Ejercicios 16-31

Arruti, Sergio

Lema 1. Sea f un morfismo en $Sets$, entonces

a) $f : A \hookrightarrow B$ es un mono en $Sets$ si y sólo si f es inyectiva;

b) $f : A \twoheadrightarrow B$ es un epi en $Sets$ si y sólo si f es suprayectiva.

Demostración. $\boxed{a)}$ Notemos primeramente que una función vacía $\varnothing_C$, $C \in Sets$, es inyectiva por la vacuidad de su dominio. Más aún, es un mono en $Sets$, en efecto: si $g, h \in$ son tales que $\varnothing_C f = \varnothing_A g$, entonces necesariamente $D = \varnothing$ y así, dado que existe una única función de $\varnothing$ en $\varnothing$, $f = g$. Con lo cual la afirmación es válida para funciones vacía y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \neq \varnothing$ (y en consecuencia que $B \neq \varnothing$).
$\boxed{a) \implies}$ Sean $a, b \in A$ tales que $f(a) = f(b)$, entonces las funciones

$$\begin{aligned} g : A &\to A \\ x &\mapsto a, \\ h : A &\to A \\ x &\mapsto b, \end{aligned}$$

satisfacen que $fg = fh$, luego $g = h$ por ser f mono y por tanto $a = b$.
$\boxed{a) \impliedby}$ Supongamos que $g, h \in$ son tales que $fg = fh$. Si $A' = \varnothing$ entonces $g = \varnothing_A = h$; en caso contrario sea $a \in A'$, así

$$\begin{aligned} & f(g(a)) = fg(a) = fh(a) = f(h(a)) \\ \implies & g(a) = h(a), && f \text{ es inyectiva} \\ \implies & g = h. \end{aligned}$$

$\boxed{b)}$ Verificaremos primero que la función $\varnothing_\varnothing$ i.e. la única función cuyo dominio y contradominio es $\varnothing$ es epi y suprayectiva. Si $g, h \in$ son tales que $g\varnothing_\varnothing = h\varnothing_\varnothing$, entonces $g = \varnothing_Z = h$; por su parte la suprayectividad de $\varnothing_\varnothing$ se sigue por la vacuidad de su contradominio. Así, en adelante podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B \neq \varnothing$.
$\boxed{b) \implies}$ Notemos que necesariamente $A \neq \varnothing$, pues en caso contrario las apli-

caciones

$$\begin{aligned}\phi : B &\to \{0,1\}\\ x &\mapsto 0,\\ \psi : B &\to \{0,1\}\\ x &\mapsto 1,\end{aligned}$$

son funciones bien definidas, pues $B \neq \varnothing$, las cuales satisfacen que $\phi \neq \psi$ y sin embargo $\phi f = \varnothing_{\{0,1\}} = \psi f$, lo cual contradeciría que f es epi. Así $1_B|_{f(A)}$ no es una función vacía y más aún satisface que

$$\begin{aligned}&1_B|_{f(A)}\, f = f = 1_B f\\ \implies &1_B = 1_B|_{f(A)}\,, &&f \text{ es epi}\\ &\implies f(A) = B\\ &\implies f \text{ es suprayectiva.}\end{aligned}$$

$\boxed{b) \Longleftarrow}$ Sean $g, h \in Hom_{Sets}(B, C)$ tales que $gf = hf$ y $b \in B$. Como f es suprayectiva $\exists\ a \in A\ f(a) = b$, así

$$\begin{aligned}&g(b) = gf(a) = hf(a) = h(b)\\ \implies &g = h.\end{aligned}$$

$\square$

Ej 16. La categoría *Sets* tiene uniones.

Demostración. Sea $\{u_i : A_i \hookrightarrow A\}$ una familia de subobjetos de un conjunto A y $U := \bigcup_{i \in I} \Im(u_i)$. Si $I = \varnothing$ entonces $U = \varnothing$ y la función vacía $\varnothing_A : \varnothing \to A$ es un subobjeto de A que satisface por vacuidad que $\forall\ i \in I$ $u_i \leq \varnothing_A$. Resta verificar que $\varnothing_A$ satisface la propiedad universal de la unión, para lo cual por vacuidad basta con verificar que si $f \in Hom(Sets)$ y $\mu \in Mon_{Sets}(-, A)$, entonces $\varnothing_A$ es llevado a μ vía f. Si consideramos la función vacía $\varnothing_B : \varnothing \to B$, entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \varnothing_A \arrow[r, "\varnothing_B"] \arrow[d, "\varnothing_A"'] & B' \arrow[d, "\mu"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta en *Sets* puesto que $f\varnothing_A, \mu\varnothing_B \in Hom_{Sets}(\varnothing, B)$ y existe una única función de $\varnothing$ en B.
En adelante supondremos que $I \neq \varnothing$. Si $U = \varnothing$ entonces $\forall\ i \in I\ A_i = \varnothing$ y por lo tanto cada u_i coincide con la función vacía $\varnothing_A$. De modo que se satisface que $\forall\ i \in I\ u_i \leq \varnothing_A$ y en forma análoga al caso $I = \varnothing$ se verifica

