Lista 4

Arruti, Sergio, Jesús

Ej 68. Sea R un anillo artiniano (noetheriano) a izquierda. Pruebe que $\forall M \in mod(R)$, M es artiniano (noetheriano).

Demostración. Sea M un R-módulo finitamente generado, como $\bigoplus_{m\in M} Rm$ genera a M entonces existe un subconjunto finito A de M tal que $M \bigoplus_{m\in A} Rm$, por lo que si $m_0 \in A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow Rm_0 \xrightarrow{i_0} M \xrightarrow{\pi_0} \bigoplus_{m\in A\setminus\{m_0\}} Rm \longrightarrow 0.$$

es exacta, donde i_0 y π_0 son la inclusión natural y proyeccón natural respectivamente.
Ahora, si R es artiniano (noetheriano) entonces Rm_0 y $\bigoplus_{m\in A\setminus\{m_0\}} Rm$ también son artinianos (noetherianos) por ser A finito.Y por la proposición 10.12 del libro de Anderson-Fuller, M es artiniano (noetheriano). □

Ej 69.

Ej 70.

Ej 71. Para un anillo R y $M \in Mod(R)$, pruebe que

a) Si $e \in End({}_RM)$ es tal que $e^2 = e$, entonces $M = eM \oplus (1-e)M$ y $eM = \{m \in M \,|\, e(m) = m\}$.

b) Sean $M_1, M_2 \in \mathscr{L}(M)$. Si $M = M_1 \oplus M_2$, entonces existe $e \in End({}_RM)$ tal que: $e^2 = e$, $eM = M_1$ y $(1-e)M = M_2$.

Demostración. $\boxed{a)}$
Supongamos $x \in M \cap (1-e)M$, entonces $x = ey = (1-e)z$, es decir, $ey = z - ez$ por lo que $e(y+z) = z$,
Así

$$x = (1-e)(e(y+z)) = e(y+z) - e^2(y+z) = e(y+z) - e(y-z) = 0.$$

por lo tanto $M \cap (1-e)M = \{0\}$.

Sea $x \in M$ entonces $x = (x-ex)+ex$ donde $(x-ex) = (1-e)x \in (1-e)M$ y $\quad ex \in eM$. Así $x \in eM \oplus (1-e)M$.

Por último, sea $y \in eM$ entonces $y = ex$ para alguna $x \in M$, y por lo anterior, $e(y) = eex = ex = y$. Así $eM = \{m \in M \mid e(m) = m\}$.

$\boxed{b)}$

Sea $e = \mu_1\pi_1$ donde $\pi \colon M \longrightarrow M_1$ es la proyección canónica y $\mu_1 \colon M_1 \longrightarrow M$ es la inclusión canónica. Entonces $\pi_1\mu_1 = Id_{M_1}$, por lo que $e^2(m_1) = \mu_1\pi_1\mu_1\pi_1(m_1) = \mu_1\pi_1(m_1) = e(m_1) \quad$ para toda $m_1 \in M_1$.

Sea $m \in M$ entonces $e(m) = \mu_1\pi_1(m) = \mu_1(\pi_1(m)) \in M_1$, por lo que $eM \subseteq M_1$ y todo elemento $x \in M_1$ cumple que
$e(x) = \mu_1\pi_1(x) = \mu_1(x) = x$ por lo que $M_1 = eM$.

Por otra parte, por a), $M = M_1 \oplus (1-e)M$ y por hipótesis $M = M_1 \oplus M_2$, entonces $M_2 = (1-e)M$ pues si $x \in M$, existe $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ y $m_3 \in M$ tales que $x = m_1 + m_2 = m_1 + (1-e)m_3$ por lo que $m_2 = (1-e)m_3$. $\square$

Ej 72.

Ej 73.

Ej 74. Para un anillo artiniano a izquierda R, pruebe que R es local $\iff$ R^{op} es local.

Demostración. Por definición un anillo A es local si $A \neq 0$ y satisface alguna de las condiciones de 2.7.20 (en particular c) de esta proposición). Dado que $R^{op} - U(R^{op}) = R - U(R)$ y $J(R) = J(R^{op})$, entonces R es local si y sólo si

$$R - U(R) = J(R)$$

si y sólo si

$$R^{op} - U(R^{op}) = J(R^{op})$$

si y sólo si $\quad R^{op}$ es local. $\square$

Ej 75.

Ej 76.

Ej 77. Para un anillo R y $M \in Mod(R)$, pruebe que

a) M es proyectivo $\iff$ $pd(M)$=0.

b) M es inyectivo $\iff$ $id(M)$=0.

Demostración. $\boxed{a)}$
Supongamos M es proyectivo, entonces tenemos la sucesión exacta

$$P_\bullet:\ \ldots \longrightarrow P_1 = 0 \xrightarrow{0} M = P_0 \xrightarrow{Id_M} M \longrightarrow 0$$

donde, como M es proyectivo, $P_\bullet$ es resolución proyectiva. Así $pd(M) = l(P_\bullet) = 0$.

Por otra parte, si $pd(M) = 0$ entonces existe resulución proyectiva $P_\bullet$ tal que $l(P_\bullet) = 0$, es decir, se tiene la siguiente sucesión exacta con P_0 proyectivo,

$$P_\bullet:\ \ldots \longrightarrow P_1 = 0 \xrightarrow{0} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

pero por el ejercicio 38 esto implica que P_0 es isomorfo a M, por lo tanto M es proyectivo.
$\boxed{b)}$
Supongamos M es inyectivo, entonces tenemos la siguiente corelación inyectiva:

$$I_\bullet: 0 \longrightarrow M \xrightarrow{Id_M} M = P_0 \longrightarrow 0 = P_1 \longrightarrow \ldots$$

entonces $l(I_\bullet) = 0$ y por lo tanto $id(M) = 0$.

Por otra parte, si $id(M) = 0$ entonces existe una correlación inyectiva de longitud cero, es decir, una sucesión exacta de la siguiente forma:

$$I_\bullet: 0 \longrightarrow M \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0 = P_1 \longrightarrow \ldots$$

Como la sucesión es exacta, entonces por el ejercicio 38 se tiene que M es isomorfo a P_0 el cual es inyectivo, por lo tanto M es inyectivo. □