Lista 2

Definición 1. Sean R y S anillos. Decimos que un grupo abeliano, M, es un R-derecho y S-derecho bimódulo si

i) $M \in \mathrm{Mod}_R \cap \mathrm{Mod}_S$;

ii) $(mr)s = (ms)r$, $\forall\ r \in R$, $\forall\ s \in S$ y $\forall\ m \in M$.

En tal caso denotamos a M como M_{R-S}.

Ej 12. Sea $M \in {}_R\mathrm{Mod} \cap {}_S\mathrm{Mod}$. Entonces $M \in {}_{R-S}\mathrm{Mod}$ si y sólo si $M \in {}_R\mathrm{Mod}_{S^{op}}$.

Demostración. Como $M \in {}_R\mathrm{Mod} \cap {}_S\mathrm{Mod}$ y, por el Ej. 8, $M \in \mathrm{Mod}_{S^{op}}$, entonces $M \in {}_R\mathrm{Mod} \cap \mathrm{Mod}_{M^{op}}$.
Sean $r \in R$, $s \in S$ y $m \in M$. Dado que, ver Ej 8, $sm = ms^{op}$ entonces

$$\begin{aligned} r(sm) = s(rm) &\iff r(ms^{op}) = (rm)s^{op} \\ \therefore\ M \in {}_{R-S}\mathrm{Mod} &\iff M \in {}_R\mathrm{Mod}_{S^{op}}. \end{aligned}$$

□

Ej 13.

Ej 14.

Definición 2. Sean $M \in {}_R\mathrm{Mod}$ y $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de R-submódulos de M. Definimos la suma de la familia $\{X_i\}_{i\in I}$ como

$$\sum_{i\in I} X_i := \left\langle \bigcup_{i\in I} X_i \right\rangle_R .$$

Ej 15. Sean $M \in {}_R\mathrm{Mod}$ y $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de R-submódulos de M. Entonces

(a)

$$\sum_{i\in I} X_i = \begin{cases} \{0\} & , I = \varnothing \\ \left\{ \sum_{j\in\{i_1,\dots,i_n\}\subseteq I} x_j \,\middle|\, x_j \in X_j,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\} & , I \neq \varnothing \end{cases}$$

(b) $\{\mathscr{L}(M), \leq\}$ es un reticulado completo. Más aún, si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia no vacía de R-submódulos de M,

$$sup\{X_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} X_i,$$
$$inf\{X_i\}_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} X_i.$$

Demostración. Verifiquemos primeramente el siguiente lema:

Lema 1. Sea $M \in {}_R\text{Mod}$. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{L}(M)$ entonces $\bigcap \mathcal{A} \in \mathscr{L}(M)$.

Demostración. Notemos que

$$\begin{aligned}
&0 + 0 = 0; \\
&r \bullet 0 = r \bullet (0 + 0) = r \bullet 0 + r \bullet 0 \\
&\qquad \implies r \bullet 0 = 0, \; \forall\, r \in R. \\
&\implies \{0\} \in \mathscr{L}(M).
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
0_R \bullet x &= (0_R + 0_R) \bullet x = 0_R \bullet x + 0_R \bullet x \\
&\implies 0_R \bullet x = 0, \; \forall\, x \in M.
\end{aligned}$$

Por lo anterior, y dado que si $X \in \mathscr{L}(M)$ entonces $X \neq \varnothing$, se tiene que

$$\{0\} \subseteq X, \; \forall\, X \in \mathscr{L}(M).$$

Con lo cual $\bigcap \mathcal{A} \neq \varnothing$, pues $\{0\} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$. Sean $r \in R,\; a, b \in \bigcap \mathcal{A}$ y $A \in \mathcal{A}$. Como $A \leq M$

$$\begin{aligned}
&ra, a + b \in A \\
\implies &ra, a + b \in A, \forall\, A \in \mathcal{A} \\
\implies &ra, a + b \in A, \forall\, \bigcap \mathcal{A} \\
&\qquad\qquad \implies \bigcap \mathcal{A} \in \mathscr{L}(M).
\end{aligned}$$

$\square$

Por el lema anterior el submódulo generado por un conjunto $A \supseteq X$ está bien definido y, más aún, es el mínimo submódulo de M, con respecto a $\subseteq$, que contiene a A. $\boxed{\text{(a)}}$ Supongamos que $I = \varnothing$, entonces $\bigcup_{i\in I} X_i = \varnothing$, y así

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} X_i &= \bigcap \{X \in \mathscr{L}(M) \mid \varnothing \subseteq X\} \\
&= \bigcap \mathscr{L}(M).
\end{aligned}$$

Del lema se tiene que $0 \in X,\ \forall\ X \in \mathscr{L}(M)$ y que $\{0\} \in \mathscr{L}(M)$, con lo cual

$$\{0\} \subseteq \bigcap_{X \in \mathscr{L}(M)} X = \bigcap \mathscr{L}(M) \subseteq \{0\}$$
$$\therefore\ \sum_{i \in I} X_i = \{0\}\,.$$

