Ej 1. Pruebe que en una categoría $\mathscr{C}$, vale lo siguiente

a) La composición de monomorfismos (epimorfismos) es un monomorfismo (epimorfismo).
b) Todo split-epi (split-mono) es un epimorfismo (monomorfismo).
c) fg mono $\Rightarrow g$ es mono.
d) fg epi $\Rightarrow f$ es epi.
e) f es iso $\Rightarrow f$ es epi y mono.
f) f es iso $\iff$ f es split-mono y split-epi.

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una categoría.
$\boxed{a)}$ Supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon B \longrightarrow C$ son monomorfismos y que para todo $\alpha, \beta \in Mor(\mathscr{C})$ se tiene que que $gf\alpha = gf\beta$, entonces considerando a los morfismos $f\alpha$ y $f\beta$ tenemos que, como g es mono, $f\alpha = f\beta$, análogamente, como f es mono, entonces $\alpha = \beta$ por lo que gf es mono.

Ahora supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon B \longrightarrow C$ son epimorfismos y que para toda $\alpha, \beta \in Mor(\mathscr{C})$ se tiene que que $\alpha gf = \beta gf$. Como f es epi, entonces $\alpha g = \beta g$ y por ser g epi $\alpha = \beta$ por lo tanto gf es epi.

$\boxed{b)}$ Supongamos $f\colon A \longrightarrow B$ es split-epi, entonces existe $f'\colon B \longrightarrow A$ tal que $ff' = 1_B$ así, si $h, g \in Mor(\mathscr{C})$ son tales que $hf = gf$ entonces $hff' = gff'$, es decir, $h1_B = g1_b$ y por lo tanto $h = g$. Entonces f es epi.

Supongamos ahora que $f\colon A \longrightarrow B$ es split-mono, entonces existe $f'\colon B \longrightarrow A$ tal que $f'f = 1_A$ así, si $h, g \in Mor(\mathscr{C})$ son tales que $fh = fg$ entonces $f'fh = f'fg$, es decir, $1_Ah = 1_Ag$ y por lo tanto $h = g$. Entonces f es mono.

$\boxed{c)}$ Supongamos fg es mono con $f, g \in Mor(\mathscr{C})$, entonces para todo $k, h \in Mor(\mathscr{C})$, si $gk = gh$ se tiene que $fgk = fgh$ y como fg es mono entonces $k = h$ por lo tanto g es mono.

$\boxed{d)}$ Supongamos fg es epi con $f, g \in Mor(\mathscr{C})$, entonces para todo $k, h \in Mor(\mathscr{C})$, si $kf = hf$ se tiene que $kfg = hfg$ y como fg es epi entonces $k = h$ por lo tanto f es epi.

$\boxed{f)}$ Supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ es iso, entonces

$$\begin{aligned} &\exists g\colon B \longrightarrow A \quad \text{tal que} \quad fg = 1_B,\ gf = 1_A, \\ \text{entonces} \quad &\exists g\colon B \longrightarrow A \quad \text{tal que} \quad fg = 1_B \\ \text{y} \quad &\exists g\colon B \longrightarrow A \quad \text{tal que} \quad gf = 1_A \end{aligned}$$

por lo que f es split-epi y f es split-mono.

Ahora supongamos que $f\colon A \longrightarrow B$ es split-mono y split-epi. Entonces existen $g_1\colon B \longrightarrow A$ y $g_2\colon B \longrightarrow A$ tales que $fg_1 = 1_B$ y $g_2 f = 1_A$.
Como $fg_1 = 1_B$ entonces aplicando g_2 por la izquierda se tiene que $g_2 f g_1 = g_2 1_B$, así $1_A g_1 = g_2 1_B$. Por lo tanto $g_1 = g_2$ y así f es iso.

$\boxed{e)}$ Este inciso es consecuencia de f) y b). $\square$

Ej 2. Para $f\colon A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathscr{C}$, pruebe que:

a) f es un monomorfismo $\iff \quad \forall X \in \mathscr{C}$,
$Hom_{\mathscr{C}}(X, f) : Hom_{\mathscr{C}}(X, A) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(X, B)$ es inyectivo.

b) f es un epimorfismo $\iff \quad \forall X \in \mathscr{C}$,
$Hom_{\mathscr{C}}(f, X) : Hom_{\mathscr{C}}(B, X) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(A, X)$ es suprayectivo.

Demostración. $\boxed{a)}$ Supongamos f es mono y sean $A, B, X \in \mathscr{C}$. Si $g \in Hom_{\mathscr{C}}(X, A)$ entonces $fg \in Hom_{\mathscr{C}}(X, B)$.
Ahora, si $Hom_{\mathscr{C}}(X, f)(\alpha) = Hom_{\mathscr{C}}(X, f)(\beta)$ para $\alpha, \beta \in Hom_{\mathscr{C}}(X, A)$, entonces $f\alpha = f\beta$, pero f es mono, así $\alpha = \beta$ y por lo tanto $Hom_{\mathscr{C}}(X, f)$ es inyectivo.

Supongamos ahora que $Hom_{\mathscr{C}}(X, f)$ es inyectivo para toda $X \in \mathscr{C}$.
Si $\alpha\beta \in Mor(\mathscr{C})$ son tales que $f\alpha = f\beta$...(1) entonces $\exists X \in \mathscr{C}$ tal que $\alpha, \beta \in Hom_{\mathscr{C}}(X, A)$ más aun, (1) implica que
$Hom_{\mathscr{C}}(X, f)(\alpha) = Hom_{\mathscr{C}}(X, f)(\beta)$ y como $\forall X \in \mathscr{C}$, $Hom_{\mathscr{C}}(X, f)$ es inyectivo, entocnes $\alpha = \beta$ por lo tanto f es mono.

$\boxed{b)}$ Supongamos f es epi y sean $A, B, X \in \mathscr{C}$.
Si $Hom_{\mathscr{C}}(f, X)(\alpha) = Hom_{\mathscr{C}}(f, X)(\beta)$ con $\alpha, \beta \in Hom_{\mathscr{C}}(B, X)$, entonces $\alpha f = \beta f$, pero f es epi, así $\alpha = \beta$ y por lo tanto $Hom_{\mathscr{C}}(f, X)$ es inyectivo.

Supongamos ahora que $Hom_{\mathscr{C}}(f, X)$ es inyectivo para toda $X \in \mathscr{C}$.
Si $\alpha\beta \in Mor(\mathscr{C})$ son tales que $\alpha f = \beta f$...(2) entonces $\exists X \in \mathscr{C}$ tal que $\alpha, \beta \in Hom_{\mathscr{C}}(A, X)$ más aun, (2) implica que $Hom_{\mathscr{C}}(f, X)(\alpha) = Hom_{\mathscr{C}}(f, X)(\beta)$ y como $\forall X \in \mathscr{C}$, $Hom_{\mathscr{C}}(f, X)$ es inyectivo, entocnes $\alpha = \beta$ por lo tanto f es epi.

