Lista 1

Ej 1. Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos.

a) $im(\varphi) \leq S$

b) $Ker(\varphi) \trianglelefteq R$

c) $\forall S' \subseteq S, \varphi^{-1}(S') \leq R$

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ El hecho de que φ sea un morfismo de anillos con uno garantiza que $\varphi(1) = 1$ y que $im(\varphi) \neq \emptyset$.
Por otro lado, sean $a, b \in im(\varphi)$. Por definición, existen $x, y \in R$ tales que $\varphi(x) = a$ y $\varphi(y) = b$. Esto implica que

$$\begin{aligned} a - b &= \varphi(x) - \varphi(y) \\ &= \varphi(x - y) \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} ab &= \varphi(x)\varphi(y) \\ &= \varphi(xy) \end{aligned}$$

Así $a - b, ab \in im(\varphi)$, y $\therefore im(\varphi) \leq S$.

$\boxed{\text{(b)}}$ Primeramente, como $\varphi(0) = 0$, tenemos que $Ker(\varphi) \neq \emptyset$. De igual manera, $Ker(\varphi) \trianglelefteq R$. En efecto, si $x, y \in Ker(\varphi)$, entonces

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0$$

Por lo que $x + y \in Ker(\varphi)$. Ahora, sean $x \in Ker(\varphi)$ y $a \in R$; de manera que

$$\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = 0 \ y \ \varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a) = 0$$

Por lo que $ax, xa \in Ker(\varphi)$, y $\therefore Ker(\varphi) \trianglelefteq R$.

$\boxed{\text{(c)}}$ Sea S' un subanillo de S. En este sentido, $1 \in S'$ y $\varphi(1) = 1$ implican que $1 \in \varphi^{-1}(S') \neq \emptyset$.
Finalmente, dados $a, b \in \varphi^{-1}(S')$, se tiene por la propia definición, que $\varphi(a), \varphi(b) \in S'$. De tal manera que $\varphi(a - b), \varphi(ab) \in S'$. Por tanto, $a - b, ab \in \varphi^{-1}(S')$.
$\therefore \varphi^{-1}(S')$ es un subanillo de S. $\square$

Ej 2. Para un anillo R pruebe que:

a) $C(R)$ es un subanillo conmutativo de R.
b) $C(R) = C(R^{op})$.
c) $R = R^{op}$ como anillos $\Leftrightarrow$ $C(R) = R$ $\Leftrightarrow$ R es conmutativo.

Demostración. $\boxed{\text{a)}}$ Sean $a, b \in C(R)$, por definición $ax = xa$ y $bx = xb \quad \forall x \in R$, entonces

$$(a - b)x = ax - (bx) = xa - (xb) = x(a - b).$$

Por lo tanto $a - c \in C(R)$. Ahora, $abx = axb = xab$, por lo que $a, b \in C(R)$ y en consecuencia $C(R) \leq R$.

$\boxed{\text{b)}}$ Sea $* : R^{op} \times R^{op} \to R^{op}$ la operación de anillo en R^{op}. Así se tiene que

$$\begin{aligned} a \in C(R^{op}) &\Leftrightarrow \quad \forall x \in R \quad a * x = x * a \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in R \quad xa = ax \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in R \quad a \in C(R). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{c)}}$ $\boxed{\cdot) \Rightarrow \cdot\cdot)}$ Supongamos $R = R^{op}$ como anillos, entonces sus operaciones coincides, es decir, $\forall a \in R$ se tiene que $\forall x \in R \quad ax = a * x = xa$, entonces $R \subset C(R) \subset R$ por lo que $R = C(R)$.

$\boxed{\cdot\cdot) \Rightarrow \cdots)}$ Si $R = C(R)$, entonces $\forall x, y \in R \quad xy = yx$, por lo que R es conmutativo.

$\boxed{\cdots) \Rightarrow \cdot)}$ Si R es conmutativo, entonces $\forall x, a \in R \quad xa = ax = x * a$.
Además, como R y R^{op} coinciden como grupos abelianos, entonces
$R = R^{op}$ como anillos. □

Ej 3. Sea $(R, K\varphi) \in K - Alg$. La función

$$\begin{aligned} \bullet_\varphi : K \times R &\to R \\ (k, r) &\mapsto k \bullet r := \varphi(k)\, r \end{aligned}$$

es una acción compatible de K en R.

