Lista 4

Arruti, Sergio, Jesús

Ej 48. Sea $F \in Mod(R)$ un R-módulo libre con base X y $f : X \to N$ una función, con $N \in Mod(R)$. Entonces $\exists!\ \overline{f} : F \to N \in Mod(R)$ tal que $\overline{f}\big|_X = f$.

Demostración. Dado que X es base de F se tiene que $F = \bigoplus_{x \in X} Rx$ y así cada $a \in F$ se descompone de forma única en $\sum\limits_{x \in X} Rx$ como $a = \sum\limits_{x \in X_a} r_x x$, con $X_a \subseteq X$ finito y $r_x \in R$; por lo tanto la aplicación

$$\begin{aligned} \overline{f} : F &\to N \\ a &\mapsto \sum_{x \in X_a} r_x f(x) \end{aligned}$$

es una función bien definida. Sean $r \in R$ y $m, n \in F$, con $\sum\limits_{x \in X_m} r_x x$, $\sum\limits_{x \in X_n} s_x x$, $X' := X_m \cup X_n$ y

$$\begin{aligned} r_x = 0, &\quad \text{si } x \in X' \setminus X_m, \\ s_x = 0, &\quad \text{si } x \in X' \setminus X_n, \end{aligned} \tag{*}$$

entonces, por la unicidad de la descomposición en $\sum\limits_{x \in X} Rx$, la descomposición de $ra + b$ es $\sum_{x \in X'} (rr_x + s_x)\, x$. Así

$$\begin{aligned} \overline{f}\,(ra + b) &= \sum_{x \in X'} (rr_x + s_x)\, f(x) \\ &= \sum_{x \in X'} (rr_x)\, f(x) + \sum_{x \in X'} s_x f(x) \\ &= r \sum_{x \in X_m} r_x f(x) + \sum_{x \in X_n} s_x f(x), \qquad (*) \\ &= r\overline{f}(a) + \overline{f}(b). \\ \Longrightarrow \overline{f} &: F \to N \in Mod\,(R)\,. \end{aligned}$$

Sea $x \in X$, entonces la descomposición de x en $\sum_{x \in X} Rx$ es $1_R x$, con lo cual

$$\begin{aligned}\overline{f}(x) &= \sum_{x\in\{x\}} 1_R f(x)\\ &= f(x).\\ \implies \overline{f}\big|_X &= f.\end{aligned}$$

Finalmente, sea $g : F \to N$ un morfismo de R-módulos tal que $g|_X = f$ y $a \in F$. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}g\left(a\right) &= g\left(\sum_{x\in X_a} r_x x\right)\\ &= \sum_{x\in X_a} r_x g\left(x\right)\\ &= \sum_{x\in X_a} r_x f\left(x\right)\\ &= \overline{f}(x).\\ \implies g &= \overline{f}.\end{aligned}$$

$\square$

Ej 49.

Ej 50.

Ej 51. Sea $C \in Mod\left(Mod\left(R\right)\right)$ y $\sim$ una relación en $Obj\left({}^{Mod\left(R\right)}\!/_{C}\right)$ dada por

$$f \sim f' \iff Hom\left(f, f'\right) \neq \varnothing \neq Hom\left(f', f\right).$$

Entonces $\sim$ es un relación de equivalencia en $Obj\left({}^{Mod\left(R\right)}\!/_{C}\right)$.

Demostración. $\boxed{\text{Reflexividad}}$ Sea $f : A \to C \in Obj\left({}^{Mod\left(R\right)}\!/_{C}\right)$. Notemos que $Id_A \in Hom_R\left(A, A\right)$ y $f \circ Id_A = f$, así $Id_a \in Hom\left(f, f\right)$ y por lo tanto $Hom\left(f, f\right) \neq \varnothing$.
$\boxed{\text{Simetría}}$

$$\begin{aligned}f \sim f' &\iff Hom\left(f, f'\right) \neq \varnothing \neq Hom\left(f', f\right)\\ &\iff Hom\left(f', f\right) \neq \varnothing \neq Hom\left(f, f'\right)\\ &\iff f' \sim f.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Transitividad}}$ Sean $f : A \to C, g : A' \to C, h : B \to C \in Obj\left({}^{Mod\left(R\right)}\!/_{C}\right)$ tales que $f \sim g$ y $g \sim h$. De la definición de $\sim$ se sigue que $\exists\ p \in$