$\square$

Ej 3. Sea $f : A \to B$ en una categoría $\mathscr{C}$, así:

a) si f es un split-epi y monoformismo, entonces f es un isomorfismo;

b) si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor y f es un isomorfismo, split-mono o split-epi, entonces $F(f)$ también lo es.

Demostración. $\boxed{a)}$ Como f es un split-epi $\exists\ g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, A)$ tal que $fg = 1_B$. Notemos que

$$\begin{aligned} & f(gf) = (fg)f = 1_B f = f = f 1_A \\ \Longrightarrow\ & gf = 1_A, && f \text{ es mono} \\ & \therefore f \text{ es un isomorfismo.} \end{aligned}$$

$\boxed{b)}$ Supongamos que f es un split-mono, entonces $\exists\ g : B \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $gf = 1_A$, con lo cual $Ff : FA \to FB$, $Fg : FB \to FA$ en $\mathscr{D}$ y

$$\begin{aligned} F(g)F(f) = F(gf) = F(1_A) = 1_{F(A)} \\ \Longrightarrow F(f) \text{ es un split-mono.} \end{aligned}$$

Supongamos ahora que f es un split-epi, luego $\exists\ g : B \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $fg = 1_B$, con lo cual $Ff : FA \to FB$, $Fg : FB \to FA$ en $\mathscr{D}$ y

$$\begin{aligned} F(f)F(g) = F(fg) = F(1_B) = 1_{F(B)} \\ \Longrightarrow F(f) \text{ es un split-epi.} \end{aligned}$$

De lo anterior, en conjunto a la equivalencia dada en el Ej. 1 (f), se sigue que si f es un isomorfismo en $\mathscr{C}$ entonces $F(f)$ lo es en $\mathscr{D}$.

□

Ej 4. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías.

a) Sea $\eta \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F, G)$. Si $\forall\ A \in \mathscr{A}\ \eta_A : FA \to GA$ es un isomorfismo en $\mathscr{B}$ y $\eta^{-1} := \left\{ \left(\eta^{-1}\right)_A \right\}_{A \in \mathscr{A}}$, con $\left(\eta^{-1}\right)_A := (\eta_A)^{-1}$, entonces $\eta^{-1} \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(G, F)$.

b) Si $\eta \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F, G)$, $\rho \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(G, H)$ entonces la composición de transformaciónes naturales, con $\rho\eta$ dada por $(\rho\eta)_A := \rho_A \circ \eta_A$ $\forall\ A \in \mathscr{A}$, es una operación asociativa.

c) Si $T \in [\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ y $1_T : T \to T$ está dada por $(1_T)_A := 1_{T(A)}\ \forall\ A \in \mathscr{A}$, entonces $1_T \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(T, T)$.

d) Si $\alpha \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F, G)$, entonces

$$\alpha 1_F = \alpha = 1_G \alpha.$$

Demostración. $\boxed{a)}$ Dado que $\forall\ A \in \mathscr{A}\ \eta_A : FA \to GA$ es un isomorfismo en $\mathscr{B}$, se tiene que $(\eta_A)^{-1} \in Hom_{\mathscr{B}}(GA, FA)$ y que si $\alpha : A \to A'$ está en $\mathscr{A}$, entonces

$$\begin{aligned} & G(\alpha)\eta_A = \eta_{A'}F(\alpha), && \eta \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F, G) \\ \Longrightarrow\ & F(\alpha)(\eta_A)^{-1} = (\eta_{A'})^{-1} G(\alpha). \end{aligned}$$

Así $\eta^{-1} : G \to F$ es una transformación natural, pues lo anterior garantiza que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{(\eta_A)^{-1}} & F(A) \\ {\scriptstyle G(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\alpha)} \\ G(A') & \xrightarrow[(\eta_{A'})^{-1}]{} & F(A') \end{array}.$$

$\boxed{b)}$ Notemos que $\forall\ A \in \mathscr{A}$ se tiene que $\rho_A \eta_A \in Hom_{\mathscr{B}}(F(A), G(A))$. Además si $\alpha : A \to A'$ está en $\mathscr{A}$, por ser η y ρ transformaciones naturales, se tiene que $G(\alpha)\,\eta_A = \eta_{A'} F(\alpha)$ y $H(\alpha)\,\rho_A = \rho_{A'} G(\alpha)$, con lo cual

$$\begin{aligned} H(\alpha)(\rho_A \eta_A) &= (H(\alpha)\,\rho_A)\,\eta_A = (\rho_{A'} G(\alpha))\,\eta_A \\ &= \rho_{A'}(G(\alpha)\,\eta_A) = \rho_{A'}(\eta_{A'} F(\alpha)) \\ &= (\rho_{A'} \eta_{A'})\,F(\alpha), \end{aligned}$$

de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\rho_A \eta_A} & H(A) \\ {\scriptstyle F(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(\alpha)} \\ F(A') & \xrightarrow[\rho_{A'} \eta_{A'}]{} & H(A') \end{array},$$

y por lo tanto $\rho\eta : F \to H$ es una tranformación natural.
Verificaremos ahora que la composición de transformaciones naturales es asociativa. Si ρ y η están dados como al comienzo, $I \in [\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ y $\chi : H \to I$ es una transformación natural, entonces si $A \in \mathscr{A}$

$$\begin{aligned} \chi_A(\rho_A \eta_A) = (\chi_A \rho_A)\,\eta_A \in (\chi\rho)\,\eta, \\ \Longrightarrow \chi(\rho\eta) \subseteq (\chi\rho)\,\eta. \end{aligned}$$

En forma análoga se verifica la otra contención, y así se tiene que $\chi(\rho\eta) = (\chi\rho)\,\eta$.
$\boxed{c)}$ Si $\alpha : A \to A'$ está en $\mathscr{A}$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha)\,1_{T(A)} &= T(\alpha) \\ &= 1_{T(A')} T(\alpha), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{1_{T(A)}} & T(A) \\ {\scriptstyle T(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(\alpha)} \\ T(A') & \xrightarrow[1_{T(A')}]{} & T(A') \end{array}$$

conmuta, y por tanto $1_T : T \to T$ es una transformación natural.
$\boxed{d)}$ Se tiene que $\forall\ A \in \mathscr{A}\ \alpha_A 1_{F(A)} = \eta_A$, con lo cual $(\alpha 1_F)_A = \alpha_A$ y por tanto $\alpha 1_F = \alpha$. Análogamente se verifica que $1_G \alpha = \alpha$. $\square$

Ej 5. Sea $F\colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ funtor. Pruebe que F es una equivalencia si y sólo si F es fiel, pleno y denso.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos F es equivalencia, entonces existe $G\colon \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ tal que existen isomorfismos $\psi\colon GF \longrightarrow 1_{\mathscr{A}}$ y $\varphi\colon 1_{\mathscr{B}} \longrightarrow FG$.

Fiel:
Sean $X, Y \in \mathscr{A}$ y consideremos que $F\colon Hom_{\mathscr{A}}(X,Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{B}}(FX, FY)$. Supongamos que existen $g, h \in Hom_{\mathscr{A}}(X,Y)$ tales que $F(g) = F(h)$, entonces $G(F(g)) = G(F(h))$. Primero observamos que, si $Hom_{\mathscr{A}}(X,Y) = \emptyset$, entonces F es mono en la categoría Sets por vacuidad.

