Lista 3

Ej 1. Ejercicio 31.

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía en $Mod(R)$. Pruebe que:

a) Para cada $i \in I$, las inclusiones i-ésimas

$$inc_i : M_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} M_i,\ (inc_i\,(x))_t = \{x\ si\ x = t$$

$$0\ si\ x \neq t$$

$$Inc_i : M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i,\ (Inc_i\,(x))_t = (inc_i\,(x))_t$$

son monomorfismos en $Mod\,(R)$.

b) Para cada $i \in I$, las proyecciones i-ésimas

$$Proy_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i,\ Proy_i\,(m) = m_i$$

$$proy_i : \coprod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i,\ proy_i\,(m) = m_i$$

son epimorfismos en $Mod\,(R)$.

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Primero, sean $i \in I$ y $x \in Ker\,(inc_i)$. Entonces $(inc_i\,(x))_t = (0)_t$. Es decir, en cada entrada $inc_i\,(x)$ es 0. En particular, para $t = x$. En consecuencia, $x = 0$. Por tanto, $inc_i\,(x)$ es monomorfismo.

Por otro lado, sean $i \in I$ y $x \in Ker\,(Inc_i)$. De esta forma, $x \in Ker\,(inc_i)$. Como inc_i es monomorfismo, $x = 0$. Por lo que Inc_i también lo es.

$\boxed{\text{(b)}}$ Sea $i \in I$. $Proy_i$ es un epimorfismo. Dado $x \in M_i$, el elemento $m = (Inc_i\,(x))_t \in \prod_{i\in I} M_i$ satisface que $Proy_i\,(m) = x$.

De manera análoga, para cada $i \in I$, la proyección $proy_i$ es un epimorfismo, sustituyendo Inc_i por inc_i. $\square$

Ej 2. Ejercicio 34.
Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ en $Mod\,(R)$, $P \in Mod\,(R)$ y $\{\pi_i : P \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) Existe $\varphi : \prod_{\in I} Mi \longrightarrow P$ en $Mod(R)$ tal que para $i \in I$, $\pi_i \circ \varphi = Proy_i$

b) P y $\{\pi_i : P \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ son un producto para $\{M_i\}_{i\in I}$

Demostración. $\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ Sean $M \in Mod\,(R)$ y $\{f_i : M \longrightarrow M_i\} i \in I$ una familia de morfismos en $Mod\,(R)$. Dado que $\prod_{i\in I} M_i$ es un producto para $\{M_i\}_{i\in I}$, existe un único morfismo $f : M \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ tal que, para cada $i \in I$, $Proy_i \circ f = f_i$. Además, por hipótesis, existe $\varphi : \prod_{\in I} Mi \longrightarrow P$ en $Mod(R)$ tal que para $i \in I$, $\pi_i \circ \varphi = Proy_i$. De modo que

$$\pi_i \circ \varphi \circ f = Proy_i \circ f = f_i$$

Más aún, esta f es única. En efecto, si $g : M \longrightarrow P$ un morfismo tal que, para $i \in I$, $\pi_i \circ \varphi \circ g = f_i$, entonces

$$Proy_i \circ g = \pi_i \circ \varphi \circ g = f_i$$

Como $\prod_{i\in I} M_i$ es un producto para $\{M_i\}_{i\in I}$, $f = g$. En consecuencia, P y $\{\pi_i : P \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ son un producto para $\{M_i\}_{i\in I}$.

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ Observe que $\left\{Proy_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i\right\}_{i\in I}$ es una familia de morfismos en $Mod\,(R)$. En virtud de que P y $\{\pi_i : P \longrightarrow M_i\}_{i\in I}$ son un producto para $\{M_i\}_{i\in I}$, existe un único morfismo $\varphi : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow P$ tal que, para cada $i \in I$, $\pi_i \circ \varphi = Proy_i$. En vista de ésto, se concluye el resultado. $\square$

Ej 3. Ejercicio 37.
Para $M \in f.l.\,(R)$, pruebe que:

a) $l\,(M) = 0$ si y sólo si $M = 0$

b) $l\,(M) = 1$ si y sólo si M es simple

Demostración. $\boxed{\text{(a)}}$ Observe que si $M = 0$, entonces $0 = M_0 = M$ es la única serie de composición de M, salvo repeticiones. De esta manera

$l(M) = 0$. Inversamente, si $l(M) = 0$, entonces la única serie de composición de M, salvo repeticiones, es $0 = M_0 = M$. $\therefore M = 0$.

