

## Lista 1

**Ej 1.** Sea  $\varphi : R \longrightarrow S$  un morfismo de anillos.

- a)  $\text{im}(\varphi) \leq S$
- b)  $\text{Ker}(\varphi) \trianglelefteq R$
- c)  $\forall S' \subseteq S, \varphi^{-1}(S') \leq R$

*Demostración.* (a) El hecho de que  $\varphi$  sea un morfismo de anillos con uno garantiza que  $\varphi(1) = 1$  y que  $\text{im}(\varphi) \neq \emptyset$ . Por otro lado, sean  $a, b \in \text{im}(\varphi)$ . Por definición, existen  $x, y \in R$  tales que  $\varphi(x) = a$  y  $\varphi(y) = b$ . Esto implica que

$$\begin{aligned} a - b &= \varphi(x) - \varphi(y) \\ &= \varphi(x - y) \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} ab &= \varphi(x) \varphi(y) \\ &= \varphi(xy) \end{aligned}$$

Así  $a - b, ab \in \text{im}(\varphi)$ .  
Por tanto  $\text{im}(\varphi) \leq S$ .

(b) Primeramente, como  $\varphi(0) = 0$ , tenemos que  $\text{Ker}(\varphi) \neq \emptyset$ . De igual manera,  $\text{Ker}(\varphi) \trianglelefteq R$ . En efecto, si  $x, y \in \text{Ker}(\varphi)$ , entonces  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0$ . Por lo que  $x + y \in \text{Ker}(\varphi)$ . Ahora, sean  $x \in \text{Ker}(\varphi)$  y  $a \in R$ ; de manera que  $\varphi(ax) = \varphi(a) \varphi(x) = 0$  y  $\varphi(xa) = \varphi(x) \varphi(a) = 0$ . Por lo que  $ax, xa \in \text{Ker}(\varphi)$  y por tanto,  $\text{Ker}(\varphi) \trianglelefteq R$ .

(c) Sea  $S'$  un subanillo de  $S$ . En este sentido, los hechos de que  $1 \in S'$  y de que  $\varphi(1) = 1$  implican que  $1 \in \varphi^{-1}(S') \neq \emptyset$ . Finalmente, dados  $a, b \in \varphi^{-1}(S')$ , se tiene por la propia definición, que  $\varphi(a), \varphi(b) \in S'$ . De tal manera que  $\varphi(a - b), \varphi(ab) \in S'$ . Por tanto,  $a - b, ab \in \varphi^{-1}(S')$ . Concluimos que  $\varphi^{-1}(S')$  es un subanillo de  $S$ .  $\square$

**Ej 2.** Para un anillo  $R$  pruebe que:

- a)  $C(R)$  es un subanillo conmutativo de  $R$ .
- b)  $C(R) = C(R^{op})$ .
- c)  $R = R^{op}$  como anillos  $\Leftrightarrow C(R) = R \Leftrightarrow R$  es conmutativo.

*Demostración.* a) Sean  $a, b \in C(R)$ , por definición  $ax = xa$  y  $bx = xb \quad \forall x \in R$ , entonces

$$(a - b)x = ax - (bx) = xa - (xb) = x(a - b).$$

Por lo tanto  $a - b \in C(R)$ . Ahora,  $abx = axb = xab$ , por lo que  $a, b \in C(R)$  y en consecuencia  $C(R) \leq R$ .

b) Sea  $*$  :  $R^{op} \times R^{op} \rightarrow R^{op}$  la operación de anillo en  $R^{op}$ . Así se tiene que

$$\begin{aligned} a \in C(R^{op}) &\Leftrightarrow \forall x \in R \quad a * x = x * a \\ &\Leftrightarrow \forall x \in R \quad xa = ax \\ &\Leftrightarrow \forall x \in R \quad a \in C(R). \end{aligned}$$

c)  $\cdot \Rightarrow \cdot$  Supongamos  $R = R^{op}$  como anillos, entonces sus operaciones coinciden, es decir,  $\forall a \in R$  se tiene que  $\forall x \in R \quad ax = a * x = xa$ , entonces  $R \subset C(R) \subset R$  por lo que  $R = C(R)$ .

$\cdot \Rightarrow \cdot \Rightarrow \cdot$  Si  $R = C(R)$ , entonces  $\forall x, y \in R \quad xy = yx$ , por lo que  $R$  es conmutativo.

