Tarea 2

Sergio R.Z.

Ej 12.

Ej 13.

Ej 14. Sean $X, M \in {}_RMod$ tal que $X \subseteq M$. Pruebe que $X \leq M \iff$ la inclusión $i_X : X \longrightarrow M, i_X(x) := x \quad \forall x \in X$, es un morfismo de R módulos.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $X \leq M$, entonces dados $x, y \in X$ y $r \in R$ se tiene que

$$i_x(rx + y) = rx + y = ri_X(x) + i_X(y).$$

Por lo que i_X es morfismo.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ahora supongamos que $i_X : X \longrightarrow M$ es un morfismo de R módulos.

Sean $x, y \in X$ y $r \in R$, como X es un R módulo a izquierda entonces $x + y \in X$ y como i_X es morfismo se tiene que, si $\cdot : R \times X \longrightarrow X$ es la acción de R módulo en X, entonces $r \cdot x = r \cdot i_X(x) = i_X(rx) = rx$. Así, como $X \subset M$, entonces $X \leq M$. □

Ej 15.

Ej 16.

Ej 17. Para un $M \in {}_RMod$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) M es simple.

b) 0 es un submódulo maximal de M.

c) M es un submódulo minimal de M.

d) $M \neq 0$ y $M =< m >_R \quad \forall m \in M - \{0\}$.

e) $M \neq 0$ y $\forall X \in {}_RMod$, $\forall f \in Hom_R(M, X)$ se tiene que $f = 0$ o bien $Ker(f) = 0$.

f) $M \neq 0$ y $\forall X \in {}_RMod$, $\forall g \in Hom_R(X, M)$ se tiene que $g = 0$ o bien $Im(g) = 0$..

Demostración. Notemos que si $M \neq 0$, ningúna de los incisos se satisface, así que podemos tomar $M \neq 0$.

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Supongamos M es simple, entonces $\mathscr{L}(M) = \{0, M\}$ por lo que 0 es el único submódulo de M propio y por lo tanto es maximal.

$\boxed{b) \Rightarrow c)}$ Supongamos 0 es un submódulo maximal de M, como $\forall N \in \mathscr{L}(M) - \{M\}$ se tiene que $0 \leq N$, entonces $\forall N \in \mathscr{L}(M) - \{M\}, \quad N = 0$, por lo que M es minimal al ser el único submódulo en $(\mathscr{L}(M) - \{0\}, \leq)$ tal que $M \neq 0$ y si $0 \lneq N$ entonces $(N \leq M \ \Rightarrow N = M)$.

$\boxed{c) \Rightarrow d)}$Supongamos M es un submódulo minimal de M. Por definición $M \neq 0$ entonces $\forall m \in M - \{0\}$, pasa que $< m >_R \neq 0$, pero $< m >_R \in \mathscr{L}(M)$, entonces $< m >_R \geq M$ por ser M minimal. Sin embargo $< m >_R \leq M$ pues $m \in M$, por lo tanto $M =< m >_R \quad \forall m \in M - \{0\}$.

$\boxed{d) \Rightarrow a)}$ Como $M \neq 0$, si $N \neq 0$ y $N \in \mathscr{L}(M)$, entonces $N \subset M$, $\forall n \in N - \{0\} \quad n \in M - \{0\}$ y $M =< n >_M \leq N \leq M$. Por lo tanto $N = M$ y $\mathscr{L}(M) = \{0, M\}$.

Con lo anterior tenemos que las primeras cuatro proposiciones son equivalentes, entonces para terminar se demostrarán las siguientes equivalencias.

$\boxed{a) \Rightarrow e)}$ Ya sabemos que $M \neq 0$. Sea $f \in Hom_R(M, X)$ con $X \in {}_R Mod$. Si $f = 0$ no hay nada que demostrar. Supongamos $f \neq 0$, como $Ker(f) \leq M$ con M simple, entonces $Ker(f) = 0$ o $Ker(f) = M$, pero $f \neq 0$, entonces $Ker(f) \neq M$ y en consecuencia $Ker(f) = 0$.

