Lista 4

Arruti, Sergio, Jesús

Ej 48. Sea $F \in Mod(R)$ un R-módulo libre con base X y $f : X \to N$ una función, con $N \in Mod(R)$. Entonces $\exists!\ \overline{f} : F \to N \in Mod(R)$ tal que $\overline{f}\big|_X = f$.

Demostración. Dado que X es base de F se tiene que $F = \bigoplus_{x \in X} Rx$ y así cada $a \in F$ se descompone de forma única en $\sum\limits_{x \in X} Rx$ como $a = \sum\limits_{x \in X_a} r_x x$, con $X_a \subseteq X$ finito y $r_x \in R$; por lo tanto la aplicación

$$\begin{aligned} \overline{f} : F &\to N \\ a &\mapsto \sum_{x \in X_a} r_x f(x) \end{aligned}$$

es una función bien definida. Sean $r \in R$ y $m, n \in F$, con $\sum\limits_{x \in X_m} r_x x$, $\sum\limits_{x \in X_n} s_x x$, $X' := X_m \cup X_n$ y

$$\begin{aligned} r_x = 0, &\quad \text{si } x \in X' \setminus X_m, \\ s_x = 0, &\quad \text{si } x \in X' \setminus X_n, \end{aligned} \tag{*}$$

entonces, por la unicidad de la descomposición en $\sum\limits_{x \in X} Rx$, la descomposición de $ra + b$ es $\sum_{x \in X'} (rr_x + s_x)\, x$. Así

$$\begin{aligned} \overline{f}\,(ra + b) &= \sum_{x \in X'} (rr_x + s_x)\, f(x) \\ &= \sum_{x \in X'} (rr_x)\, f(x) + \sum_{x \in X'} s_x f(x) \\ &= r \sum_{x \in X_m} r_x f(x) + \sum_{x \in X_n} s_x f(x), \qquad (*) \\ &= r\overline{f}(a) + \overline{f}(b). \\ \Longrightarrow \overline{f} &: F \to N \in Mod\,(R)\,. \end{aligned}$$

Sea $x \in X$, entonces la descomposición de x en $\sum_{x \in X} Rx$ es $1_R x$, con lo cual

$$\begin{aligned}\overline{f}(x) &= \sum_{x\in\{x\}} 1_R f(x)\\ &= f(x).\\ \implies \overline{f}\big|_X &= f.\end{aligned}$$

Finalmente, sea $g : F \to N$ un morfismo de R-módulos tal que $g|_X = f$ y $a \in F$. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}g(a) &= g\left(\sum_{x\in X_a} r_x x\right)\\ &= \sum_{x\in X_a} r_x g(x)\\ &= \sum_{x\in X_a} r_x f(x)\\ &= \overline{f}(x).\\ \implies g &= \overline{f}.\end{aligned}$$

□

Ej 49. Sean $M \in Mod(R)$ y $X \subseteq M$. Considere el morfismo de R-módulos $\overline{\varepsilon}_{X,M} : F(X) \longrightarrow M$, dado por $\overline{\varepsilon}_{X,M}\left(\{t_x\}_{x\in X}\right) = \Sigma_{x\in X} t_x x$. Note que la composición $X \xrightarrow{\varepsilon_x} F(X) \xrightarrow{\overline{\varepsilon}_{X,M}} M$ coincide con la inclusión $X \subseteq M$. Pruebe que:

a) $im(\overline{\varepsilon}_{X,M}) = \langle x\rangle_R$

b) $M = \langle x\rangle_R \Leftrightarrow \overline{\varepsilon}_{X,M}$ es un epimorfismo.

c) X es R-linealmente independiente$\Leftrightarrow \overline{\varepsilon}_{X,M}$ es un monomorfismo.

d) X es una R-base$\Leftrightarrow \overline{\varepsilon}_{X,M}$ es un isomorfismo.

Demostración. $\boxed{\text{a}}$ Primero, como $\langle x\rangle_R$ es un submódulo de M, se tiene que $im(\overline{\varepsilon}_{X,M}) \subseteq \langle x\rangle_R$. Por otro lado, sea $m \in \langle x\rangle_R$. Entonces m tiene una descomposición $m = \Sigma_{x\in X} t_x x$, donde $t_x \in F(X)$. En consecuencia, $\overline{\varepsilon}_{X,M}\left(\{t_x\}_{x\in X}\right) = \Sigma_{x\in X} t_x x = m$. $\therefore im(\overline{\varepsilon}_{X,M}) = \langle x\rangle_R$

$\boxed{\text{(b)}}$ Este inciso se deduce del anterior. $M = \langle x\rangle_R \Leftrightarrow M = im(\overline{\varepsilon}_{X,M}) \Leftrightarrow$ $\overline{\varepsilon}_{X,M}$ es un epimorfismo.

$\boxed{\text{(c)}}\boxed{\Rightarrow)}$ Suponga que $\{t_x\}_{x\in X} \in Ker(\overline{\varepsilon}_{X,M})$. De modo que $\Sigma_{x\in X} t_x x = \overline{\varepsilon}_{X,M}\left(\{t_x\}_{x\in X}\right) = 0$. Dado que X es R-linealmente independiente, para cada $x \in X$, $t_x = 0$. Por tanto, $Ker\left(\overline{\varepsilon}_{X,M}\right) = 0$. $\therefore$ $\overline{\varepsilon}_{X,M}$ es monomorfismo.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Sean $x_1, ..., x_n \in X$ y $r_{x_1}, ...r_{x_n} \in R$ tales que $\Sigma_{k=1}^n r_{x_k} x_k = 0$. Completamos a un elemento de $F(X)$ como $r_x = 0$, con $x \notin \{x_1, ..., x_n\}$. Con lo cual tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}_{X,M}\left(\{r_x\}_{x\in X}\right) &= \Sigma_{x\in X} r_x x\\ &= \Sigma_{k=1}^n r_{x_k} x_k\\ &= 0\end{aligned}$$

Entonces $\{r\}\,xX \in Ker\left(\overline{\varepsilon}_{X,M}\right) = 0$. Por tanto, $r_{x_1} = ... = r_{x_n} = 0$.
$\therefore$ X es R-linealmente independiente.

$\boxed{\text{(d)}}$ Este resultado se concluye de los anteriores. En efecto,

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon}_{X,M}\ es\ un\ isomorfismo &\Leftrightarrow \overline{\varepsilon}_{X,M}\ es\ un\ epimorfismo\ y\ monomorfismo\\ &\Leftrightarrow M = im\left(\overline{\varepsilon}_{X,M}\right)\ y\ X\ es\ R-l.i.\\ &\Leftrightarrow X\ es\ una\ R-base.\end{aligned}$$

$\square$

Ej 50. Sean $f\colon B \to C$ en $Mod(R)$ y $g\colon B \longrightarrow B$ tales que $fg = f$. Pruebe que: $g\colon f \longrightarrow f$ es un isomorfismo en $Mod(R)/C$ si y sólo si $g\colon B \longrightarrow B$ es un isomorismo en $Mod(R)$.