$Hom_R(A, A')$, $q \in Hom_R(A', A)$, $p' \in Hom_R(A', B)$, $q' \in Hom_R(B, A')$ tales que

$$\begin{aligned} gp &= f \\ fq &= g. \end{aligned} \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} hp' &= g \\ gq' &= h. \end{aligned} \qquad (**)$$

Así $p'p \in Hom_R(A, B)$, $qq' \in Hom_R(B, A)$ y

$$\begin{aligned} h(p'p) &= f \\ f(qq') &= h, \\ \therefore\ f &\sim h. \end{aligned}$$

$\square$

Ej 52.

Ej 53.

Definición 1. Decimos que una sucesión exacta en $Mod(R)$, η,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0\ .$$

se escinde, o bien que se parte, si f es un split-mono y g es un split-epi.

Ej 54. Sea η: $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ exacta en $Mod(R)$. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) η se escinde,

b) f es un split-mono,

c) g es un split epi

d) $Im(f) = Ker(g)$ y $Im(f)$ es un sumando directo de M.

Demostración. La demostración se realizará siguiendo el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
 & b) \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
a) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & d) \arrow[r, Rightarrow] & a) \\
 & c) \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

$a) \implies b)$ y $a) \implies c)$ se siguen en forma inmediata de la definición de sucesión exacta que se escinde.
En adelante, sean $N := Im\,(f)$ y $N' := Ker\,(g)$.
$\boxed{b) \implies d)}$ $N = N'$ se sigue del hecho de que η es una sucesión exacta. Sean i la inclusión de N en M, $\alpha : M \to M_1$ un morfismo de R-módulos tal que $\alpha f = Id_{M_1}$ (cuya existencia se tiene garantizada dado que f es un split-mono) y la función

$$\begin{aligned} \gamma : M &\to N \\ m &\mapsto f\alpha\,(m)\,. \end{aligned}$$

γ es un morfismo de R-módulos pues f y α lo son, y más aún si $f\,(a) \in N$ se satisface que

$$\begin{aligned} \gamma i\,(f\,(a)) &= f\,(\alpha f\,(a)) \\ &= f\,(a)\,. \\ &\implies \gamma i = Id_N, \\ &\implies i : N \to M \text{ es un split-mono.} \\ &\implies N \text{ es un sumando directo de } M. \qquad \text{Teorema 1.12.5}b) \end{aligned}$$

$\boxed{c) \implies d)}$ Sean π el epimorfismo canónico de M sobre N', $\beta : M_2 \to M$ un morfismo de R-módulos tal que $g\beta = Id_{M_2}$ y la aplicación

$$\begin{aligned} \delta : N' &\to M \\ m + N' &\mapsto \beta g\,(m)\,. \end{aligned}$$

Afirmamos que δ es una función bien definida. En efecto: sean $m' \in m+N'$, así

$$\begin{aligned} m - m' &\in N' \\ &\implies g\,(m - m') = 0 \\ &\implies g\,(m) = g\,(m') \\ &\implies hg\,(m) = hg\,(m')\,. \end{aligned}$$

Más aún, δ es un morfismo de R-módulos pues h y g lo son, y si $m \in M$ entonces

$$\pi\delta\,(m + N') = \beta g\,(m) + N',$$

con

$$\begin{aligned}
g\left(\beta g\left(m\right)-m\right) &= g\beta\left(g(m)\right)-g(m)\\
&= g\left(m\right)-g\left(m\right)\\
&= 0.\\
&\Longrightarrow \beta g\left(m\right)-m\in N'\\
&\Longrightarrow \beta g\left(m\right)+N'=m+N'\\
&\Longrightarrow \pi\delta\left(m+N'\right)=m+N'.\\
&\Longrightarrow \pi\delta=Id_{N'},
\end{aligned}$$

con lo cual π es un split-epi. Así, por el Teorema 1.12.5c) y dado que $N=N'$ por ser η exacta, se tiene lo deseado.

