 = CoKer(g)$ y $Im(f) = Ker(g)$.

b) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto, (i.e. las filas y las columnas son sucesiones exactas) en $Mod(R)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha'"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta"] & Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "\beta''"] & 0 \\
 & X'' \arrow[d] & Y'' \arrow[d] & Z'' \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Pruebe que existen morfismos $X'' \xrightarrow{f''} Y'' \xrightarrow{g''} Z''$ en $Mod(R)$ (además son únicos) tales que dicho diagrama se completa al siguiente diagrama conmutativo y exacto en $Mod(R)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha'"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta"] & Y' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "\beta''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'' \arrow[r, "f''"] \arrow[d] & Y'' \arrow[r, "g''"] \arrow[d] & Z'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

c) Pruebe que $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si φ es un isomorfismo en $Mod(R)$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Definimos $CoKer(g) := Z/_{Im(g)}$, así, como la sucesión es exacta, $Ker(f) = Im(0) = 0$, $Im(f) = Ker(g)$ y

$Im(g) = Ker(0) = Z$, es decir, $Z/_{Im(g)} = 0$ y así $CoKer(g) = 0$.

Ahora, si $Ker(f) = 0 = CoKer(g)$ y $Im(f) = Ker(g)$, entonces la función $0_f\colon 0 \longrightarrow X$ y $0_g\colon Z \longrightarrow 0$ son morfismos tales que $m(0_f) = Ker(f)$, $Ker(0_g) = Z$ y, como $0 = CoKer(g) = Z/_{Im(g)}$, y $Ker(0_g) = Im(g)$, se tiene que la sucesión $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ es exacta.

$\boxed{b)}$ Para este ejercicio se usará el siguiente lema.
Lema de la serpiente:
Sea R un anillo y considere el siguiente diagrama de R-Módulos donde los renglones son exactos

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' &
\end{tikzcd}$$

.

Entonces existe un morfismo de conexión $\eta\colon Ker(\gamma) \longrightarrow CoKer(\alpha)$, y la sucesión $Ker(\alpha) \xrightarrow{f|_{Ker(\alpha)}} Ker(\beta) \xrightarrow{g|_{Ker(\beta)}} Ker(\gamma) \longrightarrow$

$\longrightarrow CoKer(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}'} CoKer(\beta) \xrightarrow{\bar{g}'} CoKer(\gamma)$ es exacta.
Más aun, si f es inyectiva entonces $f|_{Ker(\alpha)}$ también lo es. Dualmente si g' es suprayectiva, entonces $\bar{g}'$ también.

Con este lema en mente es muy sencillo probar el inciso b), pues por el lema de la serpiente los dos primeros renglones inducen la sucesión exacta
$0 \longrightarrow Ker(\alpha) \longrightarrow Ker(\alpha') \longrightarrow Ker(\alpha'') \longrightarrow$

$\longrightarrow CoKer(\alpha) \xrightarrow{f''} CoKer(\alpha') \xrightarrow{g''} CoKer(\alpha'') \longrightarrow 0$.
Como las columnas del diagrama son sucesiones exactas, entonces α, α' y α'' son monomorfismos, es decir, $Ker(\alpha) = Ker(\alpha') = Ker(\alpha'') = 0$ y, como las columnas son exactas, $CoKer(\alpha') = X'/_{Ker(\beta)} = X''$ pues β es epimorfismo. Análogamente $CoKer(\alpha') = Y''$ y $CoKer(\alpha'') = Z''$, así tenemos que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow X'' \xrightarrow{f''} Y'' \xrightarrow{g''} Z'' .$$

Mas aún, la construcción de f'' y g'' dadas en el lema de la serpiente aseguran que $f''\beta = \beta' f'$ y $g''\beta' = \beta'' g'$ lo cual hace conmutar el diagrama del ejercicio.

