

Lista 1

Ej 1. Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos.

- a) $Im(\varphi) \leq S$
- b) $Ker(\varphi) \trianglelefteq R$
- c) $\forall S' \subseteq S, \varphi^{-1}(S') \leq R$

Demostración. (a) El hecho de que φ sea un morfismo de anillos con uno garantiza que $\varphi(1) = 1$ y que $Im(\varphi) \neq \emptyset$. Por otro lado, sean $a, b \in Im(\varphi)$. Por definición, existen $x, y \in R$ tales que $\varphi(x) = a$ y $\varphi(y) = b$. Esto implica que

$$\begin{aligned} a - b &= \varphi(x) - \varphi(y) \\ &= \varphi(x - y) \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} ab &= \varphi(x) \varphi(y) \\ &= \varphi(xy) \end{aligned}$$

Así $a - b, ab \in Im(\varphi)$, y $\therefore Im(\varphi) \leq S$.

(b) Primeramente, como $\varphi(0) = 0$, tenemos que $Ker(\varphi) \neq \emptyset$. De igual manera, $Ker(\varphi) \trianglelefteq R$. En efecto, si $x, y \in Ker(\varphi)$, entonces

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0$$

Por lo que $x + y \in Ker(\varphi)$. Ahora, sean $x \in Ker(\varphi)$ y $a \in R$; de manera que

$$\varphi(ax) = \varphi(a) \varphi(x) = 0$$

y

$$\varphi(xa) = \varphi(x) \varphi(a) = 0.$$

Por lo que $ax, xa \in Ker(\varphi)$, y $\therefore Ker(\varphi) \trianglelefteq R$.

(c) Sea S' un subanillo de S . En este sentido, $1 \in S'$ y $\varphi(1) = 1$ implican que $1 \in \varphi^{-1}(S') \neq \emptyset$. Finalmente, dados $a, b \in \varphi^{-1}(S')$, se tiene por la propia definición, que $\varphi(a), \varphi(b) \in S'$. De tal manera que $\varphi(a-b), \varphi(ab) \in S'$. Por tanto, $a-b, ab \in \varphi^{-1}(S')$. $\therefore \varphi^{-1}(S')$ es un subanillo de S . \square

Ej 2. Para un anillo R pruebe que:

- a) $C(R)$ es un subanillo conmutativo de R .
- b) $C(R) = C(R^{op})$.
- c) $R = R^{op}$ como anillos $\Leftrightarrow C(R) = R \Leftrightarrow R$ es conmutativo.

Demostración. a) Sean $a, b \in C(R)$, por definición $ax = xa$ y $bx = xb \quad \forall x \in R$, entonces

$$(a-b)x = ax - (bx) = xa - (xb) = x(a-b).$$

Por lo tanto $a-b \in C(R)$. Ahora, $abx = axb = xab$, por lo que $a, b \in C(R)$ y en consecuencia $C(R) \leq R$.

b) Sea $*$: $R^{op} \times R^{op} \rightarrow R^{op}$ la operación de anillo en R^{op} . Así se tiene que

$$\begin{aligned} a \in C(R^{op}) &\Leftrightarrow \forall x \in R \quad a * x = x * a \\ &\Leftrightarrow \forall x \in R \quad xa = ax \\ &\Leftrightarrow \forall x \in R \quad a \in C(R). \end{aligned}$$

c) $\cdot \Rightarrow \cdot$ Supongamos $R = R^{op}$ como anillos, entonces sus operaciones coinciden, es decir, $\forall a \in R$ se tiene que $\forall x \in R \quad ax = a * x = xa$, entonces $R \subset C(R) \subset R$ por lo que $R = C(R)$.

$\cdot \Rightarrow \cdot \Rightarrow \cdot$ Si $R = C(R)$, entonces $\forall x, y \in R \quad xy = yx$, por lo que R es conmutativo.