Demostración. Como $(R, K, \varphi) \in K - Alg$ entonces K es un anillo conmutativo.
$\boxed{\text{(AC1)}}$ Sean $k \in K$ y $r_1, r_2 \in R$. Así

$$\begin{aligned} k \bullet_\varphi (r_1 + r_2) &= \varphi(k)\,(r_1 + r_2) \\ &= \varphi(k)\, r_1 + \varphi(k)\, r_2 \\ &= k \bullet_\varphi r_1 + k \bullet_\varphi r_2. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(AC2)}}$ Sean $k_1, k_2 \in K$ y $r \in R$. Así

$$\begin{aligned}(k_1 + k_2) \bullet_\varphi r &= \varphi\,(k_1 + k_2)\, r \\ &= (\varphi(k_1) + \varphi(k_2))\, r \\ &= \varphi(k_1)r + \varphi(k_2)r \\ &= k_1 \bullet_\varphi r + k_2 \bullet_\varphi r.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{(AC3)}}$ Sean $k_1, k_2 \in K$ y $r \in R$. Así

$$\begin{aligned}k_1 \bullet_\varphi (k_2 \bullet_\varphi r) &= \varphi\,(k_1)\,(k_2 \bullet_\varphi r) \\ &= \varphi\,(k_1)\,(\varphi\,(k_2)\, r) \\ &= (\varphi\,(k_1)\,\varphi\,(k_2))\, r \\ &= (\varphi\,(k_1 k_2))\, r \\ &= (k_1 k_2) \bullet_\varphi r.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{(AC4)}}$ Sean $k \in K$ y $r_1, r_2 \in R$. Así

$$\begin{aligned}k \bullet_\varphi (r_1 r_2) &= \varphi(k)\,(r_1 r_2) \\ &= (\varphi(k) r_1)\, r_2 \\ &= (k \bullet \varphi r_1)\, r_2.\end{aligned}$$

Pero también

$$\begin{aligned}(\varphi(k) r_1)\, r_2 &= (r_1 \varphi(k))\, r_2 && , \; Im\,(\varphi) \subseteq C\,(R) \\ &= (k \bullet \varphi r_1)\, r_2. \\ &= r_1\,(\varphi(k) r_2) \\ &= r_1\,(k \bullet_\varphi r_2)\,.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{(AC5)}}$ Sean $r \in R$. Así

$$\begin{aligned}1_K \bullet_\varphi r &= \varphi(1_K) r \\ &= 1_R \cdot r && , \; \varphi \text{ es un morfismo de anillos.} \\ \therefore\; (R, \bullet_\varphi) &\in K_{Ac} - Rings.\end{aligned}$$

□

Ej 4. Para $\alpha : K \times R \longrightarrow R$, $(k, r) \mapsto kr$ en K_{AC}-Rings, pruebe que la asignación $\varphi_\alpha : K \longrightarrow R$, con $\varphi_\alpha\,(k) = k \cdot 1_R$ es un morfismo de anillos tal que $im\,(\varphi_\alpha) \subseteq C\,(R)$.

Demostración. Sean $k, r \in K$. Dado que α es una acción, se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha\,(k + r) &= (k + r) \cdot 1_R \\ &= k \cdot 1_R + r \cdot 1_R \\ &= \varphi_\alpha\,(k) + \varphi_\alpha\,(r)\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(kr) &= (kr)\cdot 1_R\\ &= k\cdot(r\cdot 1_R)\\ &= (k\cdot 1_R)(r\cdot 1_R)\\ &= \varphi_\alpha(k)\,\varphi_\alpha(r)\end{aligned}$$

Además, por la regla de correspondencia de φ_α, $\varphi_\alpha(1) = 1_K \cdot 1_R = 1_R$. Por tanto, φ_α es un morfismo de anillos.