Demostración. $g\colon f \longrightarrow f$ es un isomorfismo en $Mod(R)/C$
$\Longleftrightarrow$ $\exists g^{-1}\colon f \longrightarrow f$ tal que $g^{-1}g = 1_f$ y $gg^{-1} = 1_f$
$\Longleftrightarrow$ $\exists g^{-1}\colon f \longrightarrow f$ tal que $g^{-1}g = Id_B$ y $gg^{-1} = Id_B$
$\Longleftrightarrow$ $\exists g^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(B,B)$ tal que $g^{-1}g = Id_B$, $gg^{-1} = Id_B$y $f = fg^{-1}$
$\Longleftrightarrow$ $g\colon B \longrightarrow B$ es isomorfismo en $Mod(R)$ tal que $fg = f$. $\square$

Ej 51. Sea $C \in Mod\left(Mod\left(R\right)\right)$ y $\sim$ una relación en $Obj\left(Mod\left(R\right)/C\right)$ dada por

$$f \sim f' \iff Hom\left(f, f'\right) \neq \varnothing \neq Hom\left(f', f\right).$$

Entonces $\sim$ es un relación de equivalencia en $Obj\left(Mod\left(R\right)/C\right)$.

Demostración. $\boxed{\text{Reflexividad}}$ Sea $f : A \to C \in Obj\left(Mod\left(R\right)/C\right)$. Notemos que $Id_A \in Hom_R\left(A, A\right)$ y $f \circ Id_A = f$, así $Id_a \in Hom\left(f, f\right)$ y por lo tanto $Hom\left(f, f\right) \neq \varnothing$.
$\boxed{\text{Simetría}}$

$$\begin{aligned}f \sim f' &\iff Hom\left(f, f'\right) \neq \varnothing \neq Hom\left(f', f\right)\\ &\iff Hom\left(f', f\right) \neq \varnothing \neq Hom\left(f, f'\right)\\ &\iff f' \sim f.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Transitividad}}$ Sean $f : A \to C, g : A' \to C, h : B \to C \in Obj\left({}^{Mod\,(R)}\!/_{C}\right)$ tales que $f \sim g$ y $g \sim h$. De la definición de $\sim$ se sigue que $\exists\ p \in Hom_R\,(A, A')$, $q \in Hom_R\,(A', A)$, $p' \in Hom_R\,(A', B)$, $q' \in Hom_R\,(B, A')$ tales que

$$\begin{aligned} gp &= f \\ fq &= g. \end{aligned} \tag{*}$$

$$\begin{aligned} hp' &= g \\ gq' &= h. \end{aligned} \tag{**}$$

Así $p'p \in Hom_R\,(A, B)$, $qq' \in Hom_R\,(B, A)$ y

$$\begin{aligned} h\,(p'p) &= f \\ f\,(qq') &= h, \\ \therefore\ f &\sim h. \end{aligned}$$

□

Ej 52. Sean $\psi : B' \longrightarrow B$ un isomorfismo y $f : B \longrightarrow C$ es $Mod\,(R)$. Pruebe que: Si f es minimal a derecha, entonces $f \circ \psi : B' \longrightarrow C$ es minimal a derecha.

Demostración. Sea $g : f \circ \psi \longrightarrow f \circ \psi$ un morfismo en $Mod\,(R)\,/C$. Entonces, por el **ejercicio 50.**, $g : B' \longrightarrow B'$ es un homomorfismo en $Mod\,(R)$. Más aún, $\psi \circ g : B' \longrightarrow B$ también es un homomorfismo. Dado que f es minimal a derecha, se tiene que $\psi \circ g$ es un isomorfismo en $Mod\,(R)$. En virtud de que ψ es un isomorfismo, $g : B' \longrightarrow B'$ es un isomorfismo en $Mod\,(R)$. Aplicando el **ejercicio 50.**, se tiene que $g : f \circ \psi \longrightarrow f \circ \psi$ es un isomorfismo. $\therefore$ $f \circ \psi$ es minimal a derecha. □

Ej 53. Sean $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{f'} M$ en $Mod(R)$ tal que $ff' = 1_N$. Pruebe que $M = Ker(f) \oplus Im(f')$.

Demostración. Como $ff' = 1_N$, entonces $Ker(f') = 0$ y $Im(f) = N$, es decir, f' es monomorfismo, f es epimorfismo y $Im(f') + Ker(f) \leq M$.
Si $x \in Im(f') \cap Ker(f)$ entonces existe $y \in N$ tal que $f'(y) = x$ y además $f(x) = 0$ entonces $0 = f(x) = ff'(y) = 1_N(y)$ por lo que $x = 0$ y así $Im(f) \cap Ker(f) = 0$.

Si $x \in M$ entoces $f(x - f'f(x)) = f(x) - f(x) = 0$, y
$x = (x - f'f(x)) + f'f(x) \in Ker(f) + Im(f')$. □

Definición 1. Decimos que una sucesión exacta en $Mod\,(R)$, η,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C \longrightarrow 0\ .$$

se escinde, o bien que se parte, si f es un split-mono y g es un split-epi.

Ej 54. Sea η: $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\ f\ } M \xrightarrow{\ g\ } M_2 \longrightarrow 0$ exacta en $Mod\,(R)$. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) η se escinde,

b) f es un split-mono,

c) g es un split epi

d) $Im\,(f) = Ker\,(g)$ y $Im\,(f)$ es un sumando directo de M.

