Ej 1. Pruebe que en una categoría $\mathscr{C}$, vale lo siguiente

a) La composición de monomorfismos (epimorfismos) es un monomorfismo (epimorfismo).
b) Todo split-epi (split-mono) es un epimorfismo (monomorfismo).
c) fg mono $\Rightarrow g$ es mono.
d) fg epi $\Rightarrow f$ es epi.
e) f es iso $\Rightarrow f$ es epi y mono.
f) f es iso $\iff$ f es split-mono y split-epi.

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una categoría.
$\boxed{a)}$ Supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon B \longrightarrow C$ son monomorfismos y que para todo $\alpha, \beta \in Mor(\mathscr{C})$ se tiene que que $gf\alpha = gf\beta$, entonces considerando a los morfismos $f\alpha$ y $f\beta$ tenemos que, como g es mono, $f\alpha = f\beta$, análogamente, como f es mono, entonces $\alpha = \beta$ por lo que gf es mono.

Ahora supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon B \longrightarrow C$ son epimorfismos y que para toda $\alpha, \beta \in Mor(\mathscr{C})$ se tiene que que $\alpha gf = \beta gf$. Como f es epi, entonces $\alpha g = \beta g$ y por ser g epi $\alpha = \beta$ por lo tanto gf es epi.

$\boxed{b)}$ Supongamos $f\colon A \longrightarrow B$ es split-epi, entonces existe $f'\colon B \longrightarrow A$ tal que $ff' = 1_B$ así, si $h, g \in Mor(\mathscr{C})$ son tales que $hf = gf$ entonces $hff' = gff'$, es decir, $h1_B = g1_b$ y por lo tanto $h = g$. Entonces f es epi.

Supongamos ahora que $f\colon A \longrightarrow B$ es split-mono, entonces existe $f'\colon B \longrightarrow A$ tal que $f'f = 1_A$ así, si $h, g \in Mor(\mathscr{C})$ son tales que $fh = fg$ entonces $f'fh = f'fg$, es decir, $1_Ah = 1_Ag$ y por lo tanto $h = g$. Entonces f es mono.

$\boxed{c)}$ Supongamos fg es mono con $f, g \in Mor(\mathscr{C})$, entonces para todo $k, h \in Mor(\mathscr{C})$, si $gk = gh$ se tiene que $fgk = fgh$ y como fg es mono entonces $k = h$ por lo tanto g es mono.

$\boxed{d)}$ Supongamos fg es epi con $f, g \in Mor(\mathscr{C})$, entonces para todo $k, h \in Mor(\mathscr{C})$, si $kf = hf$ se tiene que $kfg = hfg$ y como fg es epi entonces $k = h$ por lo tanto f es epi.

$\boxed{f)}$ Supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ es iso, entonces

$$\begin{aligned} &\exists g\colon B \longrightarrow A \quad \text{tal que} \quad fg = 1_B,\ gf = 1_A, \\ \text{entonces} \quad &\exists g\colon B \longrightarrow A \quad \text{tal que} \quad fg = 1_B \\ \text{y} \quad &\exists g\colon B \longrightarrow A \quad \text{tal que} \quad gf = 1_A \end{aligned}$$

por lo que f es split-epi y f es split-mono.

Ahora supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ es split-mono y split-epi. Entonces existen $g_1\colon B \longrightarrow A$ y $g_2\colon B \longrightarrow A$ tales que $fg_1 = 1_B$ y $g_2 f = 1_A$.
Como $fg_1 = 1_B$ entonces aplicando g_2 por la izquierda se tiene que $g_2 f g_1 = g_2 1_B$, así $1_A g_1 = g_2 1_B$. Por lo tanto $g_1 = g_2$ y así f es iso.

$\boxed{e)}$ Este inciso es consecuencia de f) y b). $\square$

Ej 2. Para $f\colon A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathscr{C}$, pruebe que:

a) f es un monomorfismo $\iff \quad \forall X \in \mathscr{C}$,
$Hom_{\mathscr{C}}(X, f) : Hom_{\mathscr{C}}(X, A) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(X, B)$ es inyectivo.

b) f es un epimorfismo $\iff \quad \forall X \in \mathscr{C}$,
$Hom_{\mathscr{C}}(f, X) : Hom_{\mathscr{C}}(B, X) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(A, X)$ es suprayectivo.

Demostración. $\boxed{a)}$ Supongamos f es mono y sean $A, B, X \in \mathscr{C}$. Si $g \in Hom_{\mathscr{C}}(X, A)$ entonces $fg \in Hom_{\mathscr{C}}(X, B)$.
Ahora, si $Hom_{\mathscr{C}}(X, f)(\alpha) = Hom_{\mathscr{C}}(X, f)(\beta)$ para $\alpha, \beta \in Hom_{\mathscr{C}}(X, A)$, entonces $f\alpha = f\beta$, pero f es mono, así $\alpha = \beta$ y por lo tanto $Hom_{\mathscr{C}}(X, f)$ es inyectivo.

Supongamos ahora que $Hom_{\mathscr{C}}(X, f)$ es inyectivo para toda $X \in \mathscr{C}$.
Si $\alpha\beta \in Mor(\mathscr{C})$ son tales que $f\alpha = f\beta$...(1) entonces $\exists X \in \mathscr{C}$ tal que $\alpha, \beta \in Hom_{\mathscr{C}}(X, A)$ más aun, (1) implica que
$Hom_{\mathscr{C}}(X, f)(\alpha) = Hom_{\mathscr{C}}(X, f)(\beta)$ y como $\forall X \in \mathscr{C}$, $Hom_{\mathscr{C}}(X, f)$ es inyectivo, entocnes $\alpha = \beta$ por lo tanto f es mono.

$\boxed{b)}$ Supongamos f es epi y sean $A, B, X \in \mathscr{C}$.
Si $Hom_{\mathscr{C}}(f, X)(\alpha) = Hom_{\mathscr{C}}(f, X)(\beta)$ con $\alpha, \beta \in Hom_{\mathscr{C}}(B, X)$, entonces $\alpha f = \beta f$, pero f es epi, así $\alpha = \beta$ y por lo tanto $Hom_{\mathscr{C}}(f, X)$ es inyectivo.

Supongamos ahora que $Hom_{\mathscr{C}}(f, X)$ es inyectivo para toda $X \in \mathscr{C}$.
Si $\alpha\beta \in Mor(\mathscr{C})$ son tales que $\alpha f = \beta f$...(2) entonces $\exists X \in \mathscr{C}$ tal que $\alpha, \beta \in Hom_{\mathscr{C}}(A, X)$ más aun, (2) implica que $Hom_{\mathscr{C}}(f, X)(\alpha) = Hom_{\mathscr{C}}(f, X)(\beta)$ y como $\forall X \in \mathscr{C}$, $Hom_{\mathscr{C}}(f, X)$ es inyectivo, entocnes $\alpha = \beta$ por lo tanto f es epi.