Finalmente, de la quinta condición de ser acción a izquierda, se deduce que $im(\varphi_\alpha) \subseteq C(R)$. En efecto, si $k \in K$ y $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(k)\,r &= (k\cdot 1_R)\,r\\ &= k\cdot(1_R r)\\ &= k\cdot(r 1_R)\\ &= r\cdot(k 1_R)\\ &= r\varphi_\alpha(k)\end{aligned}$$

$\therefore im(\varphi_\alpha) \subseteq C(R)$. □

Ej 5. Para un anillo conmutativo K, pruebe que se tiene una biyección $\alpha : K - Alg \longrightarrow K_{AC} - Rings, \quad (R, K, \varphi) \longmapsto \alpha_\varphi$, donde $\alpha_\varphi : K \times R \to R$ está dada por $\alpha_\varphi(k, r) := \varphi(k)r$; cuya inversa está dada por $\varphi_\alpha := \alpha(k, 1_R)$.

Demostración. Para evitar abusos de notación en la prueba se redefinirán las funciones de la siguiente forma. Sean $D = \{\varphi : (R, K, \varphi) \in K - Alg\}$ y

$$f : D \longrightarrow K_{AC} - Rings, \quad f(\varphi) = f_\varphi$$

donde $f_\varphi : K \times R \to R$ está dada por $f_\varphi(k, r) := \varphi(k)r$. Y definimos $f^{-1} : K_{AC} - Rings \longrightarrow D$ como $f^{-1}(\alpha) := f_\alpha^{-1}$, donde $\alpha : K \times R \to R$ y $f_\alpha^{-1}(k) := \alpha(k, 1_R) = k \cdot 1_R$.

Entonces

$$\left((ff^{-1})(\alpha)\right)(k, r) = \left(f(f_\alpha^{-1})\right)(k, r) = f_\alpha^{-1}(k)r = \alpha(k, 1_R)r = \alpha(k, r)$$

y

$$\left((f^{-1}f)(\varphi)\right)(k) = \left(f^{-1}f_\varphi\right)(k) = f_\varphi(k, 1_R) = \varphi(k)1_R = \varphi(k).$$

Por lo que f es biyectiva con f^{-1} su inversa. □

Ej 6. Sea R un anillo.

(a) Si $(\lambda, M) \in {}_R Rep$ y la función $\bullet_\lambda$ está definida como

$$\begin{aligned} \bullet_\lambda : R \times M &\to M \\ (r, m) &\mapsto r \bullet_\lambda m := \lambda(r)\,(m)\,, \end{aligned}$$

entonces $({}_R M, \bullet_\lambda) \in {}_R Mod$.

(b) Sea $({}_R M, \bullet) \in {}_R Mod$ y la función $\lambda_\bullet$ definida como

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet : R &\to End^l_{\mathbb{Z}} \\ r &\mapsto \lambda_\bullet(r), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet\,(r) : M &\to M \\ m &\mapsto r \bullet m. \end{aligned}$$

Entonces $(\lambda_\bullet, M) \in {}_R Rep$.

(c) Existe una biyección entre ${}_R Rep$ y ${}_R Mod$.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Como $(\lambda, M) \in {}_R Rep$ entonces M es un grupo abeliano.

$\boxed{\text{(RMI1)}}$ Sean $r \in R, m_1, m_2 \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} r \bullet_\lambda (m_1 + m_2) &= \lambda(r)\,(m_1 + m_2) \\ &= \lambda(r)\,(m_1) + \lambda(r)\,(m_2) && , \ \lambda(r) \in End_{\mathbb{Z}}\,(M) \\ &= r \bullet_\lambda m_1 + r \bullet_\lambda m_2. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(RMI2)}}$ Sean $r_1, r_2 \in R, m \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} (r_1 + r_2) \bullet_\lambda m &= \lambda\,(r_1 + r_2)\,(m) \\ &= (\lambda(r_1) + \lambda(r_2))\,(m) && , \ \lambda \text{ es un morfismo de anillos} \\ &= \lambda(r_1)\,(m) + \lambda(r_2)\,(m) \\ &= r_1 \bullet_\lambda m + r_2 \bullet_\lambda m. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(RMI3)}}$ Sean $r_1, r_2 \in R, m \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} r_1 \bullet_\lambda (r_2 \bullet_\lambda m) &= \lambda(r_1)\,(r_2 \bullet_\lambda m) \\ &= \lambda(r_1)\,(\lambda(r_2)\,(m)) \\ &= \lambda(r_1) \circ \lambda(r_2)\,(m) \\ &= \lambda(r_1 r_2)\,(m) && , \ \lambda \text{ es un morfismo de anillos} \\ &= (r_1 r_2) \bullet_\lambda m. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(RMI4)}}$ Sea $m \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} 1_R \bullet_\lambda m &= \lambda(1_R)\,(m) \\ &= Id_M\,(m) \qquad , \ \lambda \text{ es un morfismo de anillos} \\ &= m. \end{aligned}$$

