

Ejercicios 43-53

Luis Gerardo Arruti Sebastian
Sergio Rosado Zúñiga

Ej 54. Sea $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor contravariante entre categorías abelianas. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) G es exacto a izquierda (derecha).
- b) $G_{op} := G \circ D_{\mathcal{A}^{op}} : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{B}$ es exacto a izquierda (derecha).
- c) $G^{op} := D_{\mathcal{B}} \circ G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}^{op}$ es exacto a derecha (izquierda).

Demostración. $\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Supongamos G es exacta a izquierda.

Observamos que, como $D_{\mathcal{A}^{op}}$ es contravariante, entonces G_{op} es covariante. Sea $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1^{op}} M_2 \xrightarrow{f_2^{op}} M_3$ una sucesión exacta en \mathcal{A}^{op} . Como \mathcal{A} y \mathcal{B} son categorías abelianas en particular son exactas y \mathcal{A}^{op} , \mathcal{B}^{op} también lo son, así, $M_3 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_1} M_1 \longrightarrow 0$ es exacta en \mathcal{A} , y como G es exacto a izquierda, entonces

$$0 \longrightarrow G(M_1) \xrightarrow{G(f_1)} G(M_2) \xrightarrow{G(f_2)} G(M_3) \text{ es exacta.}$$

Como $G(f_i) = G \circ D_{\mathcal{A}^{op}}(f_i^{op})$ para $i \in \{1, 2\}$, y $G(M_j) = G \circ D_{\mathcal{A}^{op}}(M_j)$ para $j \in \{1, 2, 3\}$, entonces $0 \longrightarrow G_{op}(M_1) \xrightarrow{G_{op}(f_1^{op})} G_{op}(M_2) \xrightarrow{G_{op}(f_2^{op})} G_{op}(M_3)$ es exacta y en consecuencia G_{op} es exacta a izquierda.

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Supongamos G_{op} es exacta a izquierda.

Sea $M_3 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_1} M_1 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en \mathcal{A} , entonces $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1^{op}} M_2 \xrightarrow{f_2^{op}} M_3$ es exacta en \mathcal{A}^{op} . Como G_{op} es exacta a izquierda $0 \longrightarrow G_{op}(M_1) \xrightarrow{G_{op}(f_1^{op})} G_{op}(M_2) \xrightarrow{G_{op}(f_2^{op})} G_{op}(M_3)$ es exacta en \mathcal{B} , pero $G_{op}(M_i) = G(M_i)$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ y $G(f_i) = G \circ D_{\mathcal{A}^{op}}(f_i^{op})$ para $i \in \{1, 2\}$ entonces $0 \longrightarrow G(M_1) \xrightarrow{G(f_1)} G(M_2) \xrightarrow{G(f_2)} G(M_3)$ es exacta en \mathcal{B} y en consecuencia G es exacta.

$a) \Rightarrow c)$ Supongamos G es exacta a izquierda.

Observemos que G^{op} es covariante por ser $D_{\mathcal{B}}$ contravariante. Sea

$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en \mathcal{A} , entonces

$0 \longrightarrow G(M_3) \xrightarrow{G(f_2)} G(M_2) \xrightarrow{G(f_1)} G(M_1)$ es exacta en \mathcal{B} por ser G exacta,

así por 1.7.3 $G(M_1) \xrightarrow{(G(f_1))^{op}} G(M_2) \xrightarrow{(G(f_2))^{op}} G(M_3) \longrightarrow 0$ es exacta en \mathcal{B}^{op} .

Pero $D_{\mathcal{B}}$ manda $B \xrightarrow{f^{op}} A$ en $A \xrightarrow{f} B$, entonces

$G(M_i) = D_{\mathcal{B}} \circ G(M_i)$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ y $D_{\mathcal{B}} \circ G(f_j) = (G(f_j))^{op}$ para

$j \in \{1, 2\}$, así $G^{op}(M_1) \xrightarrow{G^{op}(f_1)} G^{op}(M_2) \xrightarrow{G^{op}(f_2)} G^{op}(M_3) \longrightarrow 0$ es exacta en \mathcal{B}^{op} , y así G^{op} es exacta a derecha.

