# Lista 5

Arruti, Sergio, Jesús

**Ej 68.** Sea $R$ un anillo artiniano (noetheriano) a izquierda. Pruebe que $\forall M \in mod(R)$, $M$ es artiniano (noetheriano).

*Demostración.* Sea $M$ un $R$-módulo finitamente generado, como $\bigoplus\limits_{m\in M} Rm$ genera a $M$ entonces existe un subconjunto finito $A$ de $M$ tal que $M = \bigoplus\limits_{m\in A} Rm$, por lo que si $m_0 \in A$, la sucesión

$$0 \longrightarrow Rm_0 \xrightarrow{i_0} M \xrightarrow{\pi_0} \bigoplus_{m\in A\setminus\{m_0\}} Rm \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $i_0$ y $\pi_0$ son la inclusión natural y proyeccón natural respectivamente.
Ahora, si $R$ es artiniano (noetheriano) entonces $Rm_0$ y $\bigoplus\limits_{m\in A\setminus\{m_0\}} Rm$ también son artinianos (noetherianos) por ser $A$ finito. Por la proposición 10.12 del libro de Anderson-Fuller, $M$ es artiniano (noetheriano). $\square$

**Ej 69.** Sean $R$ artiniano a izquierda y $M \in mod\,(R)$. Entonces $\forall\ N \in \mathscr{L}\,(M)$

$$M/N \text{ es semisimple } \implies rad\,(M) \subseteq N.$$

*Demostración.* Sea $\mathscr{R} := J(R)$. Como $M \in mod\,(R)$, entonces por el Ej. 18 $\exists\ n \in \mathbb{N}$ y $f : R^n \to M$ un epimorfismo en $Mod(R)$. Así, sí $\pi$ es el epimorfismo canónico en $Mod(R)$ de $M$ en $M/N$, se tiene que $\pi f : R^n \to M/N$ es un epimorfismo en $Mod(R)$ y por lo tanto, nuevamente por el Ej. 18, $M/N \in mod(R)$ . Por lo anterior, dado que $S \in mod(R)$ es semisimple $\iff$ $\mathscr{R}S = 0$ (véase 2.7.13 (c)) y que $rad\,(M) = \mathscr{R}M$ (véase 2.7.17 (b)), basta con verificar la siguiente implicación:

$$\mathscr{R}M/N = 0 \implies \mathscr{R}M \subseteq N.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{R}M &\implies \exists\, t \in \mathbb{N} \text{ t.q. } x = \sum_{i=1}^{t} r_i m_i,\ r_i \in \mathscr{R} \text{ y } m_i \in M\ \forall\, i \in [1,t] \\ &\implies \pi(x) = \sum_{i=1}^{t} r_i \pi(m_i),\ r_i \in \mathscr{R} \text{ y } \pi(m_i) \in {}^{M}\!/_{N}\ \forall\, i \in [1,t] \\ &\implies \pi(x) \in \mathscr{R}{}^{M}\!/_{N} = 0 \\ &\implies x \in Ker(\pi) = N. \\ \implies \mathscr{R}M \subseteq N. \end{aligned}$$

□

**Ej 70.** Sea $R$ un anillo no trivial. Pruebe que si todo $x \in R \setminus (0)$ es invertible a izquierda, entonces $R$ es un anillo con división.

*Demostración.* Sea $0 \neq x \in R$. Por hipótesis, existe $y \in R$ tal que $yx = 1$. Como $R$ no es trivial, $y \neq 0$, por lo que existe $z \in R$ tal que $zy = 1$. Entonces

$$z = z \cdot 1 = z \cdot (yx) = (zy) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

Por tanto, $x$ es invertible. $\therefore R$ es anillo con división. □

**Ej 71.** Para un anillo $R$ y $M \in Mod(R)$, pruebe que

a) Si $e \in End({}_RM)$ es tal que $e^2 = e$, entonces $M = eM \oplus (1-e)M$ y $eM = \{m \in M \mid e(m) = m\}$.

b) Sean $M_1, M_2 \in \mathscr{L}(M)$. Si $M = M_1 \oplus M_2$, entonces existe $e \in End({}_RM)$ tal que: $e^2 = e$, $eM = M_1$ y $(1-e)M = M_2$.