$\therefore\ ({}_RM, \bullet_\lambda) \in {}_RMod.$

$\boxed{\text{(b)}}$ Como $({}_RM, \bullet_\lambda) \in {}_RMod$ entonces M es un grupo abeliano.
Sea $r \in R$ y $m, n \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet(r)\,(m+n) &= r \bullet (m+n) \\ &= r \bullet m + r \bullet n \\ &= \lambda_\bullet(r)\,(m) + \lambda_\bullet(r)\,(m) \\ &\implies \lambda_\bullet(r) \in End_{\mathbb{Z}}\,(M)\,. \end{aligned}$$

Si consideramos la composición usual de funciones $\circ$ entonces $\lambda_\bullet(r) \in End^l_{\mathbb{Z}}\,(M)$, así la aplicación $\lambda_\bullet$ es una función bien definida.
Sean $r_1, r_2 \in R$. Si $m \in M$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet(r_1 + r_2)\,(m) &= (r_1 + r_2) \bullet m \\ &= r_1 \bullet m + r_2 \bullet m \\ &= \lambda_\bullet(r_1)\,(m) + \lambda_\bullet(r_2)\,(m) \\ &= (\lambda_\bullet(r_1) + \lambda_\bullet(r_1))\,(m)\,. \\ \implies \lambda_\bullet(r_1 + r_2) &= \lambda_\bullet(r_1) + \lambda_\bullet(r_2). \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet(r_1 r_2)\,(m) &= (r_1 r_2) \bullet m \\ &= r_1 \bullet (r_2 \bullet m) \\ &= \lambda_\bullet(r_1)\,(r_2 \bullet m) \\ &= \lambda_\bullet(r_1)\,(\lambda_\bullet(r_2)\,(m)) \\ &= \lambda_\bullet(r_1) \circ \lambda_\bullet(r_2)\,(m) \\ \implies \lambda_\bullet(r_1 r_2) &= \lambda_\bullet(r_1) \circ \lambda_\bullet(r_2). \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet(1_R)\,(m) &= 1_R \bullet m \\ &= m \\ \implies \lambda_\bullet(1_R) &= Id_M. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda_\bullet : R \to End^l_{\mathbb{Z}}\,(M)$ es un morfismo de anillos y así $(\lambda_\bullet, M) \in {}_RRep$.

$\boxed{\text{(c)}}$ Consideremos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} f :{}_{R}Rep &\to {}_{R}Mod \\ (\lambda, M) &\mapsto ({}_{R}M, \bullet_{\lambda})\,; \end{aligned}$$

con $\bullet_{\lambda}$ definido como en (a).

$$\begin{aligned} g :{}_{R}Mod &\to {}_{R}Rep \\ ({}_{R}M, \bullet) &\mapsto (\lambda_{\bullet}, M)\,; \end{aligned}$$

con $\lambda_{\bullet}$ definido como en (b).
Por los (a) y (b) las aplicaciones f y g son funciones bien definidas.
Sea $({}_{R}M, \bullet) \in {}_{R}Mod$. Entonces

$$\begin{aligned} f \circ g\,(({}_{R}M, \bullet)) &= f\,(g\,(({}_{R}M, \bullet))) \\ &= f\,((\lambda_{\bullet}, M)) \\ &= ({}_{R}M, \bullet_{\lambda_{\bullet}})\,. \end{aligned}$$

Sean $r \in R$ y $m \in M$. Así

$$\begin{aligned} r \bullet_{\lambda_{\bullet}} m &= \lambda_{\bullet}(r)\,(m) \\ &= r \bullet m \\ &\implies \bullet = \bullet_{\lambda_{\bullet}}. \\ &\implies f \circ g\,(({}_{R}M, \bullet)) = ({}_{R}M, \bullet) \\ \implies f \circ g = Id_{{}_{R}Mod}. \end{aligned}$$