$c) \Rightarrow a)$ Supongamos G^{op} es exacta a derecha.

Sea $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en \mathcal{A} entonces, como G^{op} es exacta a derecha,

$G^{op}(M_1) \xrightarrow{G^{op}(f_1)} G^{op}(M_2) \xrightarrow{G^{op}(f_2)} G^{op}(M_3) \longrightarrow 0$ es exacta en \mathcal{B}^{op} .

Así $0 \longrightarrow G^{op}(M_3) \xrightarrow{(G^{op}(f_2))^{op}} G^{op}(M_2) \xrightarrow{(G^{op}(f_1))^{op}} G^{op}(M_1)$ es exacta en \mathcal{B} pero

$G(M_i) = D_{\mathcal{B}} \circ G(M_i)$ para $i \in \{1, 2, 3\}$ y $D_{\mathcal{B}} \circ G(f_j) = (G(f_j))^{op}$ para

$j \in \{1, 2\}$. Entonces $0 \longrightarrow G(M_3) \xrightarrow{G(f_2)} G(M_2) \xrightarrow{G(f_1)} G(M_1)$ es exacto, es decir, G es exacto a izquierda.

Las equivalencias entre

- a) G es exacto a derecha.
- b) $G_{op} := G \circ D_{\mathcal{A}^{op}} : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{B}$ es exacto a derecha.
- c) $G^{op} := D_{\mathcal{B}} \circ G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}^{op}$ es exacto a izquierda.

se demuestra de manera análoga a lo anterior.

□

Ej 55.

Ej 56.

Ej 57. Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtor entre categorías abelianas. Pruebe que F es exacto izquierdo $\iff F_{op}^{op} := D_{\mathcal{B}} \circ F \circ D_{\mathcal{A}^{op}} : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathcal{B}^{op}$ es exacto a derecha.

Demostración. Primero observemos que $F_{op}^{op} = (F_{op})^{op} = (F^{op})_{op}$
 $F = (F^{op})^{op}$ y $F = (F_{op})_{op}$. Esto pasa por lo siguiente:

$$\begin{aligned}(F_{op})^{op} &= D_{\mathcal{B}} \circ F_{op} = D_{\mathcal{B}} \circ F \circ D_{\mathcal{A}^{op}} = F_{op}^{op}. \\ (F^{op})_{op} &= F^{op} \circ D_{\mathcal{A}^{op}} = D_{\mathcal{B}} \circ F \circ D_{\mathcal{A}^{op}} = F_{op}^{op}. \\ (F^{op})^{op} &= D_{\mathcal{B}^{op}} \circ D_{\mathcal{B}} \circ F = 1_{\mathcal{B}} F = F. \\ (F_{op})_{op} &= F \circ D_{\mathcal{A}^{op}} \circ D_{\mathcal{A}} = F 1_{\mathcal{A}} D_{\mathcal{A}} = F.\end{aligned}$$

Caso 1) F es covariante.

En este caso se tiene que, como $D_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{op}$ es un funtor contravariante para cualquier categoría \mathcal{C} , entonces F_{op}^{op} es covariante y F_{op} es contravariante. Como $F_{op}^{op} = (F_{op})^{op}$ entonces por el ejercicio 54 F_{op}^{op} es exacto a derecha si y sólo si F_{op} es exacto a izquierda, y como $(F_{op})_{op} = F$, entonces F_{op} es exacto a izquierda si y sólo si $(F_{op})_{op} = F$ es exacto a izquierda.

Caso 2) F es contravariante.

En este caso se tiene que F_{op}^{op} es contravariante y F_{op} es covariante. Como F es contravariante entonces por el ejercicio 54 F_{op} es exacto a izquierda si y sólo si F es exacto a izquierda, y como $(F_{op}^{op})^{op} = ((F_{op})^{op})^{op} = F^{op}$ entonces por el ejercicio 54 F_{op}^{op} es exacto a derecha si y sólo si $(F_{op}^{op})^{op} = F^{op}$ es exacto a izquierda. Por lo tanto F es exacto a izquierda si y sólo si F_{op}^{op} es exacta a derecha.