Ahora, si $Hom_{\mathscr{A}}(X,Y) \neq \emptyset$, entonces dado $\alpha\colon A \longrightarrow A'$ en $\mathscr{A}$ se tiene que, por ser F equivalencia, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
GF(A) \arrow[r, "\psi_A"] \arrow[d, "GF(\alpha)"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
GF(A') \arrow[r, "\psi_{A'}"'] & A'
\end{tikzcd}$$

es decir, $\alpha\psi_A = \psi_{A'} GF(\alpha)$. Por lo tanto $\alpha = \psi_{A'} GF(\alpha)\psi_A^{-1}$.

Entonces $g = \phi_Y GF(g)\psi_X = \phi_Y GF(h)\psi_X = h$, por lo que F es fiel. Observese que Análogamente se demuestra que G es un funtor fiel.

Pleno:
Supongamos $Hom_{\mathscr{B}}(F(X), F(Y)) = \emptyset$, entonces $Hom_{\mathscr{A}}(X,Y) = \emptyset$, por lo que F es la función vacia, la cual es vacia pues cada que $\alpha f = \beta F$ se tiene que $\alpha = \beta = \emptyset$ la función vacia.
Ahora, si $Hom_{\mathscr{B}}(F(X), F(Y)) \neq \emptyset$ podemos considerar a $h \in Hom_{\mathscr{B}}(F(X), F(Y))$, entonces $G(h) \in Hom_{\mathscr{A}}(X,Y)$ y es tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
GF(X) \arrow[r, "\psi_X"] \arrow[d, "G(h)"'] & X \arrow[r, "\psi_X^{-1}"] \arrow[d, "\alpha"] & GF(X) \arrow[d, "GF(\alpha)"] \\
GF(Y) \arrow[r, "\psi_Y"'] & Y \arrow[r, "\psi_Y^{-1}"'] & GF(Y)
\end{tikzcd}$$

entonces $G(h) = GF(\alpha)$, pero G es fiel, entonces $h = F(\alpha)$ y por lo tanto F es pleno.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos F es fiel, pleno y denso.
Entonces F es mono y epi en Sets, así para cada $X, Y \in \mathscr{A}$,
$F\colon Hom_{\mathscr{A}}(X,Y) \longrightarrow Hom_{\mathscr{B}}(F(X),F(Y))$ es mono y epi en Sets, por lo tanto es isomorfismo en Sets para cada $X, Y \in \mathscr{A}$.
Ahora, como F es denso, para toda $B \in \mathscr{B}$ existe $A \in \mathscr{A}$ tal que $F(A) \cong B$, así para cada $B \in \mathscr{B}$ podemos fijar un obgeto $G(B) \in \mathscr{A}$ y un isomorfismo $\gamma_B\colon F(A) \longrightarrow B$.

Así para cada $B \xrightarrow{\beta} B'$ en $\mathscr{B}$, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\gamma_B^{-1}"] \arrow[d, "\beta"'] & FG(B){=}F(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ B' \arrow[r, "\gamma_{B'}^{-1}"'] & FG(B'){=}F(A') \end{tikzcd}$$

donde $\alpha = \gamma_{B'}^{-1}\beta\gamma_B$. Así $\alpha\colon FG(B) \longrightarrow FG(B')$.
Como $F\colon Hom_{\mathscr{A}}(A,A') \longrightarrow Hom_{\mathscr{B}}(F(A),F(A'))$ es iso, existe un único morfismo $G(\beta)\colon G(B) \longrightarrow G(B')$ tal que $\gamma_{B'}^{-1}\beta\gamma_B = F(G(\beta))$. En otras palabras para cada $\beta\colon B \longrightarrow B'$ existe un único morfismo
$G(\beta)\colon G(B) \longrightarrow G(B')$ en $\mathscr{A}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\gamma_B^{-1}"] \arrow[d, "\beta"'] & FG(B) \arrow[d, "F(G(\beta))"] \\ B' \arrow[r, "\gamma_{B'}^{-1}"'] & FG(B') \end{tikzcd} \qquad \ldots(1)$$

Ahora veamos que G es funtor.
Tomando $\beta = 1_B$ en el diagrama (1) se tiene que existe un único
$G(1_B)\colon G(B) \longrightarrow G(B')$ tal que $FG(1_B) = 1_B$, pero como F es pleno, entonces $G(1_B) = 1_{G(B)}$.
Para probar que G preserva la composición tomaremos $\beta\colon B \longrightarrow B'$ y $\alpha\colon B' \longrightarrow B''$ morfismos en $\mathscr{B}$, como F es fiel y pleno existe un único morfismo $G(\alpha\beta)\colon G(B) \longrightarrow G(B'')$ en $\mathscr{A}$ tal que
$\gamma_{B''}(\alpha\beta)\gamma_B^{-1} = F(G(\alpha\beta))$; pero también se tiene que $\gamma_B(\alpha\beta)\gamma^{-1} = F(G\alpha))F(G(\beta))$.
Por lo que $F(G(\alpha\beta)) = F(G(\alpha))F(G(\beta)) = F(G(\alpha)G(\beta))$. Y como F es fiel, $G(\alpha\beta) = G(\alpha)G(\beta)$, por lo que $G\colon \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A}$ es funtor.

Por el diagrama (1) se puede apreciar que $\gamma = \{\gamma_\beta\colon B \longrightarrow FG(B)\}$,
($\gamma\colon 1_{\mathscr{B}} \longrightarrow FG$) es una equivalencia natural. Entonces para cada $A \in \mathscr{A}$ se tiene el isomorfismo $\gamma_{F(A)}\colon F(A) \longrightarrow FGF(A)$ en $\mathscr{B}$; en particular, como F es fiel, existe $\psi'_A\colon A \longrightarrow GF(A)$ tal que $F(\psi'_A) = \gamma_{F(A)}$.
Por otro lado, como $\gamma_{F(A)}$ es un isomorfismo, entonces existe
$\gamma_{F(A)}^{-1}\colon FGF(A) \longrightarrow F(A)$ tal que $\gamma_{F(A)}^{-1}\gamma_{F(A)} = 1_{F(A)}$. Y como F es pleno, existe $\psi_A\colon GF(A) \longrightarrow A$ tal que $F(\psi_A) = \gamma_{F(A)}^{-1}$. Por lo tanto

$F(\psi_A \psi'_A) = 1_{F(A)}$; y como F es fiel, entonces $\psi_A \psi'_A = 1_A$ Análogamente $\psi'_A \psi_A = 1_{GF(A)}$ por lo que ψ_A es isomorfismo.

Por último veamos que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} GF(A) \arrow[r, "\psi_A"] \arrow[d, "GF(\alpha)"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ GF(A') \arrow[r, "\psi_{A'}"'] & A' \end{tikzcd} \quad \ldots (2)$$

conmuta en A.