$\cdot \Rightarrow \cdot \Rightarrow \cdot \Rightarrow \cdot$ Si R es conmutativo, entonces $\forall x, a \in R \quad xa = ax = x * a$. Además, como R y R^{op} coinciden como grupos abelianos, entonces $R = R^{op}$ como anillos. \square

Ej 3. Sea $(R, K\varphi) \in K - Alg$. La función

$$\begin{aligned} \bullet_\varphi : K \times R &\rightarrow R \\ (k, r) &\mapsto k \bullet r := \varphi(k)r \end{aligned}$$

es una acción compatible de K en R .

Demostración. Como $(R, K, \varphi) \in K - Alg$ entonces K es un anillo conmutativo.

(AC1) Sean $k \in K$ y $r_1, r_2 \in R$. Así

$$\begin{aligned} k \bullet_{\varphi} (r_1 + r_2) &= \varphi(k) (r_1 + r_2) \\ &= \varphi(k) r_1 + \varphi(k) r_2 \\ &= k \bullet_{\varphi} r_1 + k \bullet_{\varphi} r_2. \end{aligned}$$

(AC2) Sean $k_1, k_2 \in K$ y $r \in R$. Así

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2) \bullet_{\varphi} r &= \varphi(k_1 + k_2) r \\ &= (\varphi(k_1) + \varphi(k_2)) r \\ &= \varphi(k_1) r + \varphi(k_2) r \\ &= k_1 \bullet_{\varphi} r + k_2 \bullet_{\varphi} r. \end{aligned}$$

(AC3) Sean $k_1, k_2 \in K$ y $r \in R$. Así

$$\begin{aligned} k_1 \bullet_{\varphi} (k_2 \bullet_{\varphi} r) &= \varphi(k_1) (k_2 \bullet_{\varphi} r) \\ &= \varphi(k_1) (\varphi(k_2) r) \\ &= (\varphi(k_1) \varphi(k_2)) r \\ &= (\varphi(k_1 k_2)) r \\ &= (k_1 k_2) \bullet_{\varphi} r. \end{aligned}$$

(AC4) Sean $k \in K$ y $r_1, r_2 \in R$. Así

$$\begin{aligned} k \bullet_{\varphi} (r_1 r_2) &= \varphi(k) (r_1 r_2) \\ &= (\varphi(k) r_1) r_2 \\ &= (k \bullet_{\varphi} r_1) r_2. \end{aligned}$$

Pero también

$$\begin{aligned} (\varphi(k) r_1) r_2 &= (r_1 \varphi(k)) r_2, \quad Im(\varphi) \subseteq C(R) \\ &= (k \bullet_{\varphi} r_1) r_2. \\ &= r_1 (\varphi(k) r_2) \\ &= r_1 (k \bullet_{\varphi} r_2). \end{aligned}$$

(AC5) Sean $r \in R$. Así

$$\begin{aligned} 1_K \bullet_{\varphi} r &= \varphi(1_K) r \\ &= 1_R \cdot r, \quad \varphi \text{ es un morfismo de anillos.} \\ \therefore (R, \bullet_{\varphi}) &\in K_{Ac} - Rings. \end{aligned}$$

□

Ej 4. Para $\alpha : K \times R \longrightarrow R$, $(k, r) \mapsto kr$ en K_{AC} -Rings, pruebe que la asignación $\varphi_\alpha : K \longrightarrow R$, con $\varphi_\alpha(k) = k \cdot 1_R$ es un morfismo de anillos tal que $Im(\varphi_\alpha) \subseteq C(R)$.

Demostración. Sean $k, r \in K$. Dado que α es una acción, se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(k + r) &= (k + r) \cdot 1_R \\ &= k \cdot 1_R + r \cdot 1_R \\ &= \varphi_\alpha(k) + \varphi_\alpha(r)\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(kr) &= (kr) \cdot 1_R \\ &= k \cdot (r \cdot 1_R) \\ &= (k \cdot 1_R)(r \cdot 1_R) \\ &= \varphi_\alpha(k) \varphi_\alpha(r).\end{aligned}$$

Además, por la regla de correspondencia de φ_α , $\varphi_\alpha(1) = 1_K \cdot 1_R = 1_R$. Por tanto, φ_α es un morfismo de anillos.