$\boxed{c)}$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0 \text{ , es exacta}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow\ & Ker(\varphi) = Im(0) = 0 \quad \text{y} \\
& \quad CoKer(\varphi) = {}^{B}\!/_{Im(\varphi)} = {}^{B}\!/_{Ker(0)} = {}^{B}\!/_{B} = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \varphi \text{ es monomorfismo y epimorfismo} \\
\Longleftrightarrow\ & \varphi \text{ es isomorfismo.}
\end{aligned}$$

□

Ej 39. Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $Mod\,(R)$ y $F := \{F_i\}_{i \in I}$ una filración en B. Entonces $f^{-1}\,(F) := \left\{f^{-1}\,(F_i)\right\}_{i \in I}$ y $g\,(F) := \{g\,(F_i)\}_{i \in I}$ son, respectivamente, filtraciones en A y en C.

Demostración. Se tiene que g es sobre y f es inyectiva, por ser exacta la sucesión.
g, al ser un morfismo de R-módulos, necesariamente es un morfismo de CPO de $(B, \leq)$ en $(C, \leq)$, además $g\,(\langle 0_B \rangle_R) = \langle 0_C \rangle_R$ $g\,(B) = \langle C \rangle_R$. Por lo anterior se tiene que $g\,(F)$ es una filtración de C.
Por su parte, se tiene que, $\forall\, M, N \in \mathscr{L}\,(B)$, $f^{-1}\,(M) \in \mathscr{L}\,(A)$ y $f^{-1}\,(M) \leq f^{-1}\,(N)$, y además $f^{-1}\,(\langle 0_B \rangle_R) = Ker\,(f) = \langle 0_A \rangle_R$ y $f^{-1}\,(B) = A$. Por lo tanto $f^{-1}\,(F)$ es una filtración de A.

□

Ej 40. Para una sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ en $Mod\,(R)$, pruebe que: $B \in f.l.\,(R)$ si y sólo si $A, C \in f.l.\,(R)$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow)}$ Suponga que $B \in f.l.\,(R)$. Entonces B tiene una serie de composición $\mathfrak{F}$. Por el **Lema 2.1.1.a)**, tanto $f^{-1}\,(\mathfrak{F})$ como $g\,(\mathbb{F})$ son series de composición de A y de C respectivamente. En consecuencia, $A, C \in f.l.\,(R)$.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Sean $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ y $\mathfrak{C} = \{C_j\}_{j=1}^{m}$ series de composición para A y C, respectivamente. Luego, los $f(A_i)$ y los $g^{-1}(C_j)$ son submódulos de B. Definimos la serie $\mathfrak{B} = \{B_t\}_{t=1}^{m+n}$, donde $B_t = f(A_t)$ si $t \leq n$ y $B_t = g^{-1}(C_{t-n})$ si $n + 1 \leq t \leq n + m$.

Ahora, dado que f es un monomorfismo, se tiene que $B_t \cong A_t$, para $t \leq n$. Y por otro lado, el teorema de la correspondencia y el tercer teorema de isomorfismo garantizan que $\dfrac{B_{t+1}}{B_t} = \dfrac{g^{-1}(C_{t+1})}{g^{-1}(C_t)} \cong \dfrac{C_{t-n+1}}{C_{t-n}}$ para cada $n+1 \leq t \leq n+m$. Más aún, tenemos que los cocientes $\dfrac{B_{t+1}}{B_t}$ son simples, toda vez que los cocientes $\dfrac{A_{i+1}}{A_i}$ y $\dfrac{C_{j+1}}{C_j}$ lo son. De esta forma $\mathfrak{B}$ es una serie de composición para B. $\therefore B \in f.l.(R)$ $\square$

Ej 41. Pruebe que las siguientes condiciones se satisfacen para un anillo R.

a) Sean $M \in f.l(R)$ y $N \leq M$. Entonces

$$M = N \iff l(M) = l(N) \iff l({}^{M}\!/_{N}) = 0.$$

b) Sean $M \in f.l(R)$ y $f \in \mathrm{End}({}_RM)$. Entonces f es un isomorfismo $\iff$ f es un monomorfismo $\iff$ f es un epimorfismo.

