Lista 6

Arruti, Sergio, Jesús

Ej 79. Para una R-álgebra de Artin Λ, vía $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$, pruebe que:

a) Λ es un anillo artiniano.

b) $C(\Lambda)$ es un anillo conmutativo artiniano.

c) Λ es una $C(\Lambda)$-álgebra de Artin, vía la inclusión $C(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda$.

d) Λ^{op} es un R-álgebra de Artin, vía la composición de morfismo de anillos $R \longrightarrow Im(\varphi) \hookrightarrow C(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda^{op}$.

e) Para todo $M \in Mod(\Lambda)$, por cambio de anillos $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$, se tiene que $M \in {}_{\Lambda-R}Mod \cap {}_RMod_R$. Más aún, $Mod(\Lambda)$ es una subcategoría de $Mod(R)$.

Demostración. $\boxed{\text{a)}}$ En virtud de que $\Lambda \in mod(R)$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon : R^n \longrightarrow \Lambda$ un epimorfismo. Adicionalmente, como R es artiniano, tenemos que R^n es artiniano. Entonces Λ es artiniano como R-módulo.
$\therefore \Lambda$ es artiniano como anillo.

$\boxed{\text{b)}}$ Se deduce del inciso anterior, de la inclusión $C(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda$ y de que la familia de anillos artinianos es cerrada bajo subobjetos.
$\therefore C(\Lambda)$ es conmutativo artiniano.

$\boxed{\text{c)}}$ Primero, por el inciso anterior, $C(\Lambda)$ es un anillo artiniano. Además, dado que $\Lambda \in mod(R)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R^n \longrightarrow \Lambda$ es epimorfismo. También, como $Im(\varphi) \subseteq C(\Lambda)$, podemos restringirnos a $C(\Lambda)^n \longrightarrow \Lambda$ de tal manera que éste es un epimorfismo. Luego, $\Lambda \in mod(C(\Lambda))$.
$\therefore \Lambda$ es un $C(\Lambda)$-álgebra de Artin.

$\boxed{\text{d)}}$ Por la propia definición de álgebra de Artin, R es anillo artiniano. Además, como $\Lambda \in mod(R)$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon : R^n \longrightarrow \Lambda$ un epimorfismo. Este epimorfismo y la composición $R \longrightarrow Im(\varphi) \hookrightarrow C(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda^{op}$ inducen un epimorfismo $\varepsilon^{op} : R^n \longrightarrow \Lambda^{op}$.
$\therefore \Lambda^{op}$ es un álgebra de Artin.

$\boxed{\text{e)}}$ Dado que Λ es un R-álgebra de Artin vía $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$, podemos definir la acción

$$\begin{aligned} * : R \times M &\to M \\ (r, m) &\mapsto r * m = \varphi(r)\, m \end{aligned}$$

de tal forma que M es un R-módulo a izquierda. En efecto:

1.- Sean $r, s \in R$ y $m \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} (r+s) * m &= \varphi(r+s)\, m \\ &= [\varphi(r) + \varphi(s)]m \\ &= \varphi(r)\, m + \varphi(s)\, m \\ &= r * m + s * m \end{aligned}$$

2.- Sean $r \in R$ y $m, x \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} r * (m + x) &= \varphi(r)\,(m + x) \\ &= \varphi(r)\, m + \varphi(r)\, x \\ &= r * m + r * x \end{aligned}$$

3.- Sean $r, s \in R$ y $m \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} (rs) * m &= \varphi(rs)\, m \\ &= [\varphi(r)\, \varphi(s)]m \\ &= \varphi(r)\,[\varphi(s)\, m] \\ &= r * [\varphi(s)\, m] \\ &= r * (s * m) \end{aligned}$$

4.- Finalmente, sea $m \in M$. Entonces

$$1_R * m = \varphi(1_R)\, m = 1_\Lambda m = m$$

Por lo que M es un Λ-módulo a izquierda.

Por otro lado, dado que $Im\,(\varphi) \subseteq C\,(\Lambda)$, podemos definir sobre M una acción

$$\begin{aligned} * : M \times R &\to M \\ (m, r) &\mapsto m * r = \varphi(r)\, m \end{aligned}$$

Más aún, bajo esta acción, heredada por la acción de Λ, M es un R-módulo a izquierda, del cuál bastará probar la propiedad: $m * (rs) =$

$(m * r) * s,\ \forall r, s, m$. En efecto, si $r, s \in R$, $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned} m * (rs) &= \varphi(rs)\, m \\ &= \varphi(r)\, \varphi(s)\, m \\ &= \varphi(s)\, \varphi(r)\, m \\ &= [\varphi(r)\, m] * s \\ &= (m * r) * s \end{aligned}$$

Por consiguiente, $M \in {}_{\Lambda - R}Mod \cap {}_{R}Mod_{R}$.

Por último, mediante el funtor de cambio de anillos

$$F_{\varphi} : Mod(\Lambda) \longrightarrow Mod(R)$$

tenemos que todo Λ-módulo a izquierda es un R-módulo a izquierda y todo morfismo de Λ-módulos es, a su vez, un morfismo de R-módulos.
$\therefore Mod(\Lambda)$ es una subcategoría de $Mod(R)$. $\square$

Ej 80. Sea Λ una R-Álgebra de Artín y $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $Mod(\Lambda)$ (respectivamente en $mod(\Lambda)$). Pruebe que $\forall X \in Mod(\Lambda)$ (respectivamente $\forall X \in mod(\Lambda)$), se tienen las siguientes sucesiones exactas en $Mod(R)$ (respectivamente en $mod(R)$).

a)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(X, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(X, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(X, C) \longrightarrow 0.$$

b)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(C, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(B, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\Lambda}(A, X) \longrightarrow 0.$$

donde

$$f_* = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(X, f)\,, \quad f^* = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(f, X)$$
$$g_* = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(X, g) \quad \text{y} \quad g^* = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(g, X)$$

Demostración. Como Λ es una R-Álgebra de Artín, entonces por el ejercicio 79 Λ es un anillo artiniano, así $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(X, \bullet)$ es un funtor exacto covariante y $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\bullet, X)$ es un funtor exacto contravariante. Por esto se tiene que las sucesiones a) y b) son exactas en $Mod(\Lambda)$, y por 3.1.1 se tiene que para todo $J, K \in Mod(\Lambda)$, $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(J, K)$ es un R-submódulo de $\mathrm{Hom}_{R}(J, K)$. Así a) y b) son sucesiones exactas en $Mod(R)$.

Por otra parte si nuestra sucesión es exacta en $mod(\Lambda)$ y $X \in mod(\Lambda)$, por la proposición 3.1.3 y lo anterior, las sucesiones exactas a) y b) estarán compuestas por R-módulos finitamente generados, por lo que a) y b) son sucesiones exactas en $mod(R)$. $\square$

Ej 81. Sean R un anillo conmutativo artiniano, $\mathcal{C}$ una categoría tal que $Obj(\mathcal{C}) = (*)$ y $\circ$ la composición en $Hom(\mathcal{C})$. Entonces

a) $\mathcal{C}$ es una R-categoría $\iff$ $End_{\mathcal{C}}\{*\}$, con $\circ$ como producto, es una R-álgebra;

b) $\mathcal{C}$ es una R-categoría Hom-finita $\iff$ $End_{\mathcal{C}}\{*\}$, con $\circ$ como producto, $End_{\mathcal{C}}\{*\}$, con $\circ$ como producto, es una R-álgebra de Artin.