Finalmente, de la quinta condición de ser acción a izquierda, se deduce que $Im(\varphi_\alpha) \subseteq C(R)$. En efecto, si $k \in K$ y $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(k)r &= (k \cdot 1_R)r \\ &= k \cdot (1_R r) \\ &= k \cdot (r 1_R) \\ &= r \cdot (k 1_R) \\ &= r \varphi_\alpha(k)\end{aligned}$$

$\therefore Im(\varphi_\alpha) \subseteq C(R)$. □

Ej 5. Para un anillo conmutativo K , pruebe que se tiene una biyección $\alpha : K - Alg \longrightarrow K_{AC} - Rings$, $(R, K, \varphi) \mapsto \alpha_\varphi$, donde $\alpha_\varphi : K \times R \rightarrow R$ está dada por $\alpha_\varphi(k, r) := \varphi(k)r$; cuya inversa está dada por $\varphi_\alpha := \alpha(k, 1_R)$.

Demostración. Para evitar abusos de notación en la prueba se redefinirán las funciones de la siguiente forma. Sean $D = \{\varphi : (R, K, \varphi) \in K - Alg\}$ y

$$f : D \longrightarrow K_{AC} - Rings, \quad f(\varphi) = f_\varphi$$

donde $f_\varphi : K \times R \rightarrow R$ está dada por $f_\varphi(k, r) := \varphi(k)r$. Y definimos $f^{-1} : K_{AC} - Rings \longrightarrow D$ como $f^{-1}(\alpha) := f_\alpha^{-1}$, donde $\alpha : K \times R \rightarrow R$ y $f_\alpha^{-1}(k) := \alpha(k, 1_R) = k \cdot 1_R$.

Entonces

$$((ff^{-1})(\alpha))(k, r) = (f(f_\alpha^{-1}))(k, r) = f_\alpha^{-1}(k)r = \alpha(k, 1_R)r = \alpha(k, r)$$

y

$$((f^{-1}f)(\varphi))(k) = (f^{-1}f_\varphi)(k) = f_\varphi(k, 1_R) = \varphi(k)1_R = \varphi(k).$$

Por lo que f es biyectiva con f^{-1} su inversa. \square

Ej 6. Sea R un anillo.

(a) Si $(\lambda, M) \in {}_R\text{Rep}$ y la función \bullet_λ está definida como

$$\begin{aligned} \bullet_\lambda : R \times M &\rightarrow M \\ (r, m) &\mapsto r \bullet_\lambda m := \lambda(r)(m), \end{aligned}$$

entonces $({}_R M, \bullet_\lambda) \in {}_R\text{Mod}$.

(b) Sea $({}_R M, \bullet) \in {}_R\text{Mod}$ y la función λ_\bullet definida como

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet : R &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}^l \\ r &\mapsto \lambda_\bullet(r), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet(r) : M &\rightarrow M \\ m &\mapsto r \bullet m. \end{aligned}$$

Entonces $(\lambda_\bullet, M) \in {}_R\text{Rep}$.

(c) Existe una biyección entre ${}_R\text{Rep}$ y ${}_R\text{Mod}$.

Demostración. (a) Como $(\lambda, M) \in {}_R\text{Rep}$ entonces M es un grupo abeliano.

(RMI1) Sean $r \in R, m_1, m_2 \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} r \bullet_\lambda (m_1 + m_2) &= \lambda(r)(m_1 + m_2) \\ &= \lambda(r)(m_1) + \lambda(r)(m_2) \quad , \quad \lambda(r) \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(M) \\ &= r \bullet_\lambda m_1 + r \bullet_\lambda m_2. \end{aligned}$$

(RMI2) Sean $r_1, r_2 \in R, m \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2) \bullet_\lambda m &= \lambda(r_1 + r_2)(m) \\ &= (\lambda(r_1) + \lambda(r_2))(m) \quad , \quad \lambda \text{ es un morfismo de anillos} \\ &= \lambda(r_1)(m) + \lambda(r_2)(m) \\ &= r_1 \bullet_\lambda m + r_2 \bullet_\lambda m. \end{aligned}$$