Demostración. a) $(M = N \Rightarrow l(M) = l(N))$ es claro.
Supongamos que $l(M) = l(N)$, entonces como $0 \to N \to M \to {}^{M}\!/_{N} \to 0$ es exacta, por el ej. 40 N y ${}^{M}\!/_{N}$ están en $f.l.(R)$ y por el corolario 2.13b), $l(M) = l(N) + l({}^{M}\!/_{N})$, y como $l(M) = l(N)$ entonces $0 = l({}^{M}\!/_{N})$.
Por último, por el ej. 37 $l({}^{M}\!/_{N}) = 0 \iff {}^{M}\!/_{N} = 0$ por lo tanto $M = N$ demostrando así todas las implicaciones en a).

b) supongamos f es monomorfismo, entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} f(M) \xrightarrow{g} {}^{M}\!/_{f(M)} \longrightarrow 0,$$

donde g es la proyección de $f(M)$ en M.

Como M es $f.l.$ entonces existe una serie de composición $\{F_i\}_{i=0}^n$ de M. Así $\{f(F_i)\}_{i=0}^n$ cumple que ${}^{f(F_i)}\!/_{f(F_{i-1})} \cong f({}^{F_i}\!/_{F_{i-1}})$ (por ser f inyectiva) que es simple para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto $\{f(F_i)\}_{i=0}^n$ es una serie de composición y $l(f(M)) = n = l(M)$. Por a) $M = f(M)$ y así la sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ es exacta, implicando que f sea isomorfismo.

Ahora, si g es supra, la sucesión
$0 \longrightarrow Ker(g) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{g} Im(g) = M \longrightarrow 0$ es exacta, por lo que
$l(M) = l(M) + l(Ker(g))$, y como $l(M)$ es finita, entonces $l(Ker(g)) = 0$, es decir, $Ker(g) = 0$ entonces g es inyectiva. $\square$

Ej 42. Si $M \in Mod\,(R)$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

a) M es noetheriano,

b) $\mathscr{L}\,(M) \subseteq mod\,(R)$,

c) si $\mathcal{J} \subseteq \mathscr{L}\,(M)$, $\mathcal{J} \neq \varnothing$, entonces $(\mathcal{J}, \leq)$ posee por lo menos un elemento maximal.

Demostración. $\boxed{a) \implies b)}$ Sea $A \leq M$. Si A es finito la proposición es inmediata, pues $A = \langle A \rangle_R$. Supongamos que A es infinito y sea $a_1 \in A \setminus \langle 0 \rangle_R$. Si $A = \langle a_1 \rangle_R$ se tiene lo deseado, en caso contrario sea $a_2 \in A \setminus \{0, a_1\}$. Si $A = \langle a_1, a_2 \rangle_R$, se tiene lo deseado, en caso contrario, consideremos $a_3 \in A \setminus \{0, a_1, a_2\}$. Notemos que este proceso se puede efectuar solo una cantidad finita, i.e. $\exists\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$ tales que $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle_R$, y por lo tanto $A \in mod\,(R)$, ya que si no fuera el caso, por el axioma de elección dependiente, existiría una cadena ascendente

$$\langle a_1 \rangle_R \leq \langle a_1, a_2 \rangle_R \leq \langle a_1, a_2, a_3 \rangle_R \leq \dots$$

que no se estabilizaría y por lo tanto M no sería noetheriano.