$\cdot \Rightarrow \cdot \Rightarrow \cdot \Rightarrow \cdot$  Si  $R$  es conmutativo, entonces  $\forall x, a \in R \quad xa = ax = x * a$ ,  
a) y como  $R$  y  $R^{op}$  coinciden como grupos abelianos, entonces  $R = R^{op}$  como anillos.  $\square$

**Ej 3.** Sea  $(R, K\varphi) \in K - Alg$ . La función

$$\begin{aligned} \bullet_\varphi : K \times R &\rightarrow R \\ (k, r) &\mapsto k \bullet_\varphi r := \varphi(k) r \end{aligned}$$

es una acción compatible de  $K$  en  $R$ .

*Demostración.* Como  $(R, K, \varphi) \in K - Alg$  entonces  $K$  es un anillo conmutativo.

(AC1) Sean  $k \in K$  y  $r_1, r_2 \in R$ . Así

$$\begin{aligned} k \bullet_\varphi (r_1 + r_2) &= \varphi(k) (r_1 + r_2) \\ &= \varphi(k) r_1 + \varphi(k) r_2 \\ &= k \bullet_\varphi r_1 + k \bullet_\varphi r_2. \end{aligned}$$

(AC2) Sean  $k_1, k_2 \in K$  y  $r \in R$ . Así

$$\begin{aligned}(k_1 + k_2) \bullet_{\varphi} r &= \varphi(k_1 + k_2) r \\ &= (\varphi(k_1) + \varphi(k_2)) r \\ &= \varphi(k_1) r + \varphi(k_2) r \\ &= k_1 \bullet_{\varphi} r + k_2 \bullet_{\varphi} r.\end{aligned}$$

(AC3) Sean  $k_1, k_2 \in K$  y  $r \in R$ . Así

$$\begin{aligned}k_1 \bullet_{\varphi} (k_2 \bullet_{\varphi} r) &= \varphi(k_1) (k_2 \bullet_{\varphi} r) \\ &= \varphi(k_1) (\varphi(k_2) r) \\ &= (\varphi(k_1) \varphi(k_2)) r \\ &= (\varphi(k_1 k_2)) r \\ &= (k_1 k_2) \bullet_{\varphi} r.\end{aligned}$$

(AC4) Sean  $k \in K$  y  $r_1, r_2 \in R$ . Así

$$\begin{aligned}k \bullet_{\varphi} (r_1 r_2) &= \varphi(k) (r_1 r_2) \\ &= (\varphi(k) r_1) r_2 \\ &= (k \bullet_{\varphi} r_1) r_2.\end{aligned}$$

Pero también

$$\begin{aligned}(\varphi(k) r_1) r_2 &= (r_1 \varphi(k)) r_2, \quad \text{Im}(\varphi) \subseteq C(R) \\ &= (k \bullet_{\varphi} r_1) r_2. \\ &= r_1 (\varphi(k) r_2) \\ &= r_1 (k \bullet_{\varphi} r_2).\end{aligned}$$

(AC5) Sean  $r \in R$ . Así

$$\begin{aligned}1_K \bullet_{\varphi} r &= \varphi(1_K) r \\ &= 1_R \cdot r, \quad \varphi \text{ es un morfismo de anillos.} \\ \therefore (R, \bullet_{\varphi}) &\in K_{Ac} - Rings.\end{aligned}$$

□

**Ej 4.** Para  $\alpha : K \times R \longrightarrow R$ ,  $(k, r) \mapsto kr$ , en  $K_{AC}$ -Rings, pruebe que  $\varphi_{\alpha} : K \longrightarrow R$ , con  $\varphi_{\alpha}(k) = k \cdot 1_R$  es un morfismo de anillos tal que  $\text{im}(\varphi_{\alpha}) \subseteq C(R)$ .

*Demostración.* Sean  $k, r \in K$ . Dado que  $\alpha$  es una acción, se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha}(k + r) &= (k + r) \cdot 1_R \\ &= k \cdot 1_R + r \cdot 1_R \\ &= \varphi_{\alpha}(k) + \varphi_{\alpha}(r)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(kr) &= (kr) \cdot 1_R \\
&= k \cdot (r \cdot 1_R) \\
&= (k \cdot 1_R)(r \cdot 1_R) \\
&= \varphi_\alpha(k) \varphi_\alpha(r)
\end{aligned}$$

Además, por la propia regla de correspondencia de  $\varphi_\alpha$ , se cumple la igualdad  $\varphi_\alpha(1) = 1_K \cdot 1_R = 1_R$ . Por tanto,  $\varphi_\alpha$  es un morfismo de anillos.