En efecto, aplicando F al diagrama anterior obtenemos que

$$\begin{tikzcd} FGF(A) \arrow[r, "F(\psi_A)"] \arrow[d, "FGF(\alpha)"'] & F(A) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\ FGF(A') \arrow[r, "F(\psi_{A'})"'] & F(A') \end{tikzcd}$$

Como $F(\psi_A) = \gamma^{-1}_{F(A)}$ y $F(\psi_{A'}) = \gamma^{-1}_{F(A')}$, reemplazando a β del diagrama (1) por $F(\alpha)$, obtenemos que el diagrama anterior conmuta. Peo F es fiel, entonces el diagrama (2) conmuta y así $\psi \colon GF \longrightarrow 1_{\mathscr{A}}$ es una equivalencia natural. $\square$

Ej 6. Sea $\leq$ un preorden en una clase X. Pruebe que:

a) La relación $\sim$ inducida por $\leq$, $(a \sim b \iff (a \leq b \text{ y } b \leq a))$ es una relación de equivalencia en X.

b) Considere la clase cociente $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$, donde $[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}$. Pruebe que el preorden $\leq$ en X induce un orden parcial en $X/\sim$ dado por $[x] \leq [y] \iff x \leq y$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Sea $\sim$ la relación descrita en la hipótesis.
Reflexividad:
Como $a = a$ entonces $a \leq a$, por lo que $a \sim a$.

Simetría:
Supongamos $a \sim b$ entonces $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $b \leq a$ y $a \leq b$ y por lo tanto $b \sim a$.

Transitividad:
Supongamos $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \leq b, b \leq a, b \leq c$ y $c \leq b$. En

particular, como $\leq$ es preorden, $a \leq b \leq c$ y $c \leq b \leq a$, es decir, $a \leq c$ y $c \leq a$ por lo tanto $a \sim c$ y en consecuencia $\sim$ es de equivalencia.

$\boxed{b)}$ Buena definición:
Sean $a \in [x]$ y $b \in [y]$ con $x, y \in X$, en particular $a \leq x, y \leq b$. Si $[x] \leq [y]$ entonces $a \leq x \leq y \leq b$ por lo tanto $a \leq b$. Y se tiene que la relación está bien definida.

Reflexividad:
Como $a \leq a$ en X, pues $a \sim a$, entonces $[a] \leq [a]$.

Transitividad:
Supongamos $[x] \leq [y]$ y $[y] \leq [z]$. Entonces $x \leq y$ y $y \leq z$, pero $\leq$ es transitiva en X, entonces $x \leq z$ y así $[x] \leq [z]$. $\square$

Ej 7. Si los siguientes diagramas conmutativos en una categoría $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\beta'_2"] \arrow[d, "\beta'_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

son pull-backs, entonces $\exists\ \gamma : P \to P'$ en $\mathscr{C}$ un isomorfismo tal que $\beta_i = \beta'_i\gamma$, $\forall\ i \in [1, 2]$.

Demostración. Por la propiedad universal del pull-back aplicada a P', se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\exists!\ \gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\ & P' \arrow[r, "\beta'_2"] \arrow[d, "\beta'_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd},$$

mientras que la propiedad universal del pull-back aplicada a P grantiza que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, "\exists!\ \gamma'"] \arrow[drr, bend left, "\beta'_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}.$$

Así

$$\begin{aligned}\beta_1\left(\gamma'\gamma\right) &= \left(\beta_1'\right)\gamma\\ &= \beta_1,\\ \beta_2\left(\gamma'\gamma\right) &= \left(\beta_2'\right)\gamma\\ &= \beta_2,\end{aligned}\tag{*}$$

de modo que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "\gamma'\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_1"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "1_P"] \arrow[drr, bend left, "\beta_1"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto, empleando la propiedad universal del pull-back para P, se tiene que $\gamma'\gamma = 1_P$. En forma análoga, empleando ahora la propiedad universal del pull-back para P', se verifica que $\gamma\gamma' = 1_{P'}$, de modo que $\gamma : P \to P'$ es un isomorfismo en $\mathscr{C}$. Con lo anterior y (*) se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 8. Sea el siguiente diagrama conmutativo en una categoría $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

un pull-back, entonces

a) si α_1 es un monomorfismo, entonces β_2 también lo es;

b) β_2 es un split-epi si y sólo si α_2 se factoriza a través de α_1.

Demostración. $\boxed{a)}$ Supongamos que α_1 es un monomorfismo y que $f, g : B \to P$ son morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\beta_2 f = \beta_2 g$. Notemos primeramente que así

$$\begin{aligned}\alpha_1\left(\beta_1 f\right) &= \left(\alpha_2\beta 2\right) f = \alpha_2\left(\beta_2 g\right) = \left(\alpha_1\beta_1\right) g\\ &= \alpha_1\left(\beta_1 g\right)\\ \Longrightarrow\ \beta_1 f &= \beta_1 g, \qquad\qquad \alpha_1 \text{ es un mono}\end{aligned}$$

con lo cual se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "{f,\, g}"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2 f"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1 f"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd} ,$$

y así la propiedad universal del pull-back garantiza que $f = g$, con lo cual β_2 es un mono.

$\boxed{b)\ \Longrightarrow}$ Dado que β_2 es un split-epi $\exists\ \gamma : A_2 \to P$ tal que $\beta_2\gamma = 1_{A_2}$, así

$$\begin{aligned}
\alpha_1 (\beta_1\gamma) &= (\alpha_2\beta_2)\,\gamma = \alpha_2\,(1_{A_2}) \\
&= \alpha_2, \\
&\Longrightarrow \alpha_2 \text{ se factoriza a través de } \alpha_1.
\end{aligned}$$

$\boxed{b)\ \Longleftarrow}$ Se tiene que $\exists\ \alpha : A_2 \to A_1$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_2 = \alpha_1\alpha$, con lo cual a partir de la propiedad universal del pull-back se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[dr, "\exists!\ \gamma"] \arrow[drr, bend left, "1_{A_2}"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd} ,$$

del cual se deduce que en partícular $\beta_2\gamma = 1_{A_2}$, y así se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 9. Supongamos que los dos cuadrados del siguiente diagrama en una categoría $\mathscr{C}$ conmutan

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta_1"] & B' \arrow[d, "\theta_1"] & Q \arrow[l, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\theta_2"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B & I \arrow[l, "\gamma_2"]
\end{tikzcd}$$

Pruebe que: si θ_1 y γ_2 son monomorfismos en $\mathscr{C}$ y existe $\gamma_1 \colon A \longrightarrow I$ tal que $f = \gamma_2\gamma_1$, entonces existe $\alpha_1 \colon P \to Q$ tal que $\alpha_2\alpha_1 = g$ y el siguiente diagrama es un pull-back

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[d, "\theta_2"] \\
A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como los diagramas del enunciado conmutan, entonces

$$\theta_1\alpha_2 = \alpha_2\theta_2\,,\ \ \theta_1 g = f\beta_1.$$

Ahora, como $f = \gamma_2\gamma_1$ se tiene que $\gamma_2\gamma_1\beta_1 = f\beta_1$ asi el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma_1\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\theta_1"] \\
I \arrow[r, "\gamma_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Pero Q es pull-back de $I \xrightarrow{\gamma_2} B \xleftarrow{\theta_1} B'$ por lo que existe un único $\alpha_1 \colon P \longrightarrow Q$ tal que $g = \alpha_2\alpha_1$ y $\gamma_1\beta_1 = \theta_2\alpha_1$. veamos ahora que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[d, "\theta_2"] \\
A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I
\end{tikzcd}$$

es un pull-back.