Supongamos ahora que $I \neq \varnothing$. Si

$$S := \left\{ \sum_{j \in \{i_1,\ldots,i_n\} \subseteq I} x_j \,\middle|\, x_j \in X_j,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

afirmamos que $S \in \mathscr{L}(M)$. En efecto:
Como $I \neq \varnothing$ y $X_i \neq \varnothing$, $\forall\ i \in I$, entonces $S \neq \varnothing$. Sean $r \in R$ y $a, b \in S$, luego $\exists\ n, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} a &= \sum_{j \in \{i_1,\ldots,i_n\}} x_j \\ b &= \sum_{j \in \{k_1,\ldots,k_m\}} y_j. \end{aligned}$$

En caso que $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{k_1, \ldots, k_n\}$

$$a + b = \sum_{j \in \{i_1,\ldots,i_n\}} (x_j + y_j)$$

Como $X_j \leq M$, $x_j + y_j \in X_j$, $\forall\ j \in \{i_1, \ldots, i_n\}$; luego $a + b \in S$. Si ahora $\{i_1, \ldots, i_n\} \cap \{k_1, \ldots, k_n\} = \varnothing$ consideremos

$$\begin{aligned} l_r &:= i_r,\ \forall r \in [1, n] \\ l_{n+r} &:= k_r,\ \forall r \in [1, m]. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} a + b &= \sum_{j \in \{l_1,\ldots,l_{n+m}\}} z_j \\ &\implies a + b \in S. \end{aligned}$$

Finalmente, reetiquetando de ser necesario, si

$$\begin{aligned} A &:= \{i_1, \ldots, i_n\} \\ B &:= \{k_1, \ldots, k_m\} \\ D &:= \{i_1, \ldots, i_n\} \cap \{k_1, \ldots, k_n\} \\ E &:= \{i_1, \ldots, i_n\} \cup \{k_1, \ldots, k_n\} = \{l_1, \ldots, l_r, l_{r+1}, \ldots, l_t\}\,, \end{aligned}$$

con $|D| = r > 0$, $|E \setminus D| = t > 0$, entonces

$$\begin{aligned} a + b &= \sum_{j \in D} (x_j + y_j) + \sum_{j \in A \setminus D} x_j + \sum_{j \in B \setminus D} y_j \\ &= \sum_{j \in E} z_j \\ &\implies a + b \in S. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$r \bullet a = r \bullet \sum_{j \in A} x_j = \sum_{j \in A} r \bullet x_j.$$

De modo que $r \bullet a \in S$, pues $A \subseteq I$ es finito y, como $X_j \leq M$, $r \bullet x_j \in X_j$, $\forall\ j \in A$; y por lo tanto $S \leq M$.
Como $\{i\} \subseteq I$, $\forall\ i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} X_i \subseteq S$. De modo que

$$\sum_{i \in I} X_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} X_i \right\rangle_R \subseteq S.$$

Ahora si $Y \leq M$ es tal que $Y \supseteq \bigcup_{i \in I} X_i$, $J := \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ y $a_j \in X_j \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$, $\forall\ j \in J$, entonces

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in J} a_j \in Y \\ &\implies S \subseteq Y,\ \forall\ Y \in \mathscr{L}(M) \text{ tal que } Y \supseteq \bigcup_{i \in I} X_i \\ &\implies S \subseteq \left\langle \bigcup_{i \in I} X_i \right\rangle_R = \sum_{i \in I} X_i \\ &\qquad \therefore\ S = \sum_{i \in I} X_i. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(b)}}$ El par $(\mathscr{L}(M), \leq)$ es un CPO puesto que la relación $\subseteq$ es un orden parcial.
Sea $C \leq M$ cota superior de S. Entonces $X_i \leq C$, $\forall\ i \in I$; luego $C \subseteq \bigcup_{i \in I} X_i$. Dado $\sum_{i \in I} X_i$ es el mínimo submódulo, con respecto a $\subseteq$, que contiene a $\bigcup_{i \in I} X_i$ se tiene que $\sum_{i \in I} X_i \leq C$ y por lo tanto $sup(S) = \sum_{i \in I} X_i$.
Sea $C \leq M$ cota inferior de S. Entonces $C \leq X_i$, $\forall\ i \in I$; luego $C \supseteq \bigcap_{i \in I} X_i$. y así $\bigcap_{i \in I} X_i \leq C$. Por lo tanto $inf(S) = \bigcap_{i \in I} X_i$.

$$\therefore\ (\mathscr{L}(M), \leq) \text{ es un reticulado completo.}$$

$\square$

Ej 16.

Ej 17.

Ej 18. Sea $M \in {}_R\text{Mod}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) M es finitamente generado.

(b) $\exists\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $f : \mathbb{R}^n \to M$ epimorfismo de R-módulos.

Demostración. Verifiquemos primero el siguiente lema:

Lema 2. Sea $M \in {}_R\text{Mod}$. Si $X \subseteq M$ entonces

$$\langle X \rangle_R = \begin{cases} \{0\} & , X = \varnothing \\ \{\sum_{i=1}^n r_i x_i \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,,\; r_i \in R,\; x_i \in X \;\forall\; i \in [1,n]\} & , X \neq \varnothing \end{cases}$$

