

Lista 3

Arruti, Sergio, Jesús

Ej 29. Sea $M_{i \in I}$ una familia de grupos abelianos. Pruebe que $\prod_{i \in I} M_i$ es un subgrupo abeliano de $\prod_{i \in I} M_i$.

Demostración. Sean $x, y \in \prod_{i \in I} M_i$, entonces $x, y \in \prod_{i \in I} M_i$ y $|supp(x)| < \infty, |supp(y)| < \infty$. Entonces $x - y = (x_i - y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$, pero $x_i = 0, y_j = 0$ para casi toda $i \in I, j \in I$, así $(x_i - y_i) \neq 0$ a lo más en $|supp(x)| + |supp(y)| < \infty$ puntos. Por lo tanto $|supp(x - y)| < \infty$ y por lo tanto $(x - y) \in \prod_{i \in I} M_i$, es decir, $\prod_{i \in I} M_i$ es subgrupo de $\prod_{i \in I} M_i$.

□

Ej 30. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia en $Mod(R)$. Entonces $\prod_{i \in I} M_i$ es un submódulo de $\prod_{i \in I} M_i$.

Demostración. Sean $G := \prod_{i \in I} M_i$ y $H := \prod_{i \in I} M_i$. Si $I = \emptyset$ se tiene lo deseado, pues en tal caso $G = H = \{0\}$. Supongamos que $I \neq \emptyset$. Por el Ej. 30 H es un subgrupo de G y así, en particular, $\forall a, b \in H, a + b \in H$. Sea $r \in R$ y $a = (a_i)_{i \in I} \in H$. Dado que $r \bullet 0_i = 0_i, \forall i \in I$, se sigue que

$$\begin{aligned} \{i \in I \mid r \bullet a_i \neq 0\} &\subseteq \{i \in I \mid a_i \neq 0\}, \\ \implies supp(r \bullet a) &\subseteq supp(a). \end{aligned}$$

Con lo cual $r \bullet a$ tiene soporte finito, pues a lo tiene. De modo que $r \bullet a \in H$ y por lo tanto $H \in \mathcal{L}(G)$.

□

Ej 31. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía en $Mod(R)$. Pruebe que:

a) Para cada $i \in I$, las inclusiones i -ésimas

$$\begin{aligned} inc_i : M_i &\rightarrow \prod_{i \in I} M_i \\ x &\mapsto (y_t)_{t \in I} \end{aligned}$$

con

$$y_t = \begin{cases} x & t = i \\ 0 & t \neq i \end{cases}$$

$$Inc_i : M_i \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$$

$$x \mapsto inc_i(x),$$

son monomorfismos en $Mod(R)$.

b) Para cada $i \in I$, las proyecciones i -ésimas

$$Proy_i : \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow M_i, \text{ } Proj_i(m) = m_i$$

$$proy_i : \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow M_i, \text{ } proy_i(m) = m_i$$

son epimorfismos en $Mod(R)$.

Demostración. (a) Primero veamos que estas funciones son morfismos. Considere $i \in I$. En vista que Inc_i está determinada por inc_i , bastará con mostrar que el ser morfismo se satisface para inc_i . Sean $x, y \in M_i$ y $r \in R$. Entonces

$$(inc_i(x+y))_t = \begin{cases} x+y & si \ i = t \\ 0 & si \ i \neq t \end{cases}$$

$$= (inc_i(x))_t + (inc_i(y))_t$$

e

$$(inc_i(rx))_t = \begin{cases} rx & si \ i = t \\ 0 & si \ i \neq t \end{cases}$$

$$= r \begin{cases} x & si \ i = t \\ 0 & si \ i \neq t \end{cases}$$

$$= r(inc_i(x))_t$$

Por lo que inc_i e Inc_i son morfismos.

Ahora, sean $i \in I$ y $x \in Ker(inc_i)$. Entonces $(inc_i(x))_t = (0)_t$. Es decir, en cada entrada $inc_i(x)$ es 0. En particular, para $t = x$. En consecuencia, $x = 0$. Por tanto, $inc_i(x)$ es monomorfismo.

Por otro lado, sean $i \in I$ y $x \in Ker(Inc_i)$. De esta forma, $x \in Ker(inc_i)$. Como inc_i es monomorfismo, $x = 0$. Por lo que Inc_i también lo es.

(b) Sea $i \in I$. $Proy_i$ es un epimorfismo. Dado $x \in M_i$, el elemento $m = (Inc_i(x))_t \in \prod_{i \in I} M_i$ satisface que $Proy_i(m) = x$.

De manera análoga, para cada $i \in I$, la proyección $proy_i$ es un epimorfismo, sustituyendo Inc_i por inc_i . \square

Ej 32. Sea $C = \prod_{i \in I} M_i$ en $Mod(R)$, via las inclusiones naturales $\{\mu_i: M_i \rightarrow C\}_{i \in I}$. Pruebe que, para cada $H \in Mod(R)$, la función $\varphi_H: \text{Hom}\left(\prod_{i \in I} M_i, H\right) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, H)$, $g \mapsto (g \circ \mu_i)_{i \in I}$, es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Morfismo:

Sean $f, g \in \text{Hom}\left(\prod_{i \in I} M_i, H\right)$ entonces

$$\begin{aligned} \varphi_H(f+g)(m) &= ((f+g) \circ \mu_i)_{i \in I}(m) = [(f+g)(\mu_i(m))]_{i \in I} \\ &= (f(\mu_i(m)))_{i \in I} + (g(\mu_i(m)))_{i \in I} \\ &= (f \circ \mu_i)_{i \in I}(m) + (g \circ \mu_i)_{i \in I}(m) \\ &= \varphi_H(f)(m) + \varphi_H(g)(m). \end{aligned}$$

Por lo tanto es morfismo de grupos.