Supongamos que tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "k_1"] \arrow[ddr, bend right, "k_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Q \arrow[d, "\theta_2"] \\
& A \arrow[r, "\gamma_1"'] & I
\end{tikzcd} ,$$

tal que $\gamma_1 k_2 = \theta_2 k_1$.

Como $K \xrightarrow{k_2} A$ y $K \xrightarrow{\alpha_2 k_1} B'$ cumple que $fk_2 = \gamma_2\gamma_1 k_2$ y $\theta_1\alpha_2 k_1 = \gamma_2\theta_2 k_1$.
Entonces como $\theta_2 k_1 = \gamma_1 k_2$, tenemos que $fk_2 = \theta_1\alpha_2 k_1$.

Así el siguiente diagrama conmmuta:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\alpha_2 k_1"] \arrow[d, "k_2"'] & B' \arrow[d, "\theta_1"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Pero P es un pull-back, por lo tanto existe un único $\eta\colon K \longrightarrow P$ tal que $\beta_1\eta = k_2$ y $g\eta = \alpha_2 k_1$, entonces $\alpha_2\alpha_1\eta = \alpha_2 k_1$ y dado que γ_2 es mono y Q pull-back, se tiene que α_2 es mono y $\alpha_1\eta = k_1$.
Además, si $\gamma\colon K \longrightarrow P$ es tal que $\beta_1\gamma = k_2$ y $g\gamma = \alpha_2 k_1$, entonces $\beta_1\gamma = \beta_1\eta$ y puesto que θ_1 es mono y P pullback, entonces β_1 es mono y $\gamma = \eta$. Por lo tanto η es único hasta isomorfismos y en consecuencia P es pull-back de $Q \xrightarrow{\alpha_1} I \xleftarrow{\gamma_1} A$. $\square$

Ej 10. Defina la noción dual del pull-back (i.e. push-out) y pruebe que el push-out, de existir, es único hasta isomorfismos.

Demostración. Recordemos la definición del pull-back:
Definición. Sean $\alpha_1\colon A_1 \longrightarrow A$ y $\alpha_2\colon A_2 \longrightarrow A$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Un pull-back para $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A \xleftarrow{\alpha_2} A_2$ es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

Que satisface la siguiente propiedad universal:
$\forall \beta_2'\colon P' \longrightarrow A_2$, $\forall \beta_1'\colon P \longrightarrow A_1$ tal que $\alpha_2\beta_1' = \alpha_1\beta_1'$, se tiene que $\exists!\ \gamma : P' \to P$ tal que $\beta_1' = \beta_1\gamma$ y $\beta_2' = \beta_2\gamma$. Diagramaticamente se vé como sigue:

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[drr, bend left, "\beta_2'"] \arrow[dr, "\exists!\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1'"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2 1"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd} ,$$

Así el concepto de pull-back en la categoría opuesta se puede abreviar de la siguiente manera:

a) $\exists\ \beta_1^{op} : A_1 \to P, \beta_2^{op} : A_2 \to P$ tales que $\alpha_1^{op}\beta_1^{op} = \alpha_2^{op}\beta_2^{op}$.
b) $\forall\ P' \in \mathscr{C}$ y $\forall\ \beta_1'^{op} : A_1 \to P', \beta_2'^{op} : A_2 \to P'$ tales que $\alpha_1^{op}\beta_1'^{op} = \alpha_2^{op}\beta_2'^{op}$, $\exists!\ \gamma^{op} : P \to P'$ tal que $\beta_1'^{op} = \beta_1^{op}\gamma^{op}$ y $\beta_2'^{op} = \beta_2^{op}\gamma^{op}$.

Con esto en mente, entonces podemos dar la siguiente definición.

Definición. Sean $\alpha_1\colon A \longrightarrow A_1$ y $\alpha_2\colon A \longrightarrow A_2$ morfismos en una categoría $\mathscr{C}$. Un push-out para $\;A_1 \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A_2\;$ es un diagrama

$$\begin{tikzcd}
P & A_1 \arrow[l, "\beta_1"'] \\
A_2 \arrow[u, "\beta_2"] & A \arrow[l, "\alpha_2"] \arrow[u, "\alpha_1"']
\end{tikzcd}$$

conmutativo en $\mathscr{C}$ que satisface la siguiente propiedad universal:

$\forall \beta_2'\colon A_2 \longrightarrow P'$, $\forall \beta_1'\colon A_1 \longrightarrow P'$ tal que $\beta_1'\alpha_1 = \beta_2'\alpha_2$, se tiene que $\exists !\ \gamma : P \to P'$ tal que $\beta_1' = \gamma\beta_1$ y $\beta_2' = \gamma\beta_2$. Diagramaticamente se vé como sigue:

$$\begin{tikzcd}
P' & & \\
& P \arrow[ul, "\exists !\ \gamma"'] & A_1 \arrow[l, "\beta_1"'] \arrow[ull, bend right, "\beta_1'"'] \\
& A_2 \arrow[u, "\beta_2"] \arrow[uul, bend left, "\beta_2'"] & A \arrow[l, "\alpha_2"] \arrow[u, "\alpha_1"']
\end{tikzcd}$$

Unicidad.
Supongamos que $Q \in \mathscr{C}$, $\eta_1\colon A_1 \longrightarrow Q$ y $\eta_2\colon A_2 \longrightarrow Q$ son otro push-out de $\;A_1 \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A_2\;$, entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Q & A_1 \arrow[l, "\eta_1"'] \\
A_2 \arrow[u, "\eta_2"] & A \arrow[l, "\alpha_2"] \arrow[u, "\alpha_1"']
\end{tikzcd}$$

Como P es push-out existe un único $\gamma\colon P \longrightarrow Q$ tal que $\gamma\beta_2 = \eta_2$ y $\gamma\beta_1 = \eta_1$, y como Q es push-out existe un único $\bar{\gamma}\colon Q \longrightarrow P$ tal que $\bar{\gamma}\eta_2 = \beta_2$ y $\bar{\gamma}\eta_1 = \beta_1$.
Con estos resultados se obtiene que $\bar{\gamma}\gamma\colon P \longrightarrow P$,

$$\bar{\gamma}\gamma\beta_2 = \bar{\gamma}\eta_2 = \beta_2 \quad \text{y} \quad \bar{\gamma}\gamma\beta_1 = \bar{\gamma}\eta_1 = \beta_1.$$

Pero el funtor identidad también cumple dichas igualdades, así, como P es push-out, $\bar{\gamma}\gamma = 1_P$ por unicidad. Análogamente $\gamma\bar{\gamma} = 1_Q$ por lo tanto $P \cong Q$. $\square$

Ej 11. Enunciaremos y probaremos la proposición dual al Ej. 8. Notemos primeramente que
Pull-back:

PBI) $\exists\ \beta_1 : P \to A_1, \beta_2 : P \to A_2$ tales que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$.