Demostración. Sea $S := End_{\mathcal{C}}\{*\}$.
$\boxed{a) \implies}$ Dado que $Obj(\mathcal{C}) = (*)$ entonces el que $\mathcal{C}$ sea una R-categoría es equivalente a:

i) $S \in Mod(R)$,

ii) La operación $\circ$ es R-bilineal en S.

Notemos que de i) se sigue que $\exists \bullet : R \times S \to S$ una acción que hace de S un R-módulo, y así en partícular existe una operación $+$ tal que $(End_{\mathcal{C}}\{*\}, +)$ es un grupo abeliano. De ii) se sigue que en partícular $\circ$ se distribuye con respecto a $+$ (es $\mathbb{Z}$-bilinieal). Dado que S posee identidad con respecto a $\circ$, $Id_{\{*\}}$, y $\circ$ es asociativa se sigue que S posee estructura de anillo con $+$ como suma y $\circ$ como producto.
Notemos que ii) también garantiza que si $r \in R$ y $f, g \in S$, entonces

$$(r \bullet f) \circ g = r \bullet (f \circ g) = f \circ (r \bullet g),$$

de modo que $\bullet$ es una acción compatible del anillo conmutativo R sobre S. Luego, por el Ej. 4, $\bullet$ permite inducir un morfismo de anillos

$$\begin{aligned} \varphi_\bullet : R &\to S \\ r &\mapsto r \bullet Id_* \end{aligned}$$

por medio del cual $(S, +, \circ)$ es una R-álgebra.
$\boxed{a) \impliedby}$ Supongamos que S, con $\circ$ como producto, es una R-álgebra por medio del morfismo φ. Entonces necesariamente $\exists$ $+$ operación en S tal que $S := (End_{\mathcal{C}}\{*\}, +, \circ)$ es un anillo y, por el Ej. 3, φ induce una acción compatible del anillo conmutativo R en S, $\bullet_\varphi$. Notemos que las propiedades de las acciones compatibles garantizan que por medio de $\bullet_\varphi$ $S \in Mod(R)$ y que, si $r \in R$ y $f, g, h \in S$

$$\begin{aligned} (r \bullet_\varphi f + g) \circ h &= (r \bullet_\varphi f) \circ h + g \circ h = r \bullet_\varphi (f \circ h) + g \circ h, \\ f \circ (r \bullet_\varphi g + h) &= f \circ (r \bullet_\varphi g) + f \circ h = r \bullet_\varphi (f \circ h) + f \circ h. \end{aligned}$$

Con lo cual se satisfacen las condiciones i) y ii) enunciadas en la demostración de la necesidad, y por lo tanto $\mathcal{C}$ es una R-categoría.

Observación. Notemos que tanto en la necesidad como en la suficiencia de lo previamente demostrado S posee una estructura de anillo, por medio de la cual puede obtener una estructura natural de S-módulo. Más aún, por el Ej. 5, la estructura que posee S cómo R-módulo coincide con aquella que se puede obtener aplicando un cambio de anillos $\gamma : R \to S$ a ${}_SS$ ($\gamma = \varphi_\bullet$ en la necesidad y $\gamma = \varphi$ en la suficiencia).

$\boxed{b)}$ Como R es artiniano, por el Teorema 2.7.15a) se tiene que

$$S \in f.l.\,(R) \iff S \in mod\,(R)\,.$$

De lo anterior, el inciso a) y la Observación, se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 82. Sea R un anillo y $f : M \longrightarrow N$ en $Mod\,(R)$. Considere $\overline{f}$ la factorización de f a través de su imagen. Pruebe que $\overline{f} : M \longrightarrow Im\,(f)$ es minimal a derecha si y sólo si f es minimal a derecha.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow)}$ Sea $g \in Hom\left(\overline{f}, \overline{f}\right)$. Entonces $g \in End_R\,(M)$ y $\overline{f}g = \overline{f}$. Sin embargo, $Dom\,(f) = Dom\left(\overline{f}\right) = M$ y $\overline{f} = f\mid^{Im(f)}$. Luego, $fg = f$, y así $g \in Hom\,(f, f)$. En virtud de que f es minimal a derecha, g es un isomorfismo. $\therefore \overline{f}$ es minimal a derecha.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Sea $g \in Hom\,(f, f)$. En consecuencia, $g \in End_R\,(M)$ y $fg = f$. Por consiguiente, $\overline{f}g = f\mid^{Im(f)} g = f\mid^{Im(f)} = \overline{f}$. Lo cual implica que $g \in Hom\left(\overline{f}, \overline{f}\right)$. Más aún, g es un isomorfismo, toda vez que $\overline{f}$ es minimal a derecha. $\therefore f$ es minimal a derecha. $\square$

Ej 83. Pruebe que para un anillo artiniano a izquierda R, se tiene que $mod({}_RR) = mod(R)$

Demostración. Por definición $mod({}_RR)$ es la subcategoría plena de $mod(R)$ cuyos objetos son los $A \in mod(R)$ tales que existe una sucesión exacta $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ en $mod(R)$ con $P_1, P_0 \in add(R)$.

Como $mod({}_RR)$ es subcategoría plena de $mod(R)$, basta ver que si $M \in mod(R)$, entonces $M \in mod({}_RR)$.
Sea $M \in mod(R)$ entonces $M = \bigoplus_{m \in A} Rm$ con $A \subset M$ finito, así, considerando $|A| = n$, se tiene la sucesión exacta

$$A_1 \oplus A_2 \oplus M \xrightarrow{\pi_1} A_2 \oplus M \xrightarrow{\pi_2} M \longrightarrow 0.$$

Donde $A_1 \cong A_2 \cong R$ y π_1, π_2 son proyecciones canonicas, en particular A_1 y A_2 son objetos en $add(R)$ pues $A_1 \coprod A_2 \cong R \coprod R = R^2$, así $M \in mod({}_RR)$.

$\square$

Ej 84. Sean R un anillo y

$$M_1 \xrightarrow{f} M_0 \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

una sucesión exacta en $Mod(R)$. Entonces, $\forall\ N \in Mod\,(R)$

$$0 \longrightarrow Hom_R\,(M, N) \xrightarrow{(g,N)} Hom_R\,(M_0, N) \xrightarrow{(f,N)} Hom_R\,(M_1, N) \qquad (**)$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Demostración. Sea $N \in Mod\,(R)$. Notemos que (**) se obtiene de aplicar el funtor contravariante $F_N := Hom_R\,(-, N)$ a (*). Bajo esta notación se tiene $(g, N) = F_N\,(g)$ y $(f, N) = F_N\,(f)$. Como $Mod\,(R)$ es una categoría preaditiva entonces (**) es una sucesión en Ab (ver Ej. 60) y por tanto únicamente resta verificar que

a) $F_N\,(g)$ es un monomorfismo (de grupos abelianos),

b) $Im\,(F_N\,(g)) = Ker\,(F_N\,(f))$.

$\boxed{a)}$ Sean $\alpha, \beta \in F_N\,(M)$ tales que $F_N\,(g)\,(\alpha) = F_N\,(g)\,(\beta)$, entonces $\alpha g = \beta g$. Dado que g es en partícular sobre por ser (*) exacta, entonces esta es invertible por la derecha, lo cual aplicado a la igualdad anterior garantiza que $\alpha = \beta$.

