Lista 6

Arruti, Sergio, Jesús

1. **Ejercicio 79.**
   Para una R-álgebra de Artin Λ, vía $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$, pruebe que:

   a) Λ es un anillo artiniano.

   b) $C(\Lambda)$ es un anillo conmutativo artiniano.

   c) Λ es una $C(\Lambda)$-álgebra de Artin, vía la inclusión $C(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda$.

   d) Λ^{op} es un R-álgebra de Artin, vía la composición de morfismo de anillos $R \longrightarrow Im(\varphi) \hookrightarrow C(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda^{op}$.

   e) Para todo $M \in Mod(\Lambda)$, por cambio de anillos $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$, se tiene que $M \in {}_{\Lambda-R}Mod \cap {}_{R}Mod_{R}$. Más aún, $Mod(\Lambda)$ es una subcategoría de $Mod(R)$.

Demostración. $\boxed{\text{a)}}$ En virtud de que $\Lambda \in mod(R)$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon : R^n \longrightarrow \Lambda$ un epimorfismo. Adicionalmente, como R es artiniano, tenemos que R^n es artiniano. Entonces Λ es artiniano como R-módulo.
$\therefore \Lambda$ es artiniano como anillo.

$\boxed{\text{b)}}$ Se deduce del inciso anterior, de la inclusión $C(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda$ y de que la familia de anillos artinianos es cerrada bajo subobjetos.
$\therefore C(\Lambda)$ es conmutativo artiniano.

$\boxed{\text{c)}}$ Primero, por el inciso anterior, $C(\Lambda)$ es un anillo artiniano. Además, dado que $\Lambda \in mod(R)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R^n \longrightarrow \Lambda$ es epimorfismo. También, como $Im(\varphi) \subseteq C(\Lambda)$, podemos restringirnos a $C(\Lambda)^n \longrightarrow \Lambda$ de tal manera que éste es un epimorfismo. Luego, $\Lambda \in mod(C(\Lambda))$.
$\therefore \Lambda$ es un $C(\Lambda)$-álgebra de Artin.

$\boxed{\text{d)}}$ Por la propia definición de álgebra de Artin, R es anillo artiniano. Además, como $\Lambda \in mod(R)$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon : R^n \longrightarrow \Lambda$ un epimorfismo. Este epimorfismo y la composición $R \longrightarrow Im(\varphi) \hookrightarrow C(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda^{op}$ inducen un epimorfismo $\varepsilon^{op} : R^n \longrightarrow \Lambda^{op}$.
$\therefore \Lambda^{op}$ es un álgebra de Artin.

$\boxed{\text{e)}}$ Dado que Λ es un R-álgebra de Artin vía $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$, podemos definir la acción

$$\begin{aligned} * : R \times M &\to M \\ (r, m) &\mapsto r * m = \varphi(r)\, m \end{aligned}$$

de tal forma que M es un R-módulo a izquierda. En efecto:

1.- Sean $r, s \in R$ y $m \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} (r + s) * m &= \varphi(r + s)\, m \\ &= [\varphi(r) + \varphi(s)]m \\ &= \varphi(r)\, m + \varphi(s)\, m \\ &= r * m + s * m \end{aligned}$$

2.- Sean $r \in R$ y $m, x \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} r * (m + x) &= \varphi(r)\,(m + x) \\ &= \varphi(r)\, m + \varphi(r)\, x \\ &= r * m + r * x \end{aligned}$$

3.- Sean $r, s \in R$ y $m \in M$. Entonces

$$\begin{aligned} (rs) * m &= \varphi(rs)\, m \\ &= [\varphi(r)\,\varphi(s)]m \\ &= \varphi(r)\,[\varphi(s)\, m] \\ &= r * [\varphi(s)\, m] \\ &= r * (s * m) \end{aligned}$$

4.- Finalmente, sea $m \in M$. Entonces

$$1_R * m = \varphi(1_R)\, m = 1_\Lambda m = m$$

Por lo que M es un Λ-módulo a izquierda.

Por otro lado, dado que $Im\,(\varphi) \subseteq C\,(\Lambda)$, podemos definir sobre M una acción

$$\begin{aligned} * : M \times R &\to M \\ (m, r) &\mapsto m * r = \varphi(r)\, m \end{aligned}$$

Más aún, bajo esta acción, heredada por la acción de Λ, M es un R-módulo a izquierda, del cuál bastará probar la propiedad: $m * (rs) =$

$(m * r) * s,\ \forall r, s, m$. En efecto, si $r, s \in R$, $m \in M$, entonces

$$\begin{aligned} m * (rs) &= \varphi(rs)\, m \\ &= \varphi(r)\,\varphi(s)\, m \\ &= \varphi(s)\,\varphi(r)\, m \\ &= [\varphi(r)\, m] * s \\ &= (m * r) * s \end{aligned}$$

Por consiguiente, $M \in {}_{\Lambda-R}Mod \cap {}_{R}Mod_{R}$.