□

Ej 58. Para un funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre categorías abelianas, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

- a) F es exacto a derecha.
- b) F preserva cokernels, i.e.

$$F(\text{Coker}(X \xrightarrow{\alpha} Y)) \simeq \text{Coker}(F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y)).$$

- c) Para toda sucesión exacta $0 \rightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ en \mathcal{A} , se tiene que $F(K) \xrightarrow{F(f)} F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M) \rightarrow 0$ es exacta en \mathcal{B} .

Demostración. $\boxed{a) \iff c)}$ Por el ejercicio 57 se tiene que F_{op}^{op} es exacto a izquierda $\iff (F_{op}^{op})_{op}^{op}$ es exacto a derecha, pero

$$(F_{op}^{op})_{op}^{op} = \{[(F_{op})^{op}]^{op}\}_{op} = (f_{op})_{op} = F$$

por lo tanto F_{op}^{op} es exacto a izquierda $\iff F$ es exacto a derecha.

Así por 1.10.3 las siguientes condiciones son equivalentes:

a*) F_{op}^{op} es exacto a derecha.

b*) F_{op}^{op} preserva kernels.

c*) Para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ en \mathcal{A}^{op} , se tiene que $0 \longrightarrow F_{op}^{op}(K) \xrightarrow{F_{op}^{op}(f)} F_{op}^{op}(L) \xrightarrow{F_{op}^{op}(g)} F_{op}^{op}(M)$ es exacta en \mathcal{B}^{op} .

Entonces F es exacta a izquierda si y sólo si

para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ en \mathcal{A}^{op} , se tiene que $0 \longrightarrow F_{op}^{op}(K) \xrightarrow{F_{op}^{op}(f)} F_{op}^{op}(L) \xrightarrow{F_{op}^{op}(g)} F_{op}^{op}(M)$ es exacta en \mathcal{B}^{op} si y sólo si

Para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{g^{op}} L \xrightarrow{f^{op}} K \longrightarrow 0$ en \mathcal{A} , se tiene que $F_{op}^{op}(M) \xrightarrow{[F_{op}^{op}(g)]^{op}} F_{op}^{op}(L) \xrightarrow{[F_{op}^{op}(f)]^{op}} F_{op}^{op}(K) \longrightarrow 0$ es exacta en \mathcal{B} .

Observando que $F_{op}^{op}(A) = F(A)$ para cada $A \in \mathcal{A}$ y que para cada

$$\alpha \in Mor(\mathcal{A}^{op}) \quad F_{op}^{op}(\alpha) = D_{\mathcal{B}} \circ F \circ D_{\mathcal{A}^{op}}(\alpha) = [F(\alpha^{op})]^{op}$$

Entonces se tiene que F es exacta a izquierda si y sólo si para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{g^{op}} L \xrightarrow{f^{op}} K \longrightarrow 0$ en \mathcal{A} se tiene que $F(M) \xrightarrow{F(g^{op})} F(L) \xrightarrow{F(f^{op})} F(K) \longrightarrow 0$ en \mathcal{A} .

a) \Rightarrow b) Sea $\alpha : X \rightarrow Y$ en \mathcal{A} . Luego, se tiene la sucesión exacta $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{C_{\alpha}} Coker(\alpha) \longrightarrow 0$ en \mathcal{A} . Ahora, como F es exacta a derecha tenemos que $F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y) \xrightarrow{F(C_{\alpha})} F(Coker(\alpha)) \longrightarrow 0$ es exacta en \mathcal{B} , por lo tanto $F(C_{\alpha}) \simeq CoIm(F_{\alpha}) \simeq Coker(F_{\alpha})$ en $Epi_{\mathcal{B}}(\bullet, F(Y))$.

b) \Rightarrow c) Supongamos F preserva cokernels.

Sea $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en \mathcal{A}^{op} . Luego, $(M \longrightarrow 0) \simeq Coker(L \xrightarrow{g} M)$ y $(L \xrightarrow{g} M) \simeq Coker(K \xrightarrow{f} L) \dots (*)$ por la exactitud en L ; y como

F preserva cokernels, aseguramos que $F(0) = 0$.