PBII) $\forall\ P' \in \mathscr{C}$ y $\forall\ \beta_1' : P' \to A_1, \beta_2' : P' \to A_2$ tales que $\alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$, $\exists!\ \gamma : P' \to P$ tal que $\beta_1' = \beta_1\gamma$ y $\beta_2' = \beta_2\gamma$.

Pull-back$^{\mathbf{op}}$:

PB$^{\mathrm{op}}$I) $\exists\ \beta_1^{op} : A_1 \to P, \beta_2^{op} : A_2 \to P$ tales que $\alpha_1^{op}\beta_1^{op} = \alpha_2^{op}\beta_2^{op}$.

PB$^{\mathrm{op}}$II) $\forall\ P' \in \mathscr{C}$ y $\forall\ \beta_1'^{op} : A_1 \to P', \beta_2'^{op} : A_2 \to P'$ tales que $\alpha_1^{op}\beta_1'^{op} = \alpha_2^{op}\beta_2'^{op}$, $\exists!\ \gamma^{op} : P \to P'$ tal que $\beta_1'^{op} = \beta_1^{op}\gamma^{op}$ y $\beta_2'^{op} = \beta_2^{op}\gamma^{op}$.

Pull-back*:

PB*I) $\exists\ \beta_1 : A_1 \to P, \beta_2 : A_2 \to P$ tales que $\beta_1\alpha_1 = \beta_2\alpha_2$.

PB*II) $\forall\ P' \in \mathscr{C}$ y $\forall\ \beta_1' : A_1 \to P', \beta_2' : A_2 \to P'$ tales que $\beta_1'\alpha_1 = \beta_2'\alpha_2$, $\exists!\ \gamma : P \to P'$ tal que $\beta_1' = \gamma\beta_1$ y $\beta_2' = \gamma\beta_2$.

Esto último es la definición de que un objeto P sea un push-out de $\alpha_1 : A \to A_1$ y $\alpha_2 : A \to A_2$. Por lo anterior, y dado que las propiedades duales de mono y split-epi son respectivamente epi y split-mono, la proposición dual del Ej. 8 es:
Sea el siguiente diagrama conmutativo en una categoria $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
P & A_2 \arrow[l, "\beta_2"'] \\
A_1 \arrow[u, "\beta_1"] & A \arrow[l, "\alpha_1"] \arrow[u, "\alpha_2"']
\end{tikzcd}$$

un push-out, entonces

a) si α_1 es un epimorfismo, entonces β_2 también lo es;

b) β_2 es un split-mono si y sólo si $\exists\ \delta : A_1 \to A_2$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_2 = \delta\alpha_1$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Supongamos que $f : P \to Q$ y $g : P \to Q$ en $\mathscr{C}$ son tales que $f\beta_2 = g\beta_2$. Notemos que

$$\begin{aligned}
(f\beta_1)\,\alpha_1 &= f\,(\beta_2\alpha 2) = (g\beta_2)\,\alpha_2 = g\,(\beta_1\alpha_1) \\
&= (g\beta_1)\,\alpha_1 \\
\implies f\beta_1 &= g\beta_1, && \alpha_1 \text{ es un epi}
\end{aligned}$$

con lo cual se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B & & \\
& P \arrow[ul, "{f,\ g}"'] & A_2 \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[ull, bend right, "\beta_2 f"'] \\
& A_1 \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[uul, bend left, "\beta_1 f"] & A \arrow[l, "\alpha_1"] \arrow[u, "\alpha_2"']
\end{tikzcd},$$

y así la propiedad universal del push-out garantiza que $f = g$, con lo cual β_2 es un epi.

$\boxed{b) \implies}$ Por ser β_2 un split-mono $\exists\ \gamma : P \to A_2$ en $\mathscr{C}$ tal que $\gamma\beta_2 = 1_{A_2}$, de modo que si $\delta := \gamma\beta_1$, entonces

$$\begin{aligned} \delta\alpha_1 &= \gamma\left(\beta_1\alpha_1\right) = \left(\gamma\beta_2\right)\alpha_2 = 1_{A_2}\alpha_2 \\ &= \alpha_2. \end{aligned}$$

$\boxed{b) \impliedby}$ Bajo estas condiciones de la propiedad universal del push-out se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_2 & & \\
& P \arrow[ul, "\exists!\ \gamma"'] & A_2 \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[llu, bend right, "1_{A_2}"'] \\
& A_1 \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[luu, bend left, "\delta"] & A \arrow[l, "\alpha_1"] \arrow[u, "\alpha_2"']
\end{tikzcd},$$

del cual se sigue en partícular que $\gamma\beta_2 = 1_{A_2}$. $\square$

Ej 12. Si R es un anillo entonces la categoría $Mod\left(R\right)$ tiene pull-backs.

Demostración. Sean $\alpha_1 : A_1 \to A$ y $\alpha_2 : A_2 \to A$ morfismos de R-módulos y

$$A_1 \times_A A_2 := \left\{(x, y) \in A_1 \times A_2 \mid \alpha_1\left(x\right) = \alpha_2\left(y\right)\right\}$$

Notemos que $A_1 \times_A A_2 \neq \varnothing$, pues si 0_1, 0_2 y 0 son los neutros aditivos de A_1, A_2 y A, respectivamente, entonces $\alpha_1\left(0_1\right) = 0 = \alpha_2\left(0_2\right)$, con lo cual $\left(0_1, 0_2\right) \in A_1 \times_A A_2$. Más aún, $A_1 \times_A A_2 \leq A_1 \times A_2$, con $A_1 \times A_2$ dotado de la estructura usual de R-módulo, pues si $\left(a, b\right), \left(c, d\right) \in A_1 \times_A A_2$ y $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_1\left(ra - b\right) &= r\alpha_1\left(a\right) - \alpha_1\left(b\right) \\ &= r\alpha_2\left(c\right) - \alpha_2\left(d\right) \\ &= \alpha_2\left(rc - d\right), \\ &\implies r\left(a, b\right) - \left(c, d\right) \in A_1 \times_A A_2. \end{aligned}$$

Con lo cual $A_1 \times_A A_2 \in Mod\left(R\right)$. Así, si π_1 y π_2 son las proyecciones canónicas de $A_1 \times_A A_2$ sobre A_1 y A_2, respectivamente, y $\left(x, y\right) \in A_1 \times_A A_2$, entonces $\pi_1,\ \pi_2$ son morfismos de R-módulos y

$$\begin{aligned} \alpha_1\pi_1\left(x, y\right) &= \alpha_1\left(x\right) = \alpha_2\left(y\right) = \alpha_2\left(\pi_2\left(x, y\right)\right) \\ &= \alpha_2\pi_2\left(x, y\right), \\ \implies \alpha_1\pi_1 &= \alpha_2\pi_2. \end{aligned}$$