Injectividad y buena definición.

Como $\varphi_H(g) = (g \circ \mu_i)_{i \in I}$ entonces φ es el producto de composiciones de funciones, así que está bien definida. Ahora, si $\varphi_H(f) = \varphi_H(g)$ entonces $f_i = (f \circ \mu_i) = (g \circ \mu_i) = g_i \quad \forall i \in I$ y se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} M_i & \xrightarrow{f} & H \\ \mu_i \uparrow & \nearrow f_i = f \circ \mu_i & \\ M_i & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} M_i & \xrightarrow{g} & H \\ \mu_i \uparrow & \nearrow g_i = g \circ \mu_i & \\ M_i & & \end{array}$$

por la propiedad universal del coproducto existe un único morfismo h tal que $h \circ \mu_i = g_i = f_i = h \circ \mu_i$, por lo que $f = g$.

Suprayectividad:

Sea $f \in \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, H)$, entonces $f = (f_i)_{i \in I}$ con $f_i \in \text{Hom}_R(M_i, H)$. Así por la propiedad universal del coproducto existe una única

$g: \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow H$ en $Mod(R)$ tal que $g \circ \mu_i = f_i \quad \forall i \in I$. Por lo tanto $\varphi_H(g) = (g \circ \mu_i)_{i \in I} = (f_i)_{i \in I} = f$ por lo que φ_H es isomorfismo. \square

Ej 33. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia en $Mod(R)$, $N \in Mod(R)$ y $\{g_i: N \rightarrow M_i\}_{i \in I}$ una familia de morfismos de R -módulos. Entonces $\exists!$ $g: N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ morfismo de R -módulos tal que $Proy_i \circ g = g_i, \forall i \in I$.

Demostración. Si $I = \emptyset$ entonces $\prod_{i \in I} M_i = \{0\}$ y el enunciado se reduce a verificar que existe un único morfismo de R -módulos de N en $\{0\}$, lo cual es inmediato.

Supongamos que $I \neq \emptyset$. Notemos que la función

$$\begin{aligned} g: N &\rightarrow \prod_{i \in I} M_i \\ n &\mapsto (g_i(n))_{i \in I} \end{aligned}$$

es un morfismo de R -módulos, pues g_i lo es $\forall i \in I$, $(a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I} = (a_i + b_i)_{i \in I}$ y $r \bullet (a_i)_{i \in I} = (r \bullet a_i)_{i \in I}$. Sea $j \in I$, entonces

$$\begin{aligned} Proj_j(g(n)) &= Proj_j((g_i(n))_{i \in I}) \\ &= g_j(n). \\ \implies Proj_j \circ g &= g_j, \forall j \in I. \end{aligned}$$

Finalmente, verifiquemos la unicidad. Sea $h: N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ tal que $Proj_j \circ h = g_j, \forall j \in I$. Notemos que por lo anterior $Proj_j \circ h = Proj_j \circ g \forall j \in I$. Sea $n \in N$, $(y_i)_{i \in I} = g(n)$ y $(z_i)_{i \in I} = h(n)$, entonces

$$\begin{aligned} y_j &= Proj_j((y_i)_{i \in I}) = Proj_j((g_i(n))_{i \in I}) = Proj_j(g(n)) \\ &= Proj_j(h(n)) = z_j, \forall j \in I. \\ \implies g(n) &= h(n) \quad \forall n \in N. \\ \implies g &= h. \end{aligned}$$

\square

Ej 34. Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ en $Mod(R)$, $P \in Mod(R)$ y $\{\pi_i: P \longrightarrow M_i\}_{i \in I}$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

- a) Existe un isomorfismo $\varphi: \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow P$ en $Mod(R)$ tal que para $i \in I$, $\pi_i \circ \varphi = Proj_i$
- b) P y $\{\pi_i: P \longrightarrow M_i\}_{i \in I}$ son un producto para $\{M_i\}_{i \in I}$

Demostración. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Sean $M \in Mod(R)$ y $\{f_i: M \longrightarrow M_i\}_{i \in I}$ una familia de morfismos en $Mod(R)$. Dado que $\prod_{i \in I} M_i$ es un producto

para $\{M_i\}_{i \in I}$, existe un único morfismo $f : M \longrightarrow \prod_{i \in I} M_i$ tal que, para cada $i \in I$, $Proy_i \circ f = f_i$. Además, por hipótesis, existe $\varphi : \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow P$ en $Mod(R)$ tal que para $i \in I$, $\pi_i \circ \varphi = Proj_i$. De modo que

$$\pi_i \circ \varphi \circ f = Proj_i \circ f = f_i$$

Más aún, esta $\varphi \circ f$ es única. En efecto, si $g : M \longrightarrow P$ un morfismo tal que, para $i \in I$, $\pi_i \circ g = f_i$, entonces $\varphi^{-1} \circ g \in Hom_R\left(M, \prod_{i \in I} M_i\right)$ y

$$\begin{aligned} Proj_i \circ \varphi^{-1} \circ g &= \pi_i \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ g \\ &= \pi_i \circ g \\ &= f_i \end{aligned}$$

Como $\prod_{i \in I} M_i$ y $\{Proj_i\}_{i \in I}$ es un producto para $\{M_i\}_{i \in I}$, $f = \varphi^{-1} \circ g$. Así, $\varphi \circ f = g$. En consecuencia, se tiene que P y $\{\pi_i : P \longrightarrow M_i\}_{i \in I}$ son un producto para $\{M_i\}_{i \in I}$.