que si $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ son tales que cada u_i es llevado a μ vía f, entonces $\varnothing_A$ es llevado a μ vía f, y así $\varnothing_A$ es una unión para la familia $\{u_i\}_{i \in I}$.
Finalmente si $U \neq \varnothing$ entonces necesariamente $\exists\ i \in I$ tal que $A_i \neq \varnothing$. Así consideremos inc la inclusión de U en A, la cual es un mono en $Sets$ y para cada $i \in I$ las funciones dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_i : A_i &\to U \\ a &\mapsto u_i\left(a\right), \end{aligned}$$

en caso que $A_i \neq \varnothing$, o bien $\gamma_i := \varnothing_U$ si $A_i = \varnothing$.
Así, si $A_i = \varnothing$, como $\varnothing_A$ es la única función de $\varnothing$ en A, entonces

$$u_i = \varnothing_A = inc\varnothing_U = inc\gamma_i.$$

Si ahora $A_i \neq \varnothing$, entonces

$$\begin{aligned} & u_i\left(a\right) = inc\gamma_i\left(a\right), && \forall\ a \in A_i \\ \implies & u_i = inc\gamma_i. \end{aligned}$$

Con lo cual se ha verificado que $\forall\ i \in I\ u_i \leq inc$. Supongamos ahora que $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ son funciones tales que cada u_i es llevado a μ vía f, es decir para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta en $Sets$

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\exists\ g_i"] \arrow[d, "u_i"'] & B' \arrow[d, "\mu"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} .$$

Notemos que para cada $y \in U\ \exists\ i \in I$ y $x \in A_i$ tales que $y = u_i\left(x\right)$, así consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} h : U &\to B' \\ u_i\left(x\right) &\mapsto g_i\left(x\right). \end{aligned}$$

Sea $y \in U$ con $i, j \in I$ y $x \in A_i, z \in A_j$ tales que $u_i\left(x\right) = y = u_j\left(z\right)$, entonces de la conmutatividad de los diagramas anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} \mu\left(g_j\left(z\right)\right) &= fu_j\left(b\right) = f\left(x\right) = f\left(u_i\left(x\right)\right) \\ &= fu_i\left(x\right) = \mu\left(g_i\left(x\right)\right). \end{aligned}$$

Lo anterior, en conjunto a que μ es inyectiva por ser un mono en $Sets$, garantiza que $g_j\left(z\right) = g_i\left(x\right)$ y así h está bien definida.
Sea $y \in U$, con $i \in I$ y $x \in A_i$ tales que $y = u_i\left(x\right)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} & finc\left(y\right) = f\left(y\right) = f\left(u_i\left(x\right)\right) = \mu g_i\left(x\right) = \mu\left(h\left(y\right)\right) \\ & \qquad\qquad = \mu h\left(y\right) \\ \implies & finc = \mu h. \end{aligned}$$

Con lo cual inc es llevado a μ vía f y por tanto es una unión para la familia $\{u_i\}_{i \in I}$. $\square$

Ej 17.

Ej 18.

Ej 19. Si $f : A \hookrightarrow B$ está en una categoría $\mathscr{C}$, entonces $f : A \hookrightarrow B$ es una imagen de f.

Demostración. Se tiene que f es un subobjeto y que $f = f1_A$. Si $g : C \hookrightarrow B$ es un subobjeto para el cual $\exists\ h : A \to C$ tal que $f = gh$, entonces $f \leq g$ y por tanto $Im(f) \simeq f$ en $Mon_{Sets}(-, B)$. $\square$

Ej 20. $Mod(R)$ y $Sets$ tienen imágenes epimórficas.