Demostración. La demostración se realizará siguiendo el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
 & b) \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
a) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & d) \arrow[r, Rightarrow] & a) \\
 & c) \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

$a) \implies b)$ y $a) \implies c)$ se siguen en forma inmediata de la definición de sucesión exacta que se escinde.
En adelante, sean $N := Im\,(f)$ y $N' := Ker\,(g)$.
$\boxed{b) \implies d)}$ $N = N'$ se sigue del hecho de que η es una sucesión exacta.
Sean i la inclusión de N en M, $\alpha : M \to M_1$ un morfismo de R-módulos tal que $\alpha f = Id_{M_1}$ (cuya existencia se tiene garantizada dado que f es un split-mono) y la función

$$\begin{aligned} \gamma : M &\to N \\ m &\mapsto f\alpha\,(m)\,. \end{aligned}$$

γ es un morfismo de R-módulos pues f y α lo son, y más aún si $f\,(a) \in N$ se satisface que

$$\begin{aligned}
\gamma i\,(f\,(a)) &= f\,(\alpha f\,(a)) \\
&= f\,(a)\,. \\
&\implies \gamma i = Id_N, \\
&\implies i : N \to M \text{ es un split-mono.} \\
&\implies N \text{ es un sumando directo de } M. \qquad \text{Teorema 1.12.5}b)
\end{aligned}$$

$\boxed{c) \implies d)}$ Sean π el epimorfismo canónico de M sobre N', $\beta : M_2 \to M$ un morfismo de R-módulos tal que $g\beta = Id_{M_2}$ y la aplicación

$$\begin{aligned} \delta : N' &\to M \\ m + N' &\mapsto \beta g(m). \end{aligned}$$

Afirmamos que δ es una función bien definida. En efecto: sean $m' \in m+N'$, así

$$\begin{aligned} &m - m' \in N' \\ &\quad \implies g(m - m') = 0 \\ &\quad \implies g(m) = g(m') \\ &\quad \implies hg(m) = hg(m'). \end{aligned}$$

Más aún, δ es un morfismo de R-módulos pues h y g lo son, y si $m \in M$ entonces

$$\pi\delta(m + N') = \beta g(m) + N',$$

con

$$\begin{aligned} g(\beta g(m) - m) &= g\beta(g(m)) - g(m) \\ &= g(m) - g(m) \\ &= 0. \\ &\implies \beta g(m) - m \in N' \\ &\implies \beta g(m) + N' = m + N' \\ &\implies \pi\delta(m + N') = m + N'. \\ &\implies \pi\delta = Id_{N'}, \end{aligned}$$

con lo cual π es un split-epi. Así, por el Teorema 1.12.5$c)$ y dado que $N = N'$ por ser η exacta, se tiene lo deseado.
$\boxed{d) \implies a)}$ Verificaremos primeramente que f es un split-mono. Se tiene que $\exists\ J \in \mathscr{L}(M)$ tal que $M = N \oplus J$, con lo cual para cada $m \in M$ $\exists!$ $n_m \in N$ y $j_m \in J$ tales que $m = n_m + j_m$. Lo anterior en conjunto al hecho de que f es en partícular inyectiva, por ser η exacta, garantiza que

$$\forall\ m \in M\ \exists!\ a_m \in M_1, j_m \in J \text{ tales que } m = f(a_m) + j_m. \qquad (*)$$

Así

$$\begin{aligned} \varphi : M &\to M_1 \\ m &\mapsto a_m \end{aligned}$$

es una función bien definida. Afirmamos que φ es un morfismo de R-módulos. En efecto, sean $r \in R$, $z, w \in M$, tales que $z = f(a_z) + j_z$ y

$w = f(a_w) + j_w$, entonces

$$\begin{aligned} rz + w &= r\left(f(a_z) + j_z\right) + f(a_w) + j_w \\ &= f(ra_z + a_w) + rj_z + j_w. \end{aligned}$$

Aplicando el hecho de que J es un submódulo de M y $(*)$ a lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \varphi(rz + w) &= ra_z + a_w \\ &= rf(z) + f(w). \end{aligned}$$

Finalmente notemos que, si $a \in M_1$, $\varphi f(a) = \varphi(f(a) + 0) = a$, así que $\varphi f = Id_{M_1}$

$$\therefore f \text{ es un split-mono.}$$

Por otro lado, como $N = N'$, se tiene que $M = N' \oplus J$ y así

$$\begin{aligned} Ker\left(g|_J\right) &= Ker(g) \cap J \\ &= N' \cap J = \langle 0 \rangle_R, \end{aligned}$$

y como g es sobre

$$\begin{aligned} M_2 &= g(M) \\ &= g\left(\{g(a+b) \mid a \in Ker(g), b \in J\}\right) \\ &= g\left(\{g(b) \mid b \in J\}\right) \\ &= g(J) \\ &= g|_J(J), \\ &\implies g|_J : J \to M_2 \text{ es un isomorfismo.} \end{aligned}$$

Por lo anterior $\exists\, h \in Hom_R(M_2, J)$ tal que $h\, g|_J = Id_J$ y $g|_J\, h = Id_{M_2}$, con lo cual $Im(h) = J$. Así $gh = g|_J\, h$ y por lo tanto g es un split-epi.

$\square$

Ej 55. Sea $\eta :\ 0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{g_2} M_2 \longrightarrow 0$ una sucesión en $Mod(R)$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes

a) η es una sucesión que se parte.

b) Existe una sucesión $0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f_2} M \xrightarrow{g_1} M_1 \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$ tal que $g_1 f_1 = 1_{M_1}$, $g_2 f_2 = 1_{M_2}$, $g_2 f_1 = g_1 f_2 = 0$ y $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1_M$.

c) Existe un isomorfismo $h : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d] & M_1 \times M_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "h"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f_1"] & M \arrow[r, "g_2"] & M_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Demostración. $\boxed{\text{a)} \Rightarrow \text{c)}}$ Dado que η es una sucesión que se parte, existe un morfismo de R-módulos, $f_2 : M_2 \longrightarrow M$, tal que $g_2 f_2 = 1_{M_2}$. Luego, g_2, f_2 inducen un isomorfismo $h : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$. En efecto, definimos h como el morfismo $h(m_1, m_2) = f_1(m_1) + f_2(m_2)$.

En primer lugar, veremos que h es un monomorfismo. En este sentido, sea $(m_1, m_2) \in Ker(h)$, entonces $0 = h(m_1, m_2) = f_1(m_1) + f_2(m_2)$. En consecuencia, $f_2(m_2) = -f_1(m_1) \in Im(f_1) = Ker(g_2)$. Así,

$$m_2 = g_2 f_2(m_2) = 0$$

Por consiguiente, $f_1(m_1) = h(m_1, m_2) = 0$. Dado que f_1 es mono, $m_1 = 0$. Por lo que h es mono.