(RMI3) Sean $r_1, r_2 \in R, m \in M$. Entonces

$$\begin{aligned}
 r_1 \bullet_\lambda (r_2 \bullet_\lambda m) &= \lambda(r_1) (\lambda(r_2) m) \\
 &= \lambda(r_1) (\lambda(r_2) (m)) \\
 &= \lambda(r_1) \circ \lambda(r_2) (m) \\
 &= \lambda(r_1 r_2) (m) \quad , \quad \lambda \text{ es un morfismo de anillos} \\
 &= (r_1 r_2) \bullet_\lambda m.
 \end{aligned}$$

(RMI4) Sea $m \in M$. Entonces

$$\begin{aligned}
 1_R \bullet_\lambda m &= \lambda(1_R) (m) \\
 &= Id_M (m) \quad , \quad \lambda \text{ es un morfismo de anillos} \\
 &= m.
 \end{aligned}$$

$$\therefore ({}_R M, \bullet_\lambda) \in {}_R Mod.$$

(b) Como $({}_R M, \bullet_\lambda) \in {}_R Mod$ entonces M es un grupo abeliano.
Sea $r \in R$ y $m, n \in M$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \lambda_\bullet(r) (m + n) &= r \bullet (m + n) \\
 &= r \bullet m + r \bullet n \\
 &= \lambda_\bullet(r) (m) + \lambda_\bullet(r) (n) \\
 &\implies \lambda_\bullet(r) \in End_{\mathbb{Z}}(M).
 \end{aligned}$$

Si consideramos la composición usual de funciones \circ entonces $\lambda_\bullet(r) \in End_{\mathbb{Z}}(M)$, así la aplicación λ_\bullet es una función bien definida.
Sean $r_1, r_2 \in R$. Si $m \in M$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \lambda_\bullet(r_1 + r_2) (m) &= (r_1 + r_2) \bullet m \\
 &= r_1 \bullet m + r_2 \bullet m \\
 &= \lambda_\bullet(r_1) (m) + \lambda_\bullet(r_2) (m) \\
 &= (\lambda_\bullet(r_1) + \lambda_\bullet(r_2)) (m). \\
 \implies \lambda_\bullet(r_1 + r_2) &= \lambda_\bullet(r_1) + \lambda_\bullet(r_2).
 \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
 \lambda_\bullet(r_1 r_2) (m) &= (r_1 r_2) \bullet m \\
 &= r_1 \bullet (r_2 \bullet m) \\
 &= \lambda_\bullet(r_1) (\lambda_\bullet(r_2) (m)) \\
 &= \lambda_\bullet(r_1) \circ \lambda_\bullet(r_2) (m) \\
 \implies \lambda_\bullet(r_1 r_2) &= \lambda_\bullet(r_1) \circ \lambda_\bullet(r_2).
 \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\lambda_{\bullet}(1_R)(m) &= 1_R \bullet m \\ &= m \\ \implies \lambda_{\bullet}(1_R) &= Id_M.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda_{\bullet} : R \rightarrow End_{\mathbb{Z}}^l(M)$ es un morfismo de anillos y así $(\lambda_{\bullet}, M) \in {}_RRep$.

(c) Consideremos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned}f : {}_RRep &\rightarrow {}_RMod \\ (\lambda, M) &\mapsto ({}_RM, \bullet_{\lambda});\end{aligned}$$

con \bullet_{λ} definido como en (a).

$$\begin{aligned}g : {}_RMod &\rightarrow {}_RRep \\ ({}_RM, \bullet) &\mapsto (\lambda_{\bullet}, M);\end{aligned}$$

con λ_{\bullet} definido como en (b).

Por los (a) y (b) las aplicaciones f y g son funciones bien definidas.