$\boxed{d)\implies a)}$ Verificaremos primeramente que f es un split-mono. Se tiene que $\exists\ J\in\mathscr{L}\left(M\right)$ tal que $M=N\oplus J$, con lo cual para cada $m\in M$ $\exists!$ $n_m\in N$ y $j_m\in J$ tales que $m=n_m+j_m$. Lo anterior en conjunto al hecho de que f es en partícular inyectiva, por ser η exacta, garantiza que

$$\forall\ m\in M\ \exists!\ a_m\in M_1, j_m\in J \text{ tales que } m=f\left(a_m\right)+j_m. \qquad (*)$$

Así

$$\begin{aligned}
\varphi: M&\to M_1\\
m&\mapsto a_m
\end{aligned}$$

es una función bien definida. Afirmamos que φ es un morfismo de R-módulos. En efecto, sean $r\in R$, $z,w\in M$, tales que $z=f\left(a_z\right)+j_z$ y $w=f\left(a_w\right)+j_w$, entonces

$$\begin{aligned}
rz+w &= r\left(f\left(a_z\right)+j_z\right)+f\left(a_w\right)+j_w\\
&= f\left(ra_z+a_w\right)+rj_z+j_w.
\end{aligned}$$

Aplicando el hecho de que J es un submódulo de M y $(*)$ a lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}
\varphi\left(rz+w\right) &= ra_z+a_w\\
&= rf(z)+f(w).
\end{aligned}$$

Finalmente notemos que, si $a\in M_1$, $\varphi f\left(a\right)=\varphi\left(f\left(a\right)+0\right)=a$, así que $\varphi f=Id_{M_1}$

$$\therefore f \text{ es un split-mono.}$$

Por otro lado, como $N=N'$, se tiene que $M=N'\oplus J$ y así

$$\begin{aligned}
Ker\left(g|_J\right) &= Ker\left(g\right)\cap J\\
&= N'\cap J=\left\langle 0\right\rangle_R,
\end{aligned}$$

y como g es sobre

$$\begin{aligned} M_2 &= g\left(M\right) \\ &= g\left(\left\{g(a+b) \mid a \in Ker\left(g\right), b \in J\right\}\right) \\ &= g\left(\left\{g(b) \mid b \in J\right\}\right) \\ &= g\left(J\right) \\ &= \left.g\right|_J\left(J\right), \\ &\implies \left.g\right|_J : J \to M_2 \text{ es un isomorfismo.} \end{aligned}$$

Por lo anterior $\exists\ h \in Hom_R\left(M_2, J\right)$ tal que $h\ \left.g\right|_J = Id_J$ y $\left.g\right|_J h = Id_{M_2}$, con lo cual $Im\left(h\right) = J$. Así $gh = \left.g\right|_J h$ y por lo tanto g es un split-epi.

□

Ej 55.

Ej 56.

Ej 57. Sea $\sim$ una relación en $Obj\left(Mod\left(R\right) \setminus A\right)$ dada por

$$f \sim f' \iff Hom\left(f, f'\right) \neq \varnothing \neq Hom\left(f', f\right).$$

Entonces $\sim$ es un relación de equivalencia en $Obj\left(Mod\left(R\right) \setminus A\right)$.