$\square$

Ej 3. Sea $f : A \to B$ en una categoría $\mathscr{C}$, así:

a) si f es un split-epi y monoformismo, entonces f es un isomorfismo;

b) si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor y f es un isomorfismo, split-mono o split-epi, entonces $F(f)$ también lo es.

Demostración. $\boxed{a)}$ Como f es un split-epi $\exists\ g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, A)$ tal que $fg = 1_B$. Notemos que

$$\begin{aligned} & f(gf) = (fg) f = 1_B f = f = f 1_A \\ \implies & gf = 1_A, && f \text{ es mono} \\ & \therefore f \text{ es un isomorfismo.} \end{aligned}$$

$\boxed{b)}$ Supongamos que f es un split-mono, entonces $\exists\ g : B \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $gf = 1_A$, con lo cual $Ff : FA \to FB$, $Fg : FB \to FA$ en $\mathscr{D}$ y

$$\begin{aligned} F(g) F(f) = F(gf) = F(1_A) = 1_{F(A)} \\ \implies F(f) \text{ es un split-mono.} \end{aligned}$$

Supongamos ahora que f es un split-epi, luego $\exists\ g : B \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $fg = 1_B$, con lo cual $Ff : FA \to FB$, $Fg : FB \to FA$ en $\mathscr{D}$ y

$$\begin{aligned} F(f) F(g) = F(fg) = F(1_B) = 1_{F(B)} \\ \implies F(f) \text{ es un split-epi.} \end{aligned}$$

De lo anterior, en conjunto a la equivalencia dada en el Ej. 1 (f), se sigue que si f es un isomorfismo en $\mathscr{C}$ entonces $F(f)$ lo es en $\mathscr{D}$.

□

Ej 4. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías.

a) Sea $\eta \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F, G)$. Si $\forall\ A \in \mathscr{A}$ $\eta_A : FA \to GA$ es un isomorfismo en $\mathscr{B}$ y $\eta^{-1} := \left\{\left(\eta^{-1}\right)_A\right\}_{A \in \mathscr{A}}$, con $\left(\eta^{-1}\right)_A := (\eta_A)^{-1}$, entonces $\eta^{-1} \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(G, F)$.

b) Si $\eta \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F, G)$, $\rho \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(G, H)$ entonces la composición de transformaciónes naturales, con $\rho\eta$ dada por $(\rho\eta)_A := \rho_A \circ \eta_A$ $\forall\ A \in \mathscr{A}$, es una operación asociativa.

c) Si $T \in [\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ y $1_T : T \to T$ está dada por $(1_T)_A := 1_{T(A)}$ $\forall\ A \in \mathscr{A}$, entonces $1_T \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(T, T)$.

d) Si $\alpha \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F, G)$, entonces

$$\alpha 1_F = \alpha = 1_G \alpha.$$

Demostración. $\boxed{a)}$ Dado que $\forall\ A \in \mathscr{A}$ $\eta_A : FA \to GA$ es un isomorfismo en $\mathscr{B}$, se tiene que $(\eta_A)^{-1} \in Hom_{\mathscr{B}}(GA, FA)$ y que si $\alpha : A \to A'$ está en $\mathscr{A}$, entonces

$$\begin{aligned} & G(\alpha)\, \eta_A = \eta_{A'} F(\alpha), && \eta \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F, G) \\ \implies & F(\alpha)(\eta_A)^{-1} = (\eta_{A'})^{-1} G(\alpha). \end{aligned}$$

Así $\eta^{-1} : G \to F$ es una transformación natural, pues lo anterior garantiza que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{(\eta_A)^{-1}} & F(A) \\ {\scriptstyle G(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\alpha)} \\ G(A') & \xrightarrow[(\eta_{A'})^{-1}]{} & F(A') \end{array}.$$

$\boxed{b)}$ Notemos que $\forall\ A \in \mathscr{A}$ se tiene que $\rho_A \eta_A \in Hom_{\mathscr{B}}(F(A), G(A))$. Además si $\alpha : A \to A'$ está en $\mathscr{A}$, por ser η y ρ transformaciones naturales, se tiene que $G(\alpha)\eta_A = \eta_{A'}F(\alpha)$ y $H(\alpha)\rho_A = \rho_{A'}G(\alpha)$, con lo cual

$$\begin{aligned} H(\alpha)(\rho_A\eta_A) &= (H(\alpha)\rho_A)\eta_A = (\rho_{A'}G(\alpha))\eta_A \\ &= \rho_{A'}(G(\alpha)\eta_A) = \rho_{A'}(\eta_{A'}F(\alpha)) \\ &= (\rho_{A'}\eta_{A'})F(\alpha), \end{aligned}$$

de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\rho_A\eta_A} & H(A) \\ {\scriptstyle F(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(\alpha)} \\ F(A') & \xrightarrow[\rho_{A'}\eta_{A'}]{} & H(A') \end{array},$$

y por lo tanto $\rho\eta : F \to H$ es una tranformación natural.
Verificaremos ahora que la composición de transformaciones naturales es asociativa. Si ρ y η están dados como al comienzo, $I \in [\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ y $\chi : H \to I$ es una transformación natural, entonces si $A \in \mathscr{A}$

$$\begin{aligned} \chi_A(\rho_A\eta_A) &= (\chi_A\rho_A)\eta_A \in (\chi\rho)\eta, \\ &\implies \chi(\rho\eta) \subseteq (\chi\rho)\eta. \end{aligned}$$

En forma análoga se verifica la otra contención, y así se tiene que $\chi(\rho\eta) = (\chi\rho)\eta$.
$\boxed{c)}$ Si $\alpha : A \to A'$ está en $\mathscr{A}$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha)1_{T(A)} &= T(\alpha) \\ &= 1_{T(A')}T(\alpha), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{1_{T(A)}} & T(A) \\ {\scriptstyle T(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(\alpha)} \\ T(A') & \xrightarrow[1_{T(A')}]{} & T(A') \end{array}$$

conmuta, y por tanto $1_T : T \to T$ es una transformación natural.
$\boxed{d)}$ Se tiene que $\forall\ A \in \mathscr{A}\ \alpha_A 1_{F(A)} = \eta_A$, con lo cual $(\alpha 1_F)_A = \alpha_A$ y por tanto $\alpha 1_F = \alpha$. Análogamente se verifica que $1_G\alpha = \alpha$. $\square$

Ej 5. Sea $F\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ funtor. Pruebe que F es una equivalencia si y sólo si F es fiel, pleno y denso.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos F es equivalencia, entonces existe $G\colon \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ tal que existen isomorfismos $\psi\colon GF \longrightarrow 1_{\mathscr{A}}$ y $\varphi\colon 1_{\mathscr{B}} \longrightarrow FG$.