Ahora, sea $(\lambda, M) \in {}_{R}Rep$. Luego

$$\begin{aligned} g \circ f\,((\lambda, M)) &= g\,(f\,((\lambda, M))) \\ &= g\,(({}_{R}M, \bullet_{\lambda})) \\ &= (\lambda_{\bullet_{\lambda}}, M)\,. \end{aligned}$$

Sea $r \in R$ y $m \in M$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_{\bullet_{\lambda}}(r)\,(m) &= r \bullet_{\lambda} m \\ &= \lambda(r)\,(m) \\ &\implies \lambda_{\bullet_{\lambda}}(r) = \lambda(r) \\ &\implies \lambda_{\bullet_{\lambda}} = \lambda \\ &\implies g \circ f\,((\lambda, M)) = (\lambda, M) \\ \implies g \circ f = Id_{{}_{R}Rep}. \end{aligned}$$

De modo que f es invertible, con inversa g, y por lo tanto es una biyección, con lo cual se tiene lo deseado. $\square$

Ej 7. Sea R un anillo. Pruebe que

a) Dada una representación a derecha (M, ρ), se tiene una acción a derecha $\beta_\rho : M \times R \longrightarrow M$, $(m, r) \mapsto mr = (m)\,\rho\,(r)$ tal que $(M, \beta_\rho) \in Mod_R$

b) Dado un R-módulo a derecha (M, β), se tiene un morfismo de anillos $\rho_\beta : R \longrightarrow End^r_{\mathbb{Z}}\,(M)$, $(m)\,\rho_\beta\,(r) = \beta\,(m, r) = mr$

c) Se tiene una biyección $\beta : Rep_R \longrightarrow Mod_R$, $(M, \rho) \mapsto \beta_\rho$, donde $\beta_\rho : M \times R \mapsto M$ está dada por $\beta_\rho\,(m, r) = (m)\,\rho\,(r)$; cuya inversa es $\rho : Mod_R \longrightarrow Rep_R$, con $(\beta : M \times R \longrightarrow M) \mapsto (\rho_\beta : R \longrightarrow End^r_{\mathbb{Z}}\,(M))$, dada por $(m)\,\rho_\beta\,(r) = \beta\,(m, r)$

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Dado que M es un grupo abeliano, basta probar que se satisfacen las condiciones de la definición de R-módulo a derecha. Sean $r_1, r_2 \in R$ y $m_1, m_2 \in M$.

Primero,

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \cdot r_1 &= (m_1 + m_2)\,\rho\,(r_1)\\ &= (m_1)\,\rho\,(r_1) + (m_2)\,\rho\,(r_2)\\ &= m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_1\end{aligned}$$

puesto que $\rho\,(r_1)$ es un morfismo de grupos abelianos.

Por otro lado, como ρ es un morfismo de anillos, podemos decir que

$$\begin{aligned}m_1 \cdot (r_1 + r_2) &= (m_1)\,\rho\,(r_1 + r_2)\\ &= (m_1)\,[\rho\,(r_1) + \rho\,(r_2)]\\ &= (m_1)\,\rho\,(r_1) + (m_1)\,\rho\,(r_2)\\ &= m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_2\end{aligned}$$

También observemos que

$$\begin{aligned}m_1 \cdot 1_R &= (m_1)\,\rho\,(1)\\ &= (m_1)\,Id_R\\ &= m_1\end{aligned}$$

Por último, en virtud de que ρ preserva productos, se tiene que

$$\begin{aligned}m_1 \cdot (r_1 r_2) &= (m_1)\,\rho\,(r_1 r_2)\\ &= (m_1)\,\rho\,(r_1) \circ \rho\,(r_2)\\ &= ((m_1)\,\rho\,(r_1))\,\rho\,(r_2)\\ &= (m_1 \cdot r_1)\,\rho\,(r_2)\\ &= (m \cdot r_1) \cdot r_2\end{aligned}$$

$\therefore (M, \beta_\rho)$ es un R-módulo a derecha.