$\boxed{b)}$ Sea $\alpha \in F_N\,(M)$, entonces

$$\begin{aligned} F_N\,(f) \circ F_N\,(g)\,(\alpha) &= \alpha \circ (gf) \\ &= \alpha \circ (0)\,, && (*) \text{ es exacta} \\ &= 0, \\ \Longrightarrow\ F_N\,(f) \circ F_N\,(g) &= 0, \\ \Longrightarrow\ Im\,(F_N\,(g)) &\subseteq Ker\,(F_N\,(f))\,. \end{aligned}$$

Verifiquemos ahora que $Ker\,(F_N\,(f)) \subseteq Im\,(F_N\,(g))$, esto es que si $\nu \in F_N\,(M_0)$ es tal que $F_N\,(f)\,(\nu) = 0$, entonces $\exists\ \mu \in F_N\,(M)$ tal que $\nu = F_N\,(g)\,(\mu)$. Lo anterior es equivalente a verificar que si $\nu \in Hom_R\,(M_0, N)$ es tal que

$$\nu f = 0, \qquad (\mathrm{I})$$

entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & N \\ M_0 \arrow[ur, "\nu"] \arrow[r, "g"'] & M \arrow[u, dashed, "\exists\ \mu"'] \end{tikzcd}$$

Notemos primeramente que si $a, b \in M$ son tales que $a - b \in Im\,(f)$, entonces $\exists\ c \in M_1$ tal que

$$\begin{aligned} a - b &= f\,(c) \\ \implies \nu\,(a - b) &= \nu f\,(c) = 0, \qquad\qquad \text{(I)} \\ \implies \nu\,(a) &= \nu\,(b)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto la correspondencia

$$\begin{aligned} \overline{\nu} : {}^{M_0}\!\diagup_{Im\,(f)} &\to M \\ a + Im\,(f) &\mapsto \nu\,(a) \end{aligned}$$

es una función bien definida y más aún es un morfismo de R-módulos, pues ν lo es.
Por otra parte, dado que g es epi en $Mod(R)$ por el Primer Teorema de Isomorfisomos para R-módulos se tiene que la función

$$\begin{aligned} \overline{g} : {}^{M_0}\!\diagup_{Ker\,(g)} &\to M \\ x + Ker\,(g) &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

es un isomorfismo en $Mod(R)$, con inversa

$$\begin{aligned} \overline{g}^{-1} : M &\to {}^{M_0}\!\diagup_{Ker\,(g)} \\ g(x) &\mapsto x + Ker\,(g)\,. \end{aligned}$$

Dado que $Im\,(f) = Ker\,(g)$ por ser (*) exacta, se tiene que

$${}^{M_0}\!\diagup_{Ker\,(g)} = {}^{M_0}\!\diagup_{Im\,(f)}$$

y así si $m \in M_0$ y $\mu := \overline{\nu} \circ \overline{g}^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} \mu g\,(m) &= \overline{\nu}\,(m + Ker\,(g)) = \overline{\nu}\,(m + Im\,(f)) \\ &= \nu\,(m)\,. \\ \therefore\ \mu g &= \nu. \end{aligned}$$

$\square$

Ej 85. Sean Λ un álgebra de Artin, $P \in \mathcal{P}\,(\Lambda)$, $\Gamma = End\,({}_{\Lambda}P)^{op}$ y el funtor de evaluación

$$e_P : mod\,(\Lambda) \longrightarrow mod\,(\Gamma)$$

Pruebe que si

$$P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

es una presentación en $add\,(P)$ de $X \in mod\,(\Lambda)$, entonces

$$e_P\,(P_0) \longrightarrow e_P\,(P_1) \longrightarrow e_P\,(X) \longrightarrow 0$$

es una presentación proyectiva en $mod\,(\Gamma)$ de $e_P\,(X)$.

Demostración. Sea $P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ una presentación en $add\,(P)$ de X. Como $P \in \mathcal{P}\,(\Lambda)$, se tiene que $P \in mod\,(\Lambda)$. Entonces, el teorema **3.2.2.b)**, $e_P \mid_{add(P)}: add\,(P) \longrightarrow \mathcal{P}\,(\Gamma)$ es una R-equivalencia. De tal manera que, y usando el teorema **3.2.2.a)**, $e_P\,(P_0)$, $e_P\,(P_1)$ son Γ-módulos proyectivos.

Por otro lado, puesto que $P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ es exacta y el funtor covariante $Hom_\Lambda\,({}_\Lambda P_\Gamma, *)$ es exacto derecho en $mod\,(\Lambda)$, entonces

$$e_P\,(P_0) \longrightarrow e_P\,(P_1) \longrightarrow e_P\,(X) \longrightarrow 0$$

es exacta.
$\therefore$ $e_P\,(P_0) \longrightarrow e_P\,(P_1) \longrightarrow e_P\,(X) \longrightarrow 0$ es una presentación proyectiva en $Mod\,(\Gamma)$. $\square$

Ej 86. Para Λ una R-álgebra de Artin, pruebe que:
Λ es básica $\Leftrightarrow l_\Lambda\,(top\,(\Lambda)) = rkK_0\,(\Lambda)$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow)}$ Suponga que Λ es básica. Sea $\Lambda = \coprod_{i=1}^{n} P_i$ una descomposición en proyectivos inescindibles, con $P_i \ncong P_j$. Luego,

$$\begin{aligned} l_\Lambda\,(top\,(\Lambda)) &= l_\Lambda\left(\coprod_{i=1}^{n} top\,(P_i)\right) \\ &= \Sigma_{i=1}^{n} l_\Lambda\,(top\,(P_i)) \end{aligned}$$

Además, como Λ es f.g., se tiene que $P_i \in \mathcal{P}$. Ahora, por el **teorema 2.8.10.**, la colección $\{top\,(P_i)\}_{i=1}^{n}$ es una familia completa de clases de isomorfismo de Λ-módulos simples. Así, $l_\Lambda\,(top\,(\Lambda)) = n$

Por otro lado, en virtud del **teorema 2.3.1b)**, $K_0\,(\Lambda)$ es un $\mathbb{Z}$-módulo con base $\{\pi\,(top\,(P_i))\}_{i=1}^{n}$. De manera que $rkK_0\,(\Lambda) = |\{\pi\,(top\,(P_i))\}_{i=1}^{n}| = n$.
$\therefore$ $l_\Lambda\,(top\,(\Lambda)) = rkK_0\,(\Lambda)$.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Suponga que $l_\Lambda\,(top\,(\Lambda)) = rkK_0\,(\Lambda)$. Sea $\Lambda = \coprod_{i=1}^{n} P_i^{m_i}$ una descomposición en proyectivos inescindibles, con $P_i \ncong P_j$. Entonces

$$\begin{aligned}
rkK_0(\Lambda) &= l_\Lambda(top(\Lambda)) \\
&= l_\Lambda\left(\coprod_{i=1}^{n} top(P_i)^{m_i}\right) \\
&= l_\Lambda\left(\coprod_{i=1}^{n} top(P_i)\right)^{m_i} \\
&= \Sigma_{i=1}^{n} l_\Lambda\left(top(P_i)^{m_i}\right) \\
&= \Sigma_{i=1}^{n}\Sigma_{j=1}^{m_i} l_\Lambda(top(P_i)) \\
&= \Sigma_{i=1}^{n} m_i \\
&= m_1 + ... + m_n
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\{\pi(top(P_i))\}_{i=1}^{n}$ es una base para $K_0(\Lambda)$, se tiene que $rkK_0(\Lambda) = n$. De esta manera, $n = m_1 + ... + m_n$. Ahora, como $\coprod_{i=1}^{n} P_i^{m_i}$ es una descomposición de Λ, entonces $m_i \geq 1$, para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Finalmente, dado que $m_i \in \mathbb{N}$, tenemos que $m_1 = ... = m_n = 1$.
$\therefore \Lambda$ es básica. $\square$

Ej 87. Sean $f : M \to I$ y $f' : M \to I'$ cubiertas inyectivas de $M \in Mod(R)$. Entonces $\exists\ t : I \xrightarrow{\sim} I'$ en $Mod(R)$ tal que $tf = f'$.