$\boxed{b) \implies c)}$ Procedamos por el contrapositivo. Supongamos que $\exists\ \mathcal{J}$ una familia no vacía de submódulos de M tal $(\mathcal{J}, \leq)$ que no posee elementos maximales. Así sea $J_1 \in \mathcal{J}$, luego J_1 no es maximal en $(\mathcal{J}, \leq)$ y por lo tanto $\exists\ J_2 \in \mathcal{J}$ tal que $J_1 \lneq J_2$. Por su parte, J_2 no es maximal en $(\mathcal{J}, \leq)$ y por lo tanto $\exists\ J_3 \in \mathcal{J}$ tal que $J_2 \lneq J_3$. Aplicando el axioma de elección dependiente a este procedimiento se obtiene la cadena ascendente de submódulos $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. $J := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \in \mathscr{L}\,(M)$,pues la unión de una cadena ascendente de submódulos es un submódulo. Supongamos que J es finitamente generado, luego $\exists\ j_1, \dots, j_k \in J$ tales que $J = \langle j_1, \dots, j_k \rangle_R$. Notemos que, $\forall\ i \in [1, k]$, $\exists\ l_i \in \mathbb{N}$ tal que $j_i \in J_{l_i}$, y así, si $t := max\,\{l_i \mid i \in 1, k\}$ entonces $j_i \in J_t$, $\forall\ i \in 1, k$. De modo que

$$\langle j_1, \dots, j_k \rangle_R \leq J_t \lneq J = \langle j_1, \dots, j_k \rangle_R\,,$$

lo cual es absurdo (J_t es un submódulo estricto de J pues $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena estrictamente ascendente) y por lo tanto J no es finitamente generado.

$\boxed{c) \implies a)}$ Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena ascendente de submódulos. Luego $\varnothing \neq \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{L}\,(M)$ y por lo tanto $\left(\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \leq\right)$ posee al menos un elemento maximal. De modo que $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tal que A_k es maximal en $\left(\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \leq\right)$. Si $\forall\ l > k\ A_l = A_k$ se tiene lo deseado. Supongamos que $\exists\ l > k$ tal que $A_k \lneq A_l$, por ser maximal, se tiene que $A_l = M$ y por lo tanto $A_r = M$, $\forall\ r \geq l$. Así, en cualquier caso, se tiene que la cadena se estabiliza y por lo tanto M es noetheriano.

□

Ej 43. Para $M \in Mod\,(R)$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) M es artiniano

b) Para toda $\mathfrak{F} \subseteq L(M)$, con $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, existe un elemento mínimo en en $(\mathfrak{F}, \leq)$

Demostración. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Dada $\mathfrak{F}$ una familia no vacía de submódulos de M, sea $N_1 \in \mathfrak{F}$. Suponga que N_1 no es un elemento mínimo de $\mathfrak{F}$, de este modo existe $N_2 \in \mathfrak{F}$ tal que $N_2 \lneqq N_1$. Repitiendo este argumento, obtenemos una cadena de submódulos $N_1 \geq N_2 \geq \cdots$ en $\mathfrak{F}$. En virtud de que M es artiniano, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $t \in \mathbb{N}$, $N_k = N_{k+t}$. $\therefore N_k$ es un elemento mínimo de $\mathfrak{F}$.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Sea $N_1 \gneqq N_2 \gneqq \cdots$ una cadena de submódulos de M. Considere $\mathfrak{F} = \{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Entonces, por hipótesis, $\mathfrak{F}$ tiene elementos mínimos. Sea N_k uno de dichos mínimos. Dado que $\mathfrak{F}$ es una cadena, $N_k = N_{k+t}$, para toda $t \in \mathbb{N}$. $\therefore M$ es artiniano. □

Ej 44. (Modularidad) Para $M \in Mod(R)$ y $H, K, L \in \mathscr{L}(M)$ pruebe que

$$K \leq H \iff H \cap (K + L) = K + (H \cap L).$$

Demostración. Sea $x \in H \cap (K + L)$ entonces $x = k + l$ con $k \in K, x \in H$ y $l \in L$, pero $k \in H$ pues $K \leq H$, entonces $l \in H$. Por lo tanto $x = k + l$ con $k \in K$ y $l \in H \cap L$, es decir, $x \in K + (H \cap L)$.

Sea $y \in K + (H \cap L)$, entonces $x = k + r$ para alguna $r \in H \cap L$, por lo que $x \in K + H = H$ pues $K \leq H$, así $x \in H$ y $x = k + r$ con $k \in K$ y $r \in L$, por lo que $x \in H \cap (K + L)$. □

Ej 45. Sea

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $Mod(R)$. Entonces M es noetheriano (respect. artiniano) si y sólo si K y N lo son.