Demostración. El caso $X = \varnothing$ se verificó en el Ej. 15(a) (en el caso $I = \varnothing$).
Supongamos que $X \neq \varnothing$.
Sea $S := \{\sum_{i=1}^n r_i x_i \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,,\; r_i \in R,\; x_i \in X \;\forall\; i \in [1,n]\}$. $S \neq \varnothing$, pues $R \neq \varnothing \neq X$ y $S \subseteq M$, pues $M \in {}_R\text{Mod}$.
Sean $a, b \in S$. Existen $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $r_i, s_i \in R$, $x_i, y_i \in X$ tales que $a = \sum_{i=1}^n r_i x_i$ y $b = \sum_{i=1}^m s_i y_i$ y

$$t_i = \begin{cases} r_i & , i \in [1,n] \\ s_{i-n} & , i \in [n+1, n+m] \end{cases}$$
$$z_i = \begin{cases} r_i & , i \in [1,n] \\ s_{i-n} & , i \in [n+1, n+m] \end{cases} .$$

Entonces

$$\begin{aligned} a + b &= \sum_{i=1}^n r_i x_i + \sum_{i=1}^m s_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n+m} t_i z_i \\ &\implies a + b \in S. \end{aligned}$$

Sea $r \in R$. Entonces

$$ra = r\left(\sum_{i=1}^n r_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n (r r_i)\, x_i$$

Si $u_i := r r_i$ entonces

$$ra = \sum_{i=1}^n u_i x_i \in S$$
$$\implies S \in \mathscr{L}(M).$$

Además, si $x \in X$ entonces $x = 1_R x \in S$, con lo cual $X \subseteq S$ y por lo tanto $\langle X \rangle_R \subseteq S$.
Por otro lado, si $Y \leq M$, $X \subseteq Y$, $r_i \in R, x_i \in X \ \forall \ i \in [1,n], n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in Y$$

$$\begin{aligned} &\implies S \subseteq Y \\ &\implies S \subseteq \langle X \rangle_R \\ \therefore S &= \langle X \rangle_R . \end{aligned}$$

$\square$

$\boxed{\implies}$ Existe $X \subseteq M$ finito tal que $M = \langle X \rangle_R$. Si $X = \varnothing$ entonces $M = \{0\}$ y en tal caso la aplicación

$$\begin{aligned} f : R &\to M \\ r &\mapsto 0 \end{aligned}$$

es un epimorfismo de R-módulos a izquierda.
Supongamos ahora que $X \neq \varnothing$. Entonces $\exists \ m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f : R^m &\to M \\ (r_i)_{i=1}^m &\mapsto \sum_{i=1}^{m} r_i x_i . \end{aligned}$$

Sean $r \in R$ y $(s_i)_{i=1}^m, (t_i)_{i=1}^m \in R^m$

$$\begin{aligned} f\left(r\left((s_i)_{i=1}^m + (t_i)_{i=1}^m\right)\right) = f\left((rs_i + rt_i)_{i=1}^m\right) &= \sum_{i=1}^{m} (rs_i + rt_i)\, x_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (rs_i) x_i + \sum_{i=1}^{m} (rt_i) x_i = r\left(\sum_{i=1}^{m} s_i x_i + \sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \\ &= r\left(f\left((s_i)_{i=1}^n\right) + f\left((t_i)_{i=1}^n\right)\right) \\ \implies f &\text{ es un morfismo de } R \text{ módulos a izquierda.} \end{aligned}$$

Notemos que por el Lema 2, dado que $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ y, $\forall \ m \in M$, $0_R m = 0$, se tiene que

$$\langle X \rangle_R = \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i x_i \,\middle|\, r_i \in R \ \forall \ i \in [1,n] \right\}.$$

Sea $y \in M = \langle X \rangle_R$. Por la observación anterior $\exists \ r_i \in R$ tales que $y = \sum_{i=1}^m x_i$, con lo cual, si $x := (r_i)_{i=1}^m$, $y = f(x)$. Por lo tanto f es un epimorfismo de R-módulos a izquierda.
$\boxed{\impliedby}$ Verifiquemos primero los siguientes resultados:

Lema 3. Sea $f : M \to N$ un morfismo de R-módulos a izquierda. Entonces $f(A) \in \mathscr{L}(N), \forall\ A \in \mathscr{L}(M)$.

Demostración. Sea $A \in \mathscr{L}(M)$. Como $A \neq \varnothing$ entonces $f(A) \neq \varnothing$, además $f(A) \subseteq M$. Sean $r \in R$ y $x, y \in f(A)$. Existen $a, b \in A$ tales que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Así

$$\begin{aligned} rx + y = rf(x) + f(b) = f(rx + b) & \qquad f \in Hom_R(M, N) \\ f(rx + b) \in f(A) & \qquad A \in \mathscr{L}(M) \\ \Longrightarrow f(A) \in \mathscr{L}(N). & \end{aligned}$$

□

Lema 4. Sea $f : M \to N$ un morfismo de R-módulos a izquierda. Entonces $f(\langle A \rangle_R) = \langle f(A) \rangle_R, \forall\ A \subseteq M$.

Demostración. Sea $A \subseteq M$. Como $A \subseteq \langle A \rangle_R$ entonces $f(A) \subseteq f(\langle A \rangle_R)$, de modo que, por el Lema 3, $f(\langle A \rangle_R)$ es un R-submódulo de N que contiene a $f(A)$ y por lo tanto $\langle f(A) \rangle_R \subseteq f(\langle A \rangle_R)$.
Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y, $\forall\ i \in [1, n], r_i \in R$ y $x_i \in A$. Así, como $f \in Hom_R(M, N)$,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i) \in \langle f(A) \rangle_R \\ \Longrightarrow\ f(\langle A \rangle_R) \subseteq \langle f(A) \rangle_R \\ \therefore f(\langle A \rangle_R) = \langle f(A) \rangle_R. \end{aligned}$$

□

Lema 5. Sea $f : M \to N$ un epimorfismo de R-módulos a izquierda. Si $M \in {}_R\mathrm{mod}$ entonces $N \in {}_R\mathrm{mod}$.