Ahora, h es epi. Sea $m \in M$. Entonces

$$g_2(m - f_2 g_2(m)) = g_2(m) - g_2(m) = 0$$

De esta forma, $m - f_2 g_2(m) \in Im(f_1)$. Ésto aunado a la exactitud de η garantiza la existencia de un elemento $x \in M_1$ tal que $f_1(x) = m - f_2 g_2(m)$, con lo cual,

$$\begin{aligned} h(x, g_2(m)) &= f_1(x) + f_2(g_2(m)) \\ &= m \end{aligned}$$

Una vez demostrado que h es un isomorfismo, podemos proceder a mostrar que el diagrama presentado anteriormente conmuta bajo este isomorfismo. Primero, note que para $m \in M_1$ se tiene que

$$\begin{aligned} hi_1(m) &= h(m, 0) \\ &= f_1(m) \\ &= f_1 1_{M_1}(m) \end{aligned}$$

Por el otro lado, dado $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$, se satisface que

$$\begin{aligned} g_2 h(m_1, m_2) &= g_2(f_1(m_1) + f_2(m_2)) \\ &= g_2 f_1(m_1) + g_2 f_2(m_2) \\ &= 0 + m_2 \\ &= m_2 \\ &= 1_{M_2} \pi_2(m_1, m_2) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{c)} \Rightarrow \text{b)}}$ Sea $h : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$ el morfismo proporcionado por la hipótesis. Además, la sucesión $0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{i_2} M_1 \times M_2 \xrightarrow{\pi_1} M_1 \longrightarrow 0$

se parte. Definimos $f_2 : M_2 \longrightarrow M$ como $f_2 = hi_2$, y $g_1 : M \longrightarrow M_1$ como $g_1 = \pi_1 h^{-1}$.

Luego, se satisfacen las siguientes igualdades

$$
\begin{aligned}
&g_1 f_1 = g_1 h i_1 = \pi_1 h^{-1} h i_1 = \pi_1 i_1 = 1_{M_1}\\
&g_2 f_2 = g_2 h i_2 = \pi_2 i_2 = 1_{M_2}\\
&g_1 f_2 = g_1 h i_2 = \pi_1 h^{-1} h i_2 = \pi_1 i_2 = 0\\
&g_2 f_1 = g_2 h i_1 = \pi_2 h^{-1} h i_1 = \pi_2 i_1 = 0\\
&g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1_{M_1} + 1_{M_2} = 1_{M_1 \times M_2} = 1_M
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{b)} \Rightarrow \text{a)}}$ Por hipótesis, existe un morfismo de R-módulos $f_2 : M_2 \longrightarrow M$ tal que $g_2 f_2 = 1_{M_2}$. Por tanto, η es una sucesión que se parte. $\square$

Ej 56. Sean $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon B \longrightarrow B$ en $Mod(R)$ tal que $gf = f$. Prueba que

$$g\colon f \xrightarrow{\sim} f \quad \text{en } Mod(R)\backslash A \quad \Longleftrightarrow \quad g\colon B \xrightarrow{\sim} B \quad \text{en } Mod(R).$$

Demostración. $g\colon f \xrightarrow{\sim} f$ en $Mod(R)\backslash A$
$\Longleftrightarrow$ $\exists g^{-1}\colon f \longrightarrow f$ tal que $g^{-1}g = 1_f$ y $gg^{-1} = 1_f$
$\Longleftrightarrow$ $\exists g^{-1}\colon f \longrightarrow f$ tal que $g^{-1}g = Id_B$ y $gg^{-1} = Id_B$
$\Longleftrightarrow$ $\exists g^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(B,B)$ tal que $g^{-1}g = Id_B$, $gg^{-1} = Id_B$ y $f = g^{-1}f$
$\Longleftrightarrow$ $g\colon B \longrightarrow B$ es isomorfismo en $Mod(R)$ tal que $gf = f$. $\square$

Ej 57. Sea $\sim$ una relación en $Obj\,(Mod\,(R) \setminus A)$ dada por

$$f \sim f' \iff Hom\,(f, f') \neq \varnothing \neq Hom\,(f', f)\,.$$

Entonces $\sim$ es un relación de equivalencia en $Obj\,(Mod\,(R) \setminus A)$.

Demostración. La simetría de $\sim$ se sigue inmediatamente de su definición, mientras que la reflexividad se sigue del hecho de que si $f : A \to B \in Obj\,(Mod\,(R) \setminus A)$ entonces $Id_B \in Hom_R\,(B, B)$ y $Id_B f = f$. Así resta verificar que $\sim$ es transitiva.
Sean $f : A \to B, g : A \to B', h : A \to C \in Obj\,(Mod\,(R) \setminus C)$ tales que $f \sim g$ y $g \sim h$, por lo tanto $\exists\ p \in Hom_R\,(B, B')$, $q \in Hom_R\,(B', B)$, $p' \in Hom_R\,(B', C)$, $q' \in Hom_R\,(C, B')$ tales que

$$
\begin{aligned}
pf &= g\\
qg &= f,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p'g &= h\\
q'h &= g.
\end{aligned}
$$

Así $p'p \in Hom_R(B,C)$, $qq' \in Hom_R(C,B)$ y

$$\begin{aligned} (p'p)\,f &= h \\ (qq')\,h &= f, \\ \therefore\ f &\sim h. \end{aligned}$$

□

Ej 58. Sean $\varphi_i : A_i \longrightarrow B_i$, con $i = 1,2$, minimales a derecha en $Mod\,(R)$. Pruebe que $\varphi_1 \coprod \varphi_2 : A_1 \coprod A_2 \longrightarrow B_1 \coprod B_2$ es minimal a derecha.

Demostración. Sea $\psi : \varphi_1 \coprod \varphi_2 \longrightarrow \varphi_1 \coprod \varphi_2$. Entonces ψ es de la forma $\psi = \psi_1 \coprod \psi_2$, con $\psi_i : A_i \longrightarrow B_i$, $i = 1,2$. En efecto, si denotamos por $\eta_i : A_1 \coprod A_2 \longrightarrow B_i$, $i = 1,2$, a la proyección canónica, entonces $\psi = \eta_1\psi \coprod \eta_2\psi$.

Suponga, así, que $\psi = \psi_1 \coprod \psi_2$. Luego, $\psi_i \in Hom\,(\varphi_i, \varphi_i)$, con $i = 1,2$. Por la minimalidad a derecha de cada φ_1, se satisface que ψ_1 y ψ_2 son isomorfismos. Por lo que ψ es un isomorfismo.
$\therefore \varphi_1 \coprod \varphi_2$ es minimal a derecha. □

Ej 59. Sean $F\colon A \longrightarrow B$ un funtor contravariante aditivo entre categorías preaditivas. Pruebe que si F es fiel y pleno, entonces
$F\colon End_{\mathcal{A}}(A) \longrightarrow End_{\mathcal{B}}(F(A))^{op}$ es isomorfismo de anillos.

Demostración. Como F es funtor contravariante aditivo, entonces es un morfismo de grupos abelianos. Considerando la composición, tenemos que $End_{\mathcal{A}}(A)$ y $End_{\mathcal{B}}(F(A))$ son anillos, así $End_{\mathcal{A}}(F(A))^{op}$ es anillo.