(b) \Rightarrow (a) Observe que $\left\{ Proj_i : \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow M_i \right\}_{i \in I}$ es una familia de morfismos en $Mod(R)$. En virtud de que P y $\{\pi_i : P \longrightarrow M_i\}_{i \in I}$ son un producto para $\{M_i\}_{i \in I}$, existe un único morfismo $\varphi : \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow P$ tal que, para cada $i \in I$, $\pi_i \circ \varphi = Proj_i$. En vista de esto, se concluye el resultado. \square

Ej 35. Sea $P = \prod_{i \in I} M_i$ en $Mod(R)$ via las proyecciones naturales

$\{\pi_i : P \longrightarrow M_i\}_{i \in I}$. Pruebe que, para cada $H \in Mod(R)$, la función $\phi_H : Hom_R(H, \prod_{i \in I} M_i) \longrightarrow \prod_{i \in I} Hom_R(H, M_i)$, $g \mapsto (\pi_i \circ g)_{i \in I}$, es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Primero veamos que es morfismo. Como π es morfismo $\forall i \in I$

$$\begin{aligned} \phi_H(g + f) &= [\pi_i \circ (g + f)]_{i \in I} = [(\pi_i \circ g) + (\pi_i \circ f)]_{i \in I} \\ &= (\pi_i \circ g)_{i \in I} + (\pi_i \circ f)_{i \in I} = \phi_H(g) + \phi_H(f). \end{aligned}$$

Por lo tanto es morfismo de grupos abelianos.

Inyectividad y buena definición.

Como $\phi_H(g) = (\mu_i \circ g)_{i \in I}$ entonces ϕ_H es el producto de composiciones de funciones, así que está bien definida. Ahora, si $\phi_H(f) = \phi_H(g)$ entonces $f_i = (\mu_i \circ f) = (\mu_i \circ g) = g_i \quad \forall i \in I$ y se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & \prod_{i \in I} M_i \\ \downarrow f_i = \mu_i \circ f & \searrow \mu_i & \\ M_i & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{g} & \prod_{i \in I} M_i \\ \downarrow g_i = \mu_i \circ g & \searrow \mu_i & \\ M_i & & \end{array}$$

por la propiedad universal del producto existe un único morfismo h tal que $\mu_i \circ h = g_i = f_i = \mu_i \circ h$, por lo que $f = g$.

Suprayectividad:

Sea $h \in \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(H, M_i)$, entonces $h = (h_i)_{i \in I}$ con $h_i \in \text{Hom}_R(H, M_i)$,

así por la propiedad universal del producto existe un único $g: H \rightarrow P$ tal que $\pi_i \circ g = h_i$, por lo que $\phi_H(g) = (\pi_i \circ g)_{i \in I} = (h_i)_{i \in I} = h$. Entonces ϕ_H es isomorfismo de grupos.

□

Ej 36. Sea $\{\pi_i : M \rightarrow M_i\}_{i=1}^n \subseteq \text{Mod}(R)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) $\{\pi_i : M \rightarrow M_i\}_{i=1}^n$ es un producto para $\{M_i\}_{i \in I}$;
- b) $\exists \{\mu_i : M_i \rightarrow M\}_{i=1}^n \in \text{Mod}\{R\}$ tal que $\sum_{i=1}^n \mu_i \pi_i = \text{Id}_M$ y $\pi_i \mu_i = \delta_{ij}^M \quad \forall i, j \in [1, n]$.

Demostración. Sea $I = [1, n]$.

\Rightarrow La propiedad universal del producto aplicada a cada elemento de la familia (de familias en $\text{Mod}(R)$) $\left\{ \left\{ \delta_{ij}^M : M_i \rightarrow M_i \right\}_{i \in I} \right\}_{j \in I}$ garantiza que $\forall j \in I \exists \mu_j : M_j \rightarrow M$ tal que

$$\pi_i \mu_j = \delta_{ij}^M \quad \forall i \in I.$$

Así pues, consideremos $\{\mu_i\}_{i \in I}$. Notemos que nuevamente por la propiedad universal del producto, $f : M \rightarrow M \in \text{Mod}(R)$ es tal que $\forall i' \in I \pi_{i'} \circ f = \pi_{i'}$

si, y sólo si, $f = Id_M$; y que

$$\begin{aligned}\pi_i \sum_{j=1}^n (\mu_j \pi_j) &= \sum_{j=1}^n ((\pi_i \mu_j) \pi_j) = \sum_{j=1}^n ((\delta_{ij}^M) \pi_j) = \delta_{ii}^M \pi_i = Id_{M_i} \pi_i \\ &= \pi_i. \\ \implies \sum_{j=1}^n (\mu_j \pi_j) &= Id_M.\end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\{\eta : N \rightarrow M_i\}_{i \in I} \subseteq Mod(R)$ y

$$\begin{aligned}f : N &\rightarrow M \\ n &\mapsto \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \eta_i \right) (n)\end{aligned}$$

. Así $f : N \rightarrow M \in Mod(R)$ y, si $j \in I$,

$$\begin{aligned}\pi_j \circ f &= \pi_j \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \eta_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n (\pi_j \mu_i) \eta_i \right) = \sum_{i=1}^n \delta_{ji} \eta_i = \eta_j. \\ \implies \pi_j f &= \eta_j \quad \forall j \in I.\end{aligned}$$

Finalmente, sea $g : N \rightarrow M \in Mod(R)$ tal que $\pi_i g = \eta_i \quad \forall i \in I$. Así

$$\begin{aligned}g &= Id_M g = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \pi_i \right) g = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i (\pi_i g) \right) = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \eta_i \right) = f. \\ \implies g &= f.\end{aligned}$$

□

Ej 37. Para $M \in f.l.(R)$, pruebe que:

- a) $l(M) = 0$ si y sólo si $M = 0$
- b) $l(M) = 1$ si y sólo si M es simple

Demostración. $\boxed{(a)}$ Observe que si $M = 0$, entonces $0 = M_0 = M$ es la única serie de composición de M , salvo repeticiones. De esta manera $l(M) = 0$. Inversamente, si $l(M) = 0$, entonces la única serie de composición de M , salvo repeticiones, es $0 = M_0 = M$. $\therefore M = 0$.

