Ejercicios 43-53

Luis Gerardo Arruti Sebastian
Sergio Rosado Zúñiga

Ej 43. Sea $\{\pi_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ una familia de morfismos en una categoría semiaditiva $\mathscr{C}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) A y $\{\pi_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ son un producto para $\{A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$;

b) $\exists$ $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$ tal que $\sum\limits_{i=1}^n \mu_i\pi_i = 1_A$ y, $\forall$ $i,j \in [1,n]$, $\pi_i\mu_j = \delta_{i,j}^A$.

Demostración. Se tiene el siguiente resultado

Proposición (1.9.2)**.** Sea $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i=1}^n$ una familia de morfismos en una categoría semiaditiva $\mathscr{C}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) A y $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i=1}^n$ son un coproducto para $\{A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$;

b) $\exists$ $\{\pi_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$ tal que $\sum\limits_{i=1}^n \mu_i\pi_i = 1_A$ y, $\forall$ $i,j \in [1,n]$, $\pi_i\mu_j = \delta_{i,j}^A$.

Así, considerando que

$$\begin{aligned}\left(\delta_{i,j}^A\right)^{op} &= \begin{cases} 0^{op}, & i \neq j \\ {1_{A_i}}^{op}, & i = j \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1_{A_i}, & i = j \end{cases} \\ &= \delta_{i,j}^A\end{aligned}$$

y pasando a la categoría opuesta, se tiene:

Proposición (1.9.2$^{\text{op}}$)**.** Sea $\{\mu_i^{op} : A_i \to A\}_{i=1}^n$ una familia de morfismos en una categoría semiaditiva $\mathscr{C}^{op}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) A y $\{\mu_i^{op} : A_i \to A\}_{i=1}^n$ son un coproducto para $\{A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}^{op}$;

b) $\exists$ $\{\pi_i^{op} : A \to A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}^{op}$ tal que $\sum\limits_{i=1}^n \mu_i^{op}\pi_i^{op} = 1_A$ y, $\forall$ $i,j \in [1,n]$, $\pi_i^{op}\mu_j^{op} = \delta_{i,j}^A$.

Lo cual, sabiendo que la noción dual de coproducto es producto, nos da el siguiente resultado dual

Proposición (1.9.2*)**.** Sea $\{\mu_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ una familia de morfismos en una categoría semiaditiva $\mathscr{C}^{op}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) A y $\{\mu_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ son un producto para $\{A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$;

b) $\exists\ \{\pi_i : A_i \to A\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$ tal que $\sum_{i=1}^n \pi_i\mu_i = 1_A$ y, $\forall\ i,j \in [1,n]$, $\mu_j\pi_i = \delta_{i,j}^A$.

Podemos reescribir la proposición anterior intercambiando μ por π y viceversa, con lo cual por el principio de dualidad se tiene lo deseado.

□

Ej 44. Sean $\mathscr{C}$ una categoría semiaditiva, $A = \coprod_{i=1}^n A_i$ y $B = \coprod_{i=1}^n B_i$ en $\mathscr{C}$. Si la aplicación $+$ está dada por

$$\begin{aligned} + : Mat_{m\times n}(A,B) \times Mat_{m\times n}(A,B) &\to Mat_{m\times n(A,B)} \\ (\alpha,\beta) &\mapsto \gamma, \\ [\gamma]_{i,j} &:= [\alpha]_{i,j} + [\beta]_{i,j}\,, \quad \forall\ i,j \in [1,n] \end{aligned}$$

con $+$ al lado derecho de la igualdad anterior siendo la operación suma en $Hom_{\mathscr{C}}(A_j, B_i)$, entonces $(Mat_{m\times n}(A,B), +)$ es un monoide abeliano.

