# Lista 4

Arruti, Sergio, Jesús

**Ej 48.**

**Ej 49.**

**Ej 50.** Sean $f\colon B \to C$ en $Mod(R)$ y $g\colon B \longrightarrow B$ tales que $fg = f$. Pruebe que: $g\colon f \longrightarrow f$ es un isomorfismo en ${Mod(R)}/{C}$ si y sólo si $g\colon B \longrightarrow B$ es un isomorismo en $Mod(R)$.

*Demostración.* $g\colon f \longrightarrow f$ es un isomorfismo en ${Mod(R)}/{C}$
$\iff \quad \exists g^{-1}\colon f \longrightarrow f$ tal que $g^{-1}g = 1_f$ y $gg^{-1} = 1_f$
$\iff \quad \exists g^{-1}\colon f \longrightarrow f$ tal que $g^{-1}g = Id_B$ y $gg^{-1} = Id_B$
$\iff \quad \exists g^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(B,B)$ tal que $g^{-1}g = Id_B$, $gg^{-1} = Id_B$y $f = fg^{-1}$
$\iff \quad g\colon B \longrightarrow B$ es isomorfismo en $Mod(R)$ tal que $fg = f$. $\square$

**Ej 51.**

**Ej 52.**

**Ej 53.** Sean $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{f'} M$ en $Mod(R)$ tal que $ff' = 1_N$. Pruebe que $M = Ker(f) \oplus Im(f')$.

*Demostración.* Como $ff' = 1_N$, entonces $Ker(f') = 0$ y $Im(f) = N$, es decir, $f'$ es monomorfismo, $f$ es epimorfismo y $Im(f') + Ker(f) \leq M$.
Si $x \in Im(f') \cap Ker(f)$ entonces existe $y \in N$ tal que $f'(y) = x$ y además $f(x) = 0$ entonces $0 = f(x) = ff'(y) = 1_N(y)$ por lo que $x = 0$ y así $Im(f) \cap Ker(f) = 0$.

Si $x \in M$ entoces $f(x - f'f(x)) = f(x) - f(x) = 0$, y
$x = (x - f'f(x)) + f'f(x) \in Ker(f) + Im(f')$. $\square$

**Ej 54.**

**Ej 55.**

**Ej 56.** Sean $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon B \longrightarrow B$ en $Mod(R)$ tal que $gf = f$. Prueba que

$$g\colon f \xrightarrow{\sim} f \ \text{ en } Mod(R)\backslash A \quad \iff \quad g\colon B \xrightarrow{\sim} B \ \text{ en } Mod(R).$$

*Demostración.* $g\colon f \xrightarrow{\sim} f$ en $Mod(R)\backslash A$
$\iff \exists g^{-1}\colon f \longrightarrow f$ tal que $g^{-1}g = 1_f$ y $gg^{-1} = 1_f$
$\iff \exists g^{-1}\colon f \longrightarrow f$ tal que $g^{-1}g = Id_B$ y $gg^{-1} = Id_B$
$\iff \exists g^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(B,B)$ tal que $g^{-1}g = Id_B$, $gg^{-1} = Id_B$ y $f = g^{-1}f$
$\iff g\colon B \longrightarrow B$ es isomorfismo en $Mod(R)$ tal que $gf = f$. □

**Ej 57.**

**Ej 58.**

**Ej 59.** Sean $F\colon A \longrightarrow B$ un funtor contravariante aditivo entre categorías pre-aditivas. Pruebe que si $F$ es fiel y pleno, entonces
$F\colon End_{\mathcal{A}}(A) \longrightarrow End_{\mathcal{B}}(F(A))^{op}$ es isomorfismo de anillos.

*Demostración.* Como $F$ es funtor contravariante aditivo, entonces es un morfismo de grupos abelianos. Considerando la composición, tenemos que $End_{\mathcal{A}}(A)$ y $End_{\mathcal{B}}(F(A))$ son anillos, así $End_{\mathcal{A}}(F(A))^{op}$ es anillo.

Por definición de funtor contravariate para cada $f, g \in End_{\mathcal{A}}(A)$ se tiene que

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f) \quad \text{y} \quad F(1_A) = 1_{F(A)} \quad \forall A \in Obj(\mathcal{A}).$$

Entonces $F$ es morfismo de anillos entre $End_{\mathcal{A}}(A)$ y $End_{\mathcal{B}}(F(A))^{op}$, y como $F$ es fiel y pleno, la correspondencia debe ser biyectiva, es decir, $F$ es un isomorfismo de anillos. □

**Ej 60.**

**Ej 61.**

**Lemma***
(Anderson, Fuller) 16.6
El funtor $\mathrm{Hom}_R(M,Y)$ es exacto izquierdo. En particular si $U$ es un $R$-módulo, entonces para cada sucesión exacta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$
en $Mod(R)$ las sucesiones $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(U,K) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(U,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(U,N) \longrightarrow 0$
y $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M,Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M,Z) \longrightarrow 0$
son exactas

**Ej 62.** Para $M \in Mod(R)$ pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $M$ es proyectivo.

b) Toda sucesión exacta $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$ se escinde.

c) $M$ es isomorfo a un sumando directo de $R$-módulos libre.

d) Para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$, se tiene que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M,Y) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(M,Z) \longrightarrow 0$$

es exacta en $Mod(\mathbb{Z})$, donde $f_* = \mathrm{Hom}_R(M,f)$ y $g_* = \mathrm{Hom}_R(M,g)$.