$\boxed{(b)}$ Para este inciso suponga que M es un R -módulo simple. En consecuencia, $L(M) = \{0, M\}$. Con lo cual, M tiene una serie de composición $0 = M_0 \leq M_1 = M$. De modo que $l(M) = 1$. Por otro lado, suponga que $l(M) = 1$, y sea $0 = M_0 \leq M_1 = M$ una serie de composición para M . $\therefore M \cong M/0 \cong M_1/M_0$ es simple. □

Ej 38. Para un anillo R pruebe que

a) Una sucesión de la forma $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$ es exacta si y sólo si $Ker(f) = 0 = CoKer(g)$ y $Im(f) = Ker(g)$.

b) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto, (i.e. las filas y las columnas son sucesiones exactas) en $Mod(R)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha'' \\
 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta' & & \downarrow \beta'' \\
 & & X'' & & Y'' & & Z'' \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Pruebe que existen morfismos $X'' \xrightarrow{f''} Y'' \xrightarrow{g''} Z''$ en $Mod(R)$ (además son únicos) tales que dicho diagrama se completa al siguiente diagrama conmutativo y exacto en $Mod(R)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha'' \\
 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta' & & \downarrow \beta'' \\
 0 & \longrightarrow & X'' & \xrightarrow{f''} & Y'' & \xrightarrow{g''} & Z'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

c) Pruebe que $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$ es exacta si y sólo si φ es un isomorfismo en $Mod(R)$.

Demostración. a) Definimos $CoKer(g) := Z/Im(g)$, así, como la sucesión es exacta, $Ker(f) = Im(0) = 0$, $Im(f) = Ker(g)$ y

$Im(g) = Ker(0) = Z$, es decir, $Z/Im(g) = 0$ y así $CoKer(g) = 0$.

Ahora, si $Ker(f) = 0 = CoKer(g)$ y $Im(f) = Ker(g)$, entonces la función $0_f: 0 \rightarrow X$ y $0_g: Z \rightarrow 0$ son morfismos tales que

$m(0_f) = Ker(f)$, $Ker(0_g) = Z$ y, como $0 = CoKer(g) = Z/Im(g)$, y

$Ker(0_g) = Im(g)$, se tiene que la sucesión $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ es exacta.

b) Para este ejercicio se usará el siguiente lema.

Lema de la serpiente:

Sea R un anillo y considere el siguiente diagrama de R -Módulos donde los renglones son exactos

$$\begin{array}{ccccccc} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\ 0 \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \end{array}$$

Entonces existe un morfismo de conexión $\eta: Ker(\gamma) \rightarrow CoKer(\alpha)$, y la

sucesión $Ker(\alpha) \xrightarrow{f|_{Ker(\alpha)}} Ker(\beta) \xrightarrow{g|_{Ker(\beta)}} Ker(\gamma) \rightarrow$

$\rightarrow CoKer(\alpha) \xrightarrow{\bar{f}'} CoKer(\beta) \xrightarrow{\bar{g}'} CoKer(\gamma)$ es exacta.

Más aun, si f es inyectiva entonces $f|_{Ker(\alpha)}$ también lo es. Dualmente si g' es suprayectiva, entonces \bar{g}' también.

Con este lema en mente es muy sencillo probar el inciso b), pues por el lema de la serpiente los dos primeros renglones inducen la sucesión exacta

$0 \rightarrow Ker(\alpha) \rightarrow Ker(\alpha') \rightarrow Ker(\alpha'') \rightarrow$

$\rightarrow CoKer(\alpha) \xrightarrow{f''} CoKer(\alpha') \xrightarrow{g''} CoKer(\alpha'') \rightarrow 0$.

Como las columnas del diagrama son sucesiones exactas, entonces α, α' y α'' son monomorfismos, es decir, $Ker(\alpha) = Ker(\alpha') = Ker(\alpha'') = 0$ y, como las columnas son exactas, $CoKer(\alpha') = X'/Ker(\beta) = X''$ pues β es epimorfismo. Análogamente $CoKer(\alpha') = Y''$ y $CoKer(\alpha'') = Z''$, así tenemos que la siguiente sucesión es exacta

$$0 \rightarrow X'' \xrightarrow{f''} Y'' \xrightarrow{g''} Z''.$$

Mas aún, la construcción de f'' y g'' dadas en el lema de la serpiente aseguran que $f''\beta = \beta'f'$ y $g''\beta' = \beta''g'$ lo cual hace conmutar el diagrama del ejercicio.

c)

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0, \text{ es exacta}$$

$$\Longleftrightarrow \text{Ker}(\varphi) = \text{Im}(0) = 0 \quad \text{y}$$

$$\text{CoKer}(\varphi) = B/\text{Im}(\varphi) = B/\text{Ker}(0) = B/B = 0$$

$$\Longleftrightarrow \varphi \text{ es monomorfismo y epimorfismo}$$

$$\Longleftrightarrow \varphi \text{ es isomorfismo.}$$

□

Ej 39. Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $\text{Mod}(R)$ y $F := \{F_i\}_{i \in I}$ una filtración en B . Entonces $f^{-1}(F) := \{f^{-1}(F_i)\}_{i \in I}$ y $g(F) := \{g(F_i)\}_{i \in I}$ son, respectivamente, filtraciones en A y en C .