Demostración. Sean $\alpha,\beta,\gamma \in Mat_{m\times n}(A,B)$. Dado que $\mathscr{C}$ es semiaditiva se tiene que $\forall\ (r,t) \in [1,m]\times[1,n]$ $Hom_{\mathscr{C}}(A_t,B_r)$ tiene estructura de monoide abeliano, en patícular su operación es asociativa. Así

$$\begin{aligned} [(\alpha+\beta)+\gamma]_{r,t} &= [\alpha+\beta]_{r,t} + [\gamma]_{r,t} \\ &= \Big([\alpha]_{r,t} + [\beta]_{r,t}\Big) + [\gamma]_{r,t} \\ &= [\alpha]_{r,t} + \Big([\beta]_{r,t} + [\gamma]_{r,t}\Big) \\ &= [\alpha+(\beta+\gamma)]_{r,t}\,; \qquad \forall\,(r,t) \in [1,m]\times[1,n] \end{aligned}$$

$$\implies + \text{ en } Mat_{m\times n}(A,B) \text{ es asociativa.}$$

En forma análoga a lo anterior, empleando ahora que la operación en cada $Hom_{\mathscr{C}}(A_t,B_r)$ es conmutativa, se verifica que $+$ en $Mat_{m\times n}(A,B)$ también lo es y que, si $(r,t) \in [1,m]\times[1,n]$ e_{A_t,B_r} es el neutro en $Hom_{\mathscr{C}}(A_t,B_r)$ y E la matriz en $Mat_{m\times n}(A,B)$ dada por $[E]_{r,t} = e_{A_t,B_r}$, entonces E es el neutro de $+$ en $Mat_{m\times n}(A,B)$.

□

Ej 45. Sean $\{R_i\}_{i=1}^n$ una familia de anillos (asociativos con 1). Considere el conjunto $R := \bigtimes_{i=1}^{n} R_i$, con las operaciones suma y producto dadas coordenada a coordenada, i.e., para $x = (x_i)_{i=1}^n$ y $y = (y_i)_{i=1}^n$ en R, definimos $x + y := (x_i + y_i)_{i=1}^n$ y $xy = (x_i y_i)_{i=1}^n$.

Pruebe que

a) Con las operaciones anteriores R es un anillo con $1_R = (1_{R_i})_{i=1}^n$.

b) Para cada $j \in [1, n]$, la j-ésima pritección $proy_j : R \to R_j$, $x = (x_i)_{i=1}^n \mapsto x_j$, es un morfismo en *Rings* y suryectivo en *Sets*.

c) R y $\{proy_j : R \to R_i\}_{i=1}^n$ son un producto en *Rings* para $\{R_i\}_{i=1}^n$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Sean $x, y \in R$, con $x = (x_i)_{i=1}^n,\ y = (y_i)_{i=1}^n$, $z = (z_i)_{i=1}^n$ y $0_R = (0_i)_{i=1}^n$ donde 0_i es el neutro aditivo de R_i para cada $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Grupo con respecto a la suma

i) Como $x_i, y_i \in R_i \ \ \forall i \in I$ entonces $x_i + y_i \in R_i\ \forall i \in I$, así $x + y := (x_i + y_i)_{i=1}^n \in R$. Mas aún, $(x_i + y_i)_{i=1}^n = (y_i + x_i)_{i=1}^n$, por lo que $x + y = y + x$.

ii) Como R es anillo para toda $i \in I$, entonces

$$(x + y) + z = [(x_i + y_i) + z_i]_{i=1}^n = [x_i + (y_i + z_i)]_{i=1}^n = x + (y + z).$$

iii) $0_R + x = (0_i + x_i)_{i=1}^n = (x_i)_{i=1}^n = x$.

iv) Definimos para cada $x \in R \quad -x := (-x_i)_{i=1}^n$, entonces $x + (-x) = (x_i + (-x_i))_{i=1}^n = (0_i)_{i=1}^n = 0_R$.

Por lo tanto R es un grupo abeliano con la suma.