Por último, mediante el funtor de cambio de anillos

$$F_{\varphi} : Mod(\Lambda) \longrightarrow Mod(R)$$

tenemos que todo Λ-módulo a izquierda es un R-módulo a izquierda y todo morfismo de Λ-módulos es, a su vez, un morfismo de R-módulos.
$\therefore Mod(\Lambda)$ es una subcategoría de $Mod(R)$. $\square$

2. **Ejercicio 82.**
Sea R un anillo y $f : M \longrightarrow N$ en $Mod(R)$. Considere $\overline{f}$ la factorización de f a través de su imagen. Pruebe que $\overline{f} : M \longrightarrow Im(f)$ es minimal a derecha si y sólo si f es minimal a derecha.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow)}$ Sea $g \in Hom\left(\overline{f}, \overline{f}\right)$. Entonces $g \in End_{R}(M)$ y $\overline{f}g = \overline{f}$. Sin embargo, $Dom(f) = Dom\left(\overline{f}\right) = M$ y $\overline{f} = f\ |^{Im(f)}$. Luego, $fg = f$, y así $g \in Hom(f, f)$. En virtud de que f es minimal a derecha, g es un isomorfismo. $\therefore \overline{f}$ es minimal a derecha.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Sea $g \in Hom(f, f)$. En consecuencia, $g \in End_{R}(M)$ y $fg = f$. Por consiguiente, $\overline{f}g = f\ |^{Im(f)}\ g = f\ |^{Im(f)} = \overline{f}$. Lo cual implica que $g \in Hom\left(\overline{f}, \overline{f}\right)$. Más aún, g es un isomorfismo, toda vez que $\overline{f}$ es minimal a derecha. $\therefore f$ es minimal a derecha. $\square$

3. **Ejercicio 85.**
Sean Λ un álgebra de Artin, $P \in \mathcal{P}(\Lambda)$, $\Gamma = End({}_{\Lambda}P)^{op}$ y el funtor de evaluación

$$e_P : mod(\Lambda) \longrightarrow mod(\Gamma)$$

Pruebe que si

$$P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

es una presentación en $add(P)$ de $X \in mod(\Lambda)$, entonces

$$e_P(P_0) \longrightarrow e_P(P_1) \longrightarrow e_P(X) \longrightarrow 0$$

es una presentación proyectiva en $mod(\Gamma)$ de $e_P(X)$.

Demostración. Sea $P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ una presentación en $add\,(P)$ de X. Como $P \in \mathcal{P}\,(\Lambda)$, se tiene que $P \in mod\,(\Lambda)$. Entonces, el teorema **3.2.2.b)**, $e_P\,|_{add(P)}\colon add\,(P) \longrightarrow \mathcal{P}\,(\Gamma)$ es una R-equivalencia. De tal manera que, y usando el teorema **3.2.2.a)**, $e_P\,(P_0)$, $e_P\,(P_1)$ son Γ-módulos proyectivos.

Por otro lado, puesto que $P_0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow X \longrightarrow 0$ es exacta y el funtor covariante $Hom_\Lambda\,({}_\Lambda P_\Gamma, *)$ es exacto derecho en $mod\,(\Lambda)$, entonces

$$e_P\,(P_0) \longrightarrow e_P\,(P_1) \longrightarrow e_P\,(X) \longrightarrow 0$$

es exacta.
$\therefore$ $e_P\,(P_0) \longrightarrow e_P\,(P_1) \longrightarrow e_P\,(X) \longrightarrow 0$ es una presentación proyectiva en $Mod\,(\Gamma)$. $\square$

4. **Ejercicio 88.**
Sea $h : I_1 \longrightarrow I_2$ un mono-esencial en $Mod\,(R)$. Pruebe que si I_1 y I_2 son inyectivos, entonces h es isomorfismo.

Demostración. En virtud de que I_2 es inyectivo y h es mono-esencial, h es una envolvente inyectiva de I_1. Por otra parte, sea $f : I_1 \longrightarrow I_1$ un isomorfismo. Entonces f es minimal a izquierda. En efecto, sea $g \in Hom\,(f, f)$. De esta forma, $g \in End_R\,(I_1)$ y $gf = f$. Luego, gf es un isomorfismo. Más aún, g es un isomorfismo, puesto que f lo es. Así, efectivamente, f es minimal a izquierda; y por el **Lema 3.3.2**, f es mono-esencial.