En efecto, como $(0 \xrightarrow{1_0} 0) \simeq \text{Coker}(0 \xrightarrow{1_0} 0)$, y F preserva cokernels, se tiene que

$(F(0) \xrightarrow{1_{F(0)}} F(0)) \simeq \text{Coker}(F(0) \xrightarrow{1_{F(0)}} F(0)) \simeq \text{Coker}(F(0) \xrightarrow{0} F(0))$.
Por lo tanto $1_{F(0)} = 0$ y por el ejercicio 51, se tiene que $F(0) = 0$.

Ahora bien, por $(*)$ y dado que F preserva cokernels, se tiene que

$$(F(M) \longrightarrow 0) \simeq \text{Coker}(F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M))$$

y

$$(F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M)) \simeq \text{Coker}(F(K) \xrightarrow{F(f)} F(L))$$

de donde se sigue que $F(K) \xrightarrow{F(f)} F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M) \longrightarrow 0$ es exacta en \mathcal{B} .

□

Ej 59.

Ej 60.

Ej 61. Para un funtor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, entre categorías abelianas, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) F es exacto.
- b) $\forall \mathcal{D} = \{ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \}$ en \mathcal{A} , se tiene que:
 \mathcal{D} es exacto en $\mathcal{A} \Rightarrow F(\mathcal{D})$ es exacto en \mathcal{B} .

Demostración.

□

Ej 62. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{u_1} & A_2 & \xrightarrow{u_2} & A_3 & \xrightarrow{u_3} & A_4 & \xrightarrow{u_4} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ A'_1 & \xrightarrow{u'_1} & A'_2 & \xrightarrow{u'_2} & A'_3 & \xrightarrow{u'_3} & A'_4 & \xrightarrow{u'_4} & A'_5 \end{array}$$

y con filas exactas en una categoría abeliana \mathcal{A} . Pruebe que:

- a) Si f_2 y f_4 son monos y f_1 es epi, entonces f_3 es mono.

b) Si f_2 y f_4 son epis y f_5 es mono, entonces f_3 es epi.

Demostración. Por el teorema 1.10.9 existe una subcategoría abeliana \mathcal{A}' de \mathcal{A} tal que \mathcal{A}' es subcategoría plena y pequeña de \mathcal{A} y $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}'$. Por 1.10.10 existe un anillo R y un funtor fiel, pleno y exacto $F : \mathcal{A}' \longrightarrow \text{Mod}(R)$.

Considerando el diagrama $F(\mathcal{D})$ en $\text{Mod}(R)$

$$\begin{array}{ccccccccc} F(A_1) & \xrightarrow{F(u_1)} & F(A_2) & \xrightarrow{F(u_2)} & F(A_3) & \xrightarrow{F(u_3)} & F(A_4) & \xrightarrow{F(u_4)} & F(A_5) \\ \downarrow F(f_1) & & \downarrow F(f_2) & & \downarrow F(f_3) & & \downarrow F(f_4) & & \downarrow F(f_5) \\ F(A'_1) & \xrightarrow{F(u'_1)} & F(A'_2) & \xrightarrow{F(u'_2)} & F(A'_3) & \xrightarrow{F(u'_3)} & F(A'_4) & \xrightarrow{F(u'_4)} & F(A'_5) \end{array}$$

por 1.10.7 se tiene que $F(\mathcal{D})$ es conmutativo y con filas exactas en $\text{Mod}(R)$. Veamos que a) y b) se cumplen para el diagrama en $\text{Mod}(R)$.

a) Si $F(f_2)$ y $F(f_4)$ son monos y $F(f_1)$ es epi afirmamos que $\text{Ker}(F(f_3)) = 0$.

Sea $x \in \text{Ker}(F(f_3)) \leq F(A_3)$, en particular $F(f_4)F(u_3)(x) = F(u'_3)F(f_3)(x)$ el cual es 0, entonces $x \in \text{Ker}(F(f_4)F(u_3)) = \text{Ker}(F(u_3))$ pues $F(f_4)$ es mono, así, como los renglones son exactos, $x \in \text{Ker}(F(u_3)) = \text{Im}(F(u_2))$ y por lo tanto existe $y \in F(A_2)$ tal que $F(u_2)(y) = x$.