Demostración. La simetría de $\sim$ se sigue inmediatamente de su definición, mientras que la reflexividad se sigue del hecho de que si $f : A \to B \in Obj\left(Mod\left(R\right) \setminus A\right)$ entonces $Id_B \in Hom_R\left(B, B\right)$ y $Id_B f = f$. Así resta verificar que $\sim$ es transitiva.
Sean $f : A \to B, g : A \to B', h : A \to C \in Obj\left(Mod\left(R\right) \setminus C\right)$ tales que $f \sim g$ y $g \sim h$, por lo tanto $\exists\ p \in Hom_R\left(B, B'\right)$, $q \in Hom_R\left(B', B\right)$, $p' \in Hom_R\left(B', C\right)$, $q' \in Hom_R\left(C, B'\right)$ tales que

$$\begin{aligned} pf &= g \\ qg &= f, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p'g &= h \\ q'h &= g. \end{aligned}$$

Así $p'p \in Hom_R\left(B, C\right)$, $qq' \in Hom_R\left(C, B\right)$ y

$$\begin{aligned} \left(p'p\right) f &= h \\ \left(qq'\right) h &= f, \\ \therefore\ f &\sim h. \end{aligned}$$

□

Ej 58.

Ej 59.

Ej 60. Sea $\mathcal{A}$ una categoría preaditiva y $A \in \mathcal{A}$. Entonces

a) La correspondencia Hom-covariante $Hom_{\mathcal{A}}(A,-) : \mathcal{A} \to Ab$ es un funtor covariante aditivo.

b) La correspondencia Hom-contravariante $Hom_{\mathcal{A}}(-,A)\,\mathcal{A} \to Ab$ es un funtor contravariante aditivo.

Demostración. $\boxed{a)}$ $Hom_{\mathcal{A}}(A,-)$ está dado por la siguiente correspondencia

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\quad Hom_{\mathcal{A}}(A,-) \quad} Ab$$
$$B \xrightarrow{f} C \longmapsto Hom_{\mathcal{A}}(A,B) \xrightarrow{Ff} Hom_{\mathcal{A}}(A,C)$$

con

$$\begin{aligned} Ff : Hom_{\mathcal{A}}(A,B) &\to Hom_{\mathcal{A}}(A,C) \\ \alpha &\mapsto f\alpha. \end{aligned}$$

Notemos que $f \in Hom_{\mathcal{A}}(B,C)$, $\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(A,B)$, de lo cual se sigue que $f\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(A,C)$ y por lo tanto Ff está bien definida. Por otro lado como $\mathcal{A}$ es preaditiva entonces $Hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ y $Hom_{\mathcal{A}}(A,C)$ son grupos abelianos aditivos. Finalmente si $\alpha, \beta \in Hom_{\mathcal{A}}(A,B)$ como la composición de morfismos en $Hom(\mathcal{A})$ es $\mathbb{Z}$-bilineal, entonces

$$\begin{aligned} Ff(\alpha+\beta) &= f(\alpha+\beta) \\ &= f\alpha + f\beta \\ &= Ff(\alpha) + Ff(\beta), \\ &\implies Ff \text{ es un morfismo de grupos abelianos.} \end{aligned}$$

Por todo lo anterior $Hom_{\mathcal{A}}(A,-)$ es una correspondencia bien definida. Afirmamos que $Hom_{\mathcal{A}}(A,-)$ es un funtor covariante. En efecto, sean

$$\begin{aligned} &f \in Hom_{\mathcal{A}}(B,C), \\ &\eta \in Hom_{Ab}(Z, Hom_{\mathcal{A}}(A,B)), \\ &\mu \in Hom_{Ab}(Hom_{\mathcal{A}}(A,B), Z). \end{aligned}$$

Asi si $z \in Z$, entonces

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(Id_B)\,\eta(z) &= FId_B(\eta(z)) \\ &= Id_B\eta(z) \\ &= \eta(z), && \eta(z) \in Hom_{\mathcal{A}}(A,B) \\ \implies Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(Id_B) &= \eta. \end{aligned}$$

Por su parte

$$\begin{aligned}
\mu Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(Id_B)(\alpha) &= \mu(FId_B(\alpha)) \\
&= \mu(Id_B\alpha)\, Id_B\eta(z) \\
&= \mu(\alpha), \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(A,B) \\
\implies \mu Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(Id_B) &= \mu. \\
\therefore\ Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(Id_B) &= Id_{Hom_{\mathcal{A}}(A,B)} = Id_{Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(B)}
\end{aligned}$$