Por definición de funtor contravariate para cada $f, g \in End_{\mathcal{A}}(A)$ se tiene que

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f) \quad \text{y} \quad F(1_A) = 1_{F(A)} \quad \forall A \in Obj(\mathcal{A}).$$

Entonces F es morfismo de anillos entre $End_{\mathcal{A}}(A)$ y $End_{\mathcal{B}}(F(A))^{op}$, y como F es fiel y pleno, la correspondencia debe ser biyectiva, es decir, F es un isomorfismo de anillos. □

Ej 60. Sea $\mathcal{A}$ una categoría preaditiva y $A \in \mathcal{A}$. Entonces

a) La correspondencia Hom-covariante $Hom_{\mathcal{A}}(A,-) : \mathcal{A} \to Ab$ es un funtor covariante aditivo.

b) La correspondencia Hom-contravariante $Hom_{\mathcal{A}}(-,A)\,\mathcal{A} \to Ab$ es un funtor contravariante aditivo.

Demostración. $\boxed{a)}$ $Hom_{\mathcal{A}}(A,-)$ está dado por la siguiente correspondencia

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\xrightarrow{\qquad Hom_{\mathcal{A}}(A,-)\qquad} Ab\\ B \xrightarrow{f} C &\longmapsto Hom_{\mathcal{A}}(A,B) \xrightarrow{Ff} Hom_{\mathcal{A}}(A,C)\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}Ff : Hom_{\mathcal{A}}(A,B) &\to Hom_{\mathcal{A}}(A,C)\\ \alpha &\mapsto f\alpha.\end{aligned}$$

Notemos que $f \in Hom_{\mathcal{A}}(B,C)$, $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(A,B)$, de lo cual se sigue que $f\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(A,C)$ y por lo tanto Ff está bien definida. Por otro lado como $\mathcal{A}$ es preaditiva entonces $Hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ y $Hom_{\mathcal{A}}(A,C)$ son grupos abelianos aditivos. Finalmente si $\alpha,\beta \in Hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ como la composición de morfismos en $Hom(\mathcal{A})$ es $\mathbb{Z}$-bilineal, entonces

$$\begin{aligned}Ff(\alpha+\beta) &= f(\alpha+\beta)\\ &= f\alpha + f\beta\\ &= Ff(\alpha) + Ff(\beta),\\ &\implies Ff \text{ es un morfismo de grupos abelianos.}\end{aligned}$$

Por todo lo anterior $Hom_{\mathcal{A}}(A,-)$ es una correspondencia bien definida. Afirmamos que $Hom_{\mathcal{A}}(A,-)$ es un funtor covariante. En efecto, sean

$$\begin{aligned}f,g &\in Hom_{\mathcal{A}}(B,C),\\ \eta &\in Hom_{Ab}(Z, Hom_{\mathcal{A}}(A,B)),\\ \mu &\in Hom_{Ab}(Hom_{\mathcal{A}}(A,B), Z).\end{aligned}$$

Asi si $z \in Z$, entonces

$$\begin{aligned}Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(Id_B)\,\eta(z) &= FId_B(\eta(z))\\ &= Id_B\eta(z)\\ &= \eta(z), && \eta(z) \in Hom_{\mathcal{A}}(A,B)\\ \implies Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(Id_B) &= \eta.\end{aligned}$$

Por su parte

$$\begin{aligned}\mu Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(Id_B)(\alpha) &= \mu(FId_B(\alpha))\\ &= \mu(Id_B\alpha)\, Id_B\eta(z)\\ &= \mu(\alpha), && \alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(A,B)\\ \implies \mu Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(Id_B) &= \mu.\\ \therefore\ Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(Id_B) &= Id_{Hom_{\mathcal{A}}(A,B)} = Id_{Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(B)}\end{aligned}$$

Por su parte

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(gf)(\alpha) &= (Fgf)(\alpha) \\
&= gf(\alpha) = g(f\alpha) \\
&= Fg(Ff(\alpha)), \qquad f\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(A,C) \\
&= FgFf(\alpha)
\end{aligned}$$

$\therefore\ Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(gf) = Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(g)Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(f).$

Con lo cual se ha verificado que $Hom_{\mathcal{A}}(A,-)$ es un funtor covariante.
Finalmente, dado que la composición en $Hom(\mathcal{A})$ es $\mathbb{Z}$-bilineal se tiene que

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(f+g)(\alpha) &= F(f+g)(\alpha) \\
&= (f+g)\alpha = f\alpha + g\alpha \\
&= Ff(\alpha) + Fg(\alpha) \\
\Longrightarrow\ Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(f+g) &= Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(f) + Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(g)
\end{aligned}$$

De modo que

$$Hom_{\mathcal{A}}(A,-) : Hom_{\mathcal{A}}(B,C) \to Hom_{Ab}(Hom_{\mathcal{A}}(A,B), Hom_{\mathcal{A}}(A,C))$$

es un morfismo de grupos abelianos. Con lo cual, dado que Ab es una categoría preaditiva (esto ya que la composición de morfismos de grupos abelianos es $\mathbb{Z}$-bilineal), se tiene que $Hom_{\mathcal{A}}(A,-)$ es un funtor aditivo.
La demostración de b) se realiza en forma análoga.

$\square$

Ej 61. Sea $X \in {}_R Mod_S$. Pruebe que:

a) $Hom_R(-,X) : Mod(R) \longrightarrow Mod(S^{op})$ es un funtor contravariante aditivo.

b) Para $\{M_i\}_{i=1}^n$ en $Mod(R)$ se tiene que

$$Hom_R\left(\coprod_{i=1}^n M_i, {}_R X_S\right) = \coprod_{i=1}^n Hom_R({}_R M_i, {}_R X_S)$$

en $Mod(S^{op})$

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Primeramente, ya sabemos que $Hom_R(-,X)$ es un funtor contravariante. Entonces bastará probar que éste es aditivo.

Sean $M, N \in Mod(R)$. Veremos que $\varphi = Hom_R(-,X)$, con

$$\varphi : Hom_R(M,N) \longrightarrow Hom_{S^{op}}(Hom_R(N,X), Hom_R(M,X)),$$

es un isomorfismo.

Sea $f \in Hom_R(M,N)$. Entonces $\varphi(f)\, Hom_{S^{op}}(Hom_R(N,X), Hom_R(M,X))$ es el morfismo $\varphi(f)(g) = g \circ f$. De esta manera, φ es un morfismo. En efecto, sean $f,g \in Hom_R(M,N)$, $r \in R$ y $h \in Hom_R(N,X)$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(f+rg)(h) &= (f+rg)\circ h \\
&= f\circ h + (rg)\circ h \\
&= f\circ h + r(g\circ h) \\
&= \varphi(f)(h) + r\varphi(g)(h) \\
&= (\varphi(f) + r\varphi(g))(h)
\end{aligned}$$

Por tanto, φ es morfismo. $\therefore Hom_R(-,X)$ es aditivo.