Demostración. Se tiene el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & I \arrow[dl, dashed, "\exists\ t"] \\
I' &
\end{tikzcd}$$

con I' inyectivo y f, en partícular, un monomorfismo en $Mod(R)$ por ser un mono-esencial. Por lo tanto $\exists\ t \in Hom_R(I, I')$ tal que

$$tf = f'.$$

Como f es un mono-esencial y f' es en partícular un monomorfismo en $Mod(R)$, de la igualdad anterior se sigue que t es un monomorfismo en $Mod(R)$. Con lo cual, si π es el epi canónico de I' en ${I'}/{Im(t)}$, la sucesión

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{t} I' \xrightarrow{\pi} {I'}/{Im(t)} \longrightarrow 0$$

es exacta. De modo que es una sucesión exacta que se parte, puesto que I es inyectivo (ver Ej. 65), con lo cual t es un split-mono (ver Ej. 54) i.e. $\exists$ $t' \in Hom_R(I', I)$ tal que $t't = Id_I$. La igualdad anterior garantiza que j es un split-epi. Además

$$tf = f' \implies f = t'f',$$

con lo cual t' es un monomorfismo, pues f lo es y f' es un mono-esencial. Así t' es un isomorfismo en $Mod(R)$ y por lo tanto $t = (t')^{-1}$ también lo es.

$\square$

Ej 88. Sea $h : I_1 \longrightarrow I_2$ un mono-esencial en $Mod(R)$. Pruebe que si I_1 y I_2 son inyectivos, entonces h es isomorfismo.

Demostración. En virtud de que I_2 es inyectivo y h es mono-esencial, h es una envolvente inyectiva de I_1. Por otra parte, sea $f : I_1 \longrightarrow I_1$ un isomorfismo. Entonces f es minimal a izquierda. En efecto, sea $g \in Hom(f, f)$. De esta forma, $g \in End_R(I_1)$ y $gf = f$. Luego, gf es un isomorfismo. Más aún, g es un isomorfismo, puesto que f lo es. Así, efectivamente, f es minimal a izquierda; y por el **Lema 3.3.2**, f es mono-esencial.

En resumen, $h : I_1 \longrightarrow I_2$ y $f : I_1 \longrightarrow I_1$ son envolventes inyectivas de I_1. Por el ejercicio anterior, existe $g : I_1 \longrightarrow I_2$ un isomorfismo en $Mod(R)$ tal que $gf = h$. $\therefore$ h es isomorfismo. $\square$

Ej 89. Para un anillo R, pruebe que la correspondencia
$Soc : Mod(R) \longrightarrow Mod(R)$ donde

$$\begin{array}{ccc} X & & Soc(X) \\ f \big\downarrow & \longrightarrow & \big\downarrow Soc(f):=f|_{Soc(X)} \\ Y & & Soc(Y) \end{array}$$

es un funtor aditivo que conmuta con productos arbitrarios y preserva monomorfismos.

Demostración. Funtor aditivo:
Sean $f, g \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ con $X, Y \in Mod(R)$, entonces $f+g \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ y $F(X \xrightarrow{f+g} Y) = (Soc(X) \xrightarrow{(f+g)|_{Soc(X)}} Soc(Y))$ pero

$$F(f+g) = (f+g)|_{Soc(X)} = f|_{Soc(X)} + g|_{Soc(X)} = F(f) + F(g),$$

pues por 3.3.6 b), $f(Soc(X)) \subset Soc(Y)$ y $g(Soc(X)) \subset Soc(Y)$.

Conmuta con coproductos arbitrarios:

Basta mostrar que $\coprod_{i\in A} Soc(M_i)$ es el submódulo simple más grande contenido en $\coprod_{i\in A} M_i$.

Supongamos N es semisimple en $\coprod_{i\in A} M_i$, entonces $N = \bigoplus_{j\in F} S_j$ donde S_k es simple en $\coprod_{i\in A} M_i$ para toda $k \in A$ y $F \neq \emptyset$.

Como todo simple en $\coprod_{i\in A} M_i$ es de la forma $\coprod_{i\in A} S_i$ con $S_i \leq M_i$ simple o cero, entonces

$$N = \bigoplus_{i\in F} \coprod_{j\in A} S_{ij} = \coprod_{j\in A} \bigoplus_{i\in F} S_{ij} \subset \coprod_{i\in A} Soc(M_i),$$

pues $Soc(M_i)$ es el submódulo semisimple mas grande contenido en M_i, por lo tanto $Soc(\coprod_{i\in A} M_i) = \coprod_{i\in A} Soc(M_i)$.

□

Ej 90. Sean R un anillo y $M \in Mod(R)$. Entonces

a) M es simple $\implies$ M es irreducible $\implies$ M es indescomponible;

b) ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ es irreducible pero no simple;

c) M es irreducible $\implies$ $Soc\,(M) = \langle 0\rangle$ ó $Soc\,(M)$ es simple;

d) M es semisimple $\iff$ $Soc\,(M) = M$;

e) $Soc\,(Soc\,(M)) = Soc\,(M)$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Supongamos que M es simple. Entonces $M \neq \langle 0\rangle$ y $\mathscr{L}\,(M) \setminus \{\langle 0\rangle\} = \{M\}$, y, dado que la inclusión i de M en sí mismo es Id_M, así se tiene que si $X \in Mod(R)$ y $f \in Hom_R\,(M, X)$, entonces

$$f \circ i \text{ es monomorfismo } \iff f \text{ es monomorfismo }.$$

i.e. i es un mono-esencial y por lo tanto M es irreducible.

Supongamos ahora que M es irreducible. Sean $M_1, M_2 \in \mathscr{L}\,(M)$ tales que $M = M_1 \oplus M_2$ y supongamos, sin pérdida de generalidad que $M_1 \neq \langle 0\rangle$. Como M_1 es un sumando directo de M entonces la inclusión i de M_1 en M es un split-mono (ver el Teorema 1.12.5), es decir, $\exists\ j \in Hom_R\,(M, M_1)$ tal que

$$ji = Id_{M_1}. \tag{*}$$

Como i es un mono-esencial, por ser M irreducible, y Id_{M_1} es un monomorfismo, entonces j es un monomorfismo y, por (*), un split-epi. De modo que j es en partícular biyectiva y por lo tanto $i = j^{-1}$ también lo es. Así $M_1 = M$ y

$$M_2 = M \cap M_2 = M_1 \cap M_2 = \langle 0 \rangle \,.$$
$$\therefore\ M \text{ es indescomponible.}$$

$\boxed{b)}$ Sea $M := {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$. Dado que la estructura que posee M como $\mathbb{Z}$-módulo viene dada por su multiplicación, la cual es conmutativa, entonces

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(M) &= \{ I \subseteq \mathbb{Z} \mid I \trianglelefteq \mathbb{Z} \} \\ &= \{ n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \} \,. \end{aligned}$$

Así

$$\mathscr{L}(M) \setminus \{\langle 0 \rangle\} = \{ n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \} \,.$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq 1$, i la inclusión de $n\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$. Supongamos que $i^{-1}(m\mathbb{Z}) = \langle 0 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \langle 0 \rangle = i^{-1}(m\mathbb{Z}) &= \{ a \in n\mathbb{Z} \mid i(a) \in m\mathbb{Z} \} = n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \\ &= mcm\,(n,m)\,\mathbb{Z}, \\ \implies 0 &= mcm\,(n,m) \\ \implies m &= 0, & n \neq 0 \end{aligned}$$

Así $m\mathbb{Z} = \langle 0 \rangle$, de modo que por la Proposición 3.3.1 i es un mono-esencial.
Por lo tanto M es irreducible.
Finalmente si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, entonces $\langle 0 \rangle \subsetneq n\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$ y por tanto M no es simple.