Finalmente, de la quinta condición de ser acción a izquierda, se deduce que  $\text{im}(\varphi_\alpha) \subseteq C(R)$ . En efecto, si  $k \in K$  y  $r \in R$ , entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(k)r &= (k \cdot 1_R)r \\
&= k \cdot (1_R r) \\
&= k \cdot (r 1_R) \\
&= r \cdot (k 1_R) \\
&= r \varphi_\alpha(k)
\end{aligned}$$

Por lo que  $\text{im}(\varphi_\alpha) \subseteq C(R)$ . □

**Ej 5.** Para un anillo conmutativo  $K$ , pruebe que se tiene una biyección  $\alpha : K - Alg \longrightarrow K_{AC} - Rings$ ,  $(R, K, \varphi) \longmapsto \alpha_\varphi$ , donde  $\alpha_\varphi : K \times R \rightarrow R$  está dada por  $\alpha_\varphi(k, r) := \varphi(k)r$ ; cuya inversa está dada por  $\varphi_\alpha := \alpha(k, 1_R)$ .

*Demostración.* Para evitar abusos de notación en la prueba se redefinirán las funciones de la siguiente forma. Sean  $D = \{\varphi : (R, K, \varphi) \in K - Alg\}$  y

$$f : D \longrightarrow K_{AC} - Rings, \quad f(\varphi) = f_\varphi$$

donde  $f_\varphi : K \times R \rightarrow R$  está dada por  $f_\varphi(k, r) := \varphi(k)r$ . Y definimos  $f^{-1} : K_{AC} - Rings \longrightarrow D$  como  $f^{-1}(\alpha) := f_\alpha^{-1}$ , donde  $\alpha : K \times R \rightarrow R$  y  $f_\alpha^{-1}(k) := \alpha(k, 1_R) = K \cdot 1_R$ .

Entonces

$$((ff^{-1})(\alpha))(k, r) = (f(f_\alpha^{-1}))(k, r) = f_\alpha^{-1}(k)r = \alpha(k, 1_R)r = \alpha(k, r)$$

y

$$((f^{-1}f)(\varphi))(k) = (f^{-1}f_\varphi)(k) = f_\varphi(k, 1_R) = \varphi(k)1_R = \varphi(k).$$

Por lo que  $f$  es biyectiva con  $f^{-1}$  su inversa. □

**Ej 6.** Sea  $R$  un anillo.

(a) Si  $(\lambda, M) \in {}_R\text{Rep}$  y la función  $\bullet_\lambda$  está definida como

$$\begin{aligned}\bullet_\lambda : R \times M &\rightarrow M \\ (r, m) &\mapsto r \bullet_\lambda m := \lambda(r)(m),\end{aligned}$$

entonces  $({}_R M, \bullet_\lambda) \in {}_R\text{Mod}$ .

(b) Sea  $({}_R M, \bullet) \in {}_R\text{Mod}$  y la función  $\lambda_\bullet$  definida como

$$\begin{aligned}\lambda_\bullet : R &\rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}^l \\ r &\mapsto \lambda_\bullet(r),\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\lambda_\bullet(r) : M &\rightarrow M \\ m &\mapsto r \bullet m.\end{aligned}$$

Entonces  $(\lambda_\bullet, M) \in {}_R\text{Rep}$ .

(c) Existe una biyección entre  ${}_R\text{Rep}$  y  ${}_R\text{Mod}$ .

*Demostración.* (a) Como  $(\lambda, M) \in {}_R\text{Rep}$  entonces  $M$  es un grupo abeliano.

(RMI1) Sean  $r \in R, m_1, m_2 \in M$ . Entonces

$$\begin{aligned}r \bullet_\lambda (m_1 + m_2) &= \lambda(r)(m_1 + m_2) \\ &= \lambda(r)(m_1) + \lambda(r)(m_2) \quad , \quad \lambda(r) \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(M) \\ &= r \bullet_\lambda m_1 + r \bullet_\lambda m_2.\end{aligned}$$

(RMI2) Sean  $r_1, r_2 \in R, m \in M$ . Entonces

$$\begin{aligned}(r_1 + r_2) \bullet_\lambda m &= \lambda(r_1 + r_2)(m) \\ &= (\lambda(r_1) + \lambda(r_2))(m) \quad , \quad \lambda \text{ es un morfismo de anillos} \\ &= \lambda(r_1)(m) + \lambda(r_2)(m) \\ &= r_1 \bullet_\lambda m + r_2 \bullet_\lambda m.\end{aligned}$$