Por su parte

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(gf)(\alpha) &= (Fgf)(\alpha) \\
&= gf(\alpha) = g(f\alpha) \\
&= Fg(Ff(\alpha)), \qquad f\alpha \in Hom_{\mathcal{A}}(A,C) \\
&= FgFf(\alpha) \\
\therefore\ Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(gf) &= Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(g) Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(f).
\end{aligned}$$

Con lo cual se ha verificado que $Hom_{\mathcal{A}}(A,-)$ es un funtor covariante. Finalmente, dado que la composición en $Hom(\mathcal{A})$ es $\mathbb{Z}$-bilineal se tiene que

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(f+g)(\alpha) &= F(f+g)(\alpha) \\
&= (f+g)\alpha = f\alpha + g\alpha \\
&= Ff(\alpha) + Fg(\alpha) \\
\implies Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(f+g) &= Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(f) + Hom_{\mathcal{A}}(A,-)(g)
\end{aligned}$$

De modo que

$$Hom_{\mathcal{A}}(A,-) : Hom_{\mathcal{A}}(B,C) \to Hom_{Ab}(Hom_{\mathcal{A}}(A,B), Hom_{\mathcal{A}}(A,C))$$

es un morfismo de grupos abelianos. Con lo cual, dado que Ab es una categoría preaditiva (esto ya que la composición de morfismos de grupos abelianos es $\mathbb{Z}$-bilineal), se tiene que $Hom_{\mathcal{A}}(A,-)$ es un funtor aditivo. La demostración de $b)$ se realiza en forma análoga.

□

Ej 61.

Ej 62.

Ej 63. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ en $Mod(R)$. Entonces $\coprod_{i\in I} M_i$ es proyectivo si y sólo si $\forall\, i \in I$ M_i es proyectivo.

Demostración. Sea C un coproducto para $\{M_i\}_{i\in I}$ por medio de las funciones $\{\mu_i\}_{i\in I}$. $\boxed{\implies}$ Sean $f : X \to Y$ un epimorfismo en $Mod(R)$ y, para cada $i \in I$, $g_i \in Hom_R(M_i, Y)$. Por la propiedad universal del coproducto

$\exists!\ g : C \to Y$ tal que, $\forall\ i \in I$, $g\mu_i = g_i$. Dado que C es proyectivo entonces $\exists\ h : C \to X$ en $Mod(R)$ tal que $fh = g$, con lo cual si $h_i := h\mu_i$ entonces

$$\begin{aligned} fh_i &= f\left(h\mu_i\right) \\ &= \left(fh\right)\mu_i \\ &= g\mu_i \\ &= g_i. \\ \implies g_i &\text{ se factoriza a través de } f, \quad \forall\ i \in I. \\ \therefore\ M_i &\text{ es proyectivo}, \quad \forall\ i \in I. \end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Verifcaremos primeramente los siguientes resultados:

Lema 1. Sean $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_i\}_{i\in I}$ y $\{Z_i\}_{i\in I}$ familias en $Mod(R)$ tales que $\forall\ i \in I$

$$0 \longrightarrow X_i \xrightarrow{f_i} Y_i \xrightarrow{g_i} Z_i \longrightarrow 0 \tag{L1A}$$

es una sucesión exacta. Entonces $\exists\ f,\ g \in Hom\left(Mod(R)\right)$ tales que

$$0 \longrightarrow \coprod_{i\in I} X_i \xrightarrow{f} \coprod_{i\in I} Y_i \xrightarrow{g} \coprod_{i\in I} Z_i \longrightarrow 0 \tag{L1B}$$

es una sucesión exacta. Los coproductos que aparecen en la expresión anterior son aquellos cuyos elementos son i-adas.

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} f : \prod_{i\in I} X_i &\to \prod_{i\in I} Y_i \\ (x_i)_{i\in I} &\mapsto \left(f\left(x_i\right)\right)_{i\in I} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g : \prod_{i\in I} Y_i &\to \prod_{i\in I} Z_i \\ (y_i)_{i\in I} &\mapsto \left(g\left(y_i\right)\right)_{i\in I}. \end{aligned}$$

$f \in Hom\left(Mod(R)\right)$ pues $\forall\ i \in I\ f_i \in Hom\left(Mod(R)\right)$, similarmente se tiene que g es un morfismo de R-módulos.