Fiel:
Sean $X, Y \in \mathscr{A}$ y consideremos que $F\colon Hom_{\mathscr{A}}(X,Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{B}}(FX, FY)$. Supongamos que existen $g, h \in Hom_{\mathscr{A}}(X,Y)$ tales que $F(g) = F(h)$, entonces $G(F(g)) = G(F(h))$. Primero observamos que, si $Hom_{\mathscr{A}}(X,Y) = \emptyset$, entonces F es mono en la categoría Sets por vacuidad.

Ahora, si $Hom_{\mathscr{A}}(X,Y) \neq \emptyset$, entonces dado $\alpha\colon A \longrightarrow A'$ en $\mathscr{A}$ se tiene que, por ser F equivalencia, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
GF(A) \arrow[r, "\psi_A"] \arrow[d, "GF(\alpha)"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
GF(A') \arrow[r, "\psi_{A'}"'] & A'
\end{tikzcd}$$

es decir, $\alpha\psi_A = \psi_{A'} GF(\alpha)$. Por lo tanto $\alpha = \psi_{A'} GF(\alpha)\psi_A^{-1}$.

Entonces $g = \phi_Y GF(g)\psi_X = \phi_Y GF(h)\psi_X = h$, por lo que F es fiel. Observese que Análogamente se demuestra que G es un funtor fiel.

Pleno:
Supongamos $Hom_{\mathscr{B}}(F(X), F(Y)) = \emptyset$, entonces $Hom_{\mathscr{A}}(X,Y) = \emptyset$, por lo que F es la función vacia, la cual es vacia pues cada que $\alpha f = \beta F$ se tiene que $\alpha = \beta = \emptyset$ la función vacia.
Ahora, si $Hom_{\mathscr{B}}(F(X), F(Y)) \neq \emptyset$ podemos considerar a $h \in Hom_{\mathscr{B}}(F(X), F(Y))$, entonces $G(h) \in Hom_{\mathscr{A}}(X,Y)$ y es tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
GF(X) \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "G(h)"'] & X \arrow[r, "\psi_X^{-1}"] \arrow[d, "\alpha"] & GF(X) \arrow[d, "GF(\alpha)"] \\
GF(Y) \arrow[r, "\psi_Y"'] & Y \arrow[r, "\psi_Y^{-1}"'] & GF(Y)
\end{tikzcd}$$

entonces $G(h) = GF(\alpha)$, pero G es fiel, entonces $h = F(\alpha)$ y por lo tanto F es pleno.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos F es fiel, pleno y denso.
Entonces F es mono y epi en Sets, así para cada $X, Y \in \mathscr{A}$,
$F\colon Hom_{\mathscr{A}}(X,Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{B}}(F(X),F(Y))$ es mono y epi en Sets, por lo tanto es isomorfismo en Sets para cada $X, Y \in \mathscr{A}$.
Ahora, como F es denso, para toda $B \in \mathscr{B}$ existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $F(A) \cong B$, así para cada $B \in \mathscr{B}$ podemos fijar un obgeto $G(B) \in \mathscr{A}$ y un isomorfismo $\gamma_B\colon F(A) \longrightarrow B$.

Así para cada $B \xrightarrow{\beta} B'$ en $\mathscr{B}$, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\gamma_B^{-1}} & FG(B){=}F(A) \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ B' & \xrightarrow[\gamma_{B'}^{-1}]{} & FG(B'){=}F(A') \end{array}$$

donde $\alpha = \gamma_{B'}^{-1}\beta\gamma_B$. Así $\alpha\colon FG(B) \longrightarrow FG(B')$.
Como $F\colon Hom_{\mathscr{A}}(A,A') \longrightarrow Hom_{\mathscr{B}}(F(A),F(A'))$ es iso, existe un único morfismo $G(\beta)\colon G(B) \longrightarrow G(B')$ tal que $\gamma_{B'}^{-1}\beta\gamma_B = F(G(\beta))$. En otras palabras para cada $\beta\colon B \longrightarrow B'$ existe un único morfismo $G(\beta)\colon G(B) \longrightarrow G(B')$ en $\mathscr{A}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\gamma_B^{-1}} & FG(B) \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(G(\beta))} \\ B' & \xrightarrow[\gamma_{B'}^{-1}]{} & FG(B') \end{array} \qquad \ldots(1)$$

Ahora veamos que G es funtor.
Tomando $\beta = 1_B$ en el diagrama (1) se tiene que existe un único $G(1_B)\colon G(B) \longrightarrow G(B')$ tal que $FG(1_B) = 1_B$, pero como F es pleno, entonces $G(1_B) = 1_{G(B)}$.
Para probar que G preserva la composición tomaremos $\beta\colon B \longrightarrow B'$ y $\alpha\colon B' \longrightarrow B''$ morfismos en $\mathscr{B}$, como F es fiel y pleno existe un único morfismo $G(\alpha\beta)\colon G(B) \longrightarrow G(B'')$ en $\mathscr{A}$ tal que $\gamma_{B''}(\alpha\beta)\gamma_B^{-1} = F(G(\alpha\beta))$; pero también se tiene que $\gamma_B(\alpha\beta)\gamma^{-1} = F(G\alpha))F(G(\beta))$.
Por lo que $F(G(\alpha\beta)) = F(G(\alpha))F(G(\beta)) = F(G(\alpha)G(\beta))$. Y como F es fiel, $G(\alpha\beta) = G(\alpha)G(\beta)$, por lo que $G\colon \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ es funtor.

Por el diagrama (1) se puede apreciar que $\gamma = \{\gamma_\beta\colon B \longrightarrow FG(B)\}$, $(\gamma\colon 1_{\mathscr{B}} \longrightarrow FG)$ es una equivalencia natural. Entonces para cada $A \in \mathscr{A}$ se tiene el isomorfismo $\gamma_{F(A)}\colon F(A) \longrightarrow FGF(A)$ en $\mathscr{B}$; en particular, como F es fiel, existe $\psi'_A\colon A \longrightarrow GF(A)$ tal que $F(\psi'_A) = \gamma_{F(A)}$.
Por otro lado, como $\gamma_{F(A)}$ es un isomorfismo, entonces existe $\gamma_{F(A)}^{-1}\colon FGF(A) \longrightarrow F(A)$ tal que $\gamma_{F(A)}^{-1}\gamma_{F(A)} = 1_{F(A)}$. Y como F es pleno, existe $\psi_A\colon GF(A) \longrightarrow A$ tal que $F(\psi_A) = \gamma_{F(A)}^{-1}$. Por lo tanto

$F(\psi_A\psi'_A) = 1_{F(A)}$; y como F es fiel, entonces $\psi_A\psi'_A = 1_A$ Análogamente $\psi'_A\psi_A = 1_{GF(A)}$ por lo que ψ_A es isomorfismo.