Demostración. Como $M \in {}_R\mathrm{mod}\ \exists\ X \subseteq M$ finito tal que $M = \langle X \rangle_R$ y así

$$\begin{aligned} N &= f(M) & \qquad & f \text{ es sobre} \\ &= f(\langle X \rangle_R) = \langle f(X) \rangle_R & \qquad & \text{Lema 4} \end{aligned}$$

Y como $|f(X)| \leq |X|$ entonces $f(X)$ es finito. Por lo tanto $N \in {}_R\mathrm{mod}$.

□

Así, como $\exists\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $f : R^n \to M$ epimorfismo de R-módulos a izquierda, por el Lema 5 basta verificar que $R^n \in {}_R\mathrm{mod}$.
Sean $e_j := \left(u_i^j\right)_{i=1}^{n} \in R^n$, donde

$$u_i^j = \begin{cases} 0_R & , i \neq j \\ 1_R & , i = j \end{cases},$$

$\forall\ j \in [1,n]$, y $E := \{e_1, \ldots, e_n\}$. Así si $(r_i)_{i=1}^n \in R^n$, entonces $(r_i)_{i=1}^n = \sum_{i=1}^n r_i e_i$, con lo cual $R^n = \langle E \rangle_R$. Por lo tanto $R^n \in {}_R\text{mod}$.

$\square$

Ej 19.

Ej 20.

Ej 21. Sean R y S anillos.

(a) Sean

$$\begin{aligned} Obj\,(\mathcal{C}) &:= \text{Mod}_{R-S}, \\ Hom\,(\mathcal{C}) &:= \bigcup_{(M,N)\in Obj(\mathcal{C})^2} Hom\,(M_{R-S}, N_{R-S})\,, \end{aligned}$$

con

$$Hom\,(M_{R-S}, N_{R-S}) := Hom_R\,(M_R, N_R) \cap Hom_S\,(M_S, N_S)\,,$$

y $\circ$ la composición usual de funciones.
Entonces la clase Mod_{R-S} tiene estructura de categoría por medio de la tercia $(Obj\,(\mathcal{C})\,, Hom\,(\mathcal{C})\,, \circ)$.

(b) ${}_R\text{Mod}_S \simeq \text{Mod}_{R^{op}-S}$, ${}_R\text{Mod}_S \simeq {}_{R-S^{op}}\text{Mod}$ y ${}_{R-S}\text{Mod} \simeq {}_R\text{Mod}_{S^{op}}$.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Si $M, N \in \text{Mod}_{R-S}$, entonces M y N son conjuntos, con lo cual

$$N^M := \{f : M \to N \mid f \text{ es una función}\}$$

es un conjunto y así $Hom_R\,(M_R, N_R)$ es un conjunto, pues

$$Hom_R\,(M_R, N_R) \subseteq B^A.$$

Similarmente se encuentra que $Hom_S\,(M_S, N_S)$ es un conjunto, y así $Hom\,(M_{R-S}, N_{R-S})$ es un conjunto $\forall\ M, N \in \text{Mod}_{R-S}$. Además por definición $Hom\,(\mathcal{C}) = \bigcup_{(M,N)\in Obj(\mathcal{C})^2} Hom\,(M_{R-S}, N_{R-S})$, con lo cual se satisface (P1).
Recordemos que, si W, X, Y, Z son conjuntos y $f : W \to X, g : Y \to Z$ son funciones entonces $f = g$ si y sólo si $W = Y$, $X = Z$ y $f(w) = g(w)\ \forall\ w \in W$. Con lo cual si $(M, N) \neq (O, P)$ entonces $N^M \cap P^O = \varnothing$ y por lo tanto $Hom\,(M_{R-S}, N_{R-S}) \cap Hom\,(O_{R-S}, P_{R-S}) = \varnothing$. Por lo tanto se satisface (P2).
Finalmente para verificar que (P3) se satisface, dado que la composición usual de funciones es asociativa y claramente $Id_X \in Hom\,(M_{R-S}, M_{R-S})$ $\forall\ M \in \text{Mod}_{R-S}$, basta probar que si $f \in Hom_R\,(N, O)\,, g \in Hom_R\,(M, N)$ entonces $f \circ g \in Hom_R\,(M, O)$; ya que en tal caso se tiene que la composición usual de funciones se restringe a una función asociativa

$$\circ : Hom\,(N_{R-S}, O_{R-S}) \times Hom\,(M_{R-S}, N_{R-S}) \to Hom\,(M_{R-S}, O_{R-S})$$

que admite identidades.
Sean $f \in Hom_R(N, O)]$ y $g \in Hom_R(M, N)$. En partícular $f : N \to O$ y $g : M \to N$ son morfismos de grupo abelianos, con lo cual $f \circ g$ es un morfismo de grupos abelianos. Sean $r \in R$ y $m \in M$, así