$\boxed{f \text{ es inyectiva}}$ Sea $(x_i)_{i\in I} \in Ker(f)$, entonces $\forall\ i \in I\ f_i\left(x_i\right) = 0$ y por lo tanto $\forall\ i \in I\ x_i = 0$, pues $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia de monomorfismos en $Mod(R)$.

$\boxed{g \text{ es sobre}}$ Sea $(z_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} Z_i$. Como $\{g_i\}_{i\in I}$ es una familia de epimorfismos en $Mod(R)$, entonces $\forall\ i \in I\ \exists\ y_i \in Y_i$ tal que $g_i\left(y_i\right) = z_i$ y por lo tanto $g\left((y_i)_{i\in I}\right) = (z_i)_{i\in I}$.

$\boxed{Im(f) = Ker(g)}$ Sea $(x_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} X_i$. Dado que (**??**) es exacta se tiene que $\forall\ i \in I\ Im(f_i) = Ker(g_i)$ y que, en partícular, $g_i f_i = 0$. Así

$$\begin{aligned} gf\left((x_i)_{i\in I}\right) &= \left(g_i f_i\left(x_i\right)\right)_{i\in I} \\ &= 0. \\ \implies gf &= 0 \\ \implies Im(f) &\subseteq Ker(g). \end{aligned}$$

Por su parte, si $(y_i)_{i\in I} \in Ker(g)$, entonces $\forall\ i \in I\ y_i \in Ker(g_i) = Im(f_i)$, con lo cual para cada $i \in I\ \exists\ x_i \in X_i$ tal que $y_i = f_i\left(x_i\right)$. De modo que $(y_i)_{i\in I} = f\left((x_i)_{i\in I}\right)$, y por lo tanto $Ker(g) \subseteq Im(f)$.
Por todo lo anterior (**??**) es exacta.

$\square$

Lema 2. Sean $\{A_i\}_{i=1}^3$, $\{B_i\}_{i=1}^3$ en $Mod(R)$ tales que $\forall\ i\ in[1,3]\ A_i \simeq B_i$ y

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\ f\ } A_2 \xrightarrow{\ g\ } A_3 \longrightarrow 0 \tag{L2A}$$

una sucesión exacta. Entonces $\exists\ \overline{f},\ \overline{g} \in Hom\left(Mod(R)\right)$ tales que

$$0 \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\ \overline{f}\ } B_2 \xrightarrow{\ \overline{g}\ } B_3 \longrightarrow 0 \tag{L2B}$$

es una sucesión exacta.

Demostración. Sean $\varphi_i : A_i \to B_i$ isomorfismo $\forall\ i \in [1,3]$, $\overline{f} := \varphi_2 f {\varphi_1}^{-1}$ y $\overline{g} := \varphi_3 g {\varphi_2}^{-1}$. Dado que $f,\ \varphi_1$ y φ_2 son monomorfismos en $Mod(R)$, entonces $\overline{f}$ lo es; análogamente $\overline{g}$ es un epimorfismo puesto que $\varphi_2,\ g$ y φ_3 lo son.
Notemos que

$$\begin{aligned} \overline{g}\overline{f} &= \varphi_3 g {\varphi_2}^{-1} \varphi_2 f {\varphi_1}^{-1} \\ &= \varphi_3 g f {\varphi_1}^{-1} \\ &= \varphi_3 0 {\varphi_1}^{-1} \\ &= 0, \\ \implies Im\left(\overline{f}\right) &\subseteq Ker\left(\overline{g}\right). \end{aligned}$$