Monoide con respecto a la multiplicación:

Como R_i es un anillo para cada $i \in I$ se tiene que

i) $xy = (x_i y_i)_{i=1}^n \in R$ pues $x_i y_i \in R_i \quad \forall i \in I$.

ii) $(xy)z = [(x_i y_i) z_i]_{i=1}^n = [x_i(y_i z_i)]_{i=1}^n = x(yz)$.

iii) $x1_R = (x_i 1_{R_i})_{i=1}^n = (x_i)_{i=1}^n = x = (x_i)_{i=1}^n = (1_{R_i} x_i)_{i=1}^n = 1_R x$.

iv) $(x + y)z = [(x_i + y_i)z_i]_{i=1}^n = [x_i z_i + y_i z_i]_{i=1}^n = xz + yz$.

Por lo tanto R es un anillo con $1_R = (1_{R_i})_{i=1}^n$.

$\boxed{b)}$ Sea $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$, tomamos $proy_j : R \to R_j$ tal que $z = (z_i)_{i=1}^n \mapsto z_j$ y sean x, y descritos como en el inciso a).

Entonces $proy_j(x+y) = proy_j[(x_i+y_i)_{i=1}^n] = x_j+y_j = proy_j(x)+proy_j(y)$ y $proy_j(xy) = proy_j[(x_iy_i)_{i=1}^n] = x_jy_j = proy_j(x)proy_j(y)$.

Además, si $a \in R_j$ para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene el elemento $\hat{a} \in R$ tal que $\hat{a} = (a_i)_{i=1}^n$ donde $a_i = 0 \quad \forall i \neq j$ y $a_j = a$. Así $proy_j(\hat{a}) = a$ y en consecuencia $proy_j$ es un morfismo de anillos suprayectivo.

$\boxed{c)}$ Sea P un anillo y $\{p_i : P \to R_i\}_{i=1}^n$ una familia de morfismos de anillos. Sea $\varphi : P \to R$ tal que $\varphi(x) = x_p$ donde x es el elemento de R tal que $x_p = (x_i)_{i=1}^n$ con $x_i = p_i(x)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Veamos que es morfismo de anillos.

Como p_i es morfismo de anillos y $p_i(x) \in R_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y para cada $x \in P$, entonces si $(a_i)_{i=1}^n = \varphi(x)$ se tiene que $a_i = p_i(x)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ por lo tanto φ está bien definida.

Sean $x, y \in P$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= (x+y)_p = (p_i(x+y))_{i=1}^n = (p_i(x)+p_i(y))_{i=1}^n \\ &= (p_i(x))_{i=1}^n + (p_i(y))_{i=1}^n = x_p + y_p = \varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\varphi(xy) &= (xy)_p = (p_i(xy))_{i=1}^n = (p_i(x)p_i(y))_{i=1}^n \\ &= (p_i(x))_{i=1}^n (p_i(y))_{i=1}^n = x_p y_p = \varphi(x)\varphi(y).\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es un morfismo de anillos. Notemos que, para toda $x \in P$, $proy_j \circ \varphi(x) = proy_j(x_p) = p_j(x)$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por lo tanto $p_j = proy_j \circ \varphi$.

Por último si existiera $\eta : P \to R$ tal que $p_j = proy_j \eta$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces para cada $x \in P$ se tiene que $\eta(x) \in R$, es decir, $\eta(x) = (x_i)_{i=1}^n$ con $x_i \in R_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ahora, como $proy_j \eta(x) = p_j(x)$, entonces $x_j = p_j(x) \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, es decir, $\eta(x) = (p_i(x))_{i=1}^n = x_p = \varphi(x)$.

Por lo tanto φ es único y así R y $\{proy_j : R \to R_i\}_{i=1}^n$ son un producto en *Rings* para $\{R_i\}_{i=1}^n$.