*Demostración.* $\boxed{a)}$
Supongamos $x \in M \cap (1-e)M$, entonces $x = ey = (1-e)z$, es decir, $ey = z - ez$ por lo que $e(y+z) = z$,
Así

$$x = (1-e)(e(y+z)) = e(y+z) - e^2(y+z) = e(y+z) - e(y-z) = 0.$$

por lo tanto $M \cap (1-e)M = \{0\}$.

Sea $x \in M$ entonces $x = (x-ex)+ex$ donde $(x-ex) = (1-e)x \in (1-e)M$ y $ex \in eM$. Así $x \in eM \oplus (1-e)M$.

Por último, sea $y \in eM$ entonces $y = ex$ para alguna $x \in M$, y por lo anterior, $e(y) = eex = ex = y$. Así $eM = \{m \in M \mid e(m) = m\}$.

$\boxed{b)}$

Sea $e = \mu_1\pi_1$ donde $\pi\colon M \longrightarrow M_1$ es la proyección canónica y $\mu_1\colon M_1 \longrightarrow M$ es la inclusión canónica. Entonces $\pi_1\mu_1 = Id_{M_1}$, por lo que $e^2(m_1) = \mu_1\pi_1\mu_1\pi_1(m_1) = \mu_1\pi_1(m_1) = e(m_1)$ para toda $m_1 \in M_1$.

Sea $m \in M$ entonces $e(m) = \mu_1\pi_1(m) = \mu_1(\pi_1(m)) \in M_1$, por lo que $eM \subseteq M_1$ y todo elemento $x \in M_1$ cumple que
$e(x) = \mu_1\pi_1(x) = \mu_1(x) = x$ por lo que $M_1 = eM$.

Por otra parte, por a), $M = M_1 \oplus (1-e)M$ y por hipótesis $M = M_1 \oplus M_2$, entonces $M_2 = (1-e)M$ pues si $x \in M$, existe $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ y $m_3 \in M$ tales que $x = m_1 + m_2 = m_1 + (1-e)m_3$ por lo que $m_2 = (1-e)m_3$. □

**Ej 72.** Sean $f : P \to M$ y $g : Q \to M$ cubiertas proyectivas de $M \in Nod\,(R)$. Entonces $\exists\ h : P \to Q$ isomorfismo en $Mod\,(R)$ tal que $gh = f$.

*Demostración.* Se tiene el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\ h"'] \arrow[d, "f"] \\ Q \arrow[r, "g"'] & M \end{tikzcd}$$

con $P$ proyectivo y $g$, en partícular por ser un epi-esencial, un epimorfismo en $Mod(R)$. Por lo tanto $\exists\ h \in Hom_R\,(P,Q)$ tal que

$$gh = f. \qquad (*)$$

Así pues, basta con verificar que $h$ es un isomorfismo en $Mod(R)$. De (*) se sigue que, como $g$ es un epi-esencial y $f$ es en partícular un epimorfismo en $Mod(R)$, $h$ es un epimorfismo en $Mod(R)$. Con lo cual, si $i$ es la inclusión natural de $Ker\,(h)$ en $P$, la sucesión

$$0 \longrightarrow Ker\,(h) \xrightarrow{\ i\ } P \xrightarrow{\ h\ } Q \longrightarrow 0$$

es exacta. Más aún es una sucesión exacta que se parte, puesto que $Q$ es proyectivo (Ej. 62), con lo cual $h$ es un split-epi (Ej. 54) i.e. $\exists\ j \in Hom_R\,(Q,P)$ tal que $hj = Id_Q$. Notemos que lo anterior garantiza que $j$ es un split-mono y así en partícular es un monomorfismo. Además

$$gh = f \implies fj = g,$$

con lo cual $j$ es un epimorfismo, pues $g$ lo es y $f$ es un epi-esencial. Así $j$ es un isomorfismo en $Mod(R)$ y por lo tanto $h = j^{-1}$ también lo es.