(RMI3) Sean  $r_1, r_2 \in R, m \in M$ . Entonces

$$\begin{aligned}r_1 \bullet_\lambda (r_2 \bullet_\lambda m) &= \lambda(r_1)(r_2 \bullet_\lambda m) \\ &= \lambda(r_1)(\lambda(r_2)(m)) \\ &= \lambda(r_1) \circ \lambda(r_2)(m) \\ &= \lambda(r_1 r_2)(m) \quad , \quad \lambda \text{ es un morfismo de anillos} \\ &= (r_1 r_2) \bullet_\lambda m.\end{aligned}$$

(RMI4) Sea  $m \in M$ . Entonces

$$\begin{aligned} 1_R \bullet_\lambda m &= \lambda(1_R)(m) \\ &= Id_M(m) \quad , \quad \lambda \text{ es un morfismo de anillos} \\ &= m. \end{aligned}$$

$$\therefore ({}_R M, \bullet_\lambda) \in {}_R Mod.$$

(b) Como  $({}_R M, \bullet_\lambda) \in {}_R Mod$  entonces  $M$  es un grupo abeliano.  
Sea  $r \in R$  y  $m, n \in M$ . Entonces

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet(r)(m+n) &= r \bullet (m+n) \\ &= r \bullet m + r \bullet n \\ &= \lambda_\bullet(r)(m) + \lambda_\bullet(r)(n) \\ &\implies \lambda_\bullet(r) \in End_{\mathbb{Z}}(M). \end{aligned}$$

Si consideramos la composición usual de funciones  $\circ$  entonces  $\lambda_\bullet(r) \in End_{\mathbb{Z}}^l(M)$ , así la aplicación  $\lambda_\bullet$  es una función bien definida.  
Sean  $r_1, r_2 \in R$ . Si  $m \in M$  se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet(r_1 + r_2)(m) &= (r_1 + r_2) \bullet m \\ &= r_1 \bullet m + r_2 \bullet m \\ &= \lambda_\bullet(r_1)(m) + \lambda_\bullet(r_2)(m) \\ &= (\lambda_\bullet(r_1) + \lambda_\bullet(r_2))(m). \\ \implies \lambda_\bullet(r_1 + r_2) &= \lambda_\bullet(r_1) + \lambda_\bullet(r_2). \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet(r_1 r_2)(m) &= (r_1 r_2) \bullet m \\ &= r_1 \bullet (r_2 \bullet m) \\ &= \lambda_\bullet(r_1)(r_2 \bullet m) \\ &= \lambda_\bullet(r_1)(\lambda_\bullet(r_2)(m)) \\ &= \lambda_\bullet(r_1) \circ \lambda_\bullet(r_2)(m) \\ \implies \lambda_\bullet(r_1 r_2) &= \lambda_\bullet(r_1) \circ \lambda_\bullet(r_2). \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \lambda_\bullet(1_R)(m) &= 1_R \bullet m \\ &= m \\ \implies \lambda_\bullet(1_R) &= Id_M. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\lambda_\bullet : R \rightarrow End_{\mathbb{Z}}^l(M)$  es un morfismo de anillos y así  $(\lambda_\bullet, M) \in {}_R Rep$ .

(c) Consideremos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} f : {}_R Rep &\rightarrow {}_R Mod \\ (\lambda, M) &\mapsto ({}_R M, \bullet_\lambda); \end{aligned}$$

con  $\bullet_\lambda$  definido como en (a).

$$\begin{aligned} g : {}_R Mod &\rightarrow {}_R Rep \\ ({}_R M, \bullet) &\mapsto (\lambda_\bullet, M); \end{aligned}$$

con  $\lambda_\bullet$  definido como en (b).

Por los (a) y (b) las aplicaciones  $f$  y  $g$  son funciones bien definidas.