Es decir, se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_1 \times_A A_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}.$$

Ahora, si $P \in Mod\,(R)$ y $\beta_1 : P \to A_1, \beta_2 : P \to A_2$ son morfismos de R-módulos tales que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$, entonces sea

$$\begin{aligned} \gamma : P &\to A_1 \times_A A_2 \\ p &\mapsto (\beta_1(p), \beta_2(p)). \end{aligned}$$

Notemos que γ es un morfismo de R-módulos, puesto que β_1 y β_2 lo son, y que si $p \in P$ entonces

$$\begin{aligned} &\pi_1\gamma(p) = \pi_1(\beta_1(p), \beta_2(p)) = \beta_1(p) \\ \Longrightarrow\ &\pi_1\gamma = \beta_1. \end{aligned}$$

Análogamente se verifica que $\pi_2\gamma = \beta_2$, con lo cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\ & A_1 \times_A A_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

Finalmente, si $\gamma' : P \to A_1 \times_A A_2$ es un morfismo de R-módulos tal que $\pi_1\gamma' = \beta_1$ y $\pi_2\gamma' = \beta_2$ y $p \in P$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_1\gamma'(p) &= \beta_1(p), \\ \pi_2\gamma'(p) &= \beta_2(p), \end{aligned}$$

con lo cual $\gamma'(p) = (\pi_1(\gamma'(p)), \pi_2(\gamma'(p))) = (\beta_1(p), \beta_2(p)) = \gamma(p)$ y por lo tanto $\gamma' = \gamma$.

□

Ej 13. Para un anillo R pruebe que $Mod(R)$ tiene Push-ots.

Demostración. Sea $A_1 \xleftarrow{\alpha_1} A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$ en $Mod(R)$. Consideremos $N := \{(\alpha_2(a), -\alpha_1(a)) \in A_2 \times A_1 \mid a \in A\}$. Observemos que $N \leq A_2 \times A_1$, pues $\forall r \in R$ y $\forall a \in A$

$$\begin{aligned} & r(\alpha_2(a), -\alpha_1(a)) + (\alpha_2(b), -\alpha_1(b) \\ &= (r\alpha_2(a), -r\alpha_1(a)) + (\alpha_2(b), -\alpha_1(b)) \\ &= (\alpha_2(ra), -\alpha_1(ra)) + (\alpha_2(b), -\alpha_1(b)) \\ &= (\alpha_2(ra) + \alpha_2(b), -\alpha_1(ra) + \alpha_1(b)) \\ &= (\alpha_2(ra+b), -\alpha_1(ra+b)) \in N. \end{aligned}$$

Sea $A_2 \times^A A_1 := {A_2 \times A_1}/{N}$. Consideremos los morfismos $\mu_i \colon A_i \longrightarrow A_2 \times^A A_1$, dados por las composiciones $A_i \xrightarrow{inc_i} A_2 \times A_1 \xrightarrow{\pi} A_2 \times^A A_1$ donde

$$\begin{aligned} inc_1(a_1) &= (0, a_1) \\ inc_2(a_2) &= (a_2, 0) \\ \pi(x) &= x + N. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \mu_1\alpha_1(a) = \mu_1(\alpha_1(a)) \\ &= \pi[(0, (\alpha_1(a)))] = (0, (\alpha_1(a))) + N \\ &= (0, (\alpha_1(a))) + (\alpha_2(a), -\alpha_1(a)) + N \\ &= (\alpha_2(a), 0) + N = \pi(\alpha_2(a), 0) \\ &= \mu_2(\alpha_2(a)) = \mu_2\alpha_2(a) \end{aligned}$$

Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\mu_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\mu_2"'] & A_2 \times^A A_1 . \end{tikzcd}$$

Ahora, sea $P \in Mod(R)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\beta_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & P . \end{tikzcd}$$

Afirmamos que existe un único $\gamma \colon A_2 \times^A A_1 \longrightarrow P$ tal que $\gamma\mu_1 = \beta_1$ y $\gamma\mu_2 = \beta_2$. Sea $\gamma \colon A_2 \times^A A_1 \longrightarrow P$ dada por $\gamma(a, b) = \beta_2(a)\beta_1(a)$, entonces $\gamma\mu_1(a_1) = \gamma\pi(0, a_1) = \gamma[(0, a_1) + N] = 0 + \beta_1(a_1)$. Análogamente $\beta_2 = \gamma\mu_2(a_2) \quad \forall a_2 \in A_2$.

Ahora, si $(a,b),(c,d) \in A_2 \times^A A_1$, se tiene que

$$\begin{aligned}\gamma[r(a,b)] - \gamma(c,d) &= \gamma(ra,rb) - \gamma(c,d)\\ &= \beta_1(ra) + \beta_2(rb) - \beta_1(c) - \beta_2(d)\\ &= \beta_1(ra-c) + \beta_2(rb-d)\\ &= \gamma[(ra-c, rb-d)] = \gamma[r(a,b)-(c,d)].\end{aligned}$$

Mas aún, si $(a,b)-(c,d) \in N$ entonces $(a-c, b-d) = (\alpha_2(x), -\alpha_1(x))$ para algun $x \in A$. Así

$$\begin{aligned}\gamma(a,b) - \gamma(c,d) &= \gamma[(a,b)-(c,d)]\\ &= \gamma(\alpha_2(x), -\alpha_1(x))\\ &= \beta_2(\alpha_2(x)) + \beta_1(-\alpha_1(x))\\ &= \beta_1\alpha_1(x) - \beta_1\alpha_1(x) = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto γ es un morfismo de $A_2 \times^A A_1$ en P y está bien definido.

Por último, si $\eta : A_2 \times^A A_1 \longrightarrow P$ es otro morfismo tal que $\eta\mu_1 = \beta_1$ y $\eta\mu_2 = \beta_2$, entonces para cada $(a,b) \in A_2 \times^A A_1$

$$\begin{aligned}\eta(a,b) &= \eta[(a,0)+(0,b)]\\ &= \eta[\mu_2(a) + \mu_1(b)]\\ &= \eta(\mu_2(a)) + \eta(\mu_1(b))\\ &= \beta_2(a) + \beta_1(b)\\ &= \gamma(a,b)\end{aligned}$$

Por lo que $\gamma = \eta$. $\square$

Ej 14. Las categorías *Sets* y $Mod(R)$, con R un anillo, tienen intersecciones

Demostración. Si la colección es vacia, es decir,si la familia $\{\mu_i \colon A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ es tal que $I = \emptyset$. Entonces $Id \colon A \longrightarrow A$ en $\mathscr{C}$ es la intersección de la familia, pues (por vacuidad) Id se factoriza a travéz de cada μ_i.
Además para cualquier $\theta \colon B \longrightarrow A$ cumple que θ se factoriza a travéz de cada μ_i $\forall i \in I$, por lo que

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, "\theta"] & \\ A \arrow[r, "Id"'] & A \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, por lo que se cumple la definición de intersección.