Ahora, $F(f_3)(x) = 0$ entonces $0 = F(f_3)F(u_2)(y) = F(u'_2)F(f_2)(y)$ por lo que $y \in \text{Ker}(F(u'_2)F(f_2))$ entonces, como $F(f_2)$ es mono, $F(f_2)(y) \in \text{Ker}(F(u'_2)) = \text{Im}(F(u'_1))$. Por lo anterior, se tiene entonces que $\exists z' \in F(A'_1)$ tal que $F(u'_1)(z') = F(f_2)(y)$, y como $F(f_1)$ es epi, entonces existe $z \in F(A_1)$ tal que $F(f_1)(z) = z'$, es decir, $F(u'_1)F(f_1)(z) = F(f_2)(y)$ y esto implica que $F(f_2)(y) = F(f_2)F(u_1)(z)$ pero $F(f_2)$ es mono en $\text{Mod}(R)$, entonces es inyectivo, por lo que $y = F(u_1)(z)$ y así $x = F(u_2)F(u_1)(z) = 0$. Por lo tanto $F(f_3)$ es mono.

b) Dado un diagrama en \mathcal{A} como se muestra en las hipótesis se tiene que el siguiente diagrama es un diagrama conmutativo con renglones exactos en \mathcal{A}^{op}

$$\begin{array}{ccccccccc} A'_5 & \xrightarrow{u'^{op}_4} & A'_4 & \xrightarrow{u'^{op}_3} & A'_3 & \xrightarrow{u'^{op}_2} & A'_2 & \xrightarrow{u'^{op}_1} & A'_1 \\ \downarrow f^{op}_5 & & \downarrow f^{op}_4 & & \downarrow f^{op}_3 & & \downarrow f^{op}_2 & & \downarrow f^{op}_1 \\ A_5 & \xrightarrow{u^{op}_4} & A_4 & \xrightarrow{u^{op}_3} & A_3 & \xrightarrow{u^{op}_2} & A_2 & \xrightarrow{u^{op}_1} & A_1 \end{array}$$

Ahora, si f_2 y f_4 son epi y f_5 es mono, entonces f^{op}_2 y f^{op}_4 son monos y

f_5^{op} es epi, así por el inciso a) se tiene que f_3^{op} es mono lo cual implica que f_3 es epi.

□

Ej 63.

Ej 64.

Ej 65. Pruebe que para una sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ en una categoría abeliana \mathcal{A} y $\gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$, las siguientes condiciones se satisfacen:

- a) Si (B', α', γ') es un push-out de $A' \xleftarrow{\gamma} A \xrightarrow{\alpha} B$, entonces existe $\beta' : B' \rightarrow C$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma' & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' \longrightarrow 0 \end{array} \quad \dots (*)$$

en \mathcal{A} , cuyas filas son sucesiones exactas.

- b) Si se tiene un diagrama conmutativo como en (*), con filas exactas, entonces (B', α', γ') es un push-out de $A' \xleftarrow{\gamma} A \xrightarrow{\alpha} B$.

Demostración. Puesto que \mathcal{A} es abeliana y $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ es exacta, se tiene entonces que $0 \longrightarrow C \xrightarrow{\beta^{op}} B \xrightarrow{\alpha^{op}} A \longrightarrow 0$ es exacta en \mathcal{A}^{op} , además por hipótesis $\gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$, entonces $\gamma^{op} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}^{op}}(A', A)$.

Sea (B', α', γ') un push-out de $A' \xleftarrow{\gamma} A \xrightarrow{\alpha} B$, entonces $(B', (\alpha')^{op}, (\gamma')^{op})$ es un pull-back de $A' \xrightarrow{\gamma^{op}} A \xleftarrow{\alpha^{op}} B$, así por 1.10.16 existe $(\beta')^{op} : C \rightarrow B'$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{(\beta')^{op}} & B' & \xrightarrow{(\alpha')^{op}} & A' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow (\gamma')^{op} & & \downarrow \gamma^{op} \\ 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\beta^{op}} & B & \xrightarrow{\alpha^{op}} & A \longrightarrow 0 \end{array} \quad \dots (1)$$

en \mathcal{A}^{op} cuyas silas son exactas.