Demostración. Se tiene que g es sobre y f es inyectiva, por ser exacta la sucesión.

g , al ser un morfismo de R -módulos, necesariamente es un morfismo de CPO de (B, \leq) en (C, \leq) , además $g(\langle 0_B \rangle_R) = \langle 0_C \rangle_R$ y $g(B) = \langle C \rangle_R$. Por lo anterior se tiene que $g(F)$ es una filtración de C .

Por su parte, se tiene que, $\forall M, N \in \mathcal{L}(B)$, $f^{-1}(M) \in \mathcal{L}(A)$ y $f^{-1}(M) \leq f^{-1}(N)$, y además $f^{-1}(\langle 0_B \rangle_R) = \text{Ker}(f) = \langle 0_A \rangle_R$ y $f^{-1}(B) = A$. Por lo tanto $f^{-1}(F)$ es una filtración de A .

□

Ej 40. Para una sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ en $\text{Mod}(R)$, pruebe que: $B \in f.l.(R)$ si y sólo si $A, C \in f.l.(R)$

Demostración. \Rightarrow Suponga que $B \in f.l.(R)$. Entonces B tiene una serie de composición \mathfrak{F} . Por el **Lema 2.1.1.a**), tanto $f^{-1}(\mathfrak{F})$ como $g(\mathfrak{F})$ son series de composición de A y de C respectivamente. En consecuencia, $A, C \in f.l.(R)$.

\Leftarrow Sean $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ y $\mathfrak{C} = \{C_j\}_{j=1}^m$ series de composición para A y C , respectivamente. Luego, los $f(A_i)$ y los $g^{-1}(C_j)$ son submódulos de B . Definimos la serie $\mathfrak{B} = \{B_t\}_{t=1}^{m+n}$, donde $B_t = f(A_t)$ si $t \leq n$ y $B_t = g^{-1}(C_{t-n})$ si $n+1 \leq t \leq n+m$.

Ahora, dado que f es un monomorfismo, se tiene que $B_t \cong A_t$, para $t \leq n$. Y por otro lado, el teorema de la correspondencia y el tercer teorema de isomorfismo garantizan que $\frac{B_{t+1}}{B_t} = \frac{g^{-1}(C_{t+1})}{g^{-1}(C_t)} \cong \frac{C_{t-n+1}}{C_{t-n}}$ para cada $n+1 \leq t \leq n+m$. Más aún, tenemos que los cocientes $\frac{B_{t+1}}{B_t}$ son simples, toda vez que los cocientes $\frac{A_{i+1}}{A_i}$ y $\frac{C_{j+1}}{C_j}$ lo son. De esta forma \mathfrak{B} es una serie de composición para B . $\therefore B \in f.l.(R)$ \square

Ej 41. Pruebe que las siguientes condiciones se satisfacen para un anillo R .

a) Sean $M \in f.l(R)$ y $N \leq M$. Entonces

$$M = N \iff l(M) = l(N) \iff l(M/N) = 0.$$

b) Sean $M \in f.l(R)$ y $f \in \text{End}(M)$. Entonces f es un isomorfismo $\iff f$ es un monomorfismo $\iff f$ es un epimorfismo.

Demostración. a) $(M = N \Rightarrow l(M) = l(N))$ es claro.

Supongamos que $l(M) = l(N)$, entonces como $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$ es exacta, por el ej. 40 N y M/N están en $f.l.(R)$ y por el corolario 2.13b), $l(M) = l(N) + l(M/N)$, y como $l(M) = l(N)$ entonces $0 = l(M/N)$. Por último, por el ej. 37 $l(M/N) = 0 \iff M/N = 0$ por lo tanto $M = N$ demostrando así todas las implicaciones en a).

b) supongamos f es monomorfismo, entonces la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} f(M) \xrightarrow{g} M/f(M) \longrightarrow 0,$$

donde g es la proyección de $f(M)$ en M .

Como M es $f.l.$ entonces existe una serie de composición $\{F_i\}_{i=0}^n$ de M . Así $\{f(F_i)\}_{i=0}^n$ cumple que $f(F_i)/f(F_{i-1}) \cong f(F_i/F_{i-1})$ (por ser f inyectiva) que es simple para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto $\{f(F_i)\}_{i=0}^n$ es una serie de composición y $l(f(M)) = n = l(M)$. Por a) $M = f(M)$ y así la sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ es exacta, implicando que f sea isomorfismo.

Ahora, si g es supra, la sucesión

$0 \longrightarrow \text{Ker}(g) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{g} \text{Im}(g) = M \longrightarrow 0$ es exacta, por lo que $l(M) = l(\text{Ker}(g)) + l(\text{Im}(g))$, y como $l(M)$ es finita, entonces $l(\text{Ker}(g)) = 0$, es decir, $\text{Ker}(g) = 0$ entonces g es inyectiva. \square

Ej 42. Si $M \in \text{Mod}(R)$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) M es noetheriano,
- b) $\mathcal{L}(M) \subseteq \text{mod}(R)$,
- c) si $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{L}(M)$, $\mathcal{J} \neq \emptyset$, entonces (\mathcal{J}, \leq) posee por lo menos un elemento maximal.