Sea  $({}_R M, \bullet) \in {}_R Mod$ . Entonces

$$\begin{aligned} f \circ g (({}_R M, \bullet)) &= f (g (({}_R M, \bullet))) \\ &= f ((\lambda_\bullet, M)) \\ &= ({}_R M, \bullet_{\lambda_\bullet}). \end{aligned}$$

Sean  $r \in R$  y  $m \in M$ . Así

$$\begin{aligned} r \bullet_{\lambda_\bullet} m &= \lambda_\bullet(r)(m) \\ &= r \bullet m \\ &\implies \bullet = \bullet_{\lambda_\bullet}. \\ &\implies f \circ g (({}_R M, \bullet)) = ({}_R M, \bullet) \\ &\implies f \circ g = Id_{{}_R Mod}. \end{aligned}$$

Ahora, sea  $(\lambda, M) \in {}_R Rep$ . Luego

$$\begin{aligned} g \circ f ((\lambda, M)) &= g (f ((\lambda, M))) \\ &= g (({}_R M, \bullet_\lambda)) \\ &= (\lambda_{\bullet_\lambda}, M). \end{aligned}$$

Sea  $r \in R$  y  $m \in M$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_{\bullet_\lambda}(r)(m) &= r \bullet_\lambda m \\ &= \lambda(r)(m) \\ &\implies \lambda_{\bullet_\lambda}(r) = \lambda(r) \\ &\implies \lambda_{\bullet_\lambda} = \lambda \\ &\implies g \circ f ((\lambda, M)) = (\lambda, M) \\ &\implies g \circ f = Id_{{}_R Rep}. \end{aligned}$$

De modo que  $f$  es invertible, con inversa  $g$ , y por lo tanto es una biyección, con lo cual se tiene lo deseado.  $\square$

**Ej 7.** Sea  $R$  un anillo. Pruebe que

- a) Dada una representación a derecha  $(M, \rho)$ , se tiene una acción a derecha  $\beta_\rho : M \times R \longrightarrow M$ ,  $(m, r) \mapsto mr = (m) \rho(r)$  tal que  $(M, \beta_\rho) \in \text{Mod}_R$
- b) Dado un  $R$ -módulo a derecha  $(M, \beta)$ , se tiene un morfismo de anillos  $\rho_\beta : R \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}^r(M)$ ,  $(m) \rho_\beta(r) = \beta(m, r) = mr$
- c) Se tiene una biyección  $\beta : \text{Rep}_R \longrightarrow \text{Mod}_R$ ,  $(M, \rho) \mapsto \beta_\rho$ , donde  $\beta_\rho : M \times R \mapsto M$  está dada por  $\beta_\rho(m, r) = (m) \rho(r)$ ; cuya inversa es  $\rho : \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Rep}_R$ , con  $(\beta : M \times R \longrightarrow M) \mapsto (\rho_\beta : R \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}^r(M))$ , dada por  $(m) \rho_\beta(r) = \beta(m, r)$

*Demostración.* (a) Dado que  $M$  es un grupo abeliano, basta probar que se satisfacen las condiciones de la definición de  $R$ -módulo a derecha. Sean  $r_1, r_2 \in R$  y  $m_1, m_2 \in M$ .

Primero,

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \cdot r_1 &= (m_1 + m_2) \rho(r_1) \\ &= (m_1) \rho(r_1) + (m_2) \rho(r_1) \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_1 \end{aligned}$$

puesto que  $\rho(r_1)$  es un morfismo de grupos abelianos.

Por otro lado, como  $\rho$  es un morfismo de anillos, podemos decir que

$$\begin{aligned} m_1 \cdot (r_1 + r_2) &= (m_1) \rho(r_1 + r_2) \\ &= (m_1) [\rho(r_1) + \rho(r_2)] \\ &= (m_1) \rho(r_1) + (m_1) \rho(r_2) \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_1 \cdot r_2 \end{aligned}$$

También observemos que

$$\begin{aligned} m_1 \cdot 1_R &= (m_1) \rho(1) \\ &= (m_1) \text{Id}_R \\ &= m_1 \end{aligned}$$

Por último, en virtud de que  $\rho$  preserva productos, se tiene que

$$\begin{aligned} m_1 \cdot (r_1 r_2) &= (m_1) \rho(r_1 r_2) \\ &= (m_1) \rho(r_1) \circ \rho(r_2) \\ &= ((m_1) \rho(r_1)) \rho(r_2) \\ &= (m_1 \cdot r_1) \rho(r_2) \\ &= (m \cdot r_1) \cdot r_2 \end{aligned}$$



Por tanto,  $(M, \beta_\rho)$  es un  $R$ -módulo a derecha.

(b) Como en el inciso anterior, bastará con probar que  $\rho_\beta$  es un morfismo de anillos. Bajo este contexto, sean  $m_1, m_2 \in M$  y  $r_1, r_2 \in R$ .