Sea $({}_RM, \bullet) \in {}_RMod$. Entonces

$$\begin{aligned}f \circ g(({}_RM, \bullet)) &= f(g(({}_RM, \bullet))) \\ &= f((\lambda_{\bullet}, M)) \\ &= ({}_RM, \bullet_{\lambda_{\bullet}}).\end{aligned}$$

Sean $r \in R$ y $m \in M$. Así

$$\begin{aligned}r \bullet_{\lambda_{\bullet}} m &= \lambda_{\bullet}(r)(m) \\ &= r \bullet m \\ \implies \bullet &= \bullet_{\lambda_{\bullet}}. \\ \implies f \circ g(({}_RM, \bullet)) &= ({}_RM, \bullet) \\ \implies f \circ g &= Id_{{}_RMod}.\end{aligned}$$

Ahora, sea $(\lambda, M) \in {}_RRep$. Luego

$$\begin{aligned}g \circ f((\lambda, M)) &= g(f((\lambda, M))) \\ &= g(({}_RM, \bullet_{\lambda})) \\ &= (\lambda_{\bullet_{\lambda}}, M).\end{aligned}$$

Sea $r \in R$ y $m \in M$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\lambda_{\bullet_{\lambda}}(r)(m) &= r \bullet_{\lambda} m \\ &= \lambda(r)(m) \\ \implies \lambda_{\bullet_{\lambda}}(r) &= \lambda(r) \\ \implies \lambda_{\bullet_{\lambda}} &= \lambda \\ \implies g \circ f((\lambda, M)) &= (\lambda, M) \\ \implies g \circ f &= Id_{{}_RRep}.\end{aligned}$$

De modo que f es invertible, con inversa g , y por lo tanto es una biyección, con lo cual se tiene lo deseado. \square

Ej 7. Sea R un anillo. Pruebe que

- a) Dada una representación a derecha (M, ρ) , se tiene una acción a derecha $\beta_\rho : M \times R \longrightarrow M$, $(m, r) \mapsto mr = (m) \rho(r)$ tal que $(M, \beta_\rho) \in \text{Mod}_R$
- b) Dado un R -módulo a derecha (M, β) , se tiene un morfismo de anillos $\rho_\beta : R \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}^r(M)$, $(m) \rho_\beta(r) = \beta(m, r) = mr$
- c) Se tiene una biyección $\beta : \text{Rep}_R \longrightarrow \text{Mod}_R$, $(M, \rho) \mapsto \beta_\rho$, donde $\beta_\rho : M \times R \mapsto M$ está dada por $\beta_\rho(m, r) = (m) \rho(r)$; cuya inversa es $\rho : \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Rep}_R$, con $(\beta : M \times R \longrightarrow M) \mapsto (\rho_\beta : R \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}^r(M))$, dada por $(m) \rho_\beta(r) = \beta(m, r)$

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Dado que M es un grupo abeliano, basta probar que se satisfacen las condiciones de la definición de R -módulo a derecha. Sean $r_1, r_2 \in R$ y $m_1, m_2 \in M$.

Primero,

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \cdot r_1 &= (m_1 + m_2) \rho(r_1) \\ &= (m_1) \rho(r_1) + (m_2) \rho(r_1) \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_1, \end{aligned}$$

puesto que $\rho(r_1)$ es un morfismo de grupos abelianos.

Por otro lado, como ρ es un morfismo de anillos, podemos decir que

$$\begin{aligned} m_1 \cdot (r_1 + r_2) &= (m_1) \rho(r_1 + r_2) \\ &= (m_1) [\rho(r_1) + \rho(r_2)] \\ &= (m_1) \rho(r_1) + (m_1) \rho(r_2) \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_1 \cdot r_2. \end{aligned}$$

También observemos que

$$\begin{aligned} m_1 \cdot 1_R &= (m_1) \rho(1) \\ &= (m_1) \text{Id}_R \\ &= m_1. \end{aligned}$$

Por último, en virtud de que ρ preserva productos, se tiene que

$$\begin{aligned} m_1 \cdot (r_1 r_2) &= (m_1) \rho(r_1 r_2) \\ &= (m_1) \rho(r_1) \circ \rho(r_2) \\ &= ((m_1) \rho(r_1)) \rho(r_2) \\ &= (m_1 \cdot r_1) \rho(r_2) \\ &= (m \cdot r_1) \cdot r_2 \end{aligned}$$

$\therefore (M, \beta_\rho)$ es un R -módulo a derecha.

(b) Como en el inciso anterior, bastará con probar que ρ_β es un morfismo de anillos. Bajo este contexto, sean $m_1, m_2 \in M$ y $r_1, r_2 \in R$.