$\boxed{\text{(b)}}$ Definimos $\rho : Hom_R\left(\coprod_{i=1}^{n} M_i, {}_RX_S\right) \longrightarrow \coprod_{i=1}^{n} Hom_R({}_RM_i, {}_RX_S)$ como $\rho(\varphi) = (\varphi\iota_i)_{i=1}^n$.

Veamos que ρ es un morfismo en $Mod(S^{op})$. Para dicho fin, considere $\varphi,\psi \in Hom_R\left(\coprod_{i=1}^{n} M_i, {}_RX_S\right)$ y $s \in S$.

$$\begin{aligned}
\rho(\varphi+\psi s) &= ((\varphi+\psi s)\,\iota_i)_{i=1}^n \\
&= (\varphi\iota_i)_{i=1}^n + ((\psi s)\,\iota_i)_{i=1}^n \\
&= (\varphi\iota_i)_{i=1}^n + (\psi\iota_i)_{i=1}^n s \\
&= \rho(\varphi) + \rho(\psi)\, s
\end{aligned}$$

Por otro lado, ρ es un inyectivo. En efecto, si $\rho(\varphi) = 0$, entonces se tiene que $(\varphi\iota_i)_{i=1}^n = 0$. Luego, $\varphi = 0$. Por tanto $Ker(\rho) = 0$.

Ahora, sea $(\varphi_i)_{i=1}^n \in \coprod_{i=1}^{n} Hom_R({}_RM_i, {}_RX_S)$. Entonces cada φ_i es un morfismo $\varphi_i : M_i \longrightarrow X$. Así, por la propiedad universal del coproducto, existe $\varphi : \coprod_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow X$ tal que $\varphi\iota_i = \varphi_i$. De esta manera, $\rho(\varphi) = (\varphi_i)_{i=1}^n$.
Por tanto, ρ es un isomorfismo.

$\therefore Hom_R\left(\coprod_{i=1}^{n} M_i, {}_RX_S\right) = \coprod_{i=1}^{n} Hom_R({}_RM_i, {}_RX_S)$ □

Lemma*
(Anderson, Fuller) 16.6

El funtor $\mathrm{Hom}_R(M, Y)$ es exacto izquierdo. En particular si U es un R-módulo, entonces para cada sucesión exacta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$ las sucesiones $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(U, K) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(U, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(U, N) \longrightarrow 0$ y $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M, Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M, Z) \longrightarrow 0$ son exactas

Ej 62. Para $M \in Mod(R)$ pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) M es proyectivo.

b) Toda sucesión exacta $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$ se escinde.

c) M es isomorfo a un sumando directo de R-módulos libre.

d) Para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$, se tiene que
$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M, Y) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(M, Z) \longrightarrow 0$
es exacta en $Mod(\mathbb{Z})$, donde $f_* = \mathrm{Hom}_R(M, f)$ y $g_* = \mathrm{Hom}_R(M, g)$.

Demostración. $\boxed{a) \Rightarrow b)}$
Sea M proyectivo y $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $Mod(R)$. Como $Y \xrightarrow{h} M$ es epi, entonces el morfismo $I_M \colon M \longrightarrow M$ se puede factorizar a través de h, es decir, existe $g \colon M \longrightarrow Y$ tal que $Id_M = hg$. Por lo tanto h es split-epi y por el ejercicio 54 la sucesión se escinde. $\boxed{b) \Rightarrow c)}$
Sea $F = \bigoplus_{y \in M} Ry$ el módulo libre generado por los elementos de M, entonces existe un epimorfismo $g \colon F \longrightarrow M$, por lo que
$0 \longrightarrow Ker(g) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ es exacta con i la inclusión.
Por hipótesis esta sucesión exacta se escinde, por lo tanto $M \oplus Ker(g) = F$, es decir, M es un sumando directo de un módulo libre.
$\boxed{c) \Rightarrow a)}$
Supongamos que tenemos el siguiente diagrama con g epi:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[u, "h"] & \end{tikzcd}$$

Por c) sabemos que existe F, K módulos tales que $M \oplus K = F$ con F un móduulo libre. Ahora, como todo módulo libre es proyectivo y considerando a $\pi \colon F \longrightarrow M$, se tiene que existe $f \colon F \longrightarrow X$ tal que $h\pi = fg$, así $h\pi i = gfi$ con i la inclusión de M en F, por lo que $h = g \circ f_0$ con

$f_0 : M \longrightarrow X$.

$\boxed{a) \iff d)}$

Por el lema* la condición d) se cumple si y sólo si por cada epimorfismo

$$Y \xrightarrow{\ f\ } Z \xrightarrow{\ g\ } 0 \ \text{ la sucesión } \ \mathrm{Hom}_R(M,Y) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M,Z) \longrightarrow 0$$

es exacta. Pero f_* es epi si y sólo si por cada $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(M,Z)$ existe un $\hat{\gamma} \in \mathrm{Hom}_R(U,M)$ tal que $\gamma = f_*(\hat{\gamma}) = f\hat{\gamma}$.

□

Ej 63. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ en $Mod\,(R)$. Entonces $\coprod\limits_{i\in I} M_i$ es proyectivo si y sólo si $\forall\ i \in I$ M_i es proyectivo.

Demostración. Sea C un coproducto para $\{M_i\}_{i\in I}$ por medio de las funciones $\{\mu_i\}_{i\in I}$. $\boxed{\Longrightarrow}$ Sean $f : X \to Y$ un epimorfismo en $Mod\,(R)$ y, para cada $i \in I$, $g_i \in Hom_R\,(M_i, Y)$. Por la propiedad universal del coproducto $\exists!\ g : C \to Y$ tal que, $\forall\ i \in I$, $g\mu_i = g_i$. Dado que C es proyectivo entonces $\exists\ h : C \to X$ en $Mod(R)$ tal que $fh = g$, con lo cual si $h_i := h\mu_i$ entonces

$$\begin{aligned} fh_i &= f\,(h\mu_i) \\ &= (fh)\,\mu_i \\ &= g\mu_i \\ &= g_i. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ g_i \text{ se factoriza a través de } f, \quad \forall\ i \in I.$$

$$\therefore\ M_i \text{ es proyectivo,} \quad \forall\ i \in I.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Verifcaremos primeramente los siguientes resultados:

Lema 1. Sean $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_i\}_{i\in I}$ y $\{Z_i\}_{i\in I}$ familias en $Mod(R)$ tales que $\forall\ i \in I$

$$0 \longrightarrow X_i \xrightarrow{\ f_i\ } Y_i \xrightarrow{\ g_i\ } Z_i \longrightarrow 0 \tag{L1A}$$

es una sucesión exacta. Entonces $\exists\ f,\ g \in Hom\,(Mod(R))$ tales que

$$0 \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\ f\ } \prod_{i\in I} Y_i \xrightarrow{\ g\ } \prod_{i\in I} Z_i \longrightarrow 0 \tag{L1B}$$

es una sucesión exacta. Los productos que aparecen en la expresión anterior son aquellos cuyos elementos son i-adas.