Comenzaremos notando que  $\rho(r_1)$  es un homomorfismo de anillos. En efecto,

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \rho(r_1) &= (m_1 + m_2) \cdot r_1 \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_1 \\ &= (m_1) \rho(r_1) + (m_2) \rho(r_1) \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $\rho(r_1) \in \text{End}_{\mathbb{Z}}^r(M)$ .

Análogamente,  $\rho_\beta$  es un homomorfismo de grupos abelianos, puesto que

$$\begin{aligned} (m_1) \rho_\beta(r_1 + r_2) &= m_1 \cdot (r_1 + r_2) \\ &= m_1 \cdot r_1 + m_1 \cdot r_2 \\ &= (m_1) \rho_\beta(r_1) + (m_1) \rho_\beta(r_2) \end{aligned}$$

y así  $\rho_\beta(r_1 + r_2) = \rho_\beta(r_1) + \rho_\beta(r_2)$ . Más aún,  $\rho_\beta$  también preserva productos, toda vez que

$$\begin{aligned} (m_1) \rho_\beta(r_1 r_2) &= m_1 \cdot (r_1 r_2) \\ &= (m_1 \cdot r_1) \cdot r_2 \\ &= ((m_1) \rho_\beta(r_1)) \rho_\beta(r_2) \\ &= (m_1) [\rho_\beta(r_1) \circ \rho_\beta(r_2)] \end{aligned}$$

Para finalizar,  $\rho_\beta$  en efecto es un morfismo de anillos porque, adicionalmente, se satisface que  $(m_1) \rho_\beta(1) = m_1 \cdot 1_R = m_1$ . Ergo, se concluye el resultado.

(c) La biyección queda resuelta debido a los 2 incisos anteriores. El primero garantiza que toda representación a derecha tiene estructura de  $R$ -módulo a derecha; inversamente, todo  $R$ -módulo a derecha induce una acción a derecha con la cuál el módulo puede ser visto como una representación a derecha de  $R$ .  $\square$

**Ej 8.** Sea  $R$  un anillo,  $(M, +)$  un grupo abeliano y  $\varphi : R \times M \rightarrow M$  una función. La acción opuesta  $\varphi^{op} : M \times R^{op} \rightarrow M$ , se define como sigue:

$$\varphi^{op}(m, r^{op}) := \varphi(r, m) \quad \forall r \in R, \quad \forall m \in M.$$

Pruebe que

$$({}_R M, \varphi) \in {}_R \text{Mod} \Leftrightarrow (M_{R^{op}}, \varphi^{op}) \in \text{Mod}_{R^{op}}.$$

*Demostración.* Recordando que  $r_2^{op}r_1^{op} = (r_2r_1)^{op}$ , se tiene que:

$$(M_{R^{op}}, \varphi^{op}) \in Mod_{R^{op}}.$$

$\Longleftrightarrow$

- i)  $\varphi^{op}[(m_1 + m_2), r^{op}] = \varphi^{op}(m_1, r^{op}) + \varphi^{op}(m_2, r^{op})$ .
- ii)  $\varphi^{op}[m, (r_1^{op} + r_2^{op})] = \varphi^{op}(m, r_1^{op}) + \varphi^{op}(m, r_2^{op})$ .
- iii)  $\varphi^{op}(m, 1_R^{op}) = m$ .
- iv)  $\varphi^{op}(m, r_1^{op}r_2^{op}) = \varphi^{op}(\varphi^{op}(m, r_1^{op}), r_2^{op})$ .

$\Longleftrightarrow$

- i)  $\varphi[r, (m_1 + m_2)] = \varphi(r, m_1) + \varphi(r, m_2)$ .
- ii)  $\varphi[(r_1 + r_2), m] = \varphi(r_1, m) + \varphi(r_2, m)$ .
- iii)  $\varphi(1_R, m) = m$ .
- iv)  $\varphi(r_2r_1, m) = \varphi(r_2, \varphi(r_1, m))$ .