$\boxed{e) \Rightarrow f)}$ Ya sabemos que $M \neq 0$. Sea $g \in Hom_R(X, M)$ con $X \in {}_R Mod$. Si $g = 0$ no hay nada que probar. Supongamos $g \neq 0$, como $Im(g) \leq M$ entonces podemos tomar ${}^{M}\!/_{Im(g)} \in {}_R Mod$ y así $\pi_{IM(g)} \in Hom_R\left(M, {}^{M}\!/_{Im(g)}\right)$, con $\pi_{Im(g)} \neq 0$. Entonces por e) tenemos que, $Ker(g) = 0$, y así $Im(g) = M$.

$\boxed{f) \Rightarrow a)}$ Como $M \neq 0$ tenemos que para cada $N \in \mathscr{L}(M) - \{0\}$ la inclusión $i_N : N \longrightarrow M$ es morfismo y más aun $i_N \neq 0$. Entonces por f) se tiene que $N = Im(i_N) = M$ y así $\mathscr{L}(M) = \{0, M\}$. $\square$

Ej 18.

Ej 19.

Ej 20. Para una K-álgebra R, defina de manera natural una estructura de K-módulo (a izquierda y a derecha) en $Hom_R(M, N) \quad \forall M, N \in Mod(R)$.

Demostración. Sean M y N R-módulos a izquierda y (R, K, φ) una K-álgebra. Para toda $k \in K,\ f \in Hom_R(M, N),\ l \in R$ y $m \in M$, definiremos $\alpha : K \times Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_R(M, N)$ dada por

$$\alpha(k, f)(\varphi)(lm) = k \cdot l(\varphi)(lm) := l * (\varphi(k) * f(m)),$$

donde $\cdot$ es la acción a izquierda de N como R-módulo.
Así
$\boxed{AC1}$

$$\begin{aligned}(k \cdot (f_1 + f_2))(lm) &= l * (\varphi(k) * (f_1 + f_2)(m)) \\ &= l * (\varphi(k) * (f_1)(m) + \varphi(k) * (f_2)(m)) \\ &= l * (\varphi(k) * (f_1)(m)) + l * (\varphi(k) * (f_2)(m)) \\ &= k \cdot (f_1)(lm) + k \cdot (f_2)(lm).\end{aligned}$$

$\boxed{AC2}$

$$\begin{aligned}((k_1 + k_2) \cdot (f))(lm) &= l * (\varphi(k_1 + k_2) * f(m)) \\ &= l * (\varphi(k_1) * f(m) + \varphi(k_2) * f(m)) \\ &= l * (\varphi(k_1) * f(m)) + l * (\varphi(k_2) * f(m)) \\ &= k_1 \cdot f(lm) + k_2 \cdot f(lm).\end{aligned}$$

$\boxed{AC3}$

$$\begin{aligned}(1_K \cdot f)(lm) &= l * (\varphi(1_K) * f(m)) \\ &= l * (1_R * f(m)) \\ &= l * (f(m)) \\ &= f(lm).\end{aligned}$$

$\boxed{AC4}$

$$\begin{aligned}((k_1 k_2) \cdot f)(lm) =& l * (\varphi(k_1 k_2) * f(m)) \\ &= l * (\varphi(k_1)\varphi(k_2) * f(m)) \\ &= l * (\varphi(k_1) * (\varphi(k_2) * f(m))) \\ &= l * [\varphi(k_1) * (k_2 \cdot f)(m)] \\ &= (k_1 \cdot (k_2 \cdot f))(lm).\end{aligned}$$

Entonces $\cdot$ es una acción a izquierda de R-módulos.

Por el ejercicio 8, se tiene que si M y N son R-módulos derechos entonces son R^{op} módulos izquierdos.Asi $\cdot$ es una acción para $Hom_{R^{op}}(M,N)$ y por el ejercicio 8, $\cdot^{op}$ es una acción que vuelve a $Hom_R(M,N)$ un módulo derecho. $\square$

Ej 21.

Ej 22.

Ej 23. Sea R un anillo e $I \lhd R$. Considere el epimorfismo canónico de anillos $\pi : R \longrightarrow {}^{R}\!/_{I}$, $r \mapsto r + I$.

a) Pruebe que el funtor de cambio de anillos
$F_\pi : Mod\left({}^{R}\!/_{I}\right) \longrightarrow Mod(R)$ es fiel y pleno.

b) Sea ζ_I la subcategoría plena de $Mod(R)$ cuyos objetos son los $M \in Mod(R)$ que son aniquilados por I, i.e.

$$M \in \zeta_I \iff I \subseteq ann_R(M) := \{r \in R : rm = 0 \ \forall m \in M\}.$$

Pruebe que $F_\pi\left(Mod\left({}^{R}\!/_{I}\right)\right) = \zeta_I$ y que $F_\pi : Mod\left({}^{R}\!/_{I}\right) \longrightarrow \zeta_I$ es un isomorfismo de categorías.

