Lista 4

Arruti, Sergio, Jesús

Ej 79.

Ej 80. Sea Λ una R-Álgebra de Artín y $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $Mod(\Lambda)$ (respectivamente en $mod(\Lambda)$). Pruebe que $\forall X \in Mod(\Lambda)$ (respectivamente $\forall X \in mod(\Lambda)$), se tienen las siguientes sucesiones exactas en $Mod(R)$ (respectivamente en $mod(R)$).

a)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(X, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(X, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_\Lambda(X, C) \longrightarrow 0.$$

b)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(C, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(B, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, X) \longrightarrow 0.$$

donde

$$f_* = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, f)\,, \quad f^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(f, X)$$
$$g_* = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, g) \quad \text{y} \quad g^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(g, X)$$

Demostración. Como Λ es una R-Álgebra de Artín, entonces por el ejercicio 79 Λ es un anillo artiniano, así $\mathrm{Hom}_\Lambda(X, \bullet)$ es un funtor exacto covariante y $\mathrm{Hom}_\Lambda(\bullet, X)$ es un funtor exacto contravariante. Por esto se tiene que las sucesiones a) y b) son exactas en $Mod(\Lambda)$, y por 3.1.1 se tiene que para todo $J, K \in Mod(\Lambda)$, $\mathrm{Hom}_\Lambda(J, K)$ es un R-submódulo de $\mathrm{Hom}_R(J, K)$. Así a) y b) son sucesiones exactas en $Mod(R)$.

Por otra parte si nuestra sucesión es exacta en $mod(\Lambda)$ y $X \in mod(\Lambda)$, por la proposición 3.1.3 y lo anterior, las sucesiones exactas a) y b) estarán compuestas por R-módulos finitamente generados, por lo que a) y b) son sucesiones exactas en $mod(R)$. $\square$

Ej 81.

Ej 82.

Ej 83. Pruebe que para un anillo artiniano a izquierda R, se tiene que $mod({}_RR) = mod(R)$

Demostración. Por definición $mod({}_RR)$ es la subcategoría plena de $mod(R)$ cuyos objetos son los $A \in mod(R)$ tales que existe una sucesión exacta $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$ en $mod(R)$ con $P_1, P_0 \in add(R)$.

Como $mod({}_RR)$ es subcategoría plena de $mod(R)$, basta ver que si $M \in mod(R)$, entonces $M \in mod({}_RR)$.
Sea $M \in mod(R)$ entonces $M = \bigoplus_{m\in A} Rm$ con $A \subset M$ finito, así, considerando $|A| = n$, se tiene la sucesión exacta

$$A_1 \oplus A_2 \oplus M \xrightarrow{\pi_1} A_2 \oplus M \xrightarrow{\pi_2} M \longrightarrow 0.$$

Donde $A_1 \cong A_2 \cong R$ y π_1, π_2 son proyecciones canonicas, en particular A_1 y A_2 son objetos en $add(R)$ pues $A_1 \coprod A_2 \cong R \coprod R = R^2$, así $M \in mod({}_RR)$.

$\square$

Ej 84.

Ej 85.

Ej 86. ??????

Ej 87.

Ej 88.

Ej 89. Para un anillo R, pruebe que la correspondencia
$Soc : Mod(R) \longrightarrow Mod(R)$ donde

$$\begin{array}{ccc} X & & Soc(X) \\ \Big\downarrow f & \longrightarrow & \Big\downarrow Soc(f):=f|_{Soc(X)} \\ Y & & Soc(Y) \end{array}$$

es un funtor aditivo que conmuta con productos arbitrarios y preserva monomorfismos.

Demostración. Funtor aditivo:
Sean $f, g \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$ con $X, Y \in Mod(R)$, entonces $f+g \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$ y $F(X \xrightarrow{f+g} Y) = (Soc(X) \xrightarrow{(f+g)|_{Soc(X)}} Soc(Y))$ pero

$$F(f+g) = (f+g)|_{Soc(X)} = f|_{Soc(X)} + g|_{Soc(X)} = F(f) + F(g),$$

pues por 3.3.6 b), $f(Soc(X)) \subset Soc(Y)$ y $g(Soc(X)) \subset Soc(Y)$.

Conmuta con coproductos arbitrarios:

Basta mostrar que $\coprod_{i\in A} Soc(M_i)$ es el submódulo simple más grande contenido en $\coprod_{i\in A} M_i$.

Supongamos N es semisimple en $\coprod_{i\in A} M_i$, entonces $N = \bigoplus_{j\in F} S_j$ donde S_k es simple en $\coprod_{i\in A} M_i$ para toda $k \in A$ y $F \neq \emptyset$.