Comenzaremos notando que $\rho(r_1)$ es un homomorfismo de anillos. En efecto,

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \rho(r_1) &= (m_1 + m_2) \cdot r_1 \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_1 \\ &= (m_1) \rho(r_1) + (m_2) \rho(r_1) \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\rho(r_1) \in \text{End}_{\mathbb{Z}}^r(M)$.

Análogamente, ρ_β es un homomorfismo de grupos abelianos, puesto que

$$\begin{aligned} (m_1) \rho_\beta(r_1 + r_2) &= m_1 \cdot (r_1 + r_2) \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_1 \cdot r_2 \\ &= (m_1) \rho_\beta(r_1) + (m_1) \rho_\beta(r_2) \end{aligned}$$

y así $\rho_\beta(r_1 + r_2) = \rho_\beta(r_1) + \rho_\beta(r_2)$. Más aún, ρ_β también preserva productos, toda vez que

$$\begin{aligned} (m_1) \rho_\beta(r_1 r_2) &= m_1 \cdot (r_1 r_2) \\ &= (m_1 \cdot r_1) \cdot r_2 \\ &= ((m_1) \rho_\beta(r_1)) \rho_\beta(r_2) \\ &= (m_1) [\rho_\beta(r_1) \circ \rho_\beta(r_2)]. \end{aligned}$$

Para finalizar, ρ_β en efecto es un morfismo de anillos porque, adicionalmente, se satisface que $(m_1) \rho_\beta(1) = m_1 \cdot 1_R = m_1$. Ergo, se concluye el resultado.

(c) La biyección queda resuelta debido a los 2 incisos anteriores. El primero garantiza que toda representación a derecha tiene estructura de R -módulo a derecha; inversamente, todo R -módulo a derecha induce una acción a derecha con la cual el módulo puede ser visto como una representación a derecha de R . \square

Ej 8. Sea R un anillo, $(M, +)$ un grupo abeliano y $\varphi : R \times M \rightarrow M$ una función. La acción opuesta $\varphi^{op} : M \times R^{op} \rightarrow M$, se define como sigue:

$$\varphi^{op}(m, r^{op}) := \varphi(r, m) \quad \forall r \in R, \quad \forall m \in M.$$

Pruebe que

$$({}_R M, \varphi) \in {}_R \text{Mod} \Leftrightarrow (M_{R^{op}}, \varphi^{op}) \in \text{Mod}_{R^{op}}.$$

Demostración. Recordando que $r_2^{op} r_1^{op} = (r_2 r_1)^{op}$, se tiene que:

$$(M_{R^{op}}, \varphi^{op}) \in \text{Mod}_{R^{op}}.$$

\Leftrightarrow

- i) $\varphi^{op}[(m_1 + m_2), r^{op}] = \varphi^{op}(m_1, r^{op}) + \varphi^{op}(m_2, r^{op}).$
- ii) $\varphi^{op}[m, (r_1^{op} + r_2^{op})] = \varphi^{op}(m, r_1^{op}) + \varphi^{op}(m, r_2^{op}).$
- iii) $\varphi^{op}(m, 1_R^{op}) = m.$
- iv) $\varphi^{op}(m, r_1^{op} r_2^{op}) = \varphi^{op}(\varphi^{op}(m, r_1^{op}), r_2^{op}).$

\Leftrightarrow

- i) $\varphi[r, (m_1 + m_2)] = \varphi(r, m_1) + \varphi(r, m_2).$
- ii) $\varphi[(r_1 + r_2), m] = \varphi(r_1, m) + \varphi(r_2, m).$
- iii) $\varphi(1_R, m) = m.$
- iv) $\varphi(r_2 r_1, m) = \varphi(r_2, \varphi(r_1, m)).$

\Leftrightarrow

$$({}_R M, \varphi) \in {}_R \text{Mod}.$$

□

Ej 9. Sea R un anillo con su producto denotado por medio de yuxtaposición. Entonces