Demostración. $\boxed{a)}$ Sean $A, B \in Mod(R)$. Por el ejercicio 22 a), F es un funtor, y como $\pi(R) = R/I$, entonces por el ejercicio 22 b), F_π es fiel y pleno.

$\boxed{b)}$ Sea $A \in Mod\left({}^{R}\!/_{I}\right)$, entonces tenemos que $F_\pi(A) \in Mod(R)$. Ahora, si $m \in F_\pi(A)$, entonces para cada $x \in I$, $x \cdot m = \pi(X) * m = 0 * m = 0$, donde $\cdot$ y $*$ son las acciones definidas en A y $F_\pi(A)$ respectivamente.
Por lo tanto $I \subseteq ann_R(M)$ y $F_\pi(A) \in \zeta_I$.

Ahora, sea $A \in \zeta_I$, entonces $I \subseteq ann_R(A) := \{r \in R : rm = 0 \ \forall m \in A\}$, en particular $A \in Mod(R)$, así definimos la función $* : {}^{R}\!/_{I} \times A \longrightarrow A$ dada por $[r] * m = (r + I) * m := r \cdot m + I \cdot m$ donde $\cdot$ es la acción de A como R-módulo, y se tiene que, como $I \cdot m = \{im : i \in I, m \in A\}$ y $A \in \zeta_I$, $I \cdot m = \{0\}$.

Por lo tanto, si $r, s \in [x]$ con $r = x+k_1$ y $s = x+k_2$, entonces $r*m = s*m$, en particular $[r] * m = r \cdot m \ \forall r \in R$, es decir, $*$ es una acción de A (bien definida) como ${}^{R}\!/_{I}$ -módulo, es un R-módulo y $[r] * m = r \cdot m \ \forall r \in R$, es decir, $A \in F_\pi\left(Mod\left({}^{R}\!/_{I}\right)\right)$. Y en consecuencia $Mod\left({}^{R}\!/_{I}\right) = \zeta_I$

Con esto podemos ver que $F_\pi : Mod\left({}^{R}\!\diagup_{I}\right) \longrightarrow \zeta_I$ es funtor, y más aun, definiendo $G_\pi : \zeta_I \longrightarrow Mod\left({}^{R}\!\diagup_{I}\right)$ dado por $G_\pi(M) = M$ para cada $M \in \zeta_I$ y $G_\pi(f)([r] *_M m) = [r] *_N f(m)$ para cada $f \in Hom(M,N)$ donde $*$ es la acción a izquierda de M como ${}^{R}\!\diagup_{I}$ -módulo, es un funtor pues $G_\pi(1_M)([r]*_M m) = [r]*_M m = 1_M([r]*_M m)$ y para $f \in Hom_R(M,N), g \in Hom_R(N,L)$

$$\begin{aligned} G_\pi(gf)([r] *_M m) &= [r] *_L gf(m) = G_\pi(g)\left([r] *_N f(m)\right) \\ &= \left(G_\pi(g) \circ G_\pi(f)\right)([r] *_M m). \end{aligned}$$

Así $F_\pi \circ G_\pi(A) = A = G_\pi \circ F_\pi(A) \quad \forall A \in Mod\left({}^{R}\!\diagup_{I}\right) = \zeta_I$, y cumple las siguientes condiciones

i) $F_\pi \circ G_\pi(1_A) = F_\pi(1_A) = 1_A = G_\pi(1_A) = G_\pi \circ F_\pi(1_A)$.

ii) Considerando a $\cdot$ y $*$ como las acciones a izquierda como R -módulo y ${}^{R}\!\diagup_{I}$ -módulo respectivamente. Para cualquier $r \in R, m \in M$, $f \in Hom_R(M,N)$ y $g \in Hom_{{}^{R}\!\diagup_{I}}(M,N)$, se tiene lo siguiente.

$$(F\pi \circ G_\pi(f))\,(r\cdot_M m) = [r]*_N G_\pi(f)(m) = [r]*_N f(m) = r\cdot_N f(m) = f(r\cdot_M m).$$

$$(G\pi \circ F_\pi(g))\,([r]*_M m) = r\cdot_N F_\pi(g)(m) = r\cdot_N g(m) = [r]*_N g(m) = g([r]*_M m).$$

Por lo tanto $F\pi \circ G_\pi(f) = 1_{\zeta_I}$ y $G\pi \circ F_\pi(g) = 1_{Mod\left({}^{R}\!\diagup_{I}\right)}$, es decir, F_π es un isomorfismo de categorías.