$\boxed{c)}$ Supongamos que $Soc\,(M) \neq \langle 0 \rangle$, entonces $Simp\,(M) \neq \varnothing$ y así sea $N \in \mathscr{L}(M) \neq \{\langle 0 \rangle\}$ simple. Como $N \subseteq Soc\,(M)$, pues $Soc\,(M)$ está generado por $\bigcup Simp\,(M)$, entonces si i_N es la inclusión de N en M, $i_N{}'$ la de N en $Soc\,(M)$ e $i_{Soc(M)}$ la de $Soc\,(M)$ en M, se tiene la siguiente sucesión

$$N \xrightarrow{i_N{}'} Soc\,(M) \xrightarrow{i_{Soc(M)}} M \ ,$$

con $i_N = i_{Soc(M)} i_N{}'$. Por lo anterior, como i_N es un mono-esencial por ser M irreducible y todas las inclusiones antes mencionadas son monomorfismos, aplicando la Proposición 3.3.3 a) se tiene que, en partícular, $i_N{}'$ es un mono-esencial. Así, dado que $Soc\,(M)$ es semisimple, de la Proposición 3.3.3 b) se tiene que $i_N{}'$ es un isomorfismo. De modo que $Soc\,(M) = N$ y por lo tanto es simple.

$\boxed{d)}$ Se tiene que $Soc\,(M)$ es semisimple, de lo cual se sigue la suficiencia. Más aún se tiene que $Soc\,(M)$ es el máximo submódulo semisimple de M (ver la Proposición 3.3.6a)), de modo que $M \leq Soc\,(M)$ si M es semisimple y así se verifica la necesidad.

$\boxed{e)}$ Se sigue de aplicar el inciso anterior al modulo semisimple $M' := Soc\,(M)$.

$\square$

Ej 91. Pruebe que:

a) ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ es inyectivo e inescindible.

b) Para todo $M \in \mathscr{L}\,({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) \setminus \{0\}$, $I_0\,(M) \cong \mathbb{Q}$

Demostración. $\boxed{\text{a)}}$ Primero, $\mathbb{Q}$ es divisible. En efecto, si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $x \in \mathbb{Q}$, entonces $x/n \in \mathbb{Q}$ y $x = n(x/n)$. Ahora, aunado a la divisibilidad, por la **Proposición 3.3.8.**, $\mathbb{Q}$ es inyectivo.

Por otra parte, por el ejercicio anterior, $\mathbb{Z}$ es irreducible. Además, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ es mono-esencial. En efecto, sea $X \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $X \cap \mathbb{Z} = 0$ y sea $x \in X$. Entonces existe $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ tal que $nx \in \mathbb{Z}$. Luego $nx \in X \cap \mathbb{Z} = 0$. Como $\mathbb{Q}$ es dominio entero, $x = 0$. Así, $X = 0$.

Finalmente, puesto que $\mathbb{Z}$ es irreducible y que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ es mono-esencial, se satisface la **Proposición 3.3.7.d)**. $\therefore$ $\mathbb{Q}$ es inyectivo e inescindible.

$\boxed{\text{b)}}$ Sea $0 \neq M \leq Q$. Por la **Proposición 3.3.5.c)**, $I_0\,(M) \leq \mathbb{Q}$. Como $I_0\,(M)$ es inyectivo, existe $K \leq \mathbb{Q}$ tal que $\mathbb{Q} \cong K \oplus I_0\,(M)$. Dado que $\mathbb{Q}$ es inescindible, $K = 0$. $\therefore$ $I_0\,(M) \cong \mathbb{Q}$ $\square$

Ej 92. Pruebe que

a) $Soc\,({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) = Soc\,({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) = 0$.

b) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo simple $\iff$ m es primo.

c) $Soc\left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right) = p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ para todo primo p y $n \geq 0$.

d) $Soc\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}/(p_1 \dots p_k)\mathbb{Z}$ donde $n = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$ en la descomposición en productos de primos con $p_i \neq p_j$ para toda $i \neq j$.

Demostración. $\boxed{a)}$
Por una parte, como ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ no tiene submódulos simples, entonces $Soc\,({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) = 0$.

Por otra, Como $\mathbb{Z}$ es mono-escencial en $\mathbb{Q}$ (como se aprecia en el ejercicio anterior) entonces todo módulo M de ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ cumple que $\mathbb{Z} \cap M \neq \emptyset$ y como $\mathbb{Z}$ no contiene submódulos simples, entonces ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ no tiene submódulos simples, es decir
$Soc\left({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\right) = Soc\left({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\right) = 0$.

$\boxed{b)}$

Como M es submódulo de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si y sólo si $M = k\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ donde $k|m$, entonces si $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es simple k sólo puede ser 1 o m, es decir, m tiene que ser primo.
Si m es primo $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es campo y por lo tanto simple.

$\boxed{c)}$

Sea p primo y $n \geq 2$, entonces $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es simple en $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, sin embrgo es el único simple, pues si $M \leq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ es simple, entonces $M = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ y esto pasa sólo si p^k es primo, es decir, si $k = 1$. Por lo tanto
$Soc\left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

$\boxed{d)}$

Sea $n = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$ su descomposición en primos.
Como $n\mathbb{Z} = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}\mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}\mathbb{Z}$, en particular $\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es simple para toda $j \in \{1, \dots, k\}$, pues $p_j\mathbb{Z} \geq n\mathbb{Z}$.

Por otra parte si M es simple en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, entonces $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ para algún p primo y $p\mathbb{Z} \geq n\mathbb{Z}$, por lo que $p|n$ es decir, existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $p|p_j^{m_j}$, entonces $p = p_j$ y así $M = \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$ para algún $j \in \{1, \dots, k\}$. Por lo tanto, como $p_j\mathbb{Z} \geq n\mathbb{Z}$ para toda $j \in \{1, \dots, k\}$,

$$Soc\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right) \cong \sum_{i \leq k} \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z} = \bigoplus_{j \leq k} \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(p_1 \dots p_k)\mathbb{Z}.$$

$\square$

Ej 93. Sean R un anillo artiniano a izquierda y $M \in Mod(R)$. Si $M \neq 0$ es no trivial, entonces $Soc(M) \neq 0$.

Demostración. Basta con verificar que $Simp(M) \neq \varnothing$. Sea $0 \neq m \in M$, luego $0 \neq \langle m \rangle \in mod(R) = f.l.(R)$ (pues R es artiniano a izquierda) y por lo tanto $\langle m \rangle$ es en partícular artiniano (ver la Proposición 2.1.4). Así, por el Ej. 43, $(\mathscr{L}(\langle m \rangle), \leq)$ posee por lo menos un elemento mínimal, digamos S. La minimalidad de S con respecto a $\leq$ junto al hecho de que $\mathscr{L}(S) \subseteq \mathscr{L}(\langle m \rangle)$ garantizan que S es un submódulo simple de M.