Por su parte, si $v \in Ker\left(\overline{g}\right)$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = \overline{g}(v) &= \varphi_3\left(g{\varphi_2}^{-1}(v)\right) \\ \implies g\left({\varphi_2}^{-1}(v)\right) &= 0, && \varphi_3 \text{ es inyectiva} \\ \implies {\varphi_2}^{-1}(v) &\in Ker(g) = Im(f). \end{aligned}$$

Con lo cual $\exists\ u \in B_1$ tal que ${\varphi_2}^{-1}(v) = f(u)$, y así

$$\begin{aligned} v &= \varphi_2 f(u) \\ &= \varphi_2 f {\varphi_1}^{-1}\left(\varphi_1(u)\right) \\ &= \overline{f}\left(\overline{u}\right), && \overline{u} := \varphi_1(u) \\ &\implies Ker\left(\overline{g}\right) \subseteq Im\left(\overline{f}\right). \\ &\therefore\ (L2B) \text{ es exacta.} \end{aligned}$$

□

Lema 3. Sean $M, N \in Mod(R)$ tales que M es proyectivo y $M \simeq N$. Entonces N es proyectivo.

Demostración. Sean $\varphi : M \to N$ un isomorfismo en $Mod(R)$, $f : X \to Y$ un epimorfismo en $Mod(R)$ y $g \in Hom_R\left(N, Y\right)$. Como $g\varphi \in Hom_R\left(M, Y\right)$ y M es proyectivo, entonces $\exists\ h \in Hom_R\left(M, X\right)$ tal que $fh = g\varphi$, luego $f\left(h\varphi^{-1}\right) = g$, con lo cual g se factoriza a través de f. Por lo tanto N es proyectivo.

□

Ahora, sean $\coprod\limits_{i\in I} M_i$ el coproducto para $\{M_i\}_{i\in I}$ cuyos elementos son i-adas de soporte finito, $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $Mod\left(R\right)$ y, para cada $i \in I$, $F_i := Hom_R\left(M_i, -\right)$ funtor covariante definido como en el Ej. 60. Por el Ej. 62 $d)$ $\forall\ i \in I$ se tiene que

$$0 \longrightarrow F_i\left(X\right) \xrightarrow{F_i(f)} F_i\left(Y\right) \xrightarrow{F_i(g)} F_i\left(Z\right) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta en $Mod\left(\mathbb{Z}\right)$ y así, por el Lema 1,

$$0 \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i\left(X\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i\left(Y\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i\left(Z\right) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Se tiene que

$$\begin{aligned} \prod_{i\in I} F_i\left(X\right) &= \prod_{i\in I} Hom_R\left(M_i, X\right) \\ &\simeq Hom_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, X\right). && \text{Ej. } 32 \end{aligned}$$

Similarmente se encuentra que

$$\prod_{i\in I} F_i\left(Y\right) \simeq Hom_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, Y\right),$$

$$\prod_{i\in I} F_i\left(Z\right) \simeq Hom_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, Z\right).$$

Con lo cual, por el Lema 2,

$$0 \longrightarrow Hom_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, X\right) \longrightarrow Hom_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, Y\right) \longrightarrow Hom_R\left(\coprod_{i\in I} M_i, Z\right) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta y así $\coprod_{i\in I} M_i$ es un módulo proyectivo. Finalmente como $C \simeq \coprod_{i\in I} M_i$ en $Mod(R)$, por el Lema 3, se sigue que C es proyectivo y así se tiene lo deseado.

□

Ej 64.

Ej 65.

Ej 66. Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ en $Mod\,(R)$. Entonces $\prod_{i\in I} M_i$ es inyectivo si y sólo si, $\forall\ i \in I$, M_i es inyectivo.

Demostración. La demostración es análoga a lo realizado en el Ej. 63: se emplea la propiedad universal del producto para verificar la necesidad, mientras que los lemas 1 a 3 probados en el Ej. 63, en conjunto a que $\forall\ H \in Mod(R)$ se tiene que $\prod_{i\in I} Hom_R\,(H, M_i) \simeq Hom_R\left(H, \prod_{i\in I} M_i\right)$ (ver Ej. 35), verifican la suficiencia. □

Ej 67.