Demostración. Verifiquemos primeramente la afirmación para el caso de módulos noetherianos.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $A \in \mathscr{L}(K)$, luego $f(A) \in \mathscr{L}(M)$ y, dado que M es noetheriano, $f(A) \in \mathscr{L}(M)$ es finitamente generado, con lo cual $\exists\ x_1, \ldots, x_l \in f(A)$ tales que $f(A) = \langle x_1, \ldots, x_l \rangle_R$; notemos que $\forall\ i \in [1, l]\ \exists\ k_i \in A$ tal que $x_i = f(k_i)$. Así si $Y := \{k_i\}_{i=1}^{l}$ y $a \in A$, entonces $f(a) \in f(K)$ y por

lo tanto $\exists\ r_1 \ldots, r_l \in R$ tales que

$$
\begin{aligned}
&f(a) = \sum_{i=1}^{l} r_i x_i = \sum_{i=1}^{l} r_i f(k_i) = f\left(\sum_{i=1}^{l} r_i k_i\right) \\
&\implies a = \sum_{i=1}^{l} r_i k_i, \qquad\qquad\qquad\qquad Ker(f) = \langle 0_K \rangle_R \\
&\implies A = \langle Y \rangle_R . \\
&\implies A \text{ es finitamente generado.}
\end{aligned}
$$

Por su parte sea $C \in \mathscr{L}(N)$, luego $g^{-1}(C) \in \mathscr{L}(M)$ y así $\exists\ m_1, \ldots, m_o \in g^{-1}(C)$ tales que $g^{-1}(C) = \langle m_1, \ldots, m_l \rangle_R$; notemos que $\forall\ i \in [1, o]$ $g(m_i) \in C$, con lo cual si $Z := \{c(m_i)\}_{i=1}^{o}$ y $c \in C$ entonces $Z \subseteq C$ y, dado que g es sobre, $\exists\ m \in M$ tal que $g(m) = c$. Luego $m \in g^{-1}(C)$, por lo cual $\exists r_i, \ldots, r_o \in R$ tales que $m = \sum_{i=1}^{0} r_i m_i$ y así

$$
\begin{aligned}
&c = \sum_{i=1}^{o} r_i f(m_i) \\
&\implies C = \langle Z \rangle_R . \\
&\implies C \text{ es finitamente generado.}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto K y N son noetherianos.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $S \leq M$, entonces $f^{-1}(S) \leq K$ y $g(S) \leq N$. Como K y N son noetherianos $\exists\ a_1, \ldots, a_t \in f^{-1}(S)$ y $\exists\ c_1, \ldots, c_u \in g(S)$ tales que $f^{-1}(S) = \langle a_1, \ldots, a_t \rangle_R$ y $g(S) = \langle c_1, \ldots, c_u \rangle_R$. En partícular se tiene que $f(a_1), \ldots, f(a_t) \in S$ y $\exists\ b_1, \ldots, b_u \in S$ tales que $\forall\ i \in [1, u]$ $c_i = g(b_i)$, con lo cual $g(S) = \langle g(b_1), \ldots, g(b_u) \rangle_R$ y por lo tanto, si $X := \{f(a_1), \ldots, f(a_t), b_1, \ldots, b_u\}$, $X \subseteq S$. Sea $s \in S$, luego $g(s) \in g(S)$, por lo cual $\exists\ r_1, \ldots, r_u \in R$ tales que

$$
\begin{aligned}
&g(s) = \sum_{i=1}^{u} r_i g(b_i) = g\left(\sum_{i=1}^{u} r_i b_i\right) \\
&\implies g\left(s - \sum_{i=1}^{u} r_i b_i\right) = 0 \\
&\implies s - \sum_{i=1}^{u} r_i b_i \in Ker(g) = Im(f) \\
&\implies \exists\ a \in K \text{ tal que } f(a) = s - \sum_{i=1}^{u} r_i b_i .
\end{aligned}
$$

