Ejercicios 32-42

Luis Gerardo Arruti Sebastian
Sergio Rosado Zúñiga

Ej 32. $Mod\left(R\right)$ es normal y conormal.

Demostración. Se tiene que, por el Ej. 28, $Mod\left(R\right)$ tiene objeto cero y más aún, que $\forall\ M, N \in Mod\left(R\right)$ el morfismo 0 de M en N está dado por

$$\begin{aligned} 0_{M,N} : M &\to N \\ m &\mapsto 0_N, \end{aligned}$$

con 0_N el neutro aditivo de N. En vista de lo anterior, en lo sucesivo prescindiremos de los subíndices en la notación de los morfismos cero.

$\boxed{\text{Normal}}$ Sean $\alpha : M \to N$ en $Mod\left(R\right)$, $P := {}^{N}\!\diagup_{Im\left(\alpha\right)}$ y β el epi canónico dado por

$$\begin{aligned} \beta : N &\to P \\ n &\mapsto n + In\left(\alpha\right). \end{aligned}$$

Afirmamos que α es un kernel para β. En efecto:
Dado que $Im\left(\alpha\right)$ es el neutro aditivo de P y $Im\left(\alpha\right) = \left\{\alpha\left(m\right) \mid m \in M\right\}$, se tiene que $\beta\alpha = 0$.
Supongamos ahora que $\alpha' : M' \to N$ en $Mod\left(R\right)$ es tal que $\beta\alpha' = 0$, así

$$\begin{aligned} \beta\left(\alpha'\left(a\right)\right) &= Im\left(\alpha\right) && \forall\ a \in M' \\ \implies Im\left(\alpha'\right) &\subseteq Im\left(\alpha\right) \end{aligned}$$

De lo cual se sigue que $\forall\ a \in M' \exists\ b_a \in M$ tal que $\alpha\left(b_a\right) = \alpha'\left(a\right)$. Más aún, como α es un monomorfismo se tiene que tal b_a es único, y por lo tanto la siguiente aplicación es una función bien definida

$$\begin{aligned} \gamma : M' &\to M \\ a &\mapsto b_a. \end{aligned}$$

Sean $r \in R$, $a_1, a_2 \in M'$. Así

$$\begin{aligned} \alpha\left(b_{ra_1 - a_2}\right) &= \alpha'\left(ra_1 - a_2\right) = r\alpha'\left(a_1\right) - \alpha\left(a_2\right) \\ &= r\alpha\left(b_{a_1}\right) - \alpha\left(b_{a_2}\right) = \alpha\left(rb_{a_1} - b_{a_2}\right), \\ \implies b_{ra_1 - a_2} &= rb_{a_1} - b_{a_2}, && \alpha \text{ es mono} \\ \implies \gamma\left(ra_1 - a_2\right) &= r\gamma\left(a_1\right) - \gamma\left(a_2\right). \end{aligned}$$

Con lo cual γ es un morfismo de R-módulos que satisface que, si $a \in M'$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha\gamma(a) &= \alpha(b_a) = \alpha'(a), \\ \therefore\ \alpha\gamma &= \alpha'. \end{aligned}$$

Más aún, puesto que α es mono, γ es el único morfismo de R-módulos de M' en M que satisface lo anterior, con lo cual se ha verificado la afirmación.

$\boxed{\text{Conormal}}$ Ahora supongamos que $\alpha : M \to N$ es epi en $Mod(R)$ y denotemos por β al morfismo inclusión de $Ker(\alpha)$ en M. Afirmamos que α es un cokernel para β, en efecto:
Como $Ker(\alpha) = \{m \in M \mid \alpha(m) = 0_N\}$, entonces $\alpha\beta = 0$. Sea $\alpha' : M \to N'$ en $Mod(R)$ tal que $\alpha'\beta = 0$, así

$$Ker(\alpha') \supseteq Im(\beta) = Ker(\alpha).$$

Como α es epi se tiene que $N = Im(\alpha)$. Así, consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} &\gamma : N \to N' \\ &\alpha(m) \mapsto \alpha'(m), \end{aligned}$$

la cual es una función bien definida, puesto que si $m, o \in M$ son tales que $\alpha(m) = \alpha(o)$, entonces

$$\begin{aligned} & m - o \in Ker(\alpha) \subseteq Ker(\alpha') \\ \implies & \alpha'(m) = \alpha'(o). \end{aligned}$$

Más aún, es un morfismo de R-módulos, pues α y α' lo son, que satisface que $\gamma\alpha = \alpha'$. Finalmente γ es el único morfismo de R-módulos que satisface la igualdad anterior dado que α es epi.