$$\begin{aligned} f \circ g(rm) &= f(g(rm)) = f(rg(m)) = rf(g(m)) \\ &= r(f \circ g(m)). \\ \Longrightarrow\ & f \circ g \in Hom_R(M, O). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(b)}}$ Recordemos que, por el Ej. 8, $(M, \bullet) \in {}_RM$ si y sólo si $(M, \bullet^{op}) \in M_{R^{op}}$ (en adelante no haremos mención explícita de $\bullet$ y $\bullet^{op}$). Por lo cual, si $r \in R, s \in S$ y $m \in M$,

$$r(ms) = (rm)s \iff (ms)r^{op} = (mr^{op})s \tag{$*$}$$

y así

$$M \in {}_R\mathrm{Mod}_S \iff M \in \mathrm{Mod}_{R^{op}-S}. \tag{I}$$

Más aún, si $f : M \to N$ es un morfismo de grupos abelianos, entonces

$$\begin{aligned} f(r(ms)) = r(f(m)s) \iff & f((ms)r^{op}) = (f(m)s)\, r^{op}, \\ & \forall\ r \in R, \forall\ s \in S, \forall\ m \in M. \end{aligned}$$

De modo que, considerando el caso partícular $s = 1_S$, se tiene que

$$\begin{aligned} f \in Hom_R({}_RM, {}_RN) &\iff f \in Hom_{R^{op}}(M_{R^{op}}, N_{R^{op}}) \\ \therefore\ f \in Hom({}_RM_S, {}_RN_S) &\iff f \in Hom(M_{R^{op}-S}, N_{R^{op}-S}). \end{aligned} \tag{II}$$

De (I) y (II) se sigue que la correspondencia de categorías

$$\begin{aligned} {}_R\mathrm{Mod}_S &\xrightarrow{\quad F_1 \quad} \mathrm{Mod}_{R^{op}-S} \\ {}_RM_S \xrightarrow{f} {}_RN_S &\longmapsto M_{R^{op}-S} \xrightarrow{f} N_{R^{op}-S} \end{aligned}$$

está bien definida y, más aún, por construcción $F(Id_M) = Id_{F(M)}$, $\forall M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$.
Sean $M \xrightarrow{f} N, N \xrightarrow{g} O \in {}_R\mathrm{Mod}_S$, entonces

$$\begin{gathered} F(g \circ f) = g \circ f = F(g) \circ F(f) \\ \therefore\ F \text{ es un funtor.} \end{gathered}$$

Empleando que $(R^{op})^{op} = R$ en conjunto a los puntos $(*)$, (I) y (II), se tiene que la correspondencia de categorías

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}_{R^{op}-S} &\xrightarrow{\quad G_1 \quad} {}_R\mathrm{Mod}_S \\ M_{R^{op}-S} \xrightarrow{g} N_{R^{op}-S} &\longmapsto {}_RM_S \xrightarrow{g} {}_RN_S \end{aligned}$$

es un funtor que satisface $G_1F_1 = 1_{{}_R\mathrm{Mod}_S}$ y $F_1G_1 = 1_{\mathrm{Mod}_{R^{op}-S}}$, y por lo tanto ${}_R\mathrm{Mod}_S \simeq \mathrm{Mod}_{R^{op}-S}$.
Aplicando ahora el Ej. 8 al anillo S, por medio de un procedimiento análogo a lo previamente desarrollado, se verifica que $M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$ si y sólo si $M \in {}_{R-S^{op}}\mathrm{Mod}$, y que $f \in Hom\,({}_RM_S, {}_RN_S)$ si y sólo si $f \in Hom\,({}_{R^{op}-S}M, {}_{R^{op}-S}N)$. De modo que

$$\begin{aligned} {}_R\mathrm{Mod}_S &\xrightarrow{\quad F_2 \quad} {}_{R-S^{op}}\mathrm{Mod} \\ {}_RM_S \xrightarrow{f} {}_RN_S &\longmapsto {}_{R-S^{op}}M \xrightarrow{f} {}_{R-S^{op}}N \end{aligned}$$

es un isomorfismo de categorías, con inversa

$$\begin{aligned} {}_{R-S^{op}}\mathrm{Mod} &\xrightarrow{\quad G_2 \quad} {}_R\mathrm{Mod}_S \\ {}_{R-S^{op}}M \xrightarrow{g} {}_{R-S^{op}}N &\longmapsto {}_RM_S \xrightarrow{g} {}_RN_S. \end{aligned}$$

Finalmente empleando, el Ej. 12 y un procedimiento análogo al previamente desarrollado se verifica que $M \in {}_{R-S}\mathrm{Mod}$ si y sólo si $M \in {}_R\mathrm{Mod}_{S^{op}}$, y que $f \in Hom\,({}_{R-S}M, {}_{R-S}N)$ si y sólo si $f \in Hom\,({}_RM_{S^{op}}, {}_RN_{S^{op}})$; y así

$$\begin{aligned} {}_{R-S}\mathrm{Mod} &\xrightarrow{\quad F_3 \quad} {}_R\mathrm{Mod}_{S^{op}} \\ {}_{R-S}M \xrightarrow{f} {}_{R-S}N &\longmapsto {}_RM_{S^{op}} \xrightarrow{f} {}_RN_{S^{op}} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de categorías, con inversa

$$\begin{aligned} {}_{R-S^{op}}\mathrm{Mod} &\xrightarrow{\quad G_3 \quad} {}_R\mathrm{Mod}_S \\ {}_{R-S^{op}}M \xrightarrow{g} {}_{R-S^{op}}N &\longmapsto {}_RM_S \xrightarrow{g} {}_RN_S. \end{aligned}$$

□

Ej 22.