Demostración. Sea $f : A \to B$ en $Sets$. Si f es la función vacía $\varnothing_B$ entonces por el Lema 1 se tiene que f es mono y por tanto es una imagen para sí mismo. Así supongamos sin pérdida de generalidad que $A \neq \varnothing$. Luego $B \neq \varnothing$ y se tiene que $inc : f(A) \to B$ es una función no vacía e inyectiva, por tanto un mono en $Sets$, la cual satisface que, si

$$\begin{aligned} g : A &\to F(A) \\ a &\mapsto f(A), \end{aligned}$$

$f = incg$.
Ahora supongamos que $\mu : C \hookrightarrow B$ y $h : A \to C$ son tales que $f = \mu h$. Notemos que para cada $y \in f(A)\ \exists\ a \in A$ tal que $y = f(a)$, así consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} k : f(A) &\to C \\ f(a) &\mapsto h(a). \end{aligned}$$

Si $a, b \in A$ son tales que $x = f(a) = f(b)$, entonces

$$\begin{aligned} &\mu h(a) = f(a) = x = f(b) = \mu h(b) \\ \implies\ & h(a) = h(b), && \mu \text{ es mono} \end{aligned}$$

con lo cual k es una función bien definida y satisface que, dados $y \in f(A)$ y $x \in A$ tal que $y = f(x)$,

$$\begin{aligned} &\mu k(y) = \mu(h(x)) = f(x) = y = inc(y) \\ \implies\ & inc = \mu k. \end{aligned}$$

Con lo anterior se ha verificado que $Sets$ tiene imágenes, más aún, tiene imágenes epimórficas puesto que la función g así construida es suprayectiva

y por tanto epi.
Dado que todo R-módulo es en partícular un conjunto no vacío, en forma análoga a lo anterior se verifica que $Mod(R)$ tiene imágenes epimórficas, puesto que si ahora $f : A \to B$ en $Mod(R)$ entonces la inclusión de módulos es un morfismo de R-módulos, g también lo es al serlo f, y k lo es al serlo f y h.

$\square$

Ej 21.

Ej 22.

Ej 23. Sean $\mathscr{C}$ una categoría balanceada, con imágenes epimórficas y

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

en $\mathscr{C}$. Si $\mu : A' \hookrightarrow A$ en $\mathscr{C}$, entonces $g\left(f\left(A'\right)\right) = gf\left(A'\right)$ en $\overline{Mon_{\mathscr{C}}\left(-, C\right)}$.

Demostración. Dado que $\mathscr{C}$ tiene imágenes epimórficas existen subobjetos

$$\begin{aligned} \nu &: Im\left(f\mu\right) \hookrightarrow B, \\ \eta &: Im\left(g\nu\right) \hookrightarrow B, \\ \psi &: Im\left(\left(gf\right)\mu\right) \hookrightarrow B, \end{aligned}$$

que son imágenes respectivamente de $f\mu, g\nu$ y $\left(gf\right)\mu$, y existen epimorfismos $\alpha_1 : A' \twoheadrightarrow Im\left(f\mu\right)$ y $\alpha_2 : Im\left(f\mu\right) \twoheadrightarrow Im\left(g\nu\right)$ tales que

$$\begin{aligned} f\mu &= \nu\alpha_1, \\ g\nu &= \eta\alpha_2. \end{aligned} \tag{*}$$

Notemos que por ser ν imagen de $f\mu$ y subobjeto de B se tiene que $g\left(f\left(A'\right)\right) = g\left(Im\left(f\mu\right)\right) = Im\left(g\nu\right)$, mientras que $gf\left(A'\right) = Im\left(\left(gf\right)\mu\right)$. Así pues basta con verificar que η es una imagen para $\left(gf\right)\mu$, ya que en tal caso $Im\left(g\nu\right) \simeq Im\left(\left(gf\right)\mu\right)$ en $Mon_{\mathscr{C}}\left(-, C\right)$.
De (*) se tiene que

$$gf\left(\mu\right) = g\left(f\mu\right) = g\left(\nu\alpha_1\right) = \left(\eta\alpha_2\right)\alpha_1 = \eta\left(\alpha_2\alpha_1\right).$$

En la última igualdad η es un mono, mientras que $\alpha_2\alpha_1$ es un epi al serlo α_1 y α_2, de modo que al ser $\mathscr{C}$ balanceada (ver Proposición 1.4.3) se tiene que η es una imagen para $\left(gf\right)\mu$.

$\square$

Ej 24. Sea el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & B'' \arrow[dr, "\mu"] & \\
P \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & & B' \arrow[d, "\alpha"] \\
A \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}
$$

conmutativo en una categoría $\mathscr{C}$, con μ y α subobjetos. Si β_1 es una imagen inversa por f de α_1, entonces también lo es de $\alpha\mu$.