$\Longleftrightarrow$

$$({}_R M, \varphi) \in {}_R Mod.$$

□

**Ej 9.** Sea  $R$  un anillo con su producto denotado por medio de yuxtaposición. Entonces

(a) si la función  $\bullet$  está definida como

$$\begin{aligned} \bullet : R \times R &\rightarrow R \\ (r, x) &\mapsto r \bullet x := rx, \end{aligned}$$

$$({}_R R, \bullet) \in {}_R Mod.$$

(b) si la función  $\bullet$  está definida como

$$\begin{aligned} \bullet : R \times R &\rightarrow R \\ (x, r) &\mapsto x \bullet r := xr, \end{aligned}$$

$$(R_R, \bullet) \in Mod_R.$$

*Demostración.* (a) Sean  $r, s, t \in R$ . Se tiene lo siguiente como consecuencia de la asociatividad de del producto en  $R$  y la distributividad de este

con respecto a la suma en  $R$ :

$$\begin{aligned}
r \bullet (s + t) &= r(s + t) = rs + st \\
&= r \bullet t + s \bullet t. \\
(r + s) \bullet t &= (r + s)t = rt + st \\
&= r \bullet t + s \bullet t. \\
r \bullet (s \bullet t) &= r(st) = (rs)t \\
&= (r \bullet s) \bullet t. \\
(r + s) \bullet t &= (r + s)t = rt + st \\
&= r \bullet t + s \bullet t.
\end{aligned}$$

Finalmente, como  $1_R$  es el neutro multiplicativo de  $R$

$$1_R \bullet r = 1_R r = r. \therefore ({}_R R, \bullet) \in {}_R \text{Mod}.$$

(b) Es análogo al inciso (a), empleando nuevamente a asociatividad de del producto en  $R$  y la distributividad de este con respecto a la suma en  $R$ , así como la propiedad del neutro multiplicativo. □

**Ej 10.** Sea  $K$  un anillo conmutativo.

- a) Para un anillo  $R$ , pruebe que dar una estructura de  $K$ -álgebra en  $R$  es equivalente a dar una estructura de  $K$ -módulo a izquierda en  $R$ , vía una acción a izquierda  $K \times R \longrightarrow R$ ,  $(k, r) \mapsto k \cdot r$  tal que satisface la propiedad  $k \cdot (r_1 r_2) = (k \cdot r_1) r_2 = r_1 (k \cdot r_2)$ ,  $\forall k \in K, \forall r_1, r_2 \in R$ .
- b) Sean  $R, S$  dos  $K$ -álgebras,  $f : R \longrightarrow S$  un morfismo de anillos. Pruebe que  $f$  es un morfismo de  $K$ -álgebras si y sólo si  $f$  es un morfismo de  $K$ -módulos a izquierda, vía la estructura de  $K$ -módulo en  $R$  y en  $S$  dada por el primer inciso.

*Demostración.* (a) Suponga que  $(R, K, \varphi)$  tiene estructura de  $K$ -álgebra. Definimos una acción a izquierda de  $K$  sobre  $R$  como  $(k, r) \mapsto \varphi(k) r$ . Veremos que, bajo este contexto,  $R$  es un  $K$ -módulo a izquierda.

Sean  $x, y \in R$  y  $k, r \in K$ . Entonces se cumple que

$$\begin{aligned}
k \cdot (x + y) &= \varphi(k)(x + y) \\
&= \varphi(k)x + \varphi(k)y \\
&= k \cdot x + k \cdot y
\end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned}
(k + r) \cdot x &= [\varphi(k) + \varphi(r)]x \\
&= \varphi(k)x + \varphi(r)x \\
&= k \cdot x + r \cdot x
\end{aligned}$$

Igualmente, se satisface que

$$\begin{aligned} 1_K \cdot x &= \varphi(1_K) \\ &= 1_R x \\ &= x \end{aligned}$$

Y así mismo,  $\text{im}(\varphi) \subseteq C(R)$ , pues  $(R, K, \varphi)$  es  $K$ -álgebra. Inclusive, obtenemos

$$\begin{aligned} (kr) \cdot x &= \varphi(kr) x \\ &= [\varphi(k) \varphi(r)] x \\ &= \varphi(k) [\varphi(r) x] \\ &= k \cdot (r \cdot x) \end{aligned}$$

Por último, el hecho de que  $\text{im}(\varphi) \subseteq C(R)$  implica las siguientes dos igualdades

$$\begin{aligned} k \cdot (xy) &= \varphi(k) (xy) \\ &= (\varphi(k) x) y \\ &= (k \cdot x) y \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} k \cdot (xy) &= \varphi(k) (xy) \\ &= (\varphi(k) x) y \\ &= (x \varphi(k)) y \\ &= x (\varphi(k) y) \\ &= x (k \cdot y) \end{aligned}$$

Por lo que  $R \in {}_K \text{Mod}$ .