Demostración. $\boxed{a) \implies b)}$ Sea $A \leq M$. Si A es finito la proposición es inmediata, pues $A = \langle A \rangle_R$. Supongamos que A es infinito y sea $a_1 \in A \setminus \langle 0 \rangle_R$. Si $A = \langle a_1 \rangle_R$ se tiene lo deseado, en caso contrario sea $a_2 \in A \setminus \{0, a_1\}$. Si $A = \langle a_1, a_2 \rangle_R$, se tiene lo deseado, en caso contrario, consideremos $a_3 \in A \setminus \{0, a_1, a_2\}$. Notemos que este proceso se puede efectuar solo una cantidad finita, i.e. $\exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$ tales que $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle_R$, y por lo tanto $A \in \text{mod}(R)$, ya que si no fuera el caso, por el axioma de elección dependiente, existiría una cadena ascendente

$$\langle a_1 \rangle_R \leq \langle a_1, a_2 \rangle_R \leq \langle a_1, a_2, a_3 \rangle_R \leq \dots$$

que no se estabilizaría y por lo tanto M no sería noetheriano.

$\boxed{b) \implies c)}$ Procedamos por el contrapositivo. Supongamos que $\exists \mathcal{J}$ una familia no vacía de submódulos de M tal (\mathcal{J}, \leq) que no posee elementos maximales. Así sea $J_1 \in \mathcal{J}$, luego J_1 no es maximal en (\mathcal{J}, \leq) y por lo tanto $\exists J_2 \in \mathcal{J}$ tal que $J_1 \leq J_2$. Por su parte, J_2 no es maximal en (\mathcal{J}, \leq) y por lo tanto $\exists J_3 \in \mathcal{J}$ tal que $J_2 \leq J_3$. Aplicando el axioma de elección dependiente a este procedimiento se obtiene la cadena ascendente de submódulos $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. $J := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \in \mathcal{L}(M)$, pues la unión de una cadena ascendente de submódulos es un submódulo. Supongamos que J es finitamente generado, luego $\exists j_1, \dots, j_k \in J$ tales que $J = \langle j_1, \dots, j_k \rangle_R$. Notemos que, $\forall i \in [1, k]$, $\exists l_i \in \mathbb{N}$ tal que $j_i \in J_{l_i}$, y así, si $t := \max\{l_i \mid i \in [1, k]\}$ entonces $j_i \in J_t$, $\forall i \in [1, k]$. De modo que

$$\langle j_1, \dots, j_k \rangle_R \leq J_t \leq J = \langle j_1, \dots, j_k \rangle_R,$$

lo cual es absurdo (J_t es un submódulo estricto de J pues $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena estrictamente ascendente) y por lo tanto J no es finitamente generado.

$\boxed{c) \implies a)}$ Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena ascendente de submódulos. Luego $\emptyset \neq \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(M)$ y por lo tanto $(\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \leq)$ posee al menos un elemento maximal. De modo que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que A_k es maximal en $(\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \leq)$. Si $\forall l > k$ $A_l = A_k$ se tiene lo deseado. Supongamos que $\exists l > k$ tal que $A_k \leq A_l$, por ser maximal, se tiene que $A_l = M$ y por lo tanto $A_r = M$, $\forall r \geq l$. Así, en cualquier caso, se tiene que la cadena se estabiliza y por lo tanto M es noetheriano. □

Ej 43. Para $M \in \text{Mod}(R)$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

- a) M es artiniiano
b) Para toda $\mathfrak{F} \subseteq L(M)$, con $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, existe un elemento mínimo en (\mathfrak{F}, \leq)

Demostración. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Dada \mathfrak{F} una familia no vacía de submódulos de M , sea $N_1 \in \mathfrak{F}$. Suponga que N_1 no es un elemento mínimo de \mathfrak{F} , de este modo existe $N_2 \in \mathfrak{F}$ tal que $N_2 \subsetneq N_1$. Repitiendo este argumento, obtenemos una cadena de submódulos $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$ en \mathfrak{F} . En virtud de que M es artiniiano, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $t \in \mathbb{N}$, $N_k = N_{k+t}$. $\therefore N_k$ es un elemento mínimo de \mathfrak{F} .

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Sea $N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \dots$ una cadena de submódulos de M . Considere $\mathfrak{F} = \{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Entonces, por hipótesis, \mathfrak{F} tiene elementos mínimos. Sea N_k uno de dichos mínimos. Dado que \mathfrak{F} es una cadena, $N_k = N_{k+t}$, para toda $t \in \mathbb{N}$. $\therefore M$ es artiniiano. \square

Ej 44. (Modularidad) Para $M \in \text{Mod}(R)$ y $H, K, L \in \mathcal{L}(M)$ pruebe que

$$K \leq H \iff H \cap (K + L) = K + (H \cap L).$$

Demostración. Sea $x \in H \cap (K + L)$ entonces $x = k + l$ con $k \in K, x \in H$ y $l \in L$, pero $k \in H$ pues $K \leq H$, entonces $l \in H$. Por lo tanto $x = k + l$ con $k \in K$ y $l \in H \cap L$, es decir, $x \in K + (H \cap L)$.

Sea $y \in K + (H \cap L)$, entonces $x = k + r$ para alguna $r \in H \cap L$, por lo que $x \in K + H = H$ pues $K \leq H$, así $x \in H$ y $x = k + r$ con $k \in K$ y $r \in L$, por lo que $x \in H \cap (K + L)$. \square

Ej 45. Sea

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta en $\text{Mod}(R)$. Entonces M es noetheriano (respect. artiniiano) si y sólo si K y N lo son.