Por último veamos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} GF(A) & \xrightarrow{\psi_A} & A \\ {\scriptstyle GF(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ GF(A') & \xrightarrow[\psi_{A'}]{} & A' \end{array} \quad \dots(2)$$

conmuta en A.

En efecto, aplicando F al diagrama anterior obtenemos que

$$\begin{array}{ccc} FGF(A) & \xrightarrow{F(\psi_A)} & F(A) \\ {\scriptstyle FGF(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\alpha)} \\ FGF(A') & \xrightarrow[F(\psi_{A'})]{} & F(A') \end{array}$$

Como $F(\psi_A) = \gamma^{-1}_{F(A)}$ y $F(\psi_{A'}) = \gamma^{-1}_{F(A')}$, reemplazando a β del diagrama (1) por $F(\alpha)$, obtenemos que el diagrama anterior conmuta. Peo F es fiel, entonces el diagrama (2) conmuta y así $\psi\colon GF \longrightarrow 1_{\mathscr{A}}$ es una equivalencia natural. $\square$

Ej 6. Sea $\leq$ un preorden en una clase X. Pruebe que:

a) La relación $\sim$ inducida por $\leq$, $(a \sim b \iff (a \leq b \text{ y } b \leq a))$ es una relación de equivalencia en X.

b) Considere la clase cociente $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$, donde $[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}$. Pruebe que el preorden $\leq$ en X induce un orden parcial en $X/\sim$ dado por $[x] \leq [y] \iff x \leq y$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Sea $\sim$ la relación descrita en la hipótesis.
Reflexividad:
Como $a = a$ entonces $a \leq a$, por lo que $a \sim a$.

Simetría:
Supongamos $a \sim b$ entonces $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $b \leq a$ y $a \leq b$ y por lo tanto $b \sim a$.

Transitividad:
Supongamos $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \leq b, b \leq a, b \leq c$ y $c \leq b$. En

particular, como $\leq$ es preorden, $a \leq b \leq c$ y $c \leq b \leq a$, es decir, $a \leq c$ y $c \leq a$ por lo tanto $a \sim c$ y en consecuencia $\sim$ es de equivalencia.

$\boxed{b)}$ Buena definición:
Sean $a \in [x]$ y $b \in [y]$ con $x, y \in X$, en particular $a \leq x, y \leq b$. Si $[x] \leq [y]$ entonces $a \leq x \leq y \leq b$ por lo tanto $a \leq b$. Y se tiene que la relación está bien definida.

Reflexividad:
Como $a \leq a$ en X, pues $a \sim a$, entonces $[a] \leq [a]$.

Transitividad:
Supongamos $[x] \leq [y]$ y $[y] \leq [z]$. Entonces $x \leq y$ y $y \leq z$, pero $\leq$ es transitiva en X, entonces $x \leq z$ y así $[x] \leq [z]$. $\square$

Ej 7. Si los siguientes diagramas conmutativos en una categoría $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, "\beta_1'"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

son pull-backs, entonces $\exists\ \gamma : P \to P'$ en $\mathscr{C}$ un isomorfismo tal que $\beta_i = \beta_i'\gamma$, $\forall\ i \in [1, 2]$.

Demostración. Por la propiedad universal del pull-back aplicada a P', se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\exists!\ \gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\ & P' \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, "\beta_1'"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd},$$

mientras que la propiedad universal del pull-back aplicada a P grantiza que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, "\exists!\ \gamma'"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2'"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1'"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}.$$

Así

$$
\begin{aligned}
\beta_1 (\gamma' \gamma) &= (\beta_1') \gamma \\
&= \beta_1, \\
\beta_2 (\gamma' \gamma) &= (\beta_2') \gamma \\
&= \beta_2,
\end{aligned}
\tag{*}
$$

de modo que los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "\gamma'\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_1"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "1_P"] \arrow[drr, bend left, "\beta_1"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
$$

y por lo tanto, empleando la propiedad universal del pull-back para P, se tiene que $\gamma'\gamma = 1_P$. En forma análoga, empleando ahora la propiedad universal del pull-back para P', se verifica que $\gamma\gamma' = 1_{P'}$, de modo que $\gamma : P \to P'$ es un isomorfismo en $\mathscr{C}$. Con lo anterior y (*) se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 8. Sea el siguiente diagrama conmutativo en una categoría $\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
$$

un pull-back, entonces

a) si α_1 es un monomorfismo, entonces β_2 también lo es;

b) β_2 es un split-epi si y sólo si α_2 se factoriza a través de α_1.

Demostración. $\boxed{a)}$ Supongamos que α_1 es un monomorfismo y que $f, g : B \to P$ son morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\beta_2 f = \beta_2 g$. Notemos primeramente que así

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 (\beta_1 f) &= (\alpha_2 \beta 2) f = \alpha_2 (\beta_2 g) = (\alpha_1 \beta_1) g \\
&= \alpha_1 (\beta_1 g) \\
\implies \beta_1 f &= \beta_1 g, && \alpha_1 \text{ es un mono}
\end{aligned}
$$

con lo cual se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "{f,\, g}"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2 f"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1 f"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd} ,$$

y así la propiedad universal del pull-back garantiza que $f = g$, con lo cual β_2 es un mono.

$\boxed{b) \implies}$ Dado que β_2 es un split-epi $\exists\, \gamma : A_2 \to P$ tal que $\beta_2\gamma = 1_{A_2}$, así

$$\begin{aligned}
\alpha_1 (\beta_1\gamma) = (\alpha_2\beta_2)\, \gamma &= \alpha_2 (1_{A_2}) \\
&= \alpha_2, \\
\implies \alpha_2 &\text{ se factoriza a través de } \alpha_1.
\end{aligned}$$

$\boxed{b) \impliedby}$ Se tiene que $\exists\ \alpha : A_2 \to A_1$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_2 = \alpha_1\alpha$, con lo cual a partir de la propiedad universal del pull-back se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[dr, "\exists!\ \gamma"] \arrow[drr, bend left, "1_{A_2}"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd} ,$$

del cual se deduce que en partícular $\beta_2\gamma = 1_{A_2}$, y así se tiene lo deseado.