$\square$

Ej 46. Para una categoría $\mathscr{C}$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes

a) $\mathscr{C}$ tiene objeto cero y biproductos $A\coprod A$ en $\mathscr{C}$, $\forall A\in\mathscr{C}$.

b) $\mathscr{C}^{op}$ tiene objeto cero y biproductos $A\coprod A$ en $\mathscr{C}^{op}$, $\forall A\in\mathscr{C}$.

Demostración. Notemos que $\mathscr{C}$ tiene objeto cero si y sólo si $\mathscr{C}^{op}$ tiene objeto cero, pues si $\mathscr{C}$ tiene objeto cero 0, entonces $|\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,0)| = 1 = |\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(0,X)|, \quad \forall X\in\mathscr{C}$, pero esto pasa si y sólo si $|\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(0,X)| = 1 = |\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,0)|, \quad \forall X\in\mathscr{C}^{op}$.

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Como $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}^{op}$ tienen objeto cero, si $A\coprod A$ es biproducto en $\mathscr{C}$, entonces existe $A\prod A$ en $\mathscr{C}$ y $\delta : A\coprod A \longrightarrow A\prod A$ un isomorfismo. Sean $\{\mu_1,\mu,2 : A\longrightarrow A\coprod A\}$ y $\{\pi_1,\pi_2 : A\prod A\longrightarrow A\}$ los morfismos canonicos del coproducto y producto respectivamente, entonces por el ejercicio 40 $A\coprod A$ con $\{\mu_1^{op},\mu_2^{op} : A\coprod A\longrightarrow A\}$ y $A\prod A$ con $\{\pi_1^{op},\pi_2^{op} : A\longrightarrow A\prod A\}$ son un producto y un coproducto en $\mathscr{C}^{op}$ respectivamente tales que $\delta^{op} : A\prod A\longrightarrow A\coprod A$ es un isomorfismo al ser δ iso. Por lo tanto $A\coprod A$ es un biproducto en $\mathscr{C}^{op}$.

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Es análogo a lo anterior pues $(\mathscr{C}^{op})^{op} = \mathscr{C}$.

$\square$

Ej 47. Sean $\mathscr{C}$ una categoría preaditiva, $A\in\mathscr{C}$ y $\theta\in End_{\mathscr{C}}(A)$. Si θ es idempotente, entonces $1_A-\theta$ también lo es.

Demostración. Se tiene que $\theta^2=\theta$ y, como $\mathscr{C}$ es preaditiva, la composición de morfismos en $\mathscr{C}$ es bilineal con respecto a $+$ en $End_{\mathscr{C}}(A)$. Así

$$\begin{aligned}(1_A-\theta)^2 &= (1_A-\theta)(1_A-\theta) = 1_A^2 - 1_A\theta - \theta 1_A + \theta^2\\ &= 1_A - \theta - \theta + \theta\\ &= 1_A - \theta.\end{aligned}$$

$\square$

Ej 48. Sea $\mathscr{C}$ una categoría, entonces:

a) $\mathscr{C}$ es abeliana si y sólo si $\mathscr{C}^{op}$ es abeliana.

b) Supongamos que $\mathscr{C}$ es abeliana y sean $\alpha : A\to B, \beta : C\to B$ en $\mathscr{C}$. Si α, o β, es epi, entonces λ el morfismo asociado a la matriz $(\alpha\ \beta)$ es epi.

Demostración. $\boxed{a)}$ Se tiene del Teorema 1.10.1 d) que una categoría es abeliana si y sólo si satisface las siguientes dos condiciones

C1) $\mathscr{C}$ es normal y conormal,

C2) $\mathscr{C}$ tiene pull-backs y push-outs.

Dado que $C1$) y $C2$) son condiciones autoduales, pues (normal)*=conormal y (pull-back)*=push-out, entonces una categoría $\mathscr{C}$ las satisface si y sólo si $\mathscr{C}^{op}$ las satisface.