Inversamente, en el supuesto de que  $R$  sea un  $K$ -módulo a izquierda, vía una acción  $K \times R \longrightarrow R$ ,  $(k, r) \mapsto k \cdot r$  con la propiedad de que para cualesquiera  $k \in K$  y  $r_1, r_2 \in R$  se tiene que  $k \cdot (r_1 r_2) = (k \cdot r_1) r_2 = r_1 (k \cdot r_2)$ , se puede definir una función  $\varphi : K \longrightarrow R$  como  $\varphi(k) = k \cdot 1_R$ . Mostraremos que  $\varphi$  es un homomorfismo de anillos tal que  $\text{im}(\varphi) \subseteq C(R)$ .

Sean  $k, r \in K$ . Comencemos notando que

$$\begin{aligned} \varphi(k + r) &= (k + r) \cdot 1_R \\ &= k \cdot 1_R + r \cdot 1_R \\ &= \varphi(k) + \varphi(r) \end{aligned}$$

Y que, a su vez,

$$\begin{aligned}
 \varphi(kr) &= (kr) \cdot 1_R \\
 &= k \cdot (r \cdot 1_R) \\
 &= k \cdot \varphi(r) \\
 &= k \cdot (1_R \varphi(r)) \\
 &= (k \cdot 1_R) \varphi(r) \\
 &= \varphi(k) \varphi(r)
 \end{aligned}$$

Incluso, en este sentido, se tiene que  $\varphi(1_K) = 1_K \cdot 1_R = 1_R$ . Lo cual implica que  $\varphi$  es un homomorfismo de anillos. Para terminar, veamos que  $\text{im}(\varphi) \subseteq C(R)$ . Sean  $x \in K$ ,  $y \in R$ . Por hipótesis,

$$\begin{aligned}
 (k \cdot 1_R) r &= k \cdot (1_R r) \\
 &= k \cdot r \\
 &= k \cdot (r 1_R) \\
 &= r (k \cdot 1_R)
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\varphi(k) r = r \varphi(k)$$

En vista de lo anterior,  $R$  adquiere estructura de  $K$ -álgebra.

(b) Empecemos suponiendo que  $f$  es un morfismo de  $K$ -álgebras, con  $(R, K, \varphi)$  y  $(S, K, \psi)$ . Sean  $k \in K$  y  $r \in R$ . En virtud de la correspondencia del inciso anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
 k \cdot r &= k \cdot (1_R r) \\
 &= (k \cdot 1_R) r \\
 &= \varphi(k) r
 \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
 f(k \cdot r) &= f(\varphi(k) r) \\
 &= \psi(k) f(r) \\
 &= k \cdot f(r)
 \end{aligned}$$

Por lo que  $f$  es un morfismo de  $K$ -módulos a izquierda.

De la misma forma, el converso también es válido. Considere las  $K$ -álgebras  $(R, K, \varphi)$  y  $(S, K, \psi)$ . Sean  $t \in K$  y  $x \in R$ . Note que

$$\begin{aligned}
 \varphi(k) r &= (k \cdot 1_R) r \\
 &= k \cdot (1_R r) \\
 &= k \cdot r
 \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} f(\varphi(k)r) &= f(k \cdot r) \\ &= k \cdot f(r) \\ &= \psi(k)f(r) \end{aligned}$$

De ahí, concluimos que  $f$  es un morfismo de  $K$ -álgebras.  $\square$

**Ej 11.** Dado un morfismo de anillos  $\varphi : R \rightarrow S$ , construya la correspondencia análoga (a la de módulos)  $F_\varphi : {}_S\text{Rep} \longrightarrow {}_R\text{Rep}$ .

*Demostración.* Sean  $\varphi : R \rightarrow S$  un morfismo de anillos y  $(\lambda, M) \in {}_S\text{Rep}$  una representación a izquierda del anillo  $S$ . Se define la correspondencia **Cambio de anillos**  $F_\varphi : {}_S\text{Rep} \longrightarrow {}_R\text{Rep}$ . Como grupos abelianos,  $F_\lambda(M) := M$  y la representación  $R \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}}^l(M)$ ,  $(r) \mapsto \lambda'(r)$ , se define por  $\lambda'(r) := \lambda(\varphi(r))$ . Cabe observar que, como  $\lambda$  y  $\varphi$  son morfismos de anillos entonces  $\lambda'$  es morfismo de anillos.  $\square$