□

Ej 33. Pruebe que $Mod(R)$ es colocalmente pequeña.

Demostración. Este ejercicio es consecuencia de varios resultados pasados: Dado un anillo R se cumple que:

- $Mod(R)$ tiene kerneles y Cokerneles (ejercicios 29 y 30 respectivamente).
- $Mod(R)$ es localmente pequeña (ejercicio 31).
- $Mod(R)$ es normal y conormal (ejercicio 32).

Entonces por el teorema 1.6.3 $Mod(R)$ es colocalmente pequeña. □

Ej 34. Sean $\mathscr{C}$ una categoría exacta y

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagrama en $\mathscr{C}$ con filas exactas. Pruebe que $\exists f : A \to A'$ tal que $\gamma\alpha = \alpha' f \iff \exists g : C \to C'$ tal que $\beta'\gamma = g\beta$. Mas aún, dado uno de ellos ("f" o "g") el otro queda deteminado univocamente.

Demostración. Supongamos tenemos el diagrama de las hipotesis sobre una categoría exacta $\mathscr{C}$. Como α' es mono y la sucesión es exacta, se tiene que $\alpha' \simeq Im(\alpha') \simeq Ker(\beta')$.

Si existe $g : C \to C'$ tal que $\beta'\gamma = g\beta$, entonces $\beta'(\gamma\alpha) = (\beta'\gamma)\alpha = g\beta\alpha$ $= g0 = 0$, por la pripiedad universal del $Ker(\beta')$ existe una única $f : A \to A'$ tal que $\alpha' f = \gamma\alpha$.

Ahora, como $\mathscr{C}$ es exacta, por 1.7.3 se tiene el siguiente diagrama con renglones exactos en $\mathscr{C}^{op}$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "(\beta')^{op}"] & B' \arrow[r, "(\alpha')^{op}"] \arrow[d, "\gamma^{op}"] & A' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\beta^{op}"] & B \arrow[r, "\alpha^{op}"] & A \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Si existiera $f : A \to A'$ tal que $\alpha' f = \gamma\alpha$ entonces existe $f^{op} \in Mor(\mathscr{C}^{op})$ tal que $\alpha^{op}\gamma^{op} = f^{op}(\alpha')^{op}$. Así, como $\mathscr{C}^{op}$ es exacta y como se tienen las hipótesis de la primera parte de la demostración, entonces existe una única $g^{op} : C' \to C$ tal que $\beta^{op}g^{op} = \gamma^{op}(\beta')^{op} = (\beta'\gamma)^{op}$.

Por lo tanto existe una única $g : C \to C'$ tal que $(\beta'\gamma)^{op} = \beta^{op}g^{op} = (g\beta)^{op}$ por lo tanto $\beta'\gamma = g\beta$.

$\square$

Ej 35. Construiremos la noción dual a la intersección de una familia de subobjetos.

Intersección: $\mu : B \to A$ es una intersección para $\{\mu_i : A_i \hookrightarrow A\}$ en $\mathscr{C}$ si

IntI) $\forall\ i \in I\ \exists\ \lambda_i : B \to A_i$ tal que $\mu = \mu_i\lambda_i$;

IntII) si $\nu : C \to A$ satisface que $\forall\ i \in I\ \exists\ \eta_i : C \to A_i$ tal que $\nu = \mu_i\eta_i$, entonces $\exists\ \eta : C \to B$ tal que $\nu = \mu\eta$.

Intersección$^{\mathbf{op}}$: $\mu^{op} : B \to A$ es una intersección para $\{{\mu_i}^{op} : A_i \hookrightarrow A\}$ en $\mathscr{C}$ si

Int$^{\mathrm{op}}$I) $\forall\ i \in I\ \exists\ \lambda_i{}^{op} : B \to A_i$ tal que $\mu^{op} = \mu_i{}^{op}\lambda_i{}^{op}$;

Int$^{\mathrm{op}}$II) si $\nu^{op} : C \to A$ satisface que $\forall\ i \in I\ \exists\ \eta_i{}^{op} : C \to A_i$ tal que $\nu^{op} = \mu_i{}^{op}\eta_i{}^{op}$, entonces $\exists\ \eta^{op} : C \to B$ tal que $\nu^{op} = \mu^{op}\eta^{op}$.