$\boxed{b)}$ Sean $\{\pi_1, \pi_2\}$ las proyecciones naturales y $\{\mu_1, \mu_2\}$ las inclusiones naturales del biproducto $A \coprod C$. Entonces $\lambda = \alpha\pi_1 + \beta\pi_2 \in Hom_{\mathscr{C}}(A \coprod C, B)$. Supongamos que $f, g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, D)$ son tales que $f\lambda = g\lambda$. Así

$$\begin{aligned} f(\alpha\pi_1 + \beta\pi_2) &= g(\alpha\pi_1 + \beta\pi_2), \\ \Longrightarrow f(\alpha\pi_1 + \beta\pi_2)\mu_1 &= f(\alpha\pi_1 + \beta\pi_2)\mu_1 \\ \Longrightarrow f(\alpha(\pi_1\mu_1) + \beta(\pi_2\mu_1)) &= g(\alpha(\pi_1\mu_1) + \beta(\pi_2\mu_1)) \\ \Longrightarrow f(\alpha(1_A) + \beta 0) &= g(\alpha 1_A + \beta 0) \\ \Longrightarrow f\alpha &= g\alpha. \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que $f = g$ si α es epi. La prueba es análoga, componiendo por μ_2 a derecha, si suponemos que β es epi.

□

Ej 49. Pruebe que, para un anillo R

a) $Mod(R)$ es abeliana.

b) $mod(R)$ es abeliana si R es un anillo artiniano izquierdo, donde $mod(R)$ es la subcategoría de $Mod(R)$, cuyos objetos son los R-módulos finitamente generados.

Demostración. $\boxed{a)}$ Por los ejercicios 29 y 30, $Mod(R)$ tiene kerneles y cokerneles, por el ejercicio 32 es normal y conormal y por el ejercicio 41 tiene productos y coproductos (en particular tiene productos y coproductos finitos) entonces por el teorema 1.10.1 c) se tiene que $Mod(R)$ es abeliana. □

Ej 50. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías aditivas y $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor de cualquier varianza. Pruebe que los siguientes son equivalentes:

a) F es aditivo.

b) $F_{op} := F \circ D_{\mathscr{A}^{op}} : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathscr{B}$ es aditivo.

c) $F^{op} := D_{\mathscr{B}} \circ F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}^{op}$ es aditivo.

d) $F^{op}_{op} := D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}} : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathscr{B}^{op}$ es aditivo.

(Se cambió ligeramente el enunciado para fines practicos de la demostración.)

Demostración. Recordemos que $\mathscr{A}^{op}$ y $\mathscr{B}^{op}$ son categorías abelianas por 1.9.15, también que $D_{\mathscr{A}^{op}} : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathscr{A}$ es un funtor contravariante tal que $(A \xrightarrow{f} B) \mapsto (B \xrightarrow{f^{op}} A)$ y, como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)$ es un grupo abeliano, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(Y,X)$ es también un grupo abeliano.

Se probará el caso en que F es covariante

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Supongamos F es aditivo. Entonces $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(X),F(Y))$ es un morfismo en Ab para toda $X,Y \in \mathscr{A}$. Así para cualesquiera $f^{op} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(B,A)$ y $g^{op} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(C,B)$, entonces

$$\begin{aligned} &F_{op}(f^{op} \circ g^{op}) = F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f^{op} \circ g^{op}) = F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}((g \circ f)^{op}) = F(g \circ f) \\ &= F(g) \circ F(f) = F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op}) \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f^{op}) = F_{op}(g^{op}) \circ F_{op}(f^{op}). \end{aligned}$$

Es decir, F_{op} es un funtor aditivo (pues es contravariante).