□

**Ej 73.** Para un anillo artiniano a izquierda $R$, pruebe que para todo $M \in mod\,(R)$, $top\,(P_0\,(M)) \cong top\,(M)$.

*Demostración.* Sea $M \in mod\,(R)$. En virtud de que $R$ es un anillo artiniano a izquierda, $M$ posee una cubierta proyectiva $\varepsilon_M : P_0\,(M) \longrightarrow M$. De esta forma, $\varepsilon_M$ es epi-esencial. Entonces, evocando a la **proposición 2.8.1**, tenemos que $Ker\,(\varepsilon_M) \subseteq rad\,(M)$ y

$$\overline{\varepsilon_M} : P_0\,(M)\,/rad\,(P_0\,(M)) \longrightarrow M/rad\,(M)$$

es un isomorfismo. Luego, $\overline{\varepsilon_M} : top\,(P_0\,(M)) \longrightarrow top\,(M)$ es isomorfismo. $\therefore top\,(P_0\,(M)) \cong top\,(M)$. □

**Ej 74.** Para un anillo artiniano a izquierda $R$, pruebe que $R$ es local $\iff$ $R^{op}$ es local.

*Demostración.* Por definición un anillo $A$ es local si $A \neq 0$ y satisface alguna de las condiciones de 2.7.20 (en particular c) de esta proposición). Dado que $R^{op} - U(R^{op}) = R - U(R)$ y $J(R) = J(R^{op})$, entonces $R$ es local si y sólo si

$$R - U(R) = J(R)$$

si y sólo si

$$R^{op} - U(R^{op}) = J(R^{op})$$

si y sólo si $R^{op}$ es local. □

**Ej 75.** Sean $R$ un anillo no trivial.

*a*) Sean $e \in R \setminus \{0\}$ un idempotente, $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ una familia en $\mathscr{L}\,(Re)$ y $\mathcal{A} := \{e_i\}_{i=1}^{n} \subseteq R$. Si $Re = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} P_i$ $\forall\ i \in [1,n]$ $e_i \in P_i$ y $e = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$, entonces $\mathcal{A}$ es una familia de idempotentes ortogonales. Más aún $\forall\ i \in [1,n]$ $Re_i = P_i$.

*b*) Si $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de idempotentes ortogonales en $R$ y $e := \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$, entonces $\forall\ i \in [1,n]$ $Re_i \in \mathscr{L}\,({}_R Re)$ y $Re = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} Re_i$.

*Demostración.* $\boxed{a)}$ Sea $u \in [1,n]$. Notemos primeramente que como $e_u \in Re$, entonces $\exists\ r_u \in R$ tal que $e_u = r_u e$, y así

$$\begin{aligned} e_u e &= (r_u e)\,e = r_u\,(ee) \\ &= r_u e, && e^2 = e \\ &= e_u. \end{aligned}$$

Así

$$
\begin{aligned}
e_u = e_u e = e_u \sum_{i=1}^{n} e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_u e_i \\
&= e_u^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{n} e_u e_i .
\end{aligned}
$$

Como $e_u \in P_u$, $\forall\ i \in [1,n]$ $e_u e_i \in P_i$ y la desomposición en suma en $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i$ es única, por formar $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ una suma directa para $Re$, lo anterior garantiza que $e_u = e_u^2$ y que $\forall\ i \neq u$ $e_u e_i = 0$. Por lo tanto $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de idempotentes ortogonales (f.i.o.).
Por su parte, como $e_u \in P_u \leq Re$ entonces $Re_u \subseteq P_u$, así que basta con probar que $P_u \subseteq Re_u$. Sea $p \in P_u \leq Re$, entonces $\exists\ q \in R$ tal que

$$
\begin{aligned}
p = qe = q \sum_{i=1}^{n} e_i \\
\implies p - qe_u = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{n} qe_i ,
\end{aligned}
$$

con

$$
p - qe_u \in P_u,\ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{n} qe_i \in \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{n} P_i .
$$

Dado que $P_u \cap \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq u}}^{n} P_i = \langle 0 \rangle$, se sigue que $p = qe_u \in Re_u$