$\square$

Ej 24.

Ej 25.

Ej 26. Sea R un anillo y $e^2 = e \in R$, un idempotente en R.

a) Pruebe que la estructura de anillo en R induce, de manera natural, una estructura de anillo en $eRe := \{ere : r \in R\}$. ¿Es eRe un subanilo de R?

b) Para cada $M \in Mod(R)$, pruebe que la acción a izquierda $eRe \times eM \longrightarrow eM, \quad (ere, em) \mapsto erem$ induce una estructura de eRe-módulo a izquierda en eM.

c) Pruebe que la correspondencia $m_e : Mod(R) \longrightarrow Mod(eRe)$, dada por $\left(M \xrightarrow{f} N\right) \longmapsto \left(eM \xrightarrow{f|_{eM}} eN\right)$, es funtorial.

Demostración. $\boxed{a)}$ Como R es anillo, se tienen los siguientes resultados: $\forall a, b \in R$

$$eae - ebe = e(ae - be) = e(a-b)e \in eRe$$

(por lo que eRe es subgrupo abeliano bajo la suma),

$$(eae)(ebe) = eae^2be = e(aeb)e \in eRe$$

y

$$e(eae) = e^2ae = eae = eae^2 = (eae)e.$$

Por lo tanto R es un anillo con e su inverso, y por esto mismo no puede ser subanillo de R exepto en el caso en que $e = 1_R$.

$\boxed{b)}$ Observemos que $\forall a \in eM$ y $\forall s \in eRe$.

$$a = em \quad \text{y} \quad s = ere \quad \text{para alguna} \quad m \in M \quad \text{y} \quad r \in R,$$

así, llamando $*$ a la acción que definida como $(ere, em) \mapsto erem$, entonces

$$s * a = (ere)(em) = erem = ere^2m = (ere)(em).$$

Por lo que

$$\boxed{i)}\ \begin{aligned}(er_1e + er_2e) * (em) &= (er_1e + er_2e)(em)\\ &= er_1eem + er_2eem\\ &= (er_1e) * (em) + (er_2e) * (em).\end{aligned}$$

$$\boxed{ii)}\ \begin{aligned}(ere) * (em_1 + em_2) &= (ere)(em_1 + em_2)\\ &= ereem_1 + ereem_2\\ &= (ere) * (em_1) + (ere) * (em_2).\end{aligned}$$

$$\boxed{iii)}\ 1_{eRe} * (em) = e(em) = e^2m = em.$$

$$\boxed{iv)}\ [(er_1e)(er_2e)] * (em) = [(er_1e)(er_2e)](em) = er_1eer_2eem$$

por otro lado

$$(er_1e) * [(er_2e) * (em)] = (er_1e) * (er_2eem) = er_1eer_2eem.$$

Así $*$ es una acción de módulos.

$\boxed{c)}$ Para que la correspondencia sea funtorial debe preservar identidades y composición de morfismos, es decir:

$\boxed{i)}$ $m_e(1_M) = 1_{me(M)}$.

$\boxed{ii)}$ Si $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L$, se tiene que $m_e(gf) = m_e(g) \circ m_e(f)$.

Sea $m \in M$ entonces

$\boxed{i)}$

$m_e(1_M)(em) = 1_M|_{eM}(em) = em$, entonces $m_e(1_M) = 1_{e_m(M)} = 1_{eM}$.

$\boxed{ii)}$

$$\begin{aligned} m_e(gf)(em) &= (gf)|_{eM}(em) = gf(em) = g(f(em)) = g(f|_{eM}(em)) \\ &= g(f|_{eM}(em)) = g|_{eM}(f|_{eM}(em)) = (g|_{eM} \circ f|_{eM})(em). \end{aligned}$$

$\square$