$\boxed{b) \Rightarrow c)}$ Supongamos F_{op} es aditivo.Entonces $F_{op} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(Y,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(X),F(Y))$ es un morfismo en Ab para toda $X,Y \in \mathscr{A}$. Así para cualesquiera $f : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,C)$ y $g : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$, entonces

$$\begin{aligned} &F^{op}(f \circ g) = D_{\mathscr{B}} \circ F(f \circ g) = D_{\mathscr{B}}(F(f \circ g)) = (F(f \circ g))^{op} = [F((g^{op} \circ f^{op})^{op})]^{op} \\ &\qquad = [F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op} \circ f^{op})]^{op} = [F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f^{op}) \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op})]^{op} \\ &= [F(f) \circ F(g)]^{op} = (F(g))^{op} \circ (F(f))^{op} = D_{\mathscr{B}} \circ F(g) \circ D_{\mathscr{B}} \circ F(f) = F^{op}(g) \circ F^{op}(f). \end{aligned}$$

Es decir, F^{op} es un funtor aditivo (pues es contravariante).

$\boxed{c) \Rightarrow d)}$ Supongamos F^{op} es aditivo.Entonces $F^{op} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}^{op}}(F(Y),F(X))$ es un morfismo en Ab para toda $X,Y \in \mathscr{A}$. Así para cualesquiera $g : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ y $f : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,C)$, entonces

$$\begin{aligned} F^{op}_{op}(f^{op} \circ g^{op}) &= D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f^{op} \circ g^{op}) = D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}((g \circ f)^{op}) \\ &= D_{\mathscr{B}} \circ F(g \circ f) = D_{\mathscr{B}} \circ F(f) \circ D_{\mathscr{B}} \circ F(g) \\ &= D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f^{op}) \circ D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op}) \\ &= F^{op}_{op}(f^{op}) \circ F^{op}_{op}(g^{op}). \end{aligned}$$

Es decir, F^{op}_{op} es un funtor aditivo covariante.

$\boxed{d) \Rightarrow a)}$ Supongamos F^{op}_{op} es aditivo.Entonces $F^{op}_{op} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}^{op}}(F(X),F(Y))$ es un morfismo en Ab para toda $X,Y \in \mathscr{A}$. Así para cualesquiera $g : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ y $f : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,C)$, entonces

$$F(f \circ g) = F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op} \circ f^{op}) = [D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op} \circ f^{op})]^{op}$$
$$= [D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op}) \circ D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f^{op})]^{op} = [D_{\mathscr{B}} \circ F(g) \circ D_{\mathscr{B}} \circ F(f)]^{op}$$
$$= (D_{\mathscr{B}} \circ F(f))^{op} \circ (D_{\mathscr{B}} \circ F(g))^{op} = F(f) \circ F(g).$$

Es decir, F_{op}^{op} es un funtor aditivo covariante.

El caso en que F es contravariante es análogo a esta demostración.

□

Ej 51. Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $A \in \mathscr{A}$ tal que $1_A = 0_{A,A}$. Entonces A es un objeto cero en $\mathscr{A}$.

Demostración. Como $\mathscr{A}$ es aditiva, en partícular es una $\mathbb{Z}$-categoría, con lo cual por la Observación 1,9,1(2) todo objeto inicial en $\mathscr{A}$ es un objeto cero en $\mathscr{A}$. Así pues basta con verificar que bajo estas condiciones A es un objeto inicial en $\mathscr{A}$.
Sea $X \in \mathscr{A}$ y $f \in Hom_{\mathscr{A}}(A, X)$. Como $\mathscr{A}$ tiene objeto cero, por ser aditiva, entonces existe un (único) morfismo cero $0_{A,X} \in Hom_{\mathscr{A}}(A, X)$. Además

$$f = f1_A = f0_{A,A} = 0_{A,X},$$
$$\implies Hom_{\mathscr{A}}(A, X) = \{0_{A,X}\}.$$