Con lo anterior en mente, sea $\{\alpha_i \colon A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia no vacia de morfismos en $Mod(R)$ y sea $\bigcap\limits_{i\in I} Im(\alpha_i)$ la intersección usual de módulos. Sea $\nu \colon \bigcap\limits_{i\in I} Im(\alpha_i) \longrightarrow A$ la inclusión canónica (de conjuntos) entonces se tiene lo siguiente:

Como la intersección de módulos nunca es vacia, dado $a \in \bigcap\limits_{i\in I} Im(\alpha_i)$ se tiene que $a \in Im(\alpha_i)$ para cada $i \in I$ es decir: $\exists a_i \in A_i$ tal que $\alpha_i(a_i) = a$ para cada $i \in I$. Así $a = \nu(a) = \alpha_i\nu_i(a)$ para cada $i \in I$ donde $\nu_i \colon \bigcap\limits_{i\in I} Im(\alpha_i) \longrightarrow A_i$ está dada por $\nu_i(a) = a_i$ por lo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \bigcap\limits_{i\in I} Im(\alpha_i) \arrow[d, "\nu_i"'] \arrow[dr, "\nu"] & \\ A_i \arrow[r, "\alpha_i"'] & A \end{tikzcd}$$

Sea $\theta \colon B \longrightarrow A$ en $Mod(R)$. Si θ se factoriza a travéz de $\alpha_i \colon A_i \longrightarrow A$ entonces existe $\theta_i \colon B \longrightarrow A_i$ tal que $\theta = \alpha_i\theta_i$. Así para toda $b \in B$

$$\begin{aligned} \theta(b) &= \alpha_i\theta_i(b) = \alpha_i(\theta_i(b)), \\ \theta(b) &\in Im(\alpha_i) \quad \forall i \in I, \\ \theta(b) &\in \bigcap_{i\in I} Im(\alpha_i) \subset A, \\ \theta(b) &= \nu(a) \end{aligned}$$

con $a = \theta(b) \in \bigcap\limits_{i\in I} Im(\alpha_i)$. Así si $\eta \colon B \longrightarrow A$ se define como $\eta(b) = \theta(b)$, entonces $\theta = \nu\eta$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\theta"] & \\ A' \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd}$$

Cabe observar que, salvo el caso en que la intersección de conjuntos sea vacia, sólo se usaron argumentos conjuntistas (no exclusivos de teoría de módulos) para esta prueba salvo el que intersección de módulos es módulo (intersección de conjuntos es conjunto) y que la inclusión conjuntista y la composición de morfismos es morfismo (composición de funciones es función), por lo que este mismo resultado se demuestra de manera análoga para la categoría *Sets*.

Por último veremos el caso especial:

Sea $\{\mu_i \colon A_i \longrightarrow A\}_{i\in I}$ una familia no vacia de morfismos en $Mod(R)$ y supongamos que $\bigcap\limits_{i\in I} Im(\mu_i) = \emptyset$.
Primero observemos que el siguiente diagrama conmuta para toda $i \in I$:

$$\begin{tikzcd}
\bigcap\limits_{i\in I} Im(\mu_i) \arrow[d, "\nu_i"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
A_i \arrow[r, "\mu_i"'] & A
\end{tikzcd}$$

Donde α es la función vacia y ν_i es la función vacia para cada $i \in I$.

Sea $\theta \colon B \longrightarrow A$ en $\mathscr{C}$ tal que θ se factoriza a travéz de cada μ_i $\forall i \in I$, es decir, existe $\eta_i \colon B \longrightarrow A_i$ $\forall i \in I$ tal que $\theta = \mu_i\eta_i$ $\forall i \in I$.

Si suponemos que θ no es la función vacia, entonces existe $x \in B$ tal que $\theta(x) \in A$. Por lo que $\mu_i\eta_i(x) \in A$, es decir, $\theta(x) \in Im(\mu_i)$ $\forall i \in I$. Entonces $\theta(x) \in \bigcap\limits_{i\in I} Im(\mu_i) = \emptyset$ lo cual es una contradicción.

Entonces θ es la función vacia y así $\theta = \mu\eta$ donde η es la función vacia. Por lo tanto la intersección de conjuntos usual cumple las hipótesis de la definición de la intersección en categorías, y en este caso $\bigcap\limits_{i\in I} Im(\mu_i)$ es el conjunto vacio. $\square$

Ej 15. Si $\mathscr{C}$ es una categoría con pull-backs, entonces $\mathscr{C}$ tiene intersecciones finitas.

Demostración. Sea $A \in \mathscr{A}$ y $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ una familia de subobjetos de A. Si $I = \varnothing$, el resultado es inmediato pues en tal caso $1_A : A \to A$ es una intersección para la familia. Así pues, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $I = [1, n] \subseteq \mathbb{N}$, con $n \geq 1$ y proceder por inducción sobre n.
Si $n = 1$, entonces se tiene que $\mu_1 : A_1 \to A$ es una intersección para la familia $\{\mu_1\}$, puesto que $\mu_1 = \mu_1 1_{A_1}$ y μ_1 satisface en forma inmediata la propiedad universal de la intersección.
Si $n = 2$, el resultado se sigue de la Proposición 1.3.2 en conjunto a que $\mathscr{C}$ es una categoría con pull-backs.
Así pues supongamos por Hipótesis de Inducción que la proposición es válida para $n = k$, $k \geq 2$, y verifiquémosla para $k + 1$. Si $\{\mu_i\}_{i=1}^{k+1}$ es una familia de $k + 1$ subobjetos de A entonces por la Hipótesis de Inducción

la familia $\{\mu_i\}_{i=1}^{k}$ admite intersecciones, digamos $\nu : \bigcap_{i=1}^{k} A_i \to A$. Recordemos que ν es un monomorfismo, y por lo tanto, por el caso $n = 2$, se tiene que la familia de subobjetos $\{\nu, \mu_{k+1}\}$ admite intersecciones, digamos $\mu : \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1} \to A$. Afirmamos que μ es una intersección para $\{\mu_i\}_{i=1}^{k+1}$. En efecto, del hecho de que μ sea una intersección para $\{\nu, \mu_{k+1}\}$ se sigue que μ se factoriza a través de μ_{k+1} y a través de ν. Por su parte ν se factoriza a través de μ_i, $\forall\ i \in [1, k]$, y en consecuencia μ también lo hace; de modo que $\mu \leq \mu_i\ \forall\ i \in [1, k+1]$. Finalmente, si $\theta : B \to A$ se factoriza a través de $\mu_i\ \forall\ i \in [1, k+1]$, en partícular se factoriza a través de $\mu_i\ \forall\ i \in [1, k]$, y así por la propiedad universal de la intersección se sigue que θ se factoriza a través de ν. Así $\theta \leq \nu$ y $\theta \leq \mu_{k+1}$, con lo cual, por la propiedad universal de la intersección, ν se factoriza a través de μ. Con lo cual se ha verificado la afirmación y así se concluye la inducción.

$\square$