(a) si la función \bullet está definida como

$$\begin{aligned} \bullet : R \times R &\rightarrow R \\ (r, x) &\mapsto r \bullet x := rx, \end{aligned}$$

$$({}_R R, \bullet) \in {}_R \text{Mod}.$$

(b) si la función \bullet está definida como

$$\begin{aligned} \bullet : R \times R &\rightarrow R \\ (x, r) &\mapsto x \bullet r := xr, \end{aligned}$$

$$(R_R, \bullet) \in \text{Mod}_R.$$

Demostración. $\boxed{(a)}$ Sean $r, s, t \in R$. Se tiene lo siguiente como consecuencia de la asociatividad de del producto en R y la distributividad de este con respecto a la suma en R :

$$\begin{aligned}
r \bullet (s + t) &= r (s + t) = rs + st \\
&= r \bullet t + s \bullet t. \\
(r + s) \bullet t &= (r + s) \bullet t = rt + st \\
&= r \bullet t + s \bullet t. \\
r \bullet (s \bullet t) &= r (st) = (rs) t \\
&= (r \bullet s) \bullet t. \\
(r + s) \bullet t &= (r + s) \bullet t = rt + st \\
&= r \bullet t + s \bullet t.
\end{aligned}$$

Finalmente, como 1_R es el neutro multiplicativo de R

$$1_R \bullet r = 1_R r = r. \therefore ({}_R R, \bullet) \in {}_R \text{Mod}.$$

$\boxed{(b)}$ Es análogo al inciso (a), empleando nuevamente la asociatividad de del producto en R y la distributividad de este con respecto a la suma en R , así como la propiedad del neutro multiplicativo. \square

Ej 10. Sea K un anillo conmutativo.

- a) Para un anillo R , pruebe que dar una estructura de K -álgebra en R es equivalente a dar una estructura de K -módulo a izquierda en R , vía una acción a izquierda $K \times R \longrightarrow R$, $(k, r) \mapsto k \cdot r$ tal que satisface la propiedad $k \cdot (r_1 r_2) (k \cdot r_1) r_2 = r_1 (k \cdot r_2)$, $\forall k \in K, \forall r_1, r_2 \in R$.
- b) Sean R, S dos K -álgebras, $f : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos. Pruebe que f es un morfismo de K -álgebras si y sólo si f es un morfismo de K -módulos a izquierda, vía la estructura de K -módulo en R y en S dada por el primer inciso.

Demostración. $\boxed{(a) \mid \Rightarrow}$ Suponga que (R, K, φ) tiene una estructura de K -álgebra. Ahora, definimos una acción a izquierda de K sobre R como $(k, r) \mapsto \varphi(k) r$. Veremos que, bajo este contexto, R es un K -módulo a izquierda.

Sean $x, y \in R$ y $k, r \in K$. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
k \cdot (x + y) &= \varphi(k) (x + y) \\
&= \varphi(k) x + \varphi(k) y \\
&= k \cdot x + k \cdot y.
\end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned}(k+r) \cdot x &= [\varphi(k) + \varphi(r)]x \\ &= \varphi(k)x + \varphi(r)x \\ &= k \cdot x + r \cdot x.\end{aligned}$$

Igualmente,

$$\begin{aligned}1_K \cdot x &= \varphi(1_K) \\ &= 1_R x \\ &= x.\end{aligned}$$

Y así mismo, $Im(\varphi) \subseteq C(R)$, pues (R, K, φ) es K -álgebra. Inclusive, obtenemos

$$\begin{aligned}(kr) \cdot x &= \varphi(kr)x \\ &= [\varphi(k)\varphi(r)]x \\ &= \varphi(k)[\varphi(r)x] \\ &= k \cdot (r \cdot x).\end{aligned}$$

Por último, $Im(\varphi) \subseteq C(R)$ implica las siguientes dos igualdades

$$\begin{aligned}k \cdot (xy) &= \varphi(k)(xy) \\ &= (\varphi(k)x)y \\ &= (k \cdot x)y\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}k \cdot (xy) &= \varphi(k)(xy) \\ &= (\varphi(k)x)y \\ &= (x\varphi(k))y \\ &= x(\varphi(k)y) \\ &= x(k \cdot y)\end{aligned}$$

$\therefore R \in {}_K Mod$.