Notemos que $s-\sum_{i=1}^{u} r_i b_i \in S$ pues S es un submódulo de M, con lo cual $a \in f^{-1}(S)$ y así $\exists\ r'_1, \ldots, r'_t \in R$ tales que

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{j=1}^{t} r'_t a_j\right) &= s - \sum_{i=1}^{u} r_i b_i \\
&\implies s = f\left(\sum_{j=1}^{t} r'_t a_j\right) + \sum_{i=1}^{u} r_i b_i \\
&\implies s \in \langle X \rangle_R \\
&\implies S = \langle X \rangle_R . \\
&\implies S \text{ es finitamente generado.}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto M es noetheriano.
Para el caso de módulos artianos:
$\boxed{\implies}$ Sea $A_1 \geq A_2 \geq \ldots$ una cadena descendente en $\mathscr{L}(K)$, luego $f(A_1) \geq f(A_2) \geq \ldots$ es una cadena descendente en $\mathscr{L}(M)$ y, como M es artiniano, $\exists\ L \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ k \geq L\ f(A_k) = f(A_L)$. Sea $k \geq L$ y notemos que dado que $A_L \geq A_k$ basta con probar que $A_L \leq A_k$. Sea $a \in A_L$, luego $f(a)\, \text{ínf}\,(A_L) = (A_k)$ y por tanto $\exists\ b \in A_k$ tal que $f(a) = f(b)$. Como f es inyectiva se sigue que $a = b$ y por lo tanto $a \in A_k$, con lo cual se tiene que $A_L \leq A_k$. Así, K es artiniano.
Por su parte, sea $C_1 \geq C_2 \geq \ldots$ una cadena descendente en $\mathscr{L}(N)$, luego $g^{-1}(C_1) \geq g^{-1}(C_2) \geq \ldots$ es una cadena descendente en $\mathscr{L}(M)$ y, como M es artiniano, $\exists\ L' \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ k \geq L'\ g^{-1}(C_k) = g^{-1}(C_{L'})$. Sea $k \geq L'$ y notemos que dado que $C_{L'} \geq C_k$ basta con probar que $C_{L'} \geq C_k$ basta con probar que $C_{L'} \leq C_k$. Sea $c \in C_{L'}$, como g es sobre $\exists\ b \in M$ tal que $g(b) = c$, con lo cual $b \in g^{-1}(C_{L'})$, por tanto $b \in g^{-1}(C_k)$ y así $c = g(b) \in C_k$. Por lo anterior se sique que $C_{L'} \leq C_k$ y así se tiene lo deseado.
$\boxed{\impliedby}$ Sea $B_1 \geq B_2 \geq \ldots$ una cadena descendente en $\mathscr{L}(M)$, luego $f^{-1}(B_1) \geq f^{-1}(B_2) \geq \ldots$ y $g(B_1) \geq g(B_2) \geq \ldots$ son, respectivamente, cadenas descendientes en $\mathscr{L}(K)$ y en $\mathscr{L}(N)$ y por tanto $\exists\ r, s \in \mathbb{N}$ tales que

$$\forall\ k \geq r\ f^{-1}(B_k) = f^{-1}(B_r) \tag{*}$$

y

$$\forall\ k \geq s\ g(B_k) = g(B_s) . \tag{**}$$

Así, sea $t = \text{máx}\{r, s\}$, $k \geq t$ y $m \in B_t$. Luego $g(m) \in g(B_t)\, g(B_t) = g(B_k)$, por $(**)$. Así $\exists\ b \in B_k$ tal que $g(m) = g(b)$, con lo cual $m - b \in Ker(g) = Im(f)$, por lo cual $\exists\ a \in K$ tal que $m - b = f(a)$. Notemos que, en partícular, $b \in C_t$, así que $m - b \in C_t$ y por lo tanto $a \in f^{-1}(C_t)$.

Luego

$$\begin{aligned}
&a \in f^{-1}(C_k), && (*)\\
&\quad\Longrightarrow\; f(a) \in C_k &&\\
&\quad\Longrightarrow\; m - b \in C_k &&\\
&\quad\Longrightarrow\; m \in C_k, && b \in C_k.\\
\Longrightarrow\; &C_t \leq C_k. &&
\end{aligned}$$

Por lo tanto M es artiniano.