$\boxed{b)}$ Sea $r \in R$. Como $\forall\ i \in I$ $Re_i \in Mod(R)$, para verificar que $Re_i \in \mathscr{L}({}_R Re)$ basta con probar que $Re_i \subseteq Re$, y esto último es consecuencia de que si $re_i \in Re_i$ entonces $(re_i)\, e \in Re$ y

$$
\begin{aligned}
(re_i)\, e &= r\,(e_i e) \\
&= r \left( e_i \sum_{j=1}^{n} e_j \right) \\
&= re_i . && \{e_j\}_{j=1}^{n} \text{ es una f. i. o.}
\end{aligned}
$$

Más aún, así se tiene que $\sum\limits_{i=1}^{n} Re_i \subseteq Re$. Notemos que $re = \sum\limits_{i=1}^{n} re_i \in \sum\limits_{i=1}^{n} Re_i$, así para verificar que $Re = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} Re_i$ basta con verificar que esta descomposición es única. Sea $s \in R$ tal que $re = \sum_{i=1}^{n} se_i$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} re_i &= \sum_{i=1}^{n} se_i \\ \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (r-s)\, e_i &= 0. \end{aligned}$$

Sea $j \in [1,n]$. Multiplicando a ambos lados de la igualdad por $e_j$ y empleando nuevamente que $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ es una f. i. o. se obtiene que

$$\begin{aligned} &(r-s)\, e_j = 0,\ \forall\ j \in [1,n] \\ &\Longrightarrow\ re_j = se_j,\ \forall\ j \in [1,n] \end{aligned}$$

y así se tiene lo deseado.

$\square$

**Ej 76.** Sea $R$ un anillo artiniano a izquierda, $\mathcal{R} = J(R)$ y $e, f$ idempotentes en $R$. Pruebe que el morfismo de grupos abelianos $\varphi : eRf \longrightarrow Hom_R(Re, Rf)$, $\varphi(erf)(r'e) = r'erf$ es un isomorfismo. Más aún, la restricción $\varphi\mid_{e\mathcal{R}^m f}$: $e\mathcal{R}^m f \longrightarrow Hom_R(Re, \mathcal{R}^m f)$ es un isomorfismo.

*Demostración.* Sea $\psi : Hom_R(Re, Rf) \longrightarrow eRf$ el morfismo dado por $\psi(\alpha) = e\alpha(e)$. Veremos que $\varphi\psi = 1_{Hom_R(Re,Rf)}$ y $\psi\varphi = 1_{eRf}$.

Sean $\alpha \in Hom_R(Re, Rf)$ y $xe \in Re$. Entonces:

$$\begin{aligned} \varphi\psi(\alpha)(xe) &= \varphi(e\alpha(e))(xe) \\ &= xe\alpha(e) \\ &= \alpha\left(xe^2\right) \\ &= \alpha(xe) \end{aligned}$$

Por lo que $\varphi\psi = 1_{Hom_R(Re,Rf)}$.

Por otro lado, sea $erf \in eRf$. Luego:

$$\begin{aligned} \psi\varphi(erf) &= \psi(\varphi(erf)) \\ &= e\varphi(erf)(e) \\ &= e(erf) \\ &= e^2rf \\ &= erf \end{aligned}$$

De esta forma, $\psi\varphi = 1_{eRf}$. Por tanto, $\varphi$ es un isomorfismo.

Finalmente, probaremos que $\varphi\mid_{e\mathcal{R}^m f}$ es un isomorfismo. Como $R$ es artiniano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{R}^n = 0$. Entonces en un número finito de pasos comprobamos que

$$\varphi\mid_{e\mathcal{R}^m f}\colon e\mathcal{R}^m f \longrightarrow Hom_R(Re, \mathcal{R}^m f)$$
$$\psi\mid_{Hom_R(Re,\mathcal{R}^m f)}\colon Hom_R(Re, \mathcal{R}^m f) \longrightarrow e\mathcal{R}^m f$$

y

$$\varphi\mid_{e\mathcal{R}^m f}\psi\mid_{Hom_R(Re,\mathcal{R}^m f)} = 1_{Hom_R(Re,\mathcal{R}^m f)}$$
$$\psi\mid_{Hom_R(Re,\mathcal{R}^m f)}\varphi\mid_{e\mathcal{R}^m f} = 1_{e\mathcal{R}^m f}$$