Ej 23.

Ej 24. Sean R, S y T anillos.

(a) Sean $M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$, $N \in {}_R\mathrm{Mod}_T$, $H := Hom_R\,({}_RM_S, {}_RN_T)$ y las siguientes aplicaciones, denotadas por medio del mismo simbolo para simplificar la notación,

$$\begin{aligned} \bullet : S \times H &\to H \\ (s, f) &\mapsto s \bullet f, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} s \bullet f : M &\to N \\ x &\mapsto f(xs); \\ \bullet : H \times T &\to H \\ (f,t) &\mapsto f \bullet t, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} f \bullet t : M &\to N \\ x &\mapsto f(x)t. \end{aligned}$$

A través de las aplicaciones anteriores $H \in {}_S\mathrm{Mod}_T$.

(b) Sean $M \in {}_S\mathrm{Mod}_R$, $N \in {}_T\mathrm{Mod}_R$, $H' := Hom_R\left({}_SM_R, {}_TN_R\right)$ y las siguientes aplicaciones, denotadas por medio del mismo simbolo para simplificar la notación,

$$\begin{aligned} \bullet : T \times H &\to H \\ (t,f) &\mapsto t \bullet f, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} t \bullet f : M &\to N \\ x &\mapsto tf(x); \\ \bullet : H \times S &\to H \\ (f,s) &\mapsto f \bullet s, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} f \bullet s : M &\to N \\ x &\mapsto f(sx). \end{aligned}$$

A través de las aplicaciones anteriores $H \in {}_T\mathrm{Mod}_S$.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Notemos primeramente que $G := Hom\left(M, N\right)$ es un grupo con la suma usual de funciones, pues M y N lo son con sus respectivas operaciones, y que, si $f, g \in H$, $r \in R$ y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned} \left(f-g\right)\left(rm\right) &= f(rm) - g(rm) = rf(m) - rg(m) = r\left(f(m) - g(m)\right) \\ &= r\left(\left(f-g\right)\left(m\right)\right). \\ &\implies f - g \in H \\ &\implies H \leq G. \end{aligned}$$

Así, en partícular, H es un grupo abeliano. Verifiquemos ahora que por medio de la primera aplicación $H \in {}_S\mathrm{Mod}$. Sean $f, g \in H, s, s' \in S$ y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
((s+s') \bullet f)(m) &= f(m(s+s')) & \\
&= f(ms+ms') & M \in \mathrm{Mod}_S \\
&= f(ms) + f(ms') & f \in Hom(M,N) \\
&= s \bullet f(m) + s' \bullet f(m) & \\
&= (s \bullet f + s' \bullet f)(m). & \\
\implies (s+s') \bullet f &= s \bullet f + s' \bullet f. & \\
(s \bullet (f+g))(m) &= (f+g)(ms) & \\
&= f(ms) + g(ms) & \\
&= s \bullet f(m) + s \bullet g(m) & \\
&= (s \bullet f + s \bullet g)(m). & \\
\implies s \bullet (f+g) &= s \bullet f + s \bullet g. & \\
(s \bullet (s' \bullet f))(m) &= (s' \bullet f)\{ms\} & \\
&= f((ms)s') & \\
&= f(m(ss')) & M \in \mathrm{Mod}_S \\
&= ((ss') \bullet f)(m). & \\
\implies s \bullet (s' \bullet f) &= (ss') \bullet f. & \\
(1_S \bullet f)(m) &= f(m1_s) & \\
&= f(m) & M \in \mathrm{Mod}_S. \\
\implies 1_S \bullet f &= f. & \\
&\therefore\ H \in {}_S\mathrm{Mod}. &
\end{aligned}$$

Verifiquemos ahora que por medio de la segunda aplicación $H \in \mathrm{Mod}_T$.

Sean $f, g \in H, t, t' \in S$ y $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
((f+g)\bullet t)(m) &= ((f+g)(m))\,t \\
&= (f(m)+g(m))\,t \\
&= f(m)t + g(m)t && N \in \mathrm{Mod}_T \\
&= f\bullet t(m) + g\bullet t(m) \\
&= ((f+g)\bullet t)(m). \\
\implies \ (f+g)\bullet t &= (f+g)\bullet t. \\
(f\bullet(t+t'))(m) &= f(m)\,(t+t') \\
&= f(m)t + f(m)t' \\
&= f\bullet t(m) + f\bullet t'(m) \\
&= (f\bullet t + f\bullet t')\,(m). \\
\implies \ f\bullet(t+t') &= f\bullet t + f\bullet t'. \\
((f\bullet t)\bullet t')(m) &= ((f\bullet t)(m))\,t' \\
&= (f(m)t)\,t' \\
&= f(m)\,(tt') && N \in \mathrm{Mod}_T \\
&= (f\bullet(tt'))(m). \\
\implies \ (f\bullet t)\bullet t' &= f\bullet(tt')\,. \\
(f\bullet 1_T)(m) &= f(m)1_T \\
&= f(m) && N \in \mathrm{Mod}_T. \\
\implies \ f\bullet 1_T &= f. \\
&\therefore \ H \in \mathrm{Mod}_T.
\end{aligned}$$