$\square$

Ej 94. Para un anillo artiniano a izquierda R, pruebe que las siguientes condiciones se satisfacen:

a) Sea $\{f_i : A_i \longrightarrow B_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de morfismos en $Mod\,(R)$. Entonces $\coprod_{i=1}^{n} f_i : \coprod_{i=1}^{n} A_i \longrightarrow \coprod_{i=1}^{n} B_i$ es mono-esencial$\Leftrightarrow$ $f_i : A_i \longrightarrow B_i$ es mono-esencial $\forall i \in [1,n]$.

b) $\forall Q, Q' \in Mod\,(R)$ inyectivos, $Q \cong Q' \Leftrightarrow soc\,(Q) \cong soc\,(Q')$.

c) Si $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia completa de simples en $Mod\,(R)$ no isomorfos dos a dos, entonces $\{I_0\,(S_j)\}_{j=1}^{n}$ es una familia completa de inyectivos inescindibles en $Mod\,(R)$ no isomorfos dos a dos.

Demostración. $\boxed{a)}$ $\boxed{\Rightarrow)}$ Supongamos que el morfismo $\coprod_{i=1}^{n} f_i$ es mono-esencial. Sea $i \in [1,n]$ y sea $Y_i \in \mathscr{L}\,(B_i)$ tal que $f_i^{-1}\,(Y_i) = 0$. Definimos $Y = \coprod_{j=1}^{n} Y_j \in \mathscr{L}\left(\coprod_{j=1}^{n} B_j\right)$ como $Y_j = \delta_{ji} Y_i$. De manera que $\coprod_{j=1}^{n} f_j^{-1}\,(Y) = 0$. Como $\coprod_{j=1}^{n} f_j$ es mono-esencial, $Y = 0$, y en particular $Y_i = 0$.
$\therefore f_i$ es mono-esencial.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Suponga que todo f_i es mono-esencial. Sea $Y \in \mathscr{L}\left(\coprod_{i=1}^{n} B_i\right)$ tal que $\left(\coprod_{i=1}^{n} f_i\right)^{-1}(Y) = 0$. Denote por $\eta_i : \coprod_{i=1}^{n} B_i \longrightarrow B_i$ la i-ésima proyección canónica. Entonces $\coprod_{i=1}^{n} f_i^{-1}\,(\eta_i\,(Y)) = 0$. Luego, $f_i^{-1}\,(\eta_i\,(Y)) = 0$. En virtud de que f_i es mono-esencial, $\eta_i\,(Y) = 0$. De modo que $Y = 0$.
$\therefore \coprod_{i=1}^{n} f_i$ es mono-esencial.

$\boxed{b)}$ $\boxed{\Rightarrow)}$ Sean $Q, Q' \in Mod\,(R)$ inyectivos. Si $Q \cong Q'$, entonces $soc\,(Q) \cong soc\,(Q')$, pues $soc\,(*)$ es un funtor.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Sean $Q, Q' \in Mod\,(R)$. Suponga que $soc\,(Q) \cong soc\,(Q')$. Como R es artiniano a izquierda, $soc\,(Q) \hookrightarrow Q$ y $soc\,(Q') \hookrightarrow Q'$ son mono-esencial. Dado que Q y Q' son inyectivos, $soc\,(Q) \hookrightarrow Q$ y $soc\,(Q') \hookrightarrow Q'$ son envolventes inyectivas. Ahora, puesto que $soc\,(Q) \cong soc\,(Q')$, $soc\,(Q) \hookrightarrow Q$ y $soc\,(Q) \hookrightarrow Q'$ son envolventes inyectivas de Q. Usando el **Ejercicio 88.**, Q y Q' son inyectivos.
$\therefore Q \cong Q'$

$\boxed{c)}$ Como S_i es simple, por la **Proposición 3.3.9.a)**, $I_0(S_i)$ es inyectivo inescindible.

Por otro lado, considere S_i, S_j dos R-módulos simples no isomorfos. Entonces, por la **Proposición 3.3.9.b)**, $soc(I_0(S_i)) \cong S_i$ y $soc(I_0(S_j)) \cong S_j$. Luego, por el inciso anterior, $I_0(S_i) \ncong I_0(S_j)$.

Por último, suponga que Q es inyectivo inescindible. Por la **Proposición 3.3.9.b)**, $soc(Q) \cong S_i$, para algún $i \in [1, n]$. Por el inciso anterior, $Q \cong I_0(S_i)$.
$\therefore$ $\{I_0(S_j)\}_{j=1}^{n}$ es una familia completa de inyectivos inescindibles en $Mod(R)$ no isomorfos dos a dos. $\square$

Ej 95. Para un anillo R y $M \in Mod(R)$, pruebe que

a) $ann_R(M) \trianglelefteq R$.
b) M es un $\left(R/_{ann_R(M)}\right)$-módulo fiel.
c) $\forall f \in \mathrm{Hom}_R(R, M), \quad ann_R(M) \leq Ker(f)$.
d) $\forall N \in Mod(R), \quad N \cong M \Longrightarrow ann_R(M) = ann_R(N)$.

Demostración. $\boxed{a)}$
$ann_R(M) = \{r \in R \,|\, r \cdot m = 0 \ \forall m \in M\}$.
Sean $r, s \in ann_R(M)$, entonces $(r+s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m = 0$ por lo que $(r+s) \in ann_R(M)$.

Ahora, si $a \in R$, $(zr) \cdot m = z \cdot (r \cdot m) = z \cdot 0 = 0$. Por lo tanto $ann_R(M) \trianglelefteq R$.
$\boxed{b)}$
$ann_{R/_{ann_R(M)}}(M) = \{r \in R/_{ann_R(M)} \,|\, [r] \cdot m = 0\}$ con $[r]$ denotando la clase de $r \in R$ bajo la relación de equivalencia. Ahora, como $[r] \cdot m = 0$, entonces

$$0 = (r + ann_R(M)) \cdot m = r \cdot m + 0,$$

y así $r \in ann_R(M)$, es decir, $[r] = 0$. Por lo tanto M es un $R/_{ann_R(M)}$-módulo fiel.
$\boxed{c)}$
Sean $f \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$ y $r \in ann_R(M)$, entonces $r \cdot m = 0 \ \forall m \in M$ así, como f es morfismo $f(r) = r \cdot f(1) = 0$ pues $f(1) \in M$. Por lo tanto $ann_R(M) \leq Ker(f)$.
$\boxed{d)}$

Sea $N \in Mod(R)$ tal que existe $h \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ isomorfismo. Entonces para cada $n \in N$ existe un único $m \in M$ tal que $h(m) = n$, así

$$\begin{aligned} r \in ann_R(M) &\iff r \cdot m = 0 \ \forall m \in M \\ &\iff h(r \cdot m) = 0 \ \forall m \in M \\ &\iff r \cdot h(m) = 0 \ \forall m \in M \\ &\iff r \cdot n = 0 \ \forall n \in N \\ &\iff r \in ann_R(N). \end{aligned}$$

□

Ej 96. Sean R un anillo, $I \trianglelefteq R$, $\pi : R \to R/I$ el epi-canónico de anillos y $M \in Mod\left(R/I\right)$. Se tiene que

a) $\pi\left(ann_R\left(M\right)\right) = ann_{R/I}\left(M\right)$;

b) ${}_{R/I}M$ es fiel $\iff I = ann_R\left(M\right)$.

Demostración. Consideraremos la estructura de M como R-módulo como aquella obtenida a partir del cambio de anillos dado por π.
$\boxed{a)}$ Notemos que

$$\begin{aligned} a \in \pi\left(ann_R\left(M\right)\right) &\iff a = r + I, r \in ann_R\left(M\right) \\ &\iff a = r + I, rm = 0 \ \forall \ m \in M \\ &\iff a = r + I, \left(r + I\right) m = \pi\left(r\right) m = 0 \ \forall \ m \in M \\ &\iff a \in ann_{R/I}. \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene lo deseado.