□

Ej 9. Supongamos que los dos cuadrados del siguiente diagrama en una categoría $\mathscr{C}$ conmutan

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta_1"] & B' \arrow[d, "\theta_1"] & Q \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\theta_2"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B & I \arrow[l, "\gamma_2"]
\end{tikzcd}$$

Pruebe que: si θ_1 y γ_2 son monomorfismos en $\mathscr{C}$ y existe $\gamma_1 \colon A \longrightarrow I$ tal que $f = \gamma_2\gamma_1$, entonces existe $\alpha_1 \colon P \to Q$ tal que $\alpha_2\alpha_1 = g$ y el siguiente diagrama es un pull-back

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[d, "\theta_2"] \\
A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como los diagramas del enunciado conmutan, entonces

$$\theta_1\alpha_2 = \alpha_2\theta_2\,,\ \ \theta_1 g = f\beta_1.$$

Ahora, como $f = \gamma_2\gamma_1$ se tiene que $\gamma_2\gamma_1\beta_1 = f\beta_1$ asi el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma_1\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\theta_1"] \\ I \arrow[r, "\gamma_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Pero Q es pull-back de $I \xrightarrow{\gamma_2} B \xleftarrow{\theta_1} B'$ por lo que existe un único $\alpha_1 \colon P \longrightarrow Q$ tal que $g = \alpha_2\alpha_1$ y $\gamma_1\beta_1 = \theta_2\alpha_1$. veamos ahora que el diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[d, "\theta_2"] \\ A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I \end{tikzcd}$$

es un pull-back.

Supongamos que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "k_1"] \arrow[ddr, bend right, "k_2"'] & & \\ & P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[d, "\theta_2"] \\ & A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I \end{tikzcd}\ ,$$

tal que $\gamma_1 k_2 = \theta_2 k_1$.

Como $K \xrightarrow{k_2} A$ y $K \xrightarrow{\alpha_2 k_1} B'$ cumple que $fk_2 = \gamma_2\gamma_1 k_2$ y $\theta_1\alpha_2 k_1 = \gamma_2\theta_2 k_1$.
Entonces como $\theta_2 k_1 = \gamma_1 k_2$, tenemos que $fk_2 = \theta_1\alpha_2 k_1$.

Así el siguiente diagrama conmmuta:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha_2 k_1"] \arrow[d, "k_2"'] & B' \arrow[d, "\theta_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Pero P es un pull-back, por lo tanto existe un único $\eta\colon K \longrightarrow P$ tal que $\beta_1\eta = k_2$ y $g\eta = \alpha_2 k_1$, entonces $\alpha_2\alpha_1\eta = \alpha_2 k_1$ y dado que γ_2 es mono y Q pull-back, se tiene que α_2 es mono y $\alpha_1\eta = k_1$.
Además, si $\gamma\colon K \longrightarrow P$ es tal que $\beta_1\gamma = k_2$ y $g\gamma = \alpha_2 k_1$, entonces $\beta_1\gamma = \beta_1\eta$ y puesto que θ_1 es mono y P pullback, entonces β_1 es mono y $\gamma = \eta$. Por lo tanto η es único hasta isomorfismos y en consecuencia P es pull-back de $Q \xrightarrow{\alpha_1} I \xleftarrow{\gamma_1} A$. $\square$

Ej 10. Defina la noción dual del pull-back (i.e. push-out) y pruebe que el push-out, de existir, es único hasta isomorfismos.

Demostración. Recordemos la definición del pull-back:
Definición. Sean $\alpha_1\colon A_1 \longrightarrow A$ y $\alpha_2\colon A_2 \longrightarrow A$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Un pull-back para $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A \xleftarrow{\alpha_2} A_2$ es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

Que satisface la siguiente propiedad universal:
$\forall \beta_2'\colon P' \longrightarrow A_2$, $\forall \beta_1'\colon P \longrightarrow A_1$ tal que $\alpha_2\beta_1' = \alpha_1\beta_1'$, se tiene que $\exists!\ \gamma : P' \to P$ tal que $\beta_1' = \beta_1\gamma$ y $\beta_2' = \beta_2\gamma$. Diagramaticamente se vé como sigue:

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[drr, bend left, "\beta_2'"] \arrow[dr, "\exists!\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1'"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2 1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd} ,$$

Así el concepto de pull-back en la categoría opuesta se puede abreviar de la siguiente manera:

a) $\exists\ \beta_1^{op} : A_1 \to P, \beta_2^{op} : A_2 \to P$ tales que $\alpha_1^{op}\beta_1^{op} = \alpha_2^{op}\beta_2^{op}$.
b) $\forall\ P' \in \mathscr{C}$ y $\forall\ \beta_1'^{op} : A_1 \to P', \beta_2'^{op} : A_2 \to P'$ tales que $\alpha_1^{op}\beta_1'^{op} = \alpha_2^{op}\beta_2'^{op}$, $\exists!\ \gamma^{op} : P \to P'$ tal que $\beta_1'^{op} = \beta_1^{op}\gamma^{op}$ y $\beta_2'^{op} = \beta_2^{op}\gamma^{op}$.

Con esto en mente, entonces podemos dar la siguiente definición.

Definición. Sean $\alpha_1 \colon A \longrightarrow A_1$ y $\alpha_2 \colon A \longrightarrow A_2$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Un push-out para $A_1 \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$ es un diagrama

$$\begin{tikzcd} P & A_1 \arrow[l, "\beta_1"'] \\ A_2 \arrow[u, "\beta_2"] & A \arrow[l, "\alpha_2"] \arrow[u, "\alpha_1"'] \end{tikzcd}$$

conmutativo en $\mathscr{C}$ que satisface la siguiente propiedad universal:

$\forall \beta_2' \colon A_2 \longrightarrow P'$, $\forall \beta_1' \colon A_1 \longrightarrow P'$ tal que $\beta_1'\alpha_1 = \beta_2'\alpha_2$, se tiene que $\exists!\ \gamma : P \to P'$ tal que $\beta_1' = \gamma\beta_1$ y $\beta_2' = \gamma\beta_2$. Diagramaticamente se vé como sigue:

$$\begin{tikzcd} P' & & \\ & P \arrow[ul, "\exists!\ \gamma"'] & A_1 \arrow[l, "\beta_1"'] \arrow[ull, bend right, "\beta_1'"'] \\ & A_2 \arrow[u, "\beta_2"] \arrow[uu, bend left, "\beta_2'"] & A \arrow[l, "\alpha_2"] \arrow[u, "\alpha_1"'] \end{tikzcd}$$