$\boxed{\text{(b)}}$ Para este inciso suponga que M es un R-módulo simple. En consecuencia, $L(M) = \{0, M\}$. Con lo cual, M tiene una serie de composición $0 = M_0 \leq M_1 = M$. De modo que $l(M) = 1$. Por otro lado, suponga que $l(M) = 1$, y sea $0 = M_0 \leq M_1 = M$ una serie de composición para M. $\therefore M \cong M/0 \cong M_1/M_0$ es simple. $\square$

Ej 4. Ejercicio 40.

Para una sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ en $Mod(R)$, pruebe que: $B \in f.l.(R)$ si y sólo si $A, C \in f.l.(R)$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow)}$ Suponga que $B \in f.l.(R)$. Entonces B tiene una serie de composición $\mathfrak{F}$. Por el **Lema 2.1.1.a)**, tanto $f^{-1}(\mathfrak{F})$ como $g(\mathbb{F})$ son series de composición de A y de C respectivamente. En consecuencia, $A, C \in f.l.(R)$.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Sean $\mathfrak{A} = \{A_i\}_{i=1}^{n}$ y $\mathfrak{C} = \{C_j\}_{j=1}^{m}$ series de composición para A y C, respectivamente. Luego, los $f(A_i)$ y los $g^{-1}(C_j)$ son submódulos de B. Definimos la serie $\mathfrak{B} = \{B_t\}_{t=1}^{m+n}$, donde $B_t = f(A_t)$ si $t \leq n$ y $B_t = g^{-1}(C_{t-n})$ si $n+1 \leq t \leq n+m$.

Ahora, dado que f es un monomorfismo, se tiene que $B_t \cong A_t$, para $t \leq n$. Y por otro lado, el teorema de la correspondencia y el tercer teorema de isomorfismo garantizan que $\dfrac{B_{t+1}}{B_t} = \dfrac{g^{-1}(C_{t+1})}{g^{-1}(C_t)} \cong \dfrac{C_{t-n+1}}{C_{t-n}}$ para cada $n+1 \leq t \leq n+m$. Más aún, tenemos que los cocientes $\dfrac{B_{t+1}}{B_t}$ son simples, toda vez que los cocientes $\dfrac{A_{i+1}}{A_i}$ y $\dfrac{C_{j+1}}{C_j}$ lo son. De esta forma $\mathfrak{B}$ es una serie de composición para B. $\therefore B \in f.l.(R)$ $\square$

Ej 5. Ejercicio 43.

Para $M \in Mod(R)$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) M es artiniano

b) Para toda $\mathfrak{F} \subseteq L(M)$, con $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, existe un elemento mínimo en en $(\mathfrak{F}, \leq)$

Demostración. $\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}}$ Dada $\mathfrak{F}$ una familia no vacía de submódulos de M, sea $N_1 \in \mathfrak{F}$. Suponga que N_1 no es un elemento mínimo de $\mathfrak{F}$, de este modo existe $N_2 \in \mathfrak{F}$ tal que $N_2 \lneqq N_1$. Repitiendo este argumento, obtenemos una cadena de submódulos $N_1 \geq N_2 \geq \cdots$ en $\mathfrak{F}$. En virtud de que M es artiniano, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $t \in \mathbb{N}$, $N_k = N_{k+t}$. $\therefore N_k$ es un elemento mínimo de $\mathfrak{F}$.

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(a)}}$ Sea $N_1 \gneqq N_2 \gneqq \cdots$ una cadena de submódulos de M. Considere $\mathfrak{F} = \{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Entonces, por hipótesis, $\mathfrak{F}$ tiene elementos mínimos. Sea N_k uno de dichos mínimos. Dado que $\mathfrak{F}$ es una cadena, $N_k = N_{k+t}$, para toda $t \in \mathbb{N}$. $\therefore M$ es artiniano. □

Ej 6. Ejercicio 46.
Para $M, N \in f.l.(R)$, pruebe que $M \coprod N \in f.l.(R)$ y que $l(M \coprod N) = l(M) + l(N)$.

Demostración. Primero, del **Ejercicio 40** y de la exactitud de la sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M \coprod N \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$, se tiene que $M \coprod N \in f.l.(R)$, ya que M, N tienen longitud finita. Más aún, dada una serie de composición $\mathfrak{F}$ para $M \coprod N$, el **Lema 2.1.1.b)** garantiza que

$$l_{\mathfrak{F}}\left(M \coprod N\right) = l_{f^{-1}(\mathfrak{F})}(M) + l_{g(\mathfrak{F})}(N)$$

$\therefore l(M \coprod N) = l(M) + l(N)$. □