Así

$$H \in {}_S\mathrm{Mod} \cap \mathrm{Mod}_T.$$

Finalmente, notemos que

$$\begin{aligned}
((s\bullet f)\bullet t)(m) &= ((s\bullet f)(m))\,t \\
&= f(ms)t \\
&= (f\bullet t)(ms) \\
&= (s\bullet(f\bullet t))(m). \\
\implies \ (s\bullet f)\bullet t &= s\bullet(f\bullet t)\,. \\
&\therefore \ H \in {}_S\mathrm{Mod}_T.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{(b)}}$ Es análogo a lo demostrado en (a), empleando ahora las propiedades de los morfismos de R-módulos a derecha para verificar que H' es un grupo abeliano con la suma usual de funciones, y que $M \in {}_S\mathrm{Mod}, N \in {}_T\mathrm{Mod}$ para verificar que $H \in {}_T\mathrm{Mod}_S$. $\square$

Ej 25.

Ej 26.

Ej 27. Sean R y S anillos, $e \in R$ y $\epsilon \in S$ idempotentes, $M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$, $R' := eRe$ y $S' := \epsilon S \epsilon$. Entonces:

(a) existen acciones tales que $Re \in {}_R\mathrm{Mod}_{R'}$, $\epsilon S \in {}_{S'}\mathrm{Mod}_S$, $eM \in {}_{R'}\mathrm{Mod}_S$ y $M\epsilon \in {}_R\mathrm{Mod}_{S'}$;

(b) las siguientes aplicaciones son morfismos de bimódulos

(i)

$$\begin{aligned} \rho : {}_{R'}eM_S &\to Hom_R\left({}_RRe_{R'}, {}_RM_S\right) \\ em &\mapsto \rho(em), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \rho\left(em\right) : {}_RRe_{R'} &\to {}_RM_S \\ re &\mapsto (re)\, m; \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \lambda : {}_RM\epsilon_{S'} &\to Hom_S\left({}_{S'}\epsilon S_S, {}_RM_S\right) \\ m\epsilon &\mapsto \lambda(m\epsilon), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \lambda\left(m\epsilon\right) : {}_{S'}\epsilon S_S &\to {}_RM_S \\ \epsilon s &\mapsto m\epsilon s; \end{aligned}$$

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Por el Ej. 26 R' y S' son anillos. Además, notemos que $R \in {}_R\mathrm{Mod}_R$, a través de las acciones naturales inducidas por el producto en R. Así pues, si se considera $M = R = S$ y $e = \epsilon$, se tiene que $Re \in {}_R\mathrm{Mod}_{R'}$ como consecuencia de que $M\epsilon \in {}_R\mathrm{Mod}_{S'}$; similarmente $\epsilon S \in {}_{S'}\mathrm{Mod}_S$ se sigue de que $eM \in {}_{R'}\mathrm{Mod}_S$.
Sea $s \in S$. Notemos que

$$\begin{aligned} ms + (-m)s = (m - m)\, s = 0_M s = 0_M. \\ \implies -(ms) = (-m)s. \end{aligned}$$

Por lo anterior, si $ms \in Ms$ entonces $-(ms) \in Ms$. Además, si $m's \in Ms$,

$$\begin{aligned} ms + m's = (m + m')\, s \in Ms. \\ \implies Ms \leq M. \end{aligned}$$

Así, en partícular $M\epsilon$ es un grupo abeliano.
Consideremos las siguientes aplicaciones, denotadas por medio del mismo

simbolo para simplificar la notación e inducidas a partir de las acciones como R-izquierdo S-derecho bimódulo en M,

$$\begin{aligned} *: R\times M\epsilon &\to M\epsilon \\ (r, m\epsilon) &\mapsto rm\epsilon, \\ *: M\epsilon\times S' &\to M\epsilon \\ (m\epsilon, \epsilon s\epsilon) &\mapsto m\epsilon s\epsilon. \end{aligned}$$

Sean $m, m' \in M$, $r, r' \in R$. Entonces

$$\begin{aligned} (r+r') * m\epsilon &= (r+r')\, m\epsilon = (rm + r'm)\,\epsilon = rm\epsilon + r'm\epsilon \\ &= r * m\epsilon + r' * m\epsilon. \\ r * (m\epsilon + m'\epsilon) &= r * (m+m')\,\epsilon = (r\,(m+m'))\,\epsilon = rm\epsilon + rm'\epsilon \\ &= r * m\epsilon + r * m'\epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon^2 = \epsilon$

$$\begin{aligned} (rr') * (m\epsilon) &= (rr')\, m\epsilon = (r\,(r'm))\,\epsilon\epsilon = r\,(r'm\epsilon)\,\epsilon \\ &= r * (r' * m\epsilon)\,. \\ 1_R * (m\epsilon) &= (1_R m)\,\epsilon = m\epsilon. \\ &\implies M \in {}_R\mathrm{Mod}. \end{aligned}$$