Unicidad.
Supongamos que $Q \in \mathscr{C}$, $\eta_1 \colon A_1 \longrightarrow Q$ y $\eta_2 \colon A_2 \longrightarrow Q$ son otro push-out de $A_1 \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Q & A_1 \arrow[l, "\eta_1"'] \\ A_2 \arrow[u, "\eta_2"] & A \arrow[l, "\alpha_2"] \arrow[u, "\alpha_1"'] \end{tikzcd}$$

Como P es push-out existe un único $\gamma \colon P \longrightarrow Q$ tal que $\gamma\beta_2 = \eta_2$ y $\gamma\beta_1 = \eta_1$, y como Q es push-out existe un único $\bar{\gamma} \colon Q \longrightarrow P$ tal que $\bar{\gamma}\eta_2 = \beta_2$ y $\bar{\gamma}\eta_1 = \beta_1$.
Con estos resultados se obtiene que $\bar{\gamma}\gamma \colon P \longrightarrow P$,

$$\bar{\gamma}\gamma\beta_2 = \bar{\gamma}\eta_2 = \beta_2 \quad \text{y} \quad \bar{\gamma}\gamma\beta_1 = \bar{\gamma}\eta_1 = \beta_1.$$

Pero el funtor identidad también cumple dichas igualdades, así, como P es push-out, $\bar{\gamma}\gamma = 1_P$ por unicidad. Análogamente $\gamma\bar{\gamma} = 1_Q$ por lo tanto $P \cong Q$. □

Ej 11. Enunciaremos y probaremos la proposición dual al Ej. 8. Notemos primeramente que
Pull-back:

PBI) $\exists\ \beta_1 : P \to A_1, \beta_2 : P \to A_2$ tales que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$.

PBII) $\forall\ P' \in \mathscr{C}$ y $\forall\ \beta_1' : P' \to A_1, \beta_2' : P' \to A_2$ tales que $\alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$, $\exists!\ \gamma : P' \to P$ tal que $\beta_1' = \beta_1\gamma$ y $\beta_2' = \beta_2\gamma$.

Pull-back$^{\mathbf{op}}$:

PB$^{\mathrm{op}}$I) $\exists\ \beta_1^{op} : A_1 \to P, \beta_2^{op} : A_2 \to P$ tales que $\alpha_1^{op}\beta_1^{op} = \alpha_2^{op}\beta_2^{op}$.

PB$^{\mathrm{op}}$II) $\forall\ P' \in \mathscr{C}$ y $\forall\ \beta_1'^{op} : A_1 \to P', \beta_2'^{op} : A_2 \to P'$ tales que $\alpha_1^{op}\beta_1'^{op} = \alpha_2^{op}\beta_2'^{op}$, $\exists!\ \gamma^{op} : P \to P'$ tal que $\beta_1'^{op} = \beta_1^{op}\gamma^{op}$ y $\beta_2'^{op} = \beta_2^{op}\gamma^{op}$.

Pull-back*:

PB*I) $\exists\ \beta_1 : A_1 \to P, \beta_2 : A_2 \to P$ tales que $\beta_1\alpha_1 = \beta_2\alpha_2$.

PB*II) $\forall\ P' \in \mathscr{C}$ y $\forall\ \beta_1' : A_1 \to P', \beta_2' : A_2 \to P'$ tales que $\beta_1'\alpha_1 = \beta_2'\alpha_2$, $\exists!\ \gamma : P \to P'$ tal que $\beta_1' = \gamma\beta_1$ y $\beta_2' = \gamma\beta_2$.

Esto último es la definición de que un objeto P sea un push-out de $\alpha_1 : A \to A_1$ y $\alpha_2 : A \to A_2$. Por lo anterior, y dado que las propiedades duales de mono y split-epi son respectivamente epi y split-mono, la proposición dual del Ej. 8 es:
Sea el siguiente diagrama conmutativo en una categoria $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
P & A_2 \arrow[l, "\beta_2"'] \\
A_1 \arrow[u, "\beta_1"] & A \arrow[l, "\alpha_1"] \arrow[u, "\alpha_2"']
\end{tikzcd}$$

un push-out, entonces

a) si α_1 es un epimorfismo, entonces β_2 también lo es;

b) β_2 es un split-mono si y sólo si $\exists\ \delta : A_1 \to A_2$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_2 = \delta\alpha_1$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Supongamos que $f : P \to Q$ y $g : P \to Q$ en $\mathscr{C}$ son tales que $f\beta_2 = g\beta_2$. Notemos que

$$\begin{aligned}
(f\beta_1)\,\alpha_1 &= f\,(\beta_2\alpha 2) = (g\beta_2)\,\alpha_2 = g\,(\beta_1\alpha_1) \\
&= (g\beta_1)\,\alpha_1 \\
\implies\ f\beta_1 &= g\beta_1, && \alpha_1 \text{ es un epi}
\end{aligned}$$

con lo cual se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B & & \\
& P \arrow[ul, "{f,\, g}"'] & A_2 \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[ull, bend right, "\beta_2 f"'] \\
& A_1 \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[uul, bend left, "\beta_1 f"] & A \arrow[l, "\alpha_1"] \arrow[u, "\alpha_2"']
\end{tikzcd},$$

y así la propiedad universal del push-out garantiza que $f = g$, con lo cual β_2 es un epi.

$\boxed{b)\ \Longrightarrow}$ Por ser β_2 un split-mono $\exists\ \gamma : P \to A_2$ en $\mathscr{C}$ tal que $\gamma\beta_2 = 1_{A_2}$, de modo que si $\delta := \gamma\beta_1$, entonces

$$\begin{aligned} \delta\alpha_1 &= \gamma\left(\beta_1\alpha_1\right) = \left(\gamma\beta_2\right)\alpha_2 = 1_{A_2}\alpha_2 \\ &= \alpha_2. \end{aligned}$$

$\boxed{b)\ \Longleftarrow}$ Bajo estas condiciones de la propiedad universal del push-out se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_2 & & \\ & P \arrow[ul, "\exists!\ \gamma"'] & A_2 \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[ull, bend right, "1_{A_2}"'] \\ & A_1 \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[uul, bend left, "\delta"] & A \arrow[l, "\alpha_1"] \arrow[u, "\alpha_2"'] \end{tikzcd},$$

del cual se sigue en partícular que $\gamma\beta_2 = 1_{A_2}$. □

Ej 12. Si R es un anillo entonces la categoría $Mod\left(R\right)$ tiene pull-backs.