$\boxed{\text{(b)}}$ Como en el inciso anterior, bastará con probar que ρ_β es un morfismo de anillos. Bajo este contexto, sean $m_1, m_2 \in M$ y $r_1, r_2 \in R$.

Comenzaremos notando que $\rho(r_1)$ es un homomorfismo de anillos. En efecto,

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\,\rho(r_1) &= (m_1 + m_2) \cdot r_1 \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_1 \\ &= (m_1)\,\rho(r_1) + (m_2)\,\rho(r_2)\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\rho(r_1) \in End_{\mathbb{Z}}^{r}(M)$.

Análogamente, ρ_β es un homomorfismo de grupos abelianos, puesto que

$$\begin{aligned}(m_1)\,\rho_\beta(r_1 + r_2) &= m_1 \cdot (r_1 + r_2) \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_1 \cdot r_2 \\ &= (m_1)\,\rho_\beta(r_1) + (m_1)\,\rho_\beta(r_2)\end{aligned}$$

y así $\rho_\beta(r_1 + r_2) = \rho_\beta(r_1) + \rho_\beta(r_2)$. Más aún, ρ_β también preserva productos, toda vez que

$$\begin{aligned}(m_1)\,\rho_\beta(r_1 r_2) &= m_1 \cdot (r_1 r_2) \\ &= (m_1 \cdot r_1) \cdot r_2 \\ &= ((m_1)\,\rho_\beta(r_1))\,\rho_\beta(r_2) \\ &= (m_1)\left[\rho_\beta(r_1) \circ \rho_\beta(r_2)\right]\end{aligned}$$

Para finalizar, ρ_β en efecto es un morfismo de anillos porque, adicionalmente, se satisface que $(m_1)\,\rho_\beta(1) = m_1 \cdot 1_R = m_1$. Ergo, se concluye el resultado.

$\boxed{\text{(c)}}$ La biyección queda resuelta debido a los 2 incisos anteriores. El primero garantiza que toda representación a derecha tiene estructura de R-módulo a derecha; inversamente, todo R-módulo a derecha induce una acción a derecha con la cuál el módulo puede ser visto como una representación a derecha de R. $\square$

Ej 8. Sea R un anillo, $(M, +)$ un grupo abeliano y $\varphi : R \times M \to M$ una función. La acción opuesta $\varphi^{op} : M \times R^{op} \to M$, se define como sigue:

$$\varphi^{op}(m, r^{op}) := \varphi(r, m) \quad \forall r \in R,\ \forall m \in M.$$

Pruebe que

$$({}_R M, \varphi) \in {}_R Mod \Leftrightarrow (M_{R^{op}}, \varphi^{op}) \in Mod_{R^{op}}.$$

Demostración. Recordando que $r_2^{op} r_1^{op} = (r_2 r_1)^{op}$, se tiene que:

$(M_{R^{op}}, \varphi^{op}) \in Mod_{R^{op}}$.

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&i)\ \varphi^{op}[(m_1+m_2), r^{op}] = \varphi^{op}(m_1, r^{op}) + \varphi^{op}(m_2, r^{op}).\\
&ii)\ \varphi^{op}[m, (r_1^{op}+r_2^{op})] = \varphi^{op}(m, r_1^{op}) + \varphi^{op}(m, r_2^{op}).\\
&iii)\ \varphi^{op}(m, 1_R^{op}) = m.\\
&iv)\ \varphi^{op}(m, r_1^{op} r_2^{op}) = \varphi^{op}(\varphi^{op}(m, r_1^{op}), r_2^{op}).
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&i)\ \varphi[r, (m_1+m_2)] = \varphi(r, m_1) + \varphi(r, m_2).\\
&ii)\ \varphi[(r_1+r_2), m] = \varphi(r_1, m) + \varphi(r_2, m).\\
&iii)\ \varphi(1_R, m) = m.\\
&iv)\ \varphi(r_2 r_1, m) = \varphi(r_2, \varphi(r_1, m)).
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow$

$({}_RM, \varphi) \in {}_RMod$. $\square$

Ej 9. Sea R un anillo con su producto denotado por medio de yuxtaposición. Entonces

(a) si la función $\bullet$ está definida como

$$
\begin{aligned}
\bullet : R \times R &\to R\\
(r, x) &\mapsto r \bullet x := rx,
\end{aligned}
$$

$({}_RR, \bullet) \in {}_RMod$.