En resumen, $h : I_1 \longrightarrow I_2$ y $f : I_1 \longrightarrow I_1$ son envolventes inyectivas de I_1. Por el ejercicio anterior, existe $g : I_1 \longrightarrow I_2$ un isomorfismo en $Mod\,(R)$ tal que $gf = h$. $\therefore$ h es isomorfismo. $\square$

5. **Ejercicio 91.**
Pruebe que:
   a) ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ es inyectivo e inescindible.
   b) Para todo $M \in \mathscr{L}\,({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) \setminus \{0\}$, $I_0\,(M) \cong \mathbb{Q}$

Demostración. $\boxed{\text{a)}}$ Primero, $\mathbb{Q}$ es divisible. En efecto, si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $x \in \mathbb{Q}$, entonces $x/n \in \mathbb{Q}$ y $x = n(x/n)$. Ahora, aunado a la divisibilidad, por la **Proposición 3.3.8.**, $\mathbb{Q}$ es inyectivo.

Por otra parte, por el ejercicio anterior, $\mathbb{Z}$ es irreducible. Además, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ es mono-esencial. En efecto, sea $X \subseteq \mathbb{Q}$ tal que $X \cap \mathbb{Z} = 0$ y sea $x \in X$. Entonces existe $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ tal que $nx \in \mathbb{Z}$. Luego $nx \in X \cap \mathbb{Z} = 0$. Como $\mathbb{Q}$ es dominio entero, $x = 0$. Así, $X = 0$.

Finalmente, puesto que $\mathbb{Z}$ es irreducible y que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ es mono-esencial, se satisface la **Proposición 3.3.7.d)**. $\therefore \mathbb{Q}$ es inyectivo e inescindible.

$\boxed{\text{b)}}$ Sea $0 \neq M \leq Q$. Por la **Proposición 3.3.5.c)**, $I_0(M) \leq \mathbb{Q}$. Como $I_0(M)$ es inyectivo, existe $K \leq \mathbb{Q}$ tal que $\mathbb{Q} \cong K \oplus I_0(M)$. Dado que $\mathbb{Q}$ es inescindible, $K = 0$. $\therefore I_0(M) \cong \mathbb{Q}$ □

6. **Ejercicio 94.**
   Para un anillo artiniano a izquierda R, pruebe que las siguientes condiciones se satisfacen:

   a) Sea $\{f_i : A_i \longrightarrow B_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de morfismos en $Mod(R)$. Entonces $\coprod_{i=1}^{n} f_i : \coprod_{i=1}^{n} A_i \longrightarrow \coprod_{i=1}^{n} B_i$ es mono-esencial$\Leftrightarrow f_i : A_i \longrightarrow B_i$ es mono-esencial $\forall i \in [1, n]$.
   b) $\forall Q, Q' \in Mod(R)$ inyectivos, $Q \cong Q' \Leftrightarrow soc(Q) \cong soc(Q')$.
   c) Si $\{S_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia completa de simples en $Mod(R)$ no isomorfos dos a dos, entonces $\{I_0(S_j)\}_{j=1}^{n}$ es una familia completa de inyectivos inescindibles en $Mod(R)$ no isomorfos dos a dos.

Demostración. $\boxed{a)}$ $\boxed{\Rightarrow)}$ Supongamos que el morfismo $\coprod_{i=1}^{n} f_i$ es mono-esencial. Sea $i \in [1, n]$ y sea $Y_i \in \mathscr{L}(B_i)$ tal que $f_i^{-1}(Y_i) = 0$. Definimos $Y = \coprod_{j=1}^{n} Y_j \in \mathscr{L}\left(\coprod_{j=1}^{n} B_j\right)$ como $Y_j = \delta_{ji} Y_i$. De manera que $\coprod_{j=1}^{n} f_j^{-1}(Y) = 0$. Como $\coprod_{j=1}^{n} f_j$ es mono-esencial, $Y = 0$, y en particular $Y_i = 0$.
$\therefore f_i$ es mono-esencial.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Suponga que todo f_i es mono-esencial. Sea $Y \in \mathscr{L}\left(\coprod_{i=1}^{n} B_i\right)$ tal que $\left(\coprod_{i=1}^{n} f_i\right)^{-1}(Y) = 0$. Denote por $\eta_i : \coprod_{i=1}^{n} B_i \longrightarrow B_i$ la i-ésima proyección canónica. Entonces $\coprod_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\eta_i(Y)) = 0$. Luego, $f_i^{-1}(\eta_i(Y)) = 0$. En virtud de que f_i es mono-esencial, $\eta_i(Y) = 0$. De modo que $Y = 0$.
$\therefore \coprod_{i=1}^{n} f_i$ es mono-esencial.

$\boxed{b)}$ $\boxed{\Rightarrow)}$ Sean $Q, Q' \in Mod\,(R)$ inyectivos. Si $Q \cong Q'$, entonces $soc\,(Q) \cong soc\,(Q')$, pues $soc\,(*)$ es un funtor.