Entonces $\varphi\mid_{e\mathcal{R}^m f}$ y $\psi\mid_{Hom_R(Re,\mathcal{R}^m f)}$ son inversos.
$\therefore \varphi\mid_{e\mathcal{R}^m f}$ es un isomorfismo. □

**Ej 77.** Para un anillo $R$ y $M \in Mod(R)$, pruebe que

a) $M$ es proyectivo $\iff$ $pd(M)$=0.

b) $M$ es inyectivo $\iff$ $id(M)$=0.

*Demostración.* $\boxed{a)}$
Supongamos $M$ es proyectivo, entonces tenemos la sucesión exacta

$$P_\bullet\colon \ \dots \longrightarrow P_1 = 0 \xrightarrow{0} M = P_0 \xrightarrow{Id_M} M \longrightarrow 0$$

donde, como $M$ es proyectivo, $P_\bullet$ es resolución proyectiva. Así
$pd(M) = l(P_\bullet) = 0$.

Por otra parte, si $pd(M) = 0$ entonces existe resulución proyectiva $P_\bullet$ tal que $l(P_\bullet) = 0$, es decir, se tiene la siguiente sucesión exacta con $P_0$ proyectivo,

$$P_\bullet\colon \ \dots \longrightarrow P_1 = 0 \xrightarrow{0} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

pero por el ejercicio 38 esto implica que $P_0$ es isomorfo a $M$, por lo tanto $M$ es proyectivo.
$\boxed{b)}$
Supongamos $M$ es inyectivo, entonces tenemos la siguiente corelación inyectiva:

$$I_\bullet\colon 0 \longrightarrow M \xrightarrow{Id_M} M = P_0 \longrightarrow 0 = P_1 \longrightarrow \dots$$

entonces $l(I_\bullet) = 0$ y por lo tanto $id(M) = 0$.

Por otra parte, si $id(M) = 0$ entonces existe una correlación inyectiva de longitud cero, es decir, una sucesión exacta de la siguiente forma:

$$I_\bullet : 0 \longrightarrow M \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0 = P_1 \longrightarrow \dots$$

Como la sucesión es exacta, entonces por el ejercicio 38 se tiene que $M$ es isomorfo a $P_0$ el cual es inyectivo, por lo tanto $M$ es inyectivo. $\square$

**Ej 78.** Sea $R$ un anillo. $R$ es semisimple si y sólo si $gldim\,(R) = 0$.

*Demostración.* Afirmamos que $M$ es proyectivo, $\forall\, M \in Mod\,(R)$, si y sólo sí $gldim\,(R) = 0$. En efecto:
$\boxed{\Longrightarrow}$ Se tiene que si $M$ es proyectivo, entonces por el Ej. 77$a$) $pd\,(M) = 0$. Luego bajo estas condiciones, como por el Teorema 2,9,1 ($a$)

$$gldim\,(R) = \sup_{M \in Mod(R)} \{pd\,\{M\}\},$$

se tiene que $gldim\,(R) = \sup\limits_{M \in Mod(R)} \{0\} = 0$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $M \in Mod\,(R)$. Como en partícular $gldim\,(R)$ es cota superior de $\{pd\,\{M\} \mid M \in Mod\,(R)\}$, entonces $pd\,(M) \leq 0$. En tal caso $pd\,(M) \in \mathbb{N}$ y por tanto $pd\,(M) \geq 0$. Con lo cual $pd\,(M) = 0$, así que, por el Ej. 77$a$), $M$ es proyectivo.
Por la equivalencia previamente demostrada, y dado que por la Proposición 2.6.8

$$M \text{ es proyectivo, } \forall\, M \in Mod\,(R) \iff R \text{ es semisimple,}$$

se tiene lo deseado.

$\square$