Así, $\beta' : B' \rightarrow C$ es tal que hace conmutar el siguiente diagrama en \mathcal{A} , cuyas filas son exactas

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma' & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' \longrightarrow 0 .
\end{array}$$

Veamos ahora que se cumple b). Si tenemos un diagrama conmutativo como en (*) con filas exactas en \mathcal{A} , entonces tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas en \mathcal{A}^{op} como se muestra en (1). Así, por 1.10.16 $(B', (\alpha')^{op}, (\gamma')^{op})$ es un pull-back de $A' \xrightarrow{\gamma^{op}} A \xleftarrow{\alpha^{op}} B$ por lo que (B', α', γ') es un push-out de $A' \xleftarrow{\gamma} A \xrightarrow{\alpha} B$ en \mathcal{A} .

□

Ej 66. Para una categoría abeliana \mathcal{A} , pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) El diagrama $A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$ es un Push-out en \mathcal{A} .

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\alpha_2} & A_2 \\
\alpha_1 \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\
A_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Q
\end{array}$$

b) La sucesión

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}} A_1 \amalg A_2 \xrightarrow{(\beta_1 \ \beta_2)} Q \longrightarrow 0$$

es exacta en \mathcal{A} .

Demostración. El diagrama $A \xrightarrow{\alpha_2} A_2$ es un Push-out en \mathcal{A} si y sólo

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\alpha_2} & A_2 \\
\alpha_1 \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\
A_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Q
\end{array}$$

si el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
Q & \xrightarrow{(\beta_2)^{op}} & A_2 \\
(\beta_1)^{op} \downarrow & & \downarrow (\alpha_2)^{op} \\
A_1 & \xrightarrow{(\alpha_1)^{op}} & A
\end{array}$$

1.10.17, es equivalente a que la sucesión

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta_1^{op} \\ \beta_2^{op} \end{pmatrix}} A_1 \amalg A_2 \xrightarrow{(\alpha_1^{op} \ -\alpha_2^{op})} A$$

es exacta en \mathcal{A}^{op} . Pero esto pasa si y sólo si

$$A \xrightarrow{(\alpha_1^{op} \ (-\alpha_2)^{op})^{op}} A_1 \amalg A_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta_1^{op} \\ \beta_2^{op} \end{pmatrix}^{op}} Q \longrightarrow 0$$

es exacta en \mathcal{A} si y sólo si

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}} A_1 \amalg A_2 \xrightarrow{(\beta_1 \ \beta_2)} Q \longrightarrow 0$$

es exacta en \mathcal{A} .

□

Ej 67.

Ej 68.

Ej 68*. Sean \mathcal{A} una categoría abeliana y $M \in \mathcal{A}$. Pruebe que

a) $M \in Proj(\mathcal{A}) \iff \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \bullet) : \mathcal{A} \rightarrow Ab$ es exacto.

a) $M \in Inj(\mathcal{A}) \iff \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, M) : \mathcal{A} \rightarrow Ab$ es exacto.

Demostración. Observemos que $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \bullet)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, M)$ son aditivos y exactos a izquierda por el ejercicio 55.

a), \Rightarrow Supongamos $M \in Proj(\mathcal{A})$ y sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en \mathcal{A} . Como $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \bullet)$ es exacta a izquierda, se tiene que

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, A) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, f)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, B) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, g)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C)$$

es exacta en Ab .

Basta mostrar que $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, g)$ es epi en Ab . Mostraremos que, de hecho, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, g)$ es suprayectiva.

Sea $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C)$, como $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es exacta, se tiene que g es epi y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$ así, como M es proyectivo, existe un $\eta \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, B)$ tal que $g\eta = \alpha$, por lo tanto $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, g)$ es suprayectivo y en particular es epi, por lo tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, A) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, f)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, B) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, g)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C) \longrightarrow 0$$

es exacta en Ab .