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} f : \prod_{i\in I} X_i &\to \prod_{i\in I} Y_i \\ (x_i)_{i\in I} &\mapsto (f\,(x_i))_{i\in I} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g : \prod_{i\in I} Y_i &\to \prod_{i\in I} Z_i \\ (y_i)_{i\in I} &\mapsto (g\,(y_i))_{i\in I}\,. \end{aligned}$$

$f \in Hom\,(Mod(R))$ pues $\forall\ i \in I\ f_i \in Hom\,(Mod(R))$, similarmente se tiene que g es un morfismo de R-módulos.
$\boxed{f \text{ es inyectiva}}$ Sea $(x_i)_{i\in I} \in Ker(f)$, entonces $\forall\ i \in I\ f_i\,(x_i) = 0$ y por lo tanto $\forall\ i \in I\ x_i = 0$, pues $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de monomorfismos en $Mod(R)$.
$\boxed{g \text{ es sobre}}$ Sea $(z_i)_{i\in I} \in \coprod\limits_{i\in I} Z_i$. Como $\{g_i\}_{i\in I}$ es una familia de epimorfismos en $Mod(R)$, entonces $\forall\ i \in I\ \exists\ y_i \in Y_i$ tal que $g_i\,(y_i) = z_i$ y por lo tanto $g\left((y_i)_{i\in I}\right) = (z_i)_{i\in I}$.
$\boxed{Im(f) = Ker(g)}$ Sea $(x_i)_{i\in I} \in \coprod\limits_{i\in I} X_i$. Dado que $(L1A)$ es exacta se tiene que $\forall\ i \in I\ Im(f_i) = Ker(g_i)$ y que, en partícular, $g_i f_i = 0$. Así

$$\begin{aligned} gf\left((x_i)_{i\in I}\right) &= (g_i f_i\,(x_i))_{i\in I} \\ &= 0. \\ \implies gf &= 0 \\ \implies Im(f) &\subseteq Ker(g). \end{aligned}$$

Por su parte, si $(y_i)_{i\in I} \in Ker(g)$, entonces $\forall\ i \in I\ y_i \in Ker(g_i) = Im(f_i)$, con lo cual para cada $i \in I\ \exists\ x_i \in X_i$ tal que $y_i = f_i\,(x_i)$. De modo que $(y_i)_{i\in I} = f\left((x_i)_{i\in I}\right)$, y por lo tanto $Ker(g) \subseteq Im(f)$.
Por todo lo anterior $(L1B)$ es exacta.

$\square$

Lema 2. Sean $\{A_i\}_{i=1}^3$, $\{B_i\}_{i=1}^3$ en $Mod(R)$ tales que $\forall\ i\ in[1,3]\ A_i \simeq B_i$ y

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\ f\ } A_2 \xrightarrow{\ g\ } A_3 \longrightarrow 0 \tag{L2A}$$

una sucesión exacta. Entonces $\exists\ \overline{f},\ \overline{g} \in Hom\,(Mod(R))$ tales que

$$0 \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\ \overline{f}\ } B_2 \xrightarrow{\ \overline{g}\ } B_3 \longrightarrow 0 \tag{L2B}$$

es una sucesión exacta.

Demostración. Sean $\varphi_i : A_i \to B_i$ isomorfismo $\forall\ i \in [1,3]$, $\overline{f} := \varphi_2 f {\varphi_1}^{-1}$ y $\overline{g} := \varphi_3 g {\varphi_2}^{-1}$. Dado que $f,\ \varphi_1$ y φ_2 son monomorfismos en $Mod(R)$, entonces $\overline{f}$ lo es; análogamente $\overline{g}$ es un epimorfismo puesto que $\varphi_2,\ g$ y φ_3 lo son.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\overline{g}\overline{f} &= \varphi_3 g {\varphi_2}^{-1} \varphi_2 f {\varphi_1}^{-1} \\
&= \varphi_3 g f {\varphi_1}^{-1} \\
&= \varphi_3 0 {\varphi_1}^{-1} \\
&= 0, \\
\implies Im\left(\overline{f}\right) &\subseteq Ker\left(\overline{g}\right).
\end{aligned}$$

Por su parte, si $v \in Ker\left(\overline{g}\right)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
0 = \overline{g}(v) &= \varphi_3\left(g{\varphi_2}^{-1}(v)\right) \\
\implies g\left({\varphi_2}^{-1}(v)\right) &= 0, && \varphi_3 \text{ es inyectiva} \\
\implies {\varphi_2}^{-1}(v) &\in Ker(g) = Im(f).
\end{aligned}$$

Con lo cual $\exists\ u \in B_1$ tal que ${\varphi_2}^{-1}(v) = f(u)$, y así

$$\begin{aligned}
v &= \varphi_2 f(u) \\
&= \varphi_2 f {\varphi_1}^{-1}\left(\varphi_1(u)\right) \\
&= \overline{f}\left(\overline{u}\right), && \overline{u} := \varphi_1(u) \\
&\implies Ker\left(\overline{g}\right) \subseteq Im\left(\overline{f}\right). \\
&\therefore\ (L2B) \text{ es exacta.}
\end{aligned}$$

□

Lema 3. Sean $M, N \in Mod(R)$ tales que M es proyectivo y $M \simeq N$. Entonces N es proyectivo.

Demostración. Sean $\varphi : M \to N$ un isomorfismo en $Mod(R)$, $f : X \to Y$ un epimorfismo en $Mod(R)$ y $g \in Hom_R\left(N, Y\right)$. Como $g\varphi \in Hom_R\left(M, Y\right)$ y M es proyectivo, entonces $\exists\ h \in Hom_R\left(M, X\right)$ tal que $fh = g\varphi$, luego $f\left(h\varphi^{-1}\right) = g$, con lo cual g se factoriza a través de f. Por lo tanto N es proyectivo.