*Demostración.* $\boxed{a) \Rightarrow b)}$
Sea $M$ proyectivo y $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $Mod(R)$. Como $Y \xrightarrow{h} M$ es epi, entonces el morfismo $I_M\colon M \longrightarrow M$ se puede factorizar a través de $h$, es decir, existe $g\colon M \longrightarrow Y$ tal que $Id_M = hg$. Por lo tanto $h$ es split-epi y por el ejercicio 54 la sucesión se escinde. $\boxed{b) \Rightarrow c)}$
Sea $F = \bigoplus_{y \in M} Ry$ el módulo libre generado por los elementos de $M$, entonces existe un epimorfismo $g\colon F \longrightarrow M$, por lo que
$0 \longrightarrow Ker(g) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ es exacta con $i$ la inclusión.
Por hipótesis esta sucesión exacta se escinde, por lo tanto $M \oplus Ker(g) = F$, es decir, $M$ es un sumando directo de un módulo libre.
$\boxed{c) \Rightarrow a)}$
Supongamos que tenemos el siguiente diagrama con $g$ epi:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[u, "h"] & \end{tikzcd}$$

Por c) sabemos que existe $F, K$ módulos tales que $M \oplus K = F$ con $F$ un móduulo libre. Ahora, como todo módulo libre es proyectivo y considerando a $\pi\colon F \longrightarrow M$, se tiene que existe $f\colon F \longrightarrow X$ tal que $h\pi = fg$, así $h\pi i = gfi$ con $i$ la inclusión de $M$ en $F$, por lo que $h = g \circ f_0$ con $f_0\colon M \longrightarrow X$.
$\boxed{a) \iff d)}$
Por el lema* la condición d) se cumple si y sólo si por cada epimorfismo
$Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} 0$ la sucesión $\mathrm{Hom}_R(M,Y) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M,Z) \longrightarrow 0$
es exacta. Pero $f_*$ es epi si y sólo si por cada $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(M,Z)$ existe un $\hat{\gamma} \in \mathrm{Hom}_R(U,M)$ tal que $\gamma = f_*(\hat{\gamma}) = f\hat{\gamma}$.

$\square$

**Ej 63.**

**Ej 64.**

**Ej 65.** Para $M \in Mod(R)$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) $M$ es inyectivo.

b) Toda sucesión exacta $0 \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$ se escinde.

c) Para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$, se tiene que

$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Z, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(Y, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(X, M) \longrightarrow 0$

es exacta en $Mod(\mathbb{Z})$, donde $f^* = \mathrm{Hom}_R(f, M)$ y $g^* = \mathrm{Hom}_R(g, M)$.

*Demostración.* $\boxed{a) \Rightarrow b)}$

Sea $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ exacta en $Mod(R)$. Como $f$ es mono, entonces, considerando $I_M : M \longrightarrow M$, tenemos que existe $h: M \longrightarrow Y$ tal que $I_M$ se factoriza de $f$, es decir, $I_M = hf$ por lo tanto $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ es split-mono y por el ejercicio 54 se escinde.

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$

Sean $X, Y$ $R$-módulos y $f: X \longrightarrow Y$ mono. Si $h \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & M \arrow[u, "h"] & \end{tikzcd}$$

que se extiende a un pushout

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & Y \arrow[d, "h'"] \\ & M \arrow[r, "f'"'] & D \end{tikzcd}$$

donde $D = ({}^{X \oplus Y}\!/_{W})$, $W = \{(fa - ga) : a \in R\}$, $h'(b) = (0, b) + W$ y $g'(c) = (c, 0) + W$.

Así $f'$ es mono. Por hipótesis existe un morfismo $\beta: D \longrightarrow M$ con $\beta f' = 1_M$. Definamos $g = \beta h'$ entonces $g: Y \longrightarrow M$ y $gf = \beta h' f = \beta f' h = h$, por lo que $M$ es inyectivo.

$\boxed{a) \iff c)}$

Como $\mathrm{Hom}_R(\cdot, M)$ es contravariante exacto izquierdo, es suficiente mostrar que $M$ es inyectivo si y sólo si $\mathrm{Hom}_R(\cdot, M)$ convierte monomorfismos en epimorfismos:

Si $\alpha: A \longrightarrow B$ es mono, entonces $\alpha^*: \mathrm{Hom}_R(B, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, M)$ es epi si y sólo si para cada $f \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ existe $g \in \mathrm{Hom}_R(B, M)$ tal que $\alpha^*(g) = f$, y esto pasa si y sólo si para cada $f \in \mathrm{Hom}_R(A, M)$ existe $g \in \mathrm{Hom}_R(B, M)$ tal que $g\alpha = f$, es decir, $M$ es inyectivo. $\square$