Como todo simple en $\coprod_{i\in A} M_i$ es de la forma $\coprod_{i\in A} S_i$ con $S_i \leq M_i$ simple o cero, entonces

$$N = \bigoplus_{i\in F} \coprod_{j\in A} S_{ij} = \coprod_{j\in A} \bigoplus_{i\in F} S_{ij} \subset \coprod_{i\in A} Soc(M_i),$$

pues $Soc(M_i)$ es el submódulo semisimple mas grande contenido en M_i, por lo tanto $Soc(\coprod_{i\in A} M_i) = \coprod_{i\in A} Soc(M_i)$.

□

Ej 90.

Ej 91.

Ej 92. Pruebe que

a) $Soc\left({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\right) = Soc\left({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\right) = 0$.

b) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo simple $\iff$ m es primo.

c) $Soc\left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right) = p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ para todo primo p y $n \geq 0$.

d) $Soc\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right) \cong \mathbb{Z}/(p_1 \dots p_k)\mathbb{Z}$ donde $n = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$ en la descomposición en productos de primos con $p_i \neq p_j$ para toda $i \neq j$.

Demostración. $\boxed{a)}$
Por una parte, como ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ no tiene submódulos simples, entonces $Soc\left({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\right) = 0$.
Por otra, $Soc\left({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\right)$ es un campo, por lo que tampoco tiene submódulos simples propios, así que $Soc\left({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\right) = Soc\left({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\right) = 0$.
$\boxed{b)}$
Supongamos $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo simple entonces $k\,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,

$\forall k \in \mathbb{Z}$, en particular si $m = ab$ con $a, b \neq 1$ entonces $a \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ y esto pasa sólo si $\left|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\right| = b < m$ lo cual es una contradicción, por lo tanto m debe ser primo. Si m es primo $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ es campo y por lo tanto simple.

$\boxed{c)}$

Sea p primo y $n \geq 2$, entonces $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es simple en $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, sin embrgo es el único simple, pues si $M \leq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ es simple, entonces $M = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ y esto pasa sólo si p^k es primo, es decir, si $k = 1$. Por lo tanto
$Soc\left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

$\boxed{d)}$

Sea $n = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$ su descomposición en primos.
Como $n\mathbb{Z} = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}\mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}\mathbb{Z}$, en particular $\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es simple para toda $j \in \{1, \dots, k\}$, pues $p_j\mathbb{Z} \geq n\mathbb{Z}$.
Por otra parte si M es simple en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, entonces $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ para algún p primo y $p\mathbb{Z} \geq n\mathbb{Z}$, por lo que $p|n$ es decir, existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $p|p_j^{m_j}$, entonces $p = p_j$ y así $M = \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$ para algún $j \in \{1, \dots, k\}$. Por lo tanto, como $p_j\mathbb{Z} \geq n\mathbb{Z}$ para toda $j \in \{1, \dots, k\}$,

$$Soc\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right) \cong \sum_{i \leq k} \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z} = \bigoplus_{j \leq k} \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(p_1 \dots p_k)\mathbb{Z}.$$

$\square$

Ej 93.

Ej 94.

Ej 95. Para un anillo R y $M \in Mod(R)$, pruebe que

a) $ann_R(M) \trianglelefteq R$.

b) M es un $\left(R/ann_R(M)\right)$-módulo fiel.

c) $\forall f \in \mathrm{Hom}_R(R, M), \quad ann_R(M) \leq Ker(f)$.

d) $\forall N \in Mod(R), \quad N \cong M \Longrightarrow ann_R(M) = ann_R(N)$.

Demostración. $\boxed{a)}$

$ann_R(M) = \{r \in R \,|\, r \cdot m = 0 \ \forall m \in M\}$.
Sean $r, s \in ann_R(M)$, entonces $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m = 0$ por lo que $(r + s) \in ann_R(M)$.

Ahora, si $a \in R$, $(zr) \cdot m = z \cdot (r \cdot m) = z \cdot 0 = 0$. Por lo tanto $ann_R(M) \trianglelefteq R$.
$\boxed{b)}$
$ann_{R/ann_R(M)}(M) = \{r \in R/ann_R(M) \mid [r] \cdot m = 0\}$ con $[r]$ denotando la clase de $r \in R$ bajo la relación de equivalencia. Ahora, como $[r] \cdot m = 0$, entonces

$$0 = (r + ann_R(M)) \cdot m = r \cdot m + 0,$$

y así $r \in ann_R(M)$, es decir, $[r] = 0$. Por lo tanto M es un $R/ann_R(M)$-módulo fiel.
$\boxed{c)}$
Sean $f \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$ y $r \in ann_R(M)$, entonces $r \cdot m = 0\ \forall m \in M$ así, como f es morfismo $f(r) = r \cdot f(1) = 0$ pues $f(1) \in M$. Por lo tanto $ann_R(M) \leq Ker(f)$.
$\boxed{d)}$
Sea $N \in Mod(R)$ tal que existe $h \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ isomorfismo. Entonces para cada $n \in N$ existe un único $m \in M$ tal que $h(m) = n$, así

$$\begin{aligned} r \in ann_R(M) &\iff r \cdot m = 0\ \ \forall m \in M \\ &\iff h(r \cdot m) = 0\ \ \forall m \in M \\ &\iff r \cdot h(m) = 0\ \ \forall m \in M \\ &\iff r \cdot n = 0\ \ \forall n \in N \\ &\iff r \in ann_R(N). \end{aligned}$$

□

Ej 96.