□

Ej 52. Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categorías aditivas, $X = \coprod_{i=1}^{n} X_i$, $Y = \coprod_{j=1}^{m} Y_i$ en $\mathscr{A}$, F un funtor que preserva coproductos finitos, $\alpha \in Mat_{m\times n}(X, Y)$ y $\overline{\alpha}$ el morfismo en $Hom_{\mathscr{A}}(X, Y)$ asociado a α. Entonces la matriz asociada al morfismo $F(\overline{\alpha})$, $\varphi_{FY,FX}(F(\overline{\alpha})) \in Mat_{m\times n}(FX, FY)$, está dada por

$$[\varphi_{FY,FX}(F(\overline{\alpha}))]_{i,j} = F\left([\alpha]_{i,j}\right), \qquad \forall\ i, j$$

Demostración. Dado que $\mathscr{A}$ es abeliana, X y Y son biproductos en $\mathscr{A}$, al igual que FX y FY lo son en $\mathscr{B}$ por ser esta última abeliana y ser F un funtor que preserva coproductos finitos. Más aún, si $\left\{\mu_i^X{}_i\right\}_{i=1}^{n}$, $\left\{\mu_i^Y{}_i\right\}_{i=1}^{m}$, $\left\{\pi_i^X{}_i\right\}_{i=1}^{n}$ y $\left\{\pi_i^Y{}_i\right\}_{i=1}^{m}$ son respectivamente las inclusiones y proyecciones naturales de X y Y, entonces $\left\{F\left(\mu_i^X\right)_i\right\}_{i=1}^{n}$, $\left\{F\left(\mu_i^Y\right)_i\right\}_{i=1}^{m}$, $\left\{F\left(\pi_i^X\right)_i\right\}_{i=1}^{n}$ y $\left\{F\left(\pi_i^Y\right)_i\right\}_{i=1}^{m}$ son respectivamente las inclusiones y proyecciones naturales de FX y FY. Así

$$\begin{aligned}
\left[\varphi_{FY,FX}\left(F\left(\overline{\alpha}\right)\right)\right]_{i,j} &= F\left(\pi_i^Y\right) F\left(\overline{\alpha}\right) F\left(\mu_j^X\right) \\
&= F\left(\pi_i^Y \overline{\alpha} \mu_j^X\right) \\
&= F\left(\pi_i^Y \left(\sum_{r,t} \mu_t^Y \left[\alpha\right]_{i,j} \pi_r^X\right) \mu_j^X\right) \\
&= F\left(\sum_{r,t} \left(\left(\pi_i^Y \mu_t^Y\right) \left[\alpha\right]_{i,j} \left(\pi_r^X \mu_j^X\right)\right)\right) \\
&= F\left(\sum_{r,t} \delta_{i,t}^Y \left[\alpha\right]_{i,j} \delta_{r,j}^X\right) \\
&= F\left(1_{Y_i} \left[\alpha\right]_{i,j} 1_{X_j}\right) \\
&= F\left(\left[\alpha\right]_{i,j}\right).
\end{aligned}$$

□

Ej 53. Sea $G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor contravariante entre categorías aditivas. Pruebe que G s aditivo si y sólo si manda productos finitos en $\mathscr{A}$ a coproductos finitos en $\mathscr{B}$.

Demostración. Decimos que un funtor contravariante $G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ entre categorías aditivas manda productos finitos en $\mathscr{A}$ a coproductos finitos en $\mathscr{B}$ si el funtor $G_{op} := G \circ D_{\mathscr{A}^{op}}$ preserva coproductos finitos en $\mathscr{A}^{op}$.

Supongamos G es aditivo, entonces $G_{op} := G \circ D_{\mathscr{A}^{op}}$ es aditivo por el ejercicio 50. Así, por 1.10.2 G_{op} preserva coproductos finitos en $\mathscr{B}$.

Ahora, si suponemos que G manda productos finitos de $\mathscr{A}$ en coproductos finitos de $\mathscr{B}$ se tiene por definición que $G \circ D_{\mathscr{A}^{op}}$ preserva coproductos finitos en $\mathscr{A}^{op}$, entonces por 1.10.2 G_{op} es aditivo, así G es aditivo.

□