Demostración. Notemos que de la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que

$$
\begin{aligned}
(\alpha\mu)\, f' &= \alpha\,(\mu f') = \alpha\beta_2 \\
&= f\beta_1,
\end{aligned}
$$

i.e. el siguiente cuadrado conmuta

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B'' \arrow[d, "\alpha\mu"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd} . \tag{*}
$$

Sean $\gamma_1 : P' \to A$ y $\gamma_2 : P' \to B''$ tales que $f\gamma_1 = (\alpha\mu)\,\gamma_2 = \alpha\,(\mu\gamma_2)$. Como

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\alpha"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd} \tag{**}
$$

es un pull-back por ser β_1 imagen inversa por f de α, de la propiedad universal del pull-back se sigue que $\exists!\ \delta : P' \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "\mu\gamma_2"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_1"'] & & \\
 & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\alpha"] \\
 & A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd} .
$$

De modo que δ es tal que $\gamma_1 = \beta_1\delta$ y además

$$
\begin{aligned}
&(\alpha\mu)\,(f'\delta) = \alpha\,(\beta_2)\,\delta = \alpha\,(\mu\gamma_2) = (\alpha\mu)\,\gamma_2 \\
&\implies \gamma_2 = f'\delta. \qquad\qquad \alpha\mu \text{ es mono}
\end{aligned}
$$

Sea $\delta' : P' \to P$ en $\mathscr{C}$ tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "\delta'"] \arrow[drr, bend left, "\gamma_2"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B'' \arrow[d, "\alpha\mu"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

conmuta, luego δ' es tal que $\gamma_1 = \beta_1 \delta'$ y

$$\mu\gamma_2 = (\mu f')\,\delta' = \beta_2 \delta'.$$

Por lo tantto, aplicando la propiedad universal del pull-back a (**) se tiene que $\delta' = \delta$, con lo cual se tien que existe un único morfismo δ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "\gamma_2"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B'' \arrow[d, "\alpha\mu"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd},
$$

i.e. (*) es un pull-back y así se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 25.

Ej 26.

Ej 27. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero. Entonces $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \simeq 0$, si $I = \varnothing$.

Demostración. Afirmamos que en este caso el morfismo $0_{0,A}$ en $\mathscr{C}$ (el cual existe y es único por ser 0 un objeto cero de la categoría $\mathscr{C}$) es una unión para la familia de subobjetos $\mu_i : A_i \to A$. En efecto:
Notemos que $0_{A,0}0_{0,A}, 0_{0,A}0_{A,0}, Id_0 \in Hom_{\mathscr{C}}(0,0)$ y que $|Hom_{\mathscr{C}}(0,0)|$, luego $0_{A,0}0_{0,A} = Id_0 = 0_{0,A}0_{A,0}$ y por tanto μ es un iso en $\mathscr{C}$, así que en partícular es un subobjeto de A.
Sean $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ en $\mathscr{C}$, por ser $I = \varnothing$ basta con verificar que $0_{0,A}$ es llevado a μ vía f. Se tiene que

$$f 0_{0,A} = 0_{0,B} = \mu 0_{0,B'},$$

con lo cual el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_{0,B'}"] \arrow[d, "0_{0,A}"'] & B' \arrow[d, "\mu"] \\ a \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta y así se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 28. $Mod(R)$ es una categoría con objeto cero, en tanto que $Sets$ no lo es.

Demostración. $\boxed{Mod\,(R)}$ Sea R un anillo. Consideremos un conjunto de la forma $A = \{*\}$, i.e. un conjunto de un sólo elemento. Notemos que por medio de las operaciones

$$\begin{aligned} + : A \times A &\to A \\ (*, *) &\mapsto *, \\ \cdot : R \times A &\to R \\ (r, *) &\mapsto *, \end{aligned}$$

se tiene que $(A, +, \cdot) \in Mod\,(R)$.
Sea $M \in Mod\,(R)$. Como $\forall\ B \in Sets\ |Hom_{Sets}\,(B, A)| = 1$, y todo morfismo de $R-$módulos en partícular es una función, se tiene que $\left|Hom_{Mod(R)}\,(M, A)\right| \leq 1$. Así pues para verificar que A es objeto inicial en $Mod\,(R)$ resta verificar que existe un morfismo de $R-$módulos de M en A. Sean $r \in R$, $m, n \in M$ y

$$\begin{aligned} f_M : M &\to A \\ m &\mapsto *, \end{aligned}$$

entonces $f\,(rm + n) = * = * + * = r \cdot * + * = rf\,(m) + f\,(n)$, y así $f_M \in Hom_{Mod(R)}\,(M, A)$.
Por otro lado, si 0_M es el neutro aditivo de M, entonces la función