Demostración. Verifiquemos primeramente la afirmación para el caso de módulos noetherianos. Empleando el Ej. 42 b) basta con verificar que

$$\mathcal{L}(M) \subseteq \text{mod}(R) \iff \mathcal{L}(K) \subseteq \text{mod}(R) \text{ y } \mathcal{L}(N) \subseteq \text{mod}(R).$$

\Rightarrow Sea $A \in \mathcal{L}(K)$, luego $f(A) \in \mathcal{L}(M)$ y, dado que M es noetheriano, $f(A) \in \mathcal{L}(M)$ es finitamente generado, con lo cual $\exists x_1, \dots, x_l \in f(A)$ tales que $f(A) = \langle x_1, \dots, x_l \rangle_R$; notemos que $\forall i \in [1, l] \exists k_i \in A$ tal

que $x_i = f(k_i)$. Así si $Y := \{k_i\}_{i=1}^l$ y $a \in A$, entonces $f(a) \in f(K)$ y por lo tanto $\exists r_1, \dots, r_l \in R$ tales que

$$\begin{aligned} f(a) &= \sum_{i=1}^l r_i x_i = \sum_{i=1}^l r_i f(k_i) = f\left(\sum_{i=1}^l r_i k_i\right) \\ \implies a &= \sum_{i=1}^l r_i k_i, & Ker(f) &= \langle 0_K \rangle_R \\ \implies A &= \langle Y \rangle_R. \\ \implies A &\text{ es finitamente generado.} \end{aligned}$$

Por su parte sea $C \in \mathcal{L}(N)$, luego $g^{-1}(C) \in \mathcal{L}(M)$ y así $\exists m_1, \dots, m_o \in g^{-1}(C)$ tales que $g^{-1}(C) = \langle m_1, \dots, m_o \rangle_R$; notemos que $\forall i \in [1, o]$ $g(m_i) \in C$, con lo cual si $Z := \{g(m_i)\}_{i=1}^o$ y $c \in C$ entonces $Z \subseteq C$ y, dado que g es sobre, $\exists m \in M$ tal que $g(m) = c$. Luego $m \in g^{-1}(C)$, por lo cual $\exists r_i, \dots, r_o \in R$ tales que $m = \sum_{i=1}^o r_i m_i$ y así

$$\begin{aligned} c &= \sum_{i=1}^o r_i f(m_i) \\ \implies C &= \langle Z \rangle_R. \\ \implies C &\text{ es finitamente generado.} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{L}(K) \subseteq mod(R)$ y $\mathcal{L}(N) \subseteq mod(R)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $S \leq M$, entonces $f^{-1}(S) \leq K$ y $g(S) \leq N$. Como K y N son noetherianos $\exists a_1, \dots, a_t \in f^{-1}(S)$ y $\exists c_1, \dots, c_u \in g(S)$ tales que $f^{-1}(S) = \langle a_1, \dots, a_t \rangle_R$ y $g(S) = \langle c_1, \dots, c_u \rangle_R$. En particular se tiene que $f(a_1), \dots, f(a_t) \in S$ y $\exists b_1, \dots, b_u \in S$ tales que $\forall i \in [1, u]$ $c_i = g(b_i)$, con lo cual $g(S) = \langle g(b_1), \dots, g(b_u) \rangle_R$ y por lo tanto, si $X := \{f(a_1), \dots, f(a_t), b_1, \dots, b_u\}$, $X \subseteq S$. Sea $s \in S$, luego $g(s) \in g(S)$, por lo cual $\exists r_1, \dots, r_u \in R$ tales que

$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{i=1}^u r_i g(b_i) = g\left(\sum_{i=1}^u r_i b_i\right) \\ \implies g\left(s - \sum_{i=1}^u r_i b_i\right) &= 0 \\ \implies s - \sum_{i=1}^u r_i b_i &\in Ker(g) = Im(f) \\ \implies \exists a \in K \text{ tal que } f(a) &= s - \sum_{i=1}^u r_i b_i. \end{aligned}$$

Notemos que $s - \sum_{i=1}^u r_i b_i \in S$ pues S es un submódulo de M , con lo cual $a \in f^{-1}(S)$ y así $\exists r'_1, \dots, r'_t \in R$ tales que

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^t r'_j a_j\right) &= s - \sum_{i=1}^u r_i b_i \\ \implies s &= f\left(\sum_{j=1}^t r'_j a_j\right) + \sum_{i=1}^u r_i b_i \\ \implies s &\in \langle X \rangle_R \\ \implies S &= \langle X \rangle_R. \\ \implies S &\text{ es finitamente generado.} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{L}(M) \subseteq \text{mod}(R)$.

Para el caso de módulos artianos:

$\boxed{\implies}$ Sea $A_1 \geq A_2 \geq \dots$ una cadena descendente en $\mathcal{L}(K)$, luego $f(A_1) \geq f(A_2) \geq \dots$ es una cadena descendente en $\mathcal{L}(M)$ y, como M es artiniano, $\exists L \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq L$ $f(A_k) = f(A_L)$. Sea $k \geq L$ y notemos que dado que $A_L \geq A_k$ basta con probar que $A_L \leq A_k$. Sea $a \in A_L$, luego $f(a) \in f(A_L) = f(A_k)$ y por tanto $\exists b \in A_k$ tal que $f(a) = f(b)$. Como f es inyectiva se sigue que $a = b$ y por lo tanto $a \in A_k$, con lo cual se tiene que $A_L \leq A_k$. Así, K es artiniano.