$\square$

Ej 46. Para $M, N \in f.l.(R)$, pruebe que $M \coprod N \in f.l.(R)$ y que $l\left(M \coprod N\right) = l(M) + l(N)$.

Demostración. Primero, del **Ejercicio 40** y de la exactitud de la sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M \coprod N \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$, se tiene que $M \coprod N \in f.l.(R)$, ya que M, N tienen longitud finita. Más aún, dada una serie de composición $\mathfrak{F}$ para $M \coprod N$, el **Lema 2.1.1.b)** garantiza que

$$l_{\mathfrak{F}}\left(M \coprod N\right) = l_{f^{-1}(\mathfrak{F})}(M) + l_{g(\mathfrak{F})}(N)$$

$\therefore l\left(M \coprod N\right) = l(M) + l(N)$. $\square$

Ej 47. Sea $M \in Mod(R)$. Pruebe que

a) Si $M \simeq N$ en $Mod(R)$ con N semisimple, entonces M es semisimple.

b) M es semisimple si y sólo si $\exists \{S_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{L}(M)$ de módulos simples tal que $M = \bigoplus\limits_{i\in I} S_i$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Sea $\varphi\colon N \longrightarrow M$ un isomorfismo y $N = \coprod\limits_{i\in I} S_i$ con inclusiones naturales $\{\mu_i\colon S_i \longrightarrow N\}$ y $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia de modulos simples.
Consideremos la familia $\{\varphi\circ\mu_i\colon S_i \longrightarrow M\}$, entonces, si $\{g_i\colon S_i \longrightarrow M\}$ es una familia de morfismos en $Mod(R)$, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[dr, "\exists!\, g"] & \\
M \arrow[u, "\varphi^{-1}"] \arrow[r] & Z \\
S_i \arrow[u, "\varphi\circ\mu_i"] \arrow[ur, "g_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del coproducto $\exists!\, g\colon N \longrightarrow Z$ tal que $g \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \mu_i = g_i \ \forall i \in I$, es decir, $g \circ \mu_i = g_i \quad \forall i \in I$.
Así $g \circ \varphi^{-1}\colon M \longrightarrow Z$ es tal que $(g \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \mu_i) = g_i \quad \forall i \in I$.
Ahora, si $h(\varphi \circ \mu_i) = g_i$ con $h\colon M \longrightarrow Z$, entonces

$$(h \circ \varphi) \circ \mu_i = h(\varphi \circ \mu_i) = (g \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \mu_i) = g_i$$

pero g es el único con esta propiedad, entonces $h\varphi = g$ y así $h = g \circ \varphi^{-1}$.
Por lo tanto M es semisimple, $M = \coprod\limits_{i\in I} S_i$, con la familia $\{\varphi \circ \mu_i\colon S_i \longrightarrow M\}$.

$\boxed{b)}$ Supongamos que M es semisimple, entonces $M = \coprod\limits_{i\in I} S'_i$ con $\{S'_i\}_{i\in I}$ simples y morfismos $\{\mu_i\colon S'_i \longrightarrow M\}$.
Tomaremos la familia $\{S_i\}_{i\in I}$ con $\mu_i(S'_i) = S_i$, como μ_i es monomorfismo para toda $i \in I$, entonces $S_i \neq 0 \quad \forall i \in I$, mas aún, como S'_i es simple se tiene que S_i también lo será. Por esto $\mu : \coprod\limits_{i\in I} S'_i \longrightarrow \coprod\limits_{i\in I} S_i$ con $\mu = (\mu_i)_{i\in I}$ es isomorfismo y $\{S_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{L}(M)$ es una familia ajena dos a dos. Entonces

$$\bigoplus_{i\in I} S_i = \coprod_{i\in I} S_i \simeq \coprod_{i\in I} S'_i = M.$$

La otra implicación es trivial. $\square$