(b) si la función $\bullet$ está definida como

$$
\begin{aligned}
\bullet : R \times R &\to R\\
(x, r) &\mapsto x \bullet r := xr,
\end{aligned}
$$

$(R_R, \bullet) \in Mod_R$.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Sean $r, s, t \in R$. Se tiene lo siguiente como consecuencia de la asociatividad de del producto en R y la distributividad de este con respecto a la suma en R:

$$\begin{aligned}
r \bullet (s+t) &= r\,(s+t) = rs + st \\
&= r \bullet t + s \bullet t. \\
(r+s) \bullet t &= (r+s) \bullet t = rt + st \\
&= r \bullet t + s \bullet t. \\
r \bullet (s \bullet t) &= r\,(st) = (rs)\,t \\
&= (r \bullet s) \bullet t. \\
(r+s) \bullet t &= (r+s) \bullet t = rt + st \\
&= r \bullet t + s \bullet t.
\end{aligned}$$

Finalmente, como 1_R es el neutro multiplicativo de R

$$1_R \bullet r = 1_R r = r. \therefore \; ({}_R R, \bullet) \qquad\qquad \in {}_R Mod.$$

$\boxed{\text{(b)}}$ Es análogo al inciso (a), empleando nuevamente a asociatividad de del producto en R y la distributividad de este con respecto a la suma en R, así como la propiedad del neutro multiplicativo.

$\square$

Ej 10. Sea K un anillo conmutativo.

a) Para un anillo R, pruebe que dar una estructura de K-álgebra en R es equivalente a dar una estructura de K-módulo a izquierda en R, vía una acción a izquierda $K \times R \longrightarrow R$, $(k, r) \mapsto k \cdot r$ tal que satisface la propiedad $k \cdot (r_1 r_2)\,(k \cdot r_1)\,r_2 = r_1\,(k \cdot r_2)$, $\forall k \in K$, $\forall r_1, r_2 \in R$.

b) Sean R, S dos K-álgebras, $f : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos. Pruebe que f es un morfismo de K-álgebras si y sólo si f es un morfismo de K-módulos a izquierda, vía la estructura de K-módulo en R y en S dada por el primer inciso.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}\boxed{\Rightarrow)}$ Suponga que (R, K, φ) tiene una estructura de K-álgebra. Ahora, definimos una acción a izquierda de K sobre R como $(k, r) \mapsto \varphi(k)\,r$. Veremos que, bajo este contexto, R es un K-módulo a izquierda.

Sean $x, y \in R$ y $k, r \in K$. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
k \cdot (x+y) &= \varphi(k)\,(x+y) \\
&= \varphi(k)\,x + \varphi(k)\,y \\
&= k \cdot x + k \cdot y
\end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned}(k+r)\cdot x &= [\varphi(k)+\varphi(r)]x \\ &= \varphi(k)\,x+\varphi(r)\,x \\ &= k\cdot x + r\cdot x\end{aligned}$$

Igualmente,

$$\begin{aligned}1_K\cdot x &= \varphi(1_K) \\ &= 1_R x \\ &= x\end{aligned}$$

Y así místmo, $im\,(\varphi) \subseteq C\,(R)$, pues (R, K, φ) es K-álgebra. Inclusive, obtenemos

$$\begin{aligned}(kr)\cdot x &= \varphi(kr)\,x \\ &= [\varphi(k)\,\varphi(r)]x \\ &= \varphi(k)\,[\varphi(r)\,x] \\ &= k\cdot(r\cdot x)\end{aligned}$$

Por último, $im\,(\varphi) \subseteq C\,(R)$ implica las siguientes dos igualdades

$$\begin{aligned}k\cdot(xy) &= \varphi(k)\,(xy) \\ &= (\varphi(k)\,x)\,y \\ &= (k\cdot x)\,y\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}k\cdot(xy) &= \varphi(k)\,(xy) \\ &= (\varphi(k)\,x)\,y \\ &= (x\varphi(k))\,y \\ &= x\,(\varphi(k)\,y) \\ &= x\,(k\cdot y)\end{aligned}$$