Por su parte, sea $C_1 \geq C_2 \geq \dots$ una cadena descendente en $\mathcal{L}(N)$, luego $g^{-1}(C_1) \geq g^{-1}(C_2) \geq \dots$ es una cadena descendente en $\mathcal{L}(M)$ y, como M es artiniano, $\exists L' \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq L'$ $g^{-1}(C_k) = g^{-1}(C_{L'})$. Sea $k \geq L'$ y notemos que dado que $C_{L'} \geq C_k$ basta con probar que $C_{L'} \leq C_k$. Sea $c \in C_{L'}$, como g es sobre $\exists b \in M$ tal que $g(b) = c$, con lo cual $b \in g^{-1}(C_{L'})$, por tanto $b \in g^{-1}(C_k)$ y así $c = g(b) \in C_k$. Por lo anterior se sigue que $C_{L'} \leq C_k$ y así se tiene lo deseado.

$\boxed{\impliedby}$ Sea $B_1 \geq B_2 \geq \dots$ una cadena descendente en $\mathcal{L}(M)$, luego $f^{-1}(B_1) \geq f^{-1}(B_2) \geq \dots$ y $g(B_1) \geq g(B_2) \geq \dots$ son, respectivamente, cadenas descendentes en $\mathcal{L}(K)$ y en $\mathcal{L}(N)$ y por tanto $\exists r, s \in \mathbb{N}$ tales que

$$\forall k \geq r \quad f^{-1}(B_k) = f^{-1}(B_r) \quad (*)$$

y

$$\forall k \geq s \quad g(B_k) = g(B_s). \quad (**)$$

Así, sea $t = \max\{r, s\}$, $k \geq t$ y $m \in B_t$. Luego $g(m) \in g(B_t) = g(B_t)$, por (**). Así $\exists b \in B_k$ tal que $g(m) = g(b)$, con lo cual $m - b \in \text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$, por lo cual $\exists a \in K$ tal que $m - b = f(a)$. Notemos que, en particular, $b \in C_t$, así que $m - b \in C_t$ y por lo tanto $a \in f^{-1}(C_t)$.

Luego

$$\begin{aligned}
a &\in f^{-1}(C_k), & (*) \\
\implies f(a) &\in C_k \\
\implies m - b &\in C_k \\
\implies m &\in C_k, & b \in C_k. \\
\implies C_t &\leq C_k.
\end{aligned}$$

Por lo tanto M es artiniiano. \square

Ej 46. Para $M, N \in f.l.(R)$, pruebe que $M \amalg N \in f.l.(R)$ y que $l(M \amalg N) = l(M) + l(N)$.

Demostración. Primero, del **Ejercicio 40** y de la exactitud de la sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M \amalg N \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$, se tiene que $M \amalg N \in f.l.(R)$, ya que M, N tienen longitud finita. Más aún, dada una serie de composición \mathfrak{F} para $M \amalg N$, el **Lema 2.1.1.b**) garantiza que

$$l_{\mathfrak{F}}(M \amalg N) = l_{f^{-1}(\mathfrak{F})}(M) + l_{g(\mathfrak{F})}(N)$$

$$\therefore l(M \amalg N) = l(M) + l(N). \quad \square$$

Ej 47. Sea $M \in Mod(R)$. Pruebe que

- a) Si $M \simeq N$ en $Mod(R)$ con N semisimple, entonces M es semisimple.
- b) M es semisimple si y sólo si $\exists \{S_i\}_{i \in I}$ en $\mathcal{L}(M)$ de módulos simples tal que $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$.

Demostración. a) Sea $\varphi: N \longrightarrow M$ un isomorfismo y $N = \coprod_{i \in I} S_i$ con

inclusiones naturales $\{\mu_i: S_i \longrightarrow N\}$ y $\{S_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos simples.

Consideremos la familia $\{\varphi \circ \mu_i: S_i \longrightarrow M\}$, entonces, si $\{g_i: S_i \longrightarrow M\}$ es una familia de morfismos en $Mod(R)$, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& N & \\
\varphi^{-1} \uparrow & \searrow \exists! g & \\
M & \longrightarrow & Z \\
\varphi \circ \mu_i \uparrow & \nearrow g_i & \\
& S_i &
\end{array}$$

Por la propiedad universal del coproducto $\exists! g: N \rightarrow Z$ tal que $g \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \mu_i = g_i \ \forall i \in I$, es decir, $g \circ \mu_i = g_i \ \forall i \in I$. Así $g \circ \varphi^{-1}: M \rightarrow Z$ es tal que $(g \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \mu_i) = g_i \ \forall i \in I$. Ahora, si $h(\varphi \circ \mu_i) = g_i$ con $h: M \rightarrow Z$, entonces

$$(h \circ \varphi) \circ \mu_i = h(\varphi \circ \mu_i) = (g \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \mu_i) = g_i$$

pero g es el único con esta propiedad, entonces $h\varphi = g$ y así $h = g \circ \varphi^{-1}$. Por lo tanto M es semisimple, $M = \coprod_{i \in I} S_i$, con la familia

$$\{\varphi \circ \mu_i: S_i \rightarrow M\}.$$

b) Supongamos que M es semisimple, entonces $M = \coprod_{i \in I} S'_i$ con $\{S'_i\}_{i \in I}$

simples y morfismos $\{\mu_i: S'_i \rightarrow M\}$.

Tomaremos la familia $\{S_i\}_{i \in I}$ con $\mu_i(S'_i) = S_i$, como μ_i es monomorfismo para toda $i \in I$, entonces $S_i \neq 0 \ \forall i \in I$, mas aún, como S'_i es simple se tiene que S_i también lo será. Por esto $\mu: \coprod_{i \in I} S'_i \rightarrow \coprod_{i \in I} S_i$ con

$\mu = (\mu_i)_{i \in I}$ es isomorfismo y $\{S_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{L}(M)$ es una familia ajena dos a dos. Entonces

$$\bigoplus_{i \in I} S_i = \coprod_{i \in I} S_i \simeq \coprod_{i \in I} S'_i = M.$$

La otra implicación es trivial. □