Ahora, sean $s, s' \in S$. Entonces

$$\begin{aligned} m\epsilon * (\epsilon s\epsilon + \epsilon s'\epsilon) &= m\epsilon * (\epsilon\,(s+s')\,\epsilon) = (m\epsilon\,(s+s'))\,\epsilon \\ &= (m\epsilon s)\,\epsilon + (m\epsilon s')\,\epsilon = m\epsilon * \epsilon s\epsilon + m\epsilon * \epsilon s'\epsilon. \\ (m\epsilon + m'\epsilon) * \epsilon s\epsilon &= (m+m')\,\epsilon * \epsilon s\epsilon = (m+m')\,\epsilon s\epsilon \\ &= m\epsilon s\epsilon + m'\epsilon s\epsilon = m\epsilon * \epsilon s\epsilon + m'\epsilon * \epsilon s\epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon^2 = \epsilon$

$$\begin{aligned} m\epsilon * ((\epsilon s\epsilon)\,(\epsilon s'\epsilon)) &= m\epsilon * \epsilon\,(s\epsilon s')\,\epsilon = (m\epsilon\,(s\epsilon s'))\,\epsilon = ((m\epsilon s)\,\epsilon\epsilon)\, s\epsilon \\ &= (m\epsilon s\epsilon)\, s\epsilon = (m\epsilon * \epsilon s\epsilon) * \epsilon s'\epsilon. \\ (m\epsilon) * 1_{S'} &= (m\epsilon) * \epsilon = (m\epsilon)\,\epsilon = m\,(\epsilon\epsilon) \\ &= m\epsilon. \\ &\implies M \in \mathrm{Mod}_{S'}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} r * (m\epsilon * \epsilon s\epsilon) &= r * (m\epsilon s\epsilon) = r\,(m\epsilon s)\epsilon \\ &= (rm)\,\epsilon s\epsilon \qquad\qquad M \in {}_R\mathrm{Mod}_S \\ &= (rm)\,\epsilon * \epsilon s\epsilon \\ &= (r * m\epsilon) * \epsilon s\epsilon. \\ &\implies M\epsilon \in {}_R\mathrm{Mod}_{S'}. \end{aligned}$$

En forma análoga a lo desarrollado anteriormente se verifica que, a través de las aplicaciones

$$\begin{aligned} \cdot : R' \times eM &\to eM \\ (ere, em) &\mapsto erem, \\ \cdot : eM \times S &\to eM \\ (em, s) &\mapsto ems, \end{aligned}$$

$eM \in {}_{R'}\mathrm{Mod}_S$.

$\boxed{\text{(b)}}$ Sean $a, b, r \in R$. Entonces

$$\begin{aligned} \rho\,(em)\,(r\,(ae+be)) &= (r\,(ae+be))\,m = r\,((ae+be)\,m) \\ &= r\,((ae)\,m + (be)\,m) \\ &= r\,(\rho\,(em)\,(ae) + \rho\,(em)\,(be))\,. \\ &\implies \rho\,(em) \in Hom_R\,({}_RRe_{R'}, {}_RM_S)\,. \end{aligned}$$

Por lo anterior, y dado que por el Ej. 24 $Hom_R\,({}_RRe_{R'}, {}_RM_S) \in {}_{R'}\mathrm{Mod}_S$, ρ es una función bien definida. Ahora, sean $m, m' \in M$, $s \in S$ y $x \in R$ y $\bullet$ las acciones definidas en el Ej. 24(a), entonces

$$\begin{aligned} \rho\,(ere \cdot (em+em') \cdot s)\,(xe) &= \rho\,(ere \cdot e(m+m') \cdot s)\,(xe) \\ &= \rho\,(ere\,(m+m')\,s)\,(xe) \\ &= (xe)\,(re\,(m+m')\,s) \\ &= (xe)\,(rems + rem's) \\ &= (xe)\,rems + (xe)\,rem's \\ &= ((xere)\,m)\,s + ((xere)\,m')\,s \\ &= (\rho\,(em)\,(xere))\,s + (\rho\,(em')\,(xere))\,s \\ &= (\rho\,(em)\,(xe * ere))\,s + (\rho\,(em')\,(xe * ere))\,s \\ &= (ere \bullet \rho\,(em)\,(xe))\,s + (ere \bullet \rho\,(em')\,(xe))\,s \\ &= (ere \bullet \rho\,(em) \bullet s)\,(xe) + (ere \bullet \rho\,(em') \bullet s)\,(xe) \\ &= (ere \bullet \rho\,(em) \bullet s + ere \bullet \rho\,(em') \bullet s)\,(xe) \\ \implies \rho\,(ere \cdot (em+em') \cdot s) &= ere \bullet \rho\,(em) \bullet s + ere \bullet \rho\,(em') \bullet s \\ \therefore\; \rho &\in Hom\,({}_{R'}eM_S, Hom_R\,({}_RRe_{R'}, {}_RM_S))\,. \end{aligned}$$

i.e. ρ es un morfismo de R-izquierda S'-derecha bimódulos, de eM en $Hom_R\,({}_RRe_{R'}, {}_RM_S)$. En forma análoga, empleando ahora las acciones previamente definidas en conjunto a las acciones definidas en el Ej. 24(b), se verifica que λ un morfismo de R'-izquierda S-derecha bimódulos, de $M\epsilon$ en $Hom_S\,({}_{S'}Re_S, {}_RM_S)$.

$\square$