□

Ahora, sean $\coprod\limits_{i \in I} M_i$ el coproducto para $\{M_i\}_{i \in I}$ cuyos elementos son i-adas de soporte finito, $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $Mod\left(R\right)$ y, para cada $i \in I$, $F_i := Hom_R\left(M_i, -\right)$ funtor covariante definido como en el Ej. 60. Por el Ej. 62 $d)$ $\forall\ i \in I$ se tiene que

$$0 \longrightarrow F_i\left(X\right) \xrightarrow{F_i(f)} F_i\left(Y\right) \xrightarrow{F_i(g)} F_i\left(Z\right) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta en $Mod\left(\mathbb{Z}\right)$ y así, por el Lema 1,

$$0 \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i(X) \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i(Y) \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i(Z) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Se tiene que

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} F_i(X) &= \prod_{i\in I} Hom_R(M_i, X) \\ &\simeq Hom_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, X\right). \qquad \text{Ej. 32}\end{aligned}$$

Similarmente se encuentra que

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} F_i(Y) &\simeq Hom_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, Y\right), \\ \prod_{i\in I} F_i(Z) &\simeq Hom_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, Z\right).\end{aligned}$$

Con lo cual, por el Lema 2,

$$0 \longrightarrow Hom_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, X\right) \longrightarrow Hom_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, Y\right) \longrightarrow Hom_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, Z\right) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta y así, nuevamente por el Ej. 62 d), $\coprod_{i\in I} M_i$ es un módulo proyectivo. Finalmente como $C \simeq \coprod_{i\in I} M_i$ en $Mod(R)$, por el Lema 3, se sigue que C es proyectivo y así se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 64. Sea $M \in Mod(R)$. Pruebe que:
M es proyectivo y f.g.$\Leftrightarrow$existe $n \in \mathbb{N}$ tal que M es isomorfo a un sumando directo de ${}_RR^n$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow)}$ Puesto que M es f.g., existe $n \in \mathbb{N}$ tal que la siguiente sucesión en $Mod(R)$ $\;0 \longrightarrow Ker(f) \longrightarrow R^n \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0\;$ es exacta. Ésta a su vez se parte, toda vez que M es proyectivo.
$\therefore M$ es sumando directo de R^n.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Suponga que ${}_RR^n \simeq M \oplus K$. Entonces M es f.g., y la sucesión en $Mod(R)$ $\;0 \longrightarrow K \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0\;$ se parte.
$\therefore M$ es proyectivo y f.g. $\square$

Ej 65. Para $M \in Mod(R)$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) M es inyectivo.

b) Toda sucesión exacta $0 \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$ se escinde.

c) Para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$, se tiene que

$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Z, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(Y, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(X, M) \longrightarrow 0$

es exacta en $Mod(\mathbb{Z})$, donde $f^* = \mathrm{Hom}_R(f, M)$ y $g^* = \mathrm{Hom}_R(g, M)$.

Demostración. $\boxed{a) \Rightarrow b)}$

Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ exacta en $Mod(R)$. Como f es mono, entonces, considerando $I_M : M \longrightarrow M$, tenemos que existe $h: M \longrightarrow Y$ tal que I_M se factoriza de f, es decir, $I_M = hf$ por lo tanto $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ es split-mono y por el ejercicio 54 se escinde.

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$

Sean X, Y R-módulos y $f: X \longrightarrow Y$ mono. Si $h \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & M \arrow[u, "h"] & \end{tikzcd}$$

que se extiende a un pushout

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & Y \arrow[d, "h'"] \\ & M \arrow[r, "f'"'] & D \end{tikzcd}$$

donde $D = ({}^{X \oplus Y}\!/\!_{W})$, $W = \{(fa - ga) : a \in R\}$, $h'(b) = (0, b) + W$ y $g'(c) = (c, 0) + W$.

Así f' es mono. Por hipótesis existe un morfismo $\beta: D \longrightarrow M$ con $\beta f' = 1_M$. Definamos $g = \beta h'$ entonces $g: Y \longrightarrow M$ y $gf = \beta h' f = \beta f' h = h$, por lo que M es inyectivo.

$\boxed{a) \iff c)}$

Como $\mathrm{Hom}_R(\cdot, M)$ es contravariante exacto izquierdo, es suficiente mostrar que M es inyectivo si y sólo si $\mathrm{Hom}_R(\cdot, M)$ convierte monomorfismos en epimorfismos:

Si $\alpha: A \longrightarrow B$ es mono, entonces $\alpha^*: \mathrm{Hom}_R(B, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, M)$ es epi si y sólo si para cada $f \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ existe $g \in \mathrm{Hom}_R(B, M)$ tal que $\alpha^*(g) = f$, y esto pasa si y sólo si para cada $f \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ existe $g \in \mathrm{Hom}_R(B, M)$ tal que $g\alpha = f$, es decir, M es inyectivo. $\square$

Ej 66. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ en $Mod\,(R)$. Entonces $\prod\limits_{i\in I} M_i$ es inyectivo si y sólo si, $\forall\ i \in I$, M_i es inyectivo.

Demostración. La demostración es análoga a lo realizado en el Ej. 63: se emplea la propiedad universal del producto para verificar la necesidad, mientras que los lemas 1 y 2 probados en el Ej. 63, en conjunto a que $\forall\ H \in Mod(R)$ se tiene que $\prod\limits_{i\in I} Hom_R\,(H, M_i) \simeq Hom_R\left(H, \prod\limits_{i\in I} M_i\right)$ (ver Ej. 35), y el siguiente resultado verifican la suficiencia ()cuya desmotración es análoga a aquella del Lema 3 del Ej. 63)

Lema 4. Sean $M, N \in Mod(R)$ tales que M es inyectivo y $M \simeq N$. Entonces N es inyectivo.

□

Ej 67. Sea R un anillo no trivial. Pruebe que:

R es semisimple y conmutativo$\Leftrightarrow$ $R \simeq \bigtimes\limits_{i=1}^{t} K_i$ como anillos, donde K_i es un campo $\forall i \in [1, t]$

Demostración. $\boxed{\Leftarrow)}$ Dado que cada K_i es un campo y $R \simeq \bigtimes\limits_{i=1}^{t} K_i$, se satisface que R es semisimple y conmutativo.

$\boxed{\Rightarrow)}$ En virtud del teorema de **Wedderburn-Artin**, R es isomorfo a $\bigtimes\limits_{i=1}^{t} Mat_{n_i\times n_i}\,(D_i)$, con $n_i \in \mathbb{N}$ y D_i un anillo con división. Ahora, por la conmutatividad de R, la única posibilidad es que $n_i = 1$ y D_i sea conmutativo, para $i \in [1, t]$.

$\therefore R \simeq \bigtimes\limits_{i=1}^{t} K_i$, con K_i un campo, $\forall i \in [1, t]$ □