$a), \Leftarrow)$ Supongamos ahora que $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \bullet)$ es exacto. Sea $h \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C)$ y $\gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, C)$ en epi, entonces tenemos el siguiente diagrama con renglón exacto

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \downarrow \eta & \\ X & \xrightarrow[\gamma]{\twoheadrightarrow} C & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Como $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \bullet)$ es exacto, entonces

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, X) \xrightarrow[\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, g)]{\longrightarrow} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C) \longrightarrow 0$$

es exacto en Ab , por lo tanto $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, g)$ es epi y en consecuencia suprayectivo. Así como $\eta \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C)$, existe $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, X)$ tal que $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \gamma)(f) = \eta$ es decir, $\gamma f = \eta$, por lo tanto M es proyectivo.

$b), \Rightarrow)$ Supongamos M es inyectivo en \mathcal{A} . Sea

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en \mathcal{A} . Como $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, M)$ es un funtor exacto izquierdo contravariante, por el ejercicio 55, entonces

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, M) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(g, M)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, M) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, M)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, M)$$

es exacta. Basta probar entonces que $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, M)$ es suprayectivo.

Sea $\eta \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, M)$, como $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en \mathcal{A} , en particular f es mono así, como M es inyectivo, se tiene entonces que $\exists \gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, M)$ tal que $\eta = \gamma f$ por lo tanto $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, M)$ es suprayectivo, en particular es epi. Así

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(C, M) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(g, M)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, M) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(f, M)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, M)$$

es exacta en Ab lo que implica que $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, M)$ es exacto.

$b), \Leftarrow)$ Supongamos $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, M)$ es exacto. Si $\eta \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, M)$ y $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$ es mono, entonces se tiene el siguiente diagrama con renglón exacto

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & A \xrightarrow{\alpha} X \\ & & \downarrow \eta \\ & & M \end{array}$$

como $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, M)$ es exacto, entonces

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, M) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha, M)} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, M) \longrightarrow 0$$

es exacto, entonces $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha, M)$ es epi en Ab por lo tanto es suprayectivo.

Así, como $\eta \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, M)$, $\exists \gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, M)$ tal que $\eta = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\alpha, M)(\gamma) = \gamma \circ \alpha$. Por lo tanto M es proyectivo.

□

Ej 69. Sea \mathcal{A} una categoría abeliana y $\beta : I \rightarrow M$ un split-epi en \mathcal{A} , con $I \in \text{Inj}(\mathcal{A})$. Pruebe que $M \in \text{Inj}(\mathcal{A})$.

Demostración. Sea $\alpha : M \rightarrow I$ tal que $\beta\alpha = 1_M$, este morfismo existe por ser β split-epi, y consideremos un diagrama en \mathcal{A} de la forma

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

Como $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, I)$, entonces $\alpha g : A \rightarrow I$. Como I es inyectivo en \mathcal{A} existe $\eta : B \rightarrow I$ tal que $\alpha g = \eta f$, entonces $\beta \eta f = \beta \alpha g = 1_M g = g$. Por lo tanto M es inyectivo en A .

□

Ej 70. Para una categoría abeliana A e $I \in A$, pruebe las siguientes condiciones equivalentes

- a) $I \in \text{Inj}(\mathcal{A})$.
- b) Todo mono $\alpha : I \rightarrow X$ en \mathcal{A} es split-mono.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$ Supongamos I es inyectivo en \mathcal{A} y $\alpha : I \rightarrow X$ es mono, entonces se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\alpha} & X \\ Id_I \downarrow & & \\ I & & \end{array}$$

Como I es inyectivo $\exists \beta : X \rightarrow I$ tal que $\beta\alpha = Id_I$, es decir, α es split-mono.

$b) \Rightarrow a)$ Supongamos que todo mono $\alpha : I \rightarrow X$ en \mathcal{A} es split-mono.

Consideremos el diagrama en \mathcal{A}

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \eta \downarrow & & \\ I & & \end{array}.$$

Como \mathcal{A} es abeliana, existe el Push-out de f y η

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \eta \downarrow & & \downarrow \alpha_1 \\ I & \xrightarrow{\alpha_2} & P \end{array}.$$

Por el ejercicio 64 a) se tiene que, como f es mono, α_2 es mono, y por el ejercicio 64 b), que η se factoriza a través de f si y sólo si α_2 es split-mono. Pero por hipótesis α_2 al ser mono, tiene que ser split-mono, por lo tanto η se factoriza a través de f e implica que I es inyectivo.

□