$\boxed{\Leftarrow}$ En el supuesto de que R sea un K -módulo a izquierda, vía una acción $K \times R \longrightarrow R$, $(k, r) \mapsto k \cdot r$ con la propiedad de que para cualesquiera $k \in K$ y $r_1, r_2 \in R$ se tiene que $k \cdot (r_1 r_2) = (k \cdot r_1) r_2 = r_1 (k \cdot r_2)$, se puede definir una función $\varphi : K \longrightarrow R$ como $\varphi(k) = k \cdot 1_R$. Mostraremos que φ es un homomorfismo de anillos tal que $Im(\varphi) \subseteq C(R)$.

Sean $k, r \in K$. Comencemos notando que

$$\begin{aligned}\varphi(k+r) &= (k+r) \cdot 1_R \\ &= k \cdot 1_R + r \cdot 1_R \\ &= \varphi(k) + \varphi(r).\end{aligned}$$

Y que, a su vez,

$$\begin{aligned}\varphi(kr) &= (kr) \cdot 1_R \\ &= k \cdot (r \cdot 1_R) \\ &= k \cdot \varphi(r) \\ &= k \cdot (1_R \varphi(r)) \\ &= (k \cdot 1_R) \varphi(r) \\ &= \varphi(k) \varphi(r).\end{aligned}$$

Incluso, en este sentido, se tiene que $\varphi(1_K) = 1_K \cdot 1_R = 1_R$. Lo cual implica que φ es un homomorfismo de anillos. Para terminar, veamos que $Im(\varphi) \subseteq C(R)$. Sean $x \in K$, $y \in R$. Por hipótesis,

$$\begin{aligned}(k \cdot 1_R) r &= k \cdot (1_R r) \\ &= k \cdot r \\ &= k \cdot (r 1_R) \\ &= r (k \cdot 1_R).\end{aligned}$$

Luego,

$$\varphi(k) r = r \varphi(k).$$

$\therefore R$ adquiere estructura de K -álgebra.

(b) \Rightarrow Empecemos suponiendo que f es un morfismo de K -álgebras, con (R, K, φ) y (S, K, ψ) las K -álgebras. Sean $k \in K$ y $r \in R$. En virtud de la correspondencia del inciso anterior se tiene que

$$\begin{aligned}k \cdot r &= k \cdot (1_R r) \\ &= (k \cdot 1_R) r \\ &= \varphi(k) r.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}f(k \cdot r) &= f(\varphi(k) r) \\ &= \psi(k) f(r) \\ &= k \cdot f(r)\end{aligned}$$

$\therefore f$ es un morfismo de K -módulos a izquierda.

$\boxed{\Leftarrow}$ Considere las K -álgebras (R, K, φ) y (S, K, ψ) . Sean $t \in K$ y $x \in R$.
 Note que

$$\begin{aligned}\varphi(k)r &= (k \cdot 1_R)r \\ &= k \cdot (1_R r) \\ &= k \cdot r.\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}f(\varphi(k)r) &= f(k \cdot r) \\ &= k \cdot f(r) \\ &= \psi(k)f(r).\end{aligned}$$

$\therefore f$ es un morfismo de K -álgebras. \square

Ej 11. Dado un morfismo de anillos $\varphi : R \rightarrow S$, construya la correspondencia análoga (a la de módulos) $F_\varphi : {}_S\text{Rep} \rightarrow {}_R\text{Rep}$.

Demostración. Sean $\varphi : R \rightarrow S$ un morfismo de anillos y $(\lambda, M) \in {}_S\text{Rep}$ una representación a izquierda del anillo S . Se define la correspondencia **Cambio de anillos** $F_\varphi : {}_S\text{Rep} \rightarrow {}_R\text{Rep}$. Como grupos abelianos, $F_\lambda(M) := M$ y la representación $R \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}^l(M)$, $(r) \mapsto \lambda'(r)$, se define por $\lambda'(r) := \lambda(\varphi(r))$. Cabe observar que, como λ y φ son morfismos de anillos entonces λ' es morfismo de anillos. \square