$\boxed{b)}$ Notemos primeramente que, si $r \in I$ y $m \in M$, entonces $rm = \left(r + I\right) m = \left(I\right) m = 0$, pues I es el neutro aditivo de R/I. Así

$$I \subseteq ann_R\left(M\right). \qquad (*)$$

Ahora

$$\begin{aligned} {}_{R/I}M \text{ es fiel } &\iff ann_{R/I}\left(M\right) = \langle I \rangle \\ &\iff \pi\left(ann_R\left(M\right)\right) = \langle I \rangle, && a) \\ &\iff ann_R\left(M\right) \subseteq Ker\left(\pi\right) = I \\ &\iff ann_R\left(M\right) = I. && (*) \end{aligned}$$

□

Ej 97. Sean R anillo y $n \geq 1$. Pruebe que la correspondencia

$$\begin{aligned} \{Ideales\ de\ R\} &\longrightarrow \{Ideales\ de\ Mat_{n\times n}(R)\} \\ I &\mapsto Mat_{n\times n}(I) \end{aligned}$$

es una biyección. En particular, si D es un anillo de división, se tiene que el anillo $Mat_{n\times n}(D)$ es simple $\forall n \geq 1$.

Demostración. Sean $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}(I)$ y $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}(R)$. Entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+yc & xb+yd \\ za+wc & zb+wd \end{pmatrix}$$

Ahora, en virtud de que I es un ideal de R, se tiene que

$$\begin{aligned} ax+bz, ay+bw, cx+dz, cy+dw \in I \\ xa+yc, xb+yd, za+wc, zb+wd \in I \end{aligned}$$

Luego, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}(I)$.

Por otra parte, sea J un ideal de $Mat_{n\times n}(R)$. Consideremos el conjunto $I_J = \{r \in R : r\mathbb{I} \in J\}$, donde $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Veamos que I_J es un ideal de $Mat_{n\times n}(R)$.

a) Primero, $0 \cdot \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$. Por lo que $0 \in I_J$.

b) Sean $r, s \in I_J$. Entonces

$$\begin{aligned} (r+s)\mathbb{I} &= (r+s)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r+s & 0 \\ 0 & r+s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \\ &= r\mathbb{I} + s\mathbb{I} \in J \end{aligned}$$

En consecuencia, $r+s \in I_J$; y así I_J es un subgrupo abeliano de R.

c) Sean $r \in R$, $x \in I_J$. De modo que

$$(rx)\mathbb{I} = \begin{pmatrix} rx & 0 \\ 0 & rx \end{pmatrix} \in J$$

y

$$(xr)\mathbb{I} = \begin{pmatrix} xr & 0 \\ 0 & xr \end{pmatrix} \in J$$

Luego, $rx, xr \in I_J$.

Por lo que I_J es un ideal de R.

En resumen, todo ideal I de R genera un ideal $Mat_{n\times n}(R)$ y viceversa, todo ideal J de $Mat_{n\times n}(R)$ induce un ideal de R. Por tanto, hay una correspondencia biunívoca

$$\{Ideales\ de\ R\} \longrightarrow \{Ideales\ de\ Mat_{n\times n}(R)\}$$
$$I \mapsto Mat_{n\times n}(I)$$

Finalmente, sea D un anillo con división. Entonces los únicos ideales de D son 0 y D. Por la correspondencia biyectiva entre ideales de D e ideales de $Mat_{n\times n}(D)$, se tiene que $Mat_{n\times n}(D)$ no tiene ideales propios no triviales. $\therefore Mat_{n\times n}(D)$ es un anillo simple. $\square$

Ej 98. Sea Λ una R-álgebra de Artin. Pruebe que, $\forall M \in mod(\Lambda)$ se tiene que:

a) M es inescindible $\iff$ $D_\Lambda(M)$ es inescindible.
b) M es simple $\iff$ $D_\Lambda(M)$ es simple.
c) $I_0(D_\Lambda(M)) \in mod(\Lambda^{op})$.
d) $I_0(M) \in mod(\Lambda)$.
e) $l_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)) = l_\Lambda(M)$.

Demostración. $\boxed{a)}$
Supongamos $M \neq 0$ es inescindible y supongamos además que $D_\Lambda(M)) = D_1 \oplus D_2$. Como D_Λ y $D_{\Lambda^{op}}$ son equivalencias de categorías y $D_\Lambda(M) = D_1 \oplus D_2$, entonces

$$M = D_{\Lambda^{op}}(D_1 \oplus D_2) = D_{\Lambda^{op}}(D_1) \oplus D_{\Lambda^{op}}(D_2).$$

Pero M es inescindible, entonces $D_{\Lambda^{op}}(D_1) = 0$ o $D_{\Lambda^{op}}(D_2) = 0$, así $D_1 = 0$ o $D_2 = 0$, por lo que $D_\Lambda(M)$ es inescindible.

Si $D_\Lambda(M)$ es inescindible y $M = M_1 \oplus M_2$, entonces

$$M = D_{\Lambda^{op}}(M_1 \oplus M_2) = D_{\Lambda^{op}}(M_1) \oplus D_{\Lambda^{op}}(M_2),$$

y como $D_\Lambda(M)$ es inescindible entonces $D_{\Lambda^{op}}(M_1) = 0$ o $D_{\Lambda^{op}}(M_2) = 0$ por lo tanto $M_1 = 0$ o $M_2 = 0$ lo cual implica que M es inescindible.

$\boxed{b)}$

Como D_Λ y $D_{\Lambda^{op}}$ son equivalencias de categorías, a todo submódulo propio de K de M le corresponde un submódulo propio S de $D_\Lambda(M)$, así

$$\begin{aligned} D_\Lambda \text{ es simple } &\iff \forall K \lneq D_\Lambda(M) \;\; K = 0 \\ &\iff S = D_{\Lambda^{op}}(K) \lneq M \cong D_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)) \quad K = 0 = S \\ &\iff \forall S \lneq M \quad S = 0 \\ &\iff M \text{ es simple.} \end{aligned}$$

$\boxed{d)}$

Como $M \in mod(\Lambda)$ y como Λ es un R-álgebra de artín, $M = \coprod_{i=1}^{n} Rx_i$ con $x_i \in M$. Entonces, aplicando 3.3.5, $I_0(M) \cong \coprod_{i=1}^{n} I_0(Rx_i)$, es decir, $I_0(M) \in mod(\Lambda)$.

$\boxed{c)}$

Como $D_\Lambda(M) \in \Lambda^{op}$, entonces aplicando c) en $D_\Lambda(M)$ se tiene el resultado.

$\boxed{e}$

Como Λ es una R-álgebra de artín, $D_\Lambda(M)$ y M son artinianos y finitamente generados, por lo que ambos son de longitud finita. Sea F una serie generalizada de composición de M con longitud mínima, entonces tomaremos por $D_\Lambda(F)$ como la filtración resultante de aplicar D_Λ a cada terimino de F.

Observamos que $D_\Lambda(F_i) \leq D_\Lambda(F_{i-1})$ para toda $0 \leq i \leq l(M)$ y además por ser equivalencia de categorias ${D_\Lambda(F_i)}/{D_\Lambda(F_{i-1})} \cong D_\Lambda\left({F_i}/{F_{i-1}}\right)$ que es simple por b), así $D_\Lambda(F)$ es una serie generalizada de descomposición de longitud $l(M)$.