Ej 97.

Ej 98. Sea Λ una R-álgebra de Artin. Pruebe que, $\forall M \in mod(\Lambda)$ se tiene que:

a) M es inescindible $\iff$ $D_\Lambda(M)$ es inescindible.
b) M es simple $\iff$ $D_\Lambda(M)$ es simple.
c) $I_0(D_\Lambda(M)) \in mod(\Lambda^{op})$.
d) $I_0(M) \in mod(\Lambda)$.
e) $l_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)) = l_\Lambda(M)$.

Demostración. $\boxed{a)}$
Supongamos $M \neq 0$ es inescindible y supongamos además que $D_\Lambda(M)) = D_1 \oplus D_2$. Como D_Λ y $D_{\Lambda^{op}}$ son equivalencias de categorías y $D_\Lambda(M) = D_1 \oplus D_2$, entonces

$$M = D_{\Lambda^{op}}(D_1 \oplus D_2) = D_{\Lambda^{op}}(D_1) \oplus D_{\Lambda^{op}}(D_2).$$

Pero M es inescindible, entonces $D_{\Lambda^{op}}(D_1) = 0$ o $D_{\Lambda^{op}}(D_2) = 0$, así $D_1 = 0$ o $D_2 = 0$, por lo que $D_\Lambda(M)$ es inescindible.

Si $D_\Lambda(M)$ es inescindible y $M = M_1 \oplus M_2$, entonces

$$M = D_{\Lambda^{op}}(M_1 \oplus M_2) = D_{\Lambda^{op}}(M_1) \oplus D_{\Lambda^{op}}(M_2),$$

y como $D_\Lambda(M)$ es inescindible entonces $D_{\Lambda^{op}}(M_1) = 0$ o $D_{\Lambda^{op}}(M_2) = 0$ por lo tanto $M_1 = 0$ o $M_2 = 0$ lo cual implica que M es inescindible.

$\boxed{b)}$

Como D_Λ y $D_{\Lambda^{op}}$ son equivalencias de categorías, a todo submódulo propio de K de M le corresponde un submódulo propio S de $D_\Lambda(M)$, así

$$\begin{aligned} D_\Lambda \text{ es simple } &\iff \forall K \lneqq D_\Lambda(M) \;\; K = 0 \\ &\iff S = D_{\Lambda^{op}}(K) \lneqq M \cong D_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)) \quad K = 0 = S \\ &\iff \forall S \lneqq M \quad S = 0 \\ &\iff M \;\text{ es simple.} \end{aligned}$$

$\boxed{d)}$

Como $M \in mod(\Lambda)$ y como Λ es un R-álgebra de artín, $M = \coprod_{i=1}^{n} Rx_i$ con $x_i \in M$. Entonces, aplicando 3.3.5, $I_0(M) \cong \coprod_{i=1}^{n} I_0(Rx_i)$, es decir, $I_0(M) \in mod(\Lambda)$.

$\boxed{c)}$

Como $D_\Lambda(M) \in \Lambda^{op}$, entonces aplicando c) en $D_\Lambda(M)$ se tiene el resultado.

$\boxed{e}$

Como Λ es una R-álgebra de artín, $D_\Lambda(M)$ y M son artinianos y finitamente generados, por lo que ambos son de longitud finita. Sea F una serie generalizada de composición de M con longitud mínima, entonces tomaremos por $D_\Lambda(F)$ como la filtración resultante de aplicar D_Λ a cada terimino de F.

Observamos que $D_\Lambda(F_i) \leq D_\Lambda(F_{i-1})$ para toda $0 \leq i \leq l(M)$ y además por ser equivalencia de categorias ${}^{D_\Lambda(F_i)}\!/\!_{D_\Lambda(F_{i-1})} \cong D_\Lambda\left({}^{F_i}\!/\!_{F_{i-1}}\right)$ que es simple por b), así $D_\Lambda(F)$ es una serie generalizada de descomposición de longitud $l(M)$.

Análogamente $D_{\Lambda^{op}}(G)$ con G una serie generalizada de composición de $D_\Lambda(M)$ define una serie generalizada de composición de longitud $l(D_{\Lambda^{op}}(G))$ en M, por lo que $l_{\Lambda^{op}}(D_\Lambda(M)) = l_\Lambda(M)$.

$\square$