$\therefore R \in {}_K Mod.$

$\boxed{\Leftarrow)}$ En el supuesto de que R sea un K-módulo a izquierda, vía una acción $K\times R \longrightarrow R$, $(k,r)\mapsto k\cdot r$ con la propiedad de que para cualesquiera $k\in K$ y $r_1, r_2 \in R$ se tiene que $k\cdot(r_1 r_2) = (k\cdot r_1)\,r_2 = r_1\,(k\cdot r_2)$, se puede definir una función $\varphi : K \longrightarrow R$ como $\varphi(k) = k\cdot 1_R$. Mostraremos que φ es un homomorfismo de anillos tal que $im\,(\varphi)\subseteq C\,(R)$.

Sean $k, r \in K$. Comencemos notando que

$$\begin{aligned}\varphi(k+r) &= (k+r)\cdot 1_R\\ &= k\cdot 1_R + r\cdot 1_R\\ &= \varphi(k)+\varphi(r)\end{aligned}$$

Y que, a su vez,

$$\begin{aligned}\varphi(kr) &= (kr)\cdot 1_R\\ &= k\cdot(r\cdot 1_R)\\ &= k\cdot\varphi(r)\\ &= k\cdot(1_R\varphi(r))\\ &= (k\cdot 1_R)\varphi(r)\\ &= \varphi(k)\varphi(r)\end{aligned}$$

Incluso, en este sentido, se tiene que $\varphi(1_K) = 1_K \cdot 1_R = 1_R$. Lo cual implica que φ es un homomorfismo de anillos. Para terminar, veamos que $im(\varphi) \subseteq C(R)$. Sean $x \in K$, $y \in R$. Por hipótesis,

$$\begin{aligned}(k\cdot 1_R)r &= k\cdot(1_R r)\\ &= k\cdot r\\ &= k\cdot(r 1_R)\\ &= r(k\cdot 1_R)\end{aligned}$$

Luego,

$$\varphi(k)r = r\varphi(k)$$

$\therefore R$ adquiere estructura de K-álgebra.

$\boxed{\text{(b)}}\boxed{\Rightarrow)}$ Empecemos suponiendo que f es un morfismo de K-álgebras, con (R, K, φ) y (S, K, ψ) las K-álgebras. Sean $k \in K$ y $r \in R$. En virtud de la correspondencia del inciso anterior se tiene que

$$\begin{aligned}k\cdot r &= k\cdot(1_R r)\\ &= (k\cdot 1_R)r\\ &= \varphi(k)r\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}f(k\cdot r) &= f(\varphi(k)r)\\ &= \psi(k)f(r)\\ &= k\cdot f(r)\end{aligned}$$

$\therefore f$ es un morfismo de K-módulos a izquierda.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Considere las K-álgebras (R, K, φ) y (S, K, ψ). Sean $t \in K$ y $x \in R$. Note que

$$\begin{aligned} \varphi(k)\, r &= (k \cdot 1_R)\, r \\ &= k \cdot (1_R r) \\ &= k \cdot r \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} f\,(\varphi(k)\, r) &= f\,(k \cdot r) \\ &= k \cdot f\,(r) \\ &= \psi(k)\, f\,(r) \end{aligned}$$

$\therefore f$ es un morfismo de K-álgebras. □

Ej 11. Dado un morfismo de anillos $\varphi : R \to S$, construya la correspondencia análoga (a la de módulos) $F_\varphi : {}_SRep \longrightarrow {}_RRep$.

Demostración. Sean $\varphi : R \to S$ un morfismo de anillos y $(\lambda, M) \in {}_SRep$ una representación a izquierda del anillo S. Se define la correspondencia **Cambio de anillos** $F_\varphi : {}_SRep \longrightarrow {}_RRep$. Como grupos abelianos, $F_\lambda(M) := M$ y la representación $R \to End^l_{\mathbb{Z}}(M), \quad (r) \longmapsto \lambda'(r)$, se define por $\lambda'(r) := \lambda(\varphi(r))$. Cabe observar que, como λ y φ son morfismos de anillos entonces λ' es morfismo de anillos.

□