$\boxed{\Leftarrow)}$ Sean $Q, Q' \in Mod\,(R)$. Suponga que $soc\,(Q) \cong soc\,(Q')$. Como R es artiniano a izquierda, $soc\,(Q) \hookrightarrow Q$ y $soc\,(Q') \hookrightarrow Q'$ son mono-esencial. Dado que Q y Q' son inyectivos, $soc\,(Q) \hookrightarrow Q$ y $soc\,(Q') \hookrightarrow Q'$ son envolventes inyectivas. Ahora, puesto que $soc\,(Q) \cong soc\,(Q')$, $soc\,(Q) \hookrightarrow Q$ y $soc\,(Q) \hookrightarrow Q'$ son envolventes inyectivas de Q. Usando el **Ejercicio 88.**, Q y Q' son inyectivos.
$\therefore Q \cong Q'$

$\boxed{c)}$ Como S_i es simple, por la **Proposición 3.3.9.a)**, $I_0\,(S_i)$ es inyectivo inescindible.

Por otro lado, considere S_i, S_j dos R-módulos simples no isomorfos. Entonces, por la **Proposición 3.3.9.b)**, $soc\,(I_0\,(S_i)) \cong S_i$ y $soc\,(I_0\,(S_j)) \cong S_j$. Luego, por el inciso anterior, $I_0\,(S_i) \ncong I_0\,(S_j)$.

Por último, suponga que Q es inyectivo inescindible. Por la **Proposición 3.3.9.b)**, $soc\,(Q) \cong S_i$, para algún $i \in [1, n]$. Por el inciso anterior, $Q \cong I_0\,(S_i)$.
$\therefore$ $\{I_0\,(S_j)\}_{j=1}^{n}$ es una familia completa de inyectivos inescindibles en $Mod\,(R)$ no isomorfos dos a dos. $\square$

7. **Ejercicio 97.**
Sean R anillo y $n \geq 1$. Pruebe que la correspondencia

$$\{Ideales\ de\ R\} \longrightarrow \{Ideales\ de\ Mat_{n\times n}\,(R)\}$$
$$I \mapsto Mat_{n\times n}\,(I)$$

es una biyección. En particular, si D es un anillo de división, se tiene que el anillo $Mat_{n\times n}\,(D)$ es simple $\forall n \geq 1$.

Demostración. Sean $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}\,(I)$ y $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}\,(R)$. Entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa+yc & xb+yd \\ za+wc & zb+wd \end{pmatrix}$$

Ahora, en virtud de que I es un ideal de R, se tiene que

$$\begin{gathered} ax + bz, ay + bw, cx + dz, cy + dw \in I \\ xa + yc, xb + yd, za + wc, zb + wd \in I \end{gathered}$$

Luego, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}(I)$.

Por otra parte, sea J un ideal de $Mat_{n\times n}(R)$. Consideremos el conjunto $I_J = \{r \in R : r\mathbb{I} \in J\}$, donde $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Veamos que I_J es un ideal de $Mat_{n\times n}(R)$.

a) Primero, $0 \cdot \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$. Por lo que $0 \in I_J$.

b) Sean $r, s \in I_J$. Entonces

$$\begin{aligned} (r+s)\mathbb{I} &= (r+s)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r+s & 0 \\ 0 & r+s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \\ &= r\mathbb{I} + s\mathbb{I} \in J \end{aligned}$$

En consecuencia, $r + s \in I_J$; y así I_J es un subgrupo abeliano de R.

c) Sean $r \in R$, $x \in I_J$. De modo que

$$(rx)\mathbb{I} = \begin{pmatrix} rx & 0 \\ 0 & rx \end{pmatrix} \in J$$

y

$$(xr)\mathbb{I} = \begin{pmatrix} xr & 0 \\ 0 & xr \end{pmatrix} \in J$$

Luego, $rx, xr \in I_J$.

Por lo que I_J es un ideal de R.

En resumen, todo ideal I de R genera un ideal $Mat_{n\times n}(R)$ y viceversa, todo ideal J de $Mat_{n\times n}(R)$ induce un ideal de R. Por tanto, hay una correspondencia biunívoca

$$\begin{gathered} \{Ideales\ de\ R\} \longrightarrow \{Ideales\ de\ Mat_{n\times n}(R)\} \\ I \mapsto Mat_{n\times n}(I) \end{gathered}$$

Finalmente, sea D un anillo con división. Entonces los únicos ideales de D son 0 y D. Por la correspondencia biyectiva entre ideales de D e ideales de $Mat_{n\times n}(D)$, se tiene que $Mat_{n\times n}(D)$ no tiene ideales propios no triviales. $\therefore Mat_{n\times n}(D)$ es un anillo simple. $\square$