Demostración. Sean $\alpha_1 : A_1 \to A$ y $\alpha_2 : A_2 \to A$ morfismos de R-módulos y

$$A_1 \times_A A_2 := \left\{(x, y) \in A_1 \times A_2 \mid \alpha_1\left(x\right) = \alpha_2\left(y\right)\right\}$$

Notemos que $A_1 \times_A A_2 \neq \varnothing$, pues si 0_1, 0_2 y 0 son los neutros aditivos de A_1, A_2 y A, respectivamente, entonces $\alpha_1\left(0_1\right) = 0 = \alpha_2\left(0_2\right)$, con lo cual $\left(0_1, 0_2\right) \in A_1 \times_A A_2$. Más aún, $A_1 \times_A A_2 \leq A_1 \times A_2$, con $A_1 \times A_2$ dotado de la estructura usual de R-módulo, pues si $\left(a, b\right), \left(c, d\right) \in A_1 \times_A A_2$ y $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_1\left(ra - b\right) &= r\alpha_1\left(a\right) - \alpha_1\left(b\right) \\ &= r\alpha_2\left(c\right) - \alpha_2\left(d\right) \\ &= \alpha_2\left(rc - d\right), \\ &\Longrightarrow r\left(a, b\right) - \left(c, d\right) \in A_1 \times_A A_2. \end{aligned}$$

Con lo cual $A_1 \times_A A_2 \in Mod\left(R\right)$. Así, si π_1 y π_2 son las proyecciones canónicas de $A_1 \times_A A_2$ sobre A_1 y A_2, respectivamente, y $\left(x, y\right) \in A_1 \times_A A_2$, entonces $\pi_1,\ \pi_2$ son morfismos de R-módulos y

$$\begin{aligned} \alpha_1\pi_1\left(x, y\right) &= \alpha_1\left(x\right) = \alpha_2\left(y\right) = \alpha_2\left(\pi_2\left(x, y\right)\right) \\ &= \alpha_2\pi_2\left(x, y\right), \\ \Longrightarrow\ \alpha_1\pi_1 &= \alpha_2\pi_2. \end{aligned}$$

Es decir, se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_1 \times_A A_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}.$$

Ahora, si $P \in Mod\,(R)$ y $\beta_1 : P \to A_1, \beta_2 : P \to A_2$ son morfismos de R-módulos tales que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$, entonces sea

$$\begin{aligned} \gamma : P &\to A_1 \times_A A_2 \\ p &\mapsto (\beta_1(p), \beta_2(p)). \end{aligned}$$

Notemos que γ es un morfismo de R-módulos, puesto que β_1 y β_2 lo son, y que si $p \in P$ entonces

$$\begin{aligned} &\pi_1\gamma(p) = \pi_1(\beta_1(p), \beta_2(p)) = \beta_1(p) \\ \Longrightarrow\ &\pi_1\gamma = \beta_1. \end{aligned}$$

Análogamente se verifica que $\pi_2\gamma = \beta_2$, con lo cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\ & A_1 \times_A A_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

Finalmente, si $\gamma' : P \to A_1 \times_A A_2$ es un morfismo de R-módulos tal que $\pi_1\gamma' = \beta_1$ y $\pi_2\gamma' = \beta_2$ y $p \in P$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_1\gamma'(p) &= \beta_1(p), \\ \pi_2\gamma'(p) &= \beta_2(p), \end{aligned}$$

con lo cual $\gamma'(p) = (\pi_1(\gamma'(p)), \pi_2(\gamma'(p))) = (\beta_1(p), \beta_2(p)) = \gamma(p)$ y por lo tanto $\gamma' = \gamma$.

$\square$

Ej 13. Para un anillo R pruebe que $Mod(R)$ tiene Push-ots.

Demostración. Sea $A_1 \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$ en $Mod(R)$. Consideremos $N := \{(\alpha_2(a), -\alpha_1(a)) \in A_2 \times A_1 \mid a \in A\}$. Observemos que $N \leq A_2 \times A_1$, pues $\forall r \in R$ y $\forall a \in A$

$$\begin{aligned} &r(\alpha_2(a), -\alpha_1(a)) + (\alpha_2(b), -\alpha_1(b)) \\ &= (r\alpha_2(a), -r\alpha_1(a)) + (\alpha_2(b), -\alpha_1(b)) \\ &= (\alpha_2(ra), -\alpha_1(ra)) + (\alpha_2(b), -\alpha_1(b)) \\ &= (\alpha_2(ra) + \alpha_2(b), -\alpha_1(ra) + \alpha_1(b)) \\ &= (\alpha_2(ra + b), -\alpha_1(ra + b)) \in N. \end{aligned}$$

Sea $A_2 \times^A A_1 := {}^{A_2 \times A_1}\!/_{N}$. Consideremos los morfismos $\mu_i \colon A_i \longrightarrow A_2 \times^A A_1$, dados por las composiciones $A_i \xrightarrow{inc_i} A_2 \times A_1 \xrightarrow{\pi} A_2 \times^A A_1$ donde

$$\begin{aligned} inc_1(a_1) &= (0, a_1) \\ inc_2(a_2) &= (a_2, 0) \\ \pi(x) &= x + N. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu_1\alpha_1(a) &= \mu_1(\alpha_1(a)) \\ = \pi[(0, (\alpha_1(a)))] &= (0, (\alpha_1(a))) + N \\ = (0, (\alpha_1(a))) &+ (\alpha_2(a), -\alpha_1(a)) + N \\ = (\alpha_2(a), 0) &+ N = \pi(\alpha_2(a), 0) \\ = \mu_2(\alpha_2(a)) &= \mu_2\alpha_2(a) \end{aligned}$$

Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\mu_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\mu_2"'] & A_2 \times^A A_1 . \end{tikzcd}$$

Ahora, sea $P \in Mod(R)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\beta_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & P . \end{tikzcd}$$

Afirmamos que existe un único $\gamma \colon A_2 \times^A A_1 \longrightarrow P$ tal que $\gamma\mu_1 = \beta_1$ y $\gamma\mu_2 = \beta_2$. Sea $\gamma \colon A_2 \times^A A_1 \longrightarrow P$ dada por $\gamma(a, b) = \beta_2(a)\beta_1(a)$, entonces $\gamma\mu_1(a_1) = \gamma\pi(0, a_1) = \gamma[(0, a_1) + N] = 0 + \beta_1(a_1)$. Análogamente $\beta_2 = \gamma\mu_2(a_2) \quad \forall a_2 \in A_2$.