Análogamente $D_{\Lambda^{op}}(G)$ con G una serie generalizada de composición de $D_\Lambda(M)$ define una serie generalizada de composición de longitud $l(D_{\Lambda^{op}}(G))$ en M, por lo que $l_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)) = l_\Lambda(M)$. □

Ej 99. Sean Λ una R-álgebra de Artin, $D_\Lambda = Hom_R(-, I) : mod(\lambda) \to mod(\lambda^{op})$ la dualidad usual, $M \in mod(\Lambda)$ y $N \in mod(\Lambda^{op})$. Entonces

a) $(ann_\Lambda(M))^{op} = ann_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M))$;

b) $ann_\Lambda(D_{\Lambda^{op}}(N))^{op} = ann_{\Lambda^{op}}(N)$.

Demostración. Recordemos que $D_\Lambda(M) \in mod(\Lambda^{op})$ via la acción $\lambda^{op} \bullet f$, con $\lambda^{op} \bullet f(m) := f(\lambda m)$ y λm dado por la acción de λ sobre M. Sea

$\lambda \in \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda \in ann_\Lambda(M) &\Longrightarrow \lambda m = 0, \forall\ m \in M \\
&\Longrightarrow f(\lambda m) = f(0) = 0, \forall\ m \in M, \forall\ f \in D_\Lambda(M) \\
&\Longrightarrow \lambda^{op} \bullet f = 0, \forall\ f \in D_\Lambda(M) \\
&\Longrightarrow \lambda \in \left(ann_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M))\right)^{op} \\
&\Longrightarrow ann_\Lambda(M) \subseteq \left(ann_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M))\right)^{op}, \qquad (*) \\
\therefore\ & (ann_\Lambda(M))^{op} \subseteq ann_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)).
\end{aligned}$$

Dado que Λ es un álgebra de Artin arbitraria y M es un Λ-módulo arbitrario, le contención (*) es válida para Λ^{op} y $D_\Lambda(M) \in mod(\Lambda^{op})$, de modo que

$$\begin{aligned}
ann_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)) &\subseteq \left(ann_\Lambda(D_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)))\right)^{op} \\
&= ann_\Lambda(M)^{op}.
\end{aligned}$$

$\boxed{b)}$ Se sigue de $a)$ aplicado a $D_{\Lambda^{op}}(N) \in mod(\Lambda)$.

□

Ej 100.

Ej 101. Sean Λ una R-álgebra de Artin, ${}_\Lambda S$ simple y $e = e^2 \in \Lambda$ primitivo. Pruebe que:

a) $\Lambda e \cong P_0(S) \Leftrightarrow e \cdot S \neq 0$

b) $\varphi : Hom_\Lambda(\Lambda e, \Lambda) \longrightarrow e\Lambda$, con $\varphi(f) = f(e)$, es un Λ^{op}-isomorfismo.

c) $\Lambda e \cong P_0(S) \Leftrightarrow e\Lambda \cong P_0(D_\Lambda(S))$.

Demostración. $\boxed{\text{a)}}\boxed{\Rightarrow)}$ Dado que $\Lambda e \cong P_0(S)$, se tiene que $top(\Lambda e) \cong top(P_0(S)) \cong top(S)$ por la **proposición 2.8.7.a)**. Ademas, en virtud de que S es simple, $top(S)$ es simple. Más aún, $top(S) = S/rad(S) \cong S$. De esta forma, $S \cong top(\Lambda e)$. Entonces $e \cdot S \cong e \cdot top(\Lambda e) \neq 0$.
$\therefore e \cdot S \neq 0$.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Primero, como e es idempotente primitivo, $\Lambda e \in \mathcal{P}(\Lambda)$ es inescindible. Además, como $e \cdot S \neq 0$, se tiene que $top(P_0(S)) \cong S \cong top(\Lambda e)$. Finalmente, por el **teorema 2.8.10.b)**, $P_0(S) \cong \Lambda e$.

$\boxed{\text{b)}}$ Comencemos observando que $Hom_\Lambda(\Lambda e, \Lambda)$ y $e\Lambda$ tienen estructura de Λ^{op}-módulo, vía $\lambda^{op} f(re) = f(\lambda re)$ y $\lambda^{op} er = er\lambda$, respectivamente.

Veremos que φ es un morfismo de Λ^{op}-módulos. En efecto:

a) Sean $f, g \in Hom_{\Lambda}(\Lambda e, \Lambda)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= (f+g)(e)\\ &= f(e) + g(e)\\ &= \varphi(f) + \varphi(g)\end{aligned}$$

b) Sean $\lambda \in \Lambda$ y $f \in Hom_{\Lambda}(\Lambda e, \Lambda)$. Luego,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda^{op} f) &= (\lambda^{op} f)(e)\\ &= \lambda^{op} f(e)\\ &= \lambda^{op} \varphi(f)\end{aligned}$$

Por lo que φ es un morfismo.

Por último, probaremos que φ es un isomorfismo. En efecto:

a) Sea $f \in Ker(\varphi)$. Entonces $0 = \varphi(f) = f(e)$. De modo que $e \in Ker(f)$. Lo cuál implica que $Ker(f) = \Lambda e$. Así, $f = 0$. $\therefore \varphi$ es mono.

b) Sea $\lambda \in \Lambda$. Entonces $e\lambda \in \Lambda$. Ahora definimos $f : \Lambda e \longrightarrow \Lambda$ como $f(re) = e\lambda r$. De esta forma, $\varphi(f) = f(e) = e\lambda$. $\therefore \varphi$ es epi.

$\therefore \varphi$ un isomorfismo.

$\boxed{\text{c)}}$ Este inciso es consecuencia de los anteriores.

$\boxed{\Rightarrow)}$ Dado que $\Lambda e \cong P_0(S)$, se tiene que $Hom_{\Lambda}(\Lambda e, \Lambda) \cong Hom_{\Lambda}(P_0(S), \Lambda)$. Ahora, por definición del funtor $\_^*$ se tiene que $Hom_{\Lambda}(\Lambda e, \Lambda) \cong P_0(S)^*$. Por otro lado, por el inciso anterior, $e\Lambda \cong Hom_{\Lambda}(\Lambda e, \Lambda) \cong P_0(S)^*$. Por el **teorema 3.5.7.b)**, $I_0(S) \cong D_{\Lambda^{op}}\left(P_0(S)^*\right) \cong D_{\Lambda^{op}}(e\Lambda)$. Aplicando el funtor de Nakayama, se tiene que

$$\begin{aligned}P_0(D_{\Lambda}(S)) &\cong \mathcal{N}^{-1}(I_0(D_{\Lambda}(S)))\\ &\cong D_{\Lambda}(I_0(S))\\ &\cong D_{\Lambda} D_{\Lambda^{op}}(e\Lambda)\\ &\cong e\Lambda\end{aligned}$$

$\therefore P_0(D_{\Lambda}(S)) \cong e\Lambda$.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Suponga que $e\Lambda \cong P_0(D_{\Lambda}(S))$. Luego $top(D_{\Lambda}(S)) \cong top(P_0(D_{\Lambda}(S))) \cong top(e\Lambda)$. Como $e \cdot top(e\Lambda) \neq 0$, entonces $e \cdot top(P_0(D_{\Lambda}(S))) \neq 0$. De este modo, $e \cong D_{\Lambda}(S) \neq 0$. Lo cual implica que $eS \neq 0$. Por el inciso *a*), $\Lambda e \cong P_0(S)$. $\square$