$$\begin{aligned} g_M : A &\to M \\ * &\mapsto 0_M \end{aligned}$$

satisface $g_M \in Hom_{Mod(R)}\,(A, M)$. Más aún, si $h \in Hom_{Mod(R)}\,(A, M)$, entonces necesariamente h es un morfismo de grupos y así

$$\begin{aligned} & h\,(0_A) = h\,(*) = 0_M = g_M\,(*) \\ \implies\ & h = g_M. \qquad\qquad\qquad\qquad A = \{*\} \end{aligned}$$

Por lo tanto A también es un objeto final y así es un objeto cero para $Mod\,(R)$.

$\boxed{Sets}$ Supongamos que existe un conjunto A tal qu A es objeto cero de $Sets$. Luego $\exists!\ f \in Hom_{Sets}(A, \varnothing)$, y así necesariamente $A = \varnothing$, lo cual es absurdo ya que $\varnothing$ no es un objeto final en $Sets$, puesto que si $B \neq \varnothing$ no existen funciones cuyo dominio sea B y contradominio sea $\varnothing$.

$\square$

Ej 29.

Ej 30.

Ej 31. $Sets$ y $Mod(R)$ son categorías localmente pequeñas.

Demostración. Sea $A \in Sets$. Afirmamos que si $\varphi : B \hookrightarrow A$, $\psi : C \hookrightarrow A \in Mon_{Sets}(-, A)$ entonces

$$\varphi \simeq \psi \text{ en } Mon_{Sets}(-, A) \iff Im(\varphi) = Im(\psi). \tag{A}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Se tiene que $\psi \leq \varphi$ y $\varphi \leq \psi$, luego $\exists\ g : C \to B$ y $h : B \to C$ tales que

$$\psi = \varphi g, \tag{*}$$
$$\varphi = \psi g \tag{**}$$

De (*) se sigue que

$$\psi(C) = \varphi(g(C)) \subseteq \varphi(B)$$
$$\Longrightarrow Im(\psi) \subseteq Im(\varphi).$$

Análogamente, de (**) se obtiene que $Im(\varphi) \subseteq Im(\psi)$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Notemos que si $B = \varnothing$, entonces $Im(\psi) = Im(\varphi) = \varnothing$, y por lo tanto $C = \varnothing$, con lo cual $\varphi = \varnothing_A = \psi$; similarmente en caso que $C = \varnothing$. Por lo tanto en adelante supondremos que $B \neq \varnothing \neq C$.
Afirmamos que $\forall\ c \in C\ \exists!\ b_c \in B$ tal que $\psi(c) = \varphi(b)$. En efecto la existencia se sigue de que en partícular $Im(\psi) \subseteq Im(\varphi)$, mientras que la unicidad se sigue del hecho que φ es un mono y por tanto inyectiva (ver Lema 1). Lo previamente demostrado garantiza que la aplicación

$$g : C \to B$$
$$c \mapsto b_C$$

está bien definida y satisface que $\psi = \varphi g$. En forma análoga, empleando ahora que $Im(\psi) \supseteq Im(\varphi)$ y el que ψ es un mono en $Sets$, se verifica que $\exists\ h : B \to C$ tal que $\varphi = \psi h$ y así $\psi \simeq \varphi$ en $Mon_{Sets}(-, A)$.
La caracterización dada por (A) garantiza que la aplicación dada por

$$f : \overline{Mon_{Sets}(-, A)} \to \mathscr{P}(A)$$
$$[\varphi] \mapsto Im(\phi).$$

está bien definida y es inyectiva. Más aún, f es biyectiva puesto que si $D \subseteq A$ e i es la inclusión conjuntista de B en A, entonces $i \in \overline{Mon_{Sets}(-, A)}$. La inyectividad de f garantiza que la clase $\overline{Mon_{Sets}(-, A)}$ es un conjunto, puesto que $\mathscr{P}(A)$ lo es. Por tanto $Sets$ es localmente pequeña.

Por su parte, el que $Mod(R)$ sea localmente pequeña se sigue de que si $M \in Mod(R)$, entonces

$$\begin{aligned} k_M : \overline{Mon_{Mod(R)}(-, M)} &\to \overline{Mon_{Mod(R)}(-, M)} \\ [\varphi] &\mapsto [\varphi] \end{aligned}$$

está bien definida y es inyectiva.

$\square$