Ahora, si $(a,b),(c,d) \in A_2 \times^A A_1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma[r(a,b)] - \gamma(c,d) &= \gamma(ra, rb) - \gamma(c,d) \\ &= \beta_1(ra) + \beta_2(rb) - \beta_1(c) - \beta_2(d) \\ &= \beta_1(ra - c) + \beta_2(rb - d) \\ &= \gamma[(ra - c, rb - d)] = \gamma[r(a,b) - (c,d)]. \end{aligned}$$

Mas aún, si $(a,b) - (c,d) \in N$ entonces $(a-c, b-d) = (\alpha_2(x), -\alpha_1(x))$ para algun $x \in A$. Así

$$\begin{aligned} \gamma(a,b) - \gamma(c,d) &= \gamma[(a,b) - (c,d)] \\ &= \gamma(\alpha_2(x), -\alpha_1(x)) \\ &= \beta_2(\alpha_2(x)) + \beta_1(-\alpha_1(x)) \\ &= \beta_1\alpha_1(x) - \beta_1\alpha_1(x) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto γ es un morfismo de $A_2 \times^A A_1$ en P y está bien definido.

Por último, si $\eta : A_2 \times^A A_1 \longrightarrow P$ es otro morfismo tal que $\eta\mu_1 = \beta_1$ y $\eta\mu_2 = \beta_2$, entonces para cada $(a,b) \in A_2 \times^A A_1$

$$\begin{aligned} \eta(a,b) &= \eta[(a,0) + (0,b)] \\ &= \eta[\mu_2(a) + \mu_1(b)] \\ &= \eta(\mu_2(a)) + \eta(\mu_1(b)) \\ &= \beta_2(a) + \beta_1(b) \\ &= \gamma(a,b) \end{aligned}$$

Por lo que $\gamma = \eta$. $\square$

Ej 14. Las categorías $Sets$ y $Mod(R)$, con R un anillo, tienen intersecciones

Demostración. Sea $\{\alpha_i \colon A_i \longrightarrow A\}_{i \in I}$ una familia de morfismos en $Mod(R)$ y sea $\bigcap_{i \in I} Im(\alpha_i)$ la intersección usual de módulos. Sea $\nu \colon \bigcap_{i \in I} Im(\alpha_i) \longrightarrow A$ la inclusión canónica (de conjuntos) entonces se tiene lo siguiente:

Dado $a \in \bigcap_{i \in I} Im(\alpha_i)$ se tiene que $a \in Im(\alpha_i)$ para cada $i \in I$ es decir: $\exists a_i \in A_i$ tal que $\alpha_i(a_i) = a$ para cada $i \in I$. Así $a = \nu(a) = \alpha_i\nu_i(a)$ para cada $i \in I$ donde $\nu_i \colon \bigcap_{i \in I} Im(\alpha_i) \longrightarrow A_i$ está dada por $\nu_i(a) = a_i$ por lo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \bigcap_{i \in I} Im(\alpha_i) \arrow[d, "\nu_i"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ A_i \arrow[r, "\alpha_i"'] & A \end{tikzcd}$$

Sea $\theta\colon B \longrightarrow A$ en $Mod(R)$. Si θ se factoriza a travéz de $\alpha_i\colon A_i \longrightarrow A$ entonces existe $\theta_i\colon B \longrightarrow A_i$ tal que $\theta = \alpha_i\theta_i$. Así para toda $b \in B$

$$\begin{aligned} \theta(b) &= \alpha_i\theta_i(b) = \alpha_i(\theta_i(b)),\\ \theta(b) &\in Im(\alpha_i) \quad \forall i \in I,\\ \theta(b) &\in \bigcap_{i\in I} Im(\alpha_i) \subset A,\\ \theta(b) &= \nu(a) \end{aligned}$$

con $a = \theta(b) \in \bigcap_{i\in I} Im(\alpha_i)$. Así si $\eta\colon B \longrightarrow A$ se define como $\eta(b) = \theta(b)$, entonces $\theta = \nu\eta$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\theta"] & \\ A' \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd}$$

Solo se usaron argumentos conjuntistas (no exclusivos de teoría de módulos) para esta prueba salvo el que intersección de módulos es módulo (intersección de conjuntos es conjunto) y que la inclusión conjuntista y la composición de morfismos es morfismo (composición de funciones es función), por lo que este mismo resultado se demuestra de manera análoga para la categoría *Sets*. $\square$

Ej 15. Si $\mathscr{C}$ es una categoría con pull-backs, entonces $\mathscr{C}$ tiene intersecciones finitas.

Demostración. Sea $A \in \mathscr{A}$ y $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ una familia de subobjetos de A. Si $I = \varnothing$, el resultado es inmediato pues en tal caso $1_A : A \to A$ es una intersección para la familia. Así pues, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $I = [1, n] \subseteq \mathbb{N}$, con $n \geq 1$ y proceder por inducción sobre n.
Si $n = 1$, entonces se tiene que $\mu_1 : A_1 \to A$ es una intersección para la familia $\{\mu_1\}$, puesto que $\mu_1 = \mu_1 1_{A_1}$ y μ_1 satisface en forma inmediata la propiedad universal de la intersección.
Si $n = 2$, el resultado se sigue de la Proposición 1.3.2 en conjunto a que $\mathscr{C}$ es una categoría con pull-backs.
Así pues supongamos por Hipótesis de Inducción que la proposición es válida para $n = k$, $k \geq 2$, y verifiquémosla para $k+1$. Si $\{\mu_i\}_{i=1}^{k+1}$ es una familia de $k+1$ subobjetos de A entonces por la Hipótesis de Inducción la familia $\{\mu_i\}_{i=1}^{k}$ admite intersecciones, digamos $\nu : \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i \to A$. Recordemos que ν es un monomorfismo, y por lo tanto, por el caso $n = 2$, se tiene que la familia de subobjetos $\{\nu, \mu_{k+1}\}$ admite intersecciones, digamos $\mu : \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1} \to A$. Afirmamos que μ es una intersección para

$\{\mu_i\}_{i=1}^{k+1}$. En efecto, del hecho de que μ sea una intersección para $\{\nu, \mu_{k+1}\}$ se sigue que μ se factoriza a través de μ_{k+1} y a través de ν. Por su parte ν se factoriza a través de μ_i, $\forall\ i \in [1, k]$, y en consecuencia μ también lo hace; de modo que $\mu \leq \mu_i\ \forall\ i \in [1, k+1]$. Finalmente, si $\theta : B \to A$ se factoriza a través de $\mu_i\ \forall\ i \in [1, k+1]$, en partícular se factoriza a través de $\mu_i\ \forall\ i \in [1, k]$, y así por la propiedad universal de la intersección se sigue que θ se factoriza a través de ν. Así $\theta \leq \nu$ y $\theta \leq \mu_{k+1}$, con lo cual, por la propiedad universal de la intersección, ν se factoriza a través de μ. Con lo cual se ha verificado la afirmación y así se concluye la inducción.

$\square$