Así, aplicando el funtor $D_{\mathscr{C}^{op}}$ a las flechas que aparecen en lo anterior, y sabiendo que el dual de mono es epi, se llega a la siguiente definición **Intersección*:**

Definición. $\beta : A \to B$ es una **cointersección** para $\{\beta_i : A \twoheadrightarrow A_i\}$ en $\mathscr{C}$ si

CointI) $\forall\ i \in I\ \exists\ \delta_i : A_i \to B$ tal que $\beta = \delta_i\beta_i$;

CointII) si $\omega : A \to C$ satisface que $\forall\ i \in I\ \exists\ \gamma_i : A_i \to C$ tal que $\omega = \gamma_i\beta_i$, entonces $\exists\ \gamma : B \to C$ tal que $\omega = \gamma\beta$.

Ej 36. Sean $\mathscr{C}$ una categoría exacta y $\theta : A \twoheadrightarrow A'$, $\{\alpha_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$ y, $\forall\ i \in I$, $\beta_i := coker\,(\alpha_i)$, en $\mathscr{C}$. Si θ es una cointersección para $\{\beta_i\}_{i\in I}$, entonces $ker\,(\theta)$ es una unión para $\{\alpha_i\}_{i\in I}$.

Demostración. Denotemos por k_θ un kernel de θ. Se tiene que k_θ es un subobjeto de A.

$\boxed{I = \varnothing}$ En este caso, por la vacuidad de I, basta con verificar que si $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$, entonces θ es llevado a μ vía f. Notemos que por vacuidad f satisface la condición CointI) para la familia $\{\beta_i\}_{i\in I}$, y así por la propiedad universal de la cointersección, CointII), $\exists\ \gamma : A' \to B$ tal que $f = \gamma\theta$. Con lo cual $fk_\theta = f\gamma\,(\theta k_\theta) = 0$, y por tanto si denotamos por ρ al morfismo 0 de A en B' se tiene que

$$fk_\theta = 0 = \rho\mu,$$

i.e. θ es llevado a μ vía f.

$\boxed{I \neq \varnothing}$ Dado que θ es una cointersección para $\{\beta_i\}_{i\in I}$ se tiene en particular que $\forall\ i \in I\ \exists\ \eta_i : {}^{A}\!/_{A_i} \to A'$ tal que $\theta = \eta_i\beta_i$, así

$$\theta\alpha_i = (\eta_i\beta_i)\,\alpha_i = \eta_i\,(\beta_i\alpha_i) = 0, \qquad \beta_i = coker\,(\alpha_i)$$

Luego para cada $i \in I$, por la propiedad universal del kernel, se tiene que $\exists!\ \lambda_i : A_i \to Ker\,(\theta)$ tal que $\alpha_i = k_\theta\lambda_i$. Por lo tanto $\forall\ i \in I\ \alpha_i \leq k_\theta$.

Ahora, sean $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ en $\mathscr{C}$ tales que α_i es llevado a μ vía f, $\forall\ i \in I$, i.e., tales que $\forall\ i \in I\ \exists\ \rho_i : A_i \to B'$ de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & B' \arrow[d, "\mu"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Si c_μ es un cokernel para μ, entonces por lo anterior se tiene que

$$(c_\mu f)\,\alpha_i = (c_\mu \mu)\,\rho_i = 0, \qquad\qquad \forall\; i \in I$$

Luego, aplicando para cada $i \in I$ la propiedad universal del cokernel, se tiene que $\forall\; i \in I\; \exists!\; \chi_i : {}^{A}\!/_{A_i} \to {}^{B}\!/_{B'}$ tal que

$$c_\mu f = \chi_i coker\,(\mu_i) = \chi_i \beta_i.$$

Esto último, por la propiedad universal de la cointersección, garantiza que $\exists\; \chi : A' \to {}^{B}\!/_{B'}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta"'] & B \arrow[d, "c_\mu"] \\ A' \arrow[r, "\chi"'] & {}^{B}\!/_{B'} \end{tikzcd} \qquad (**)$$

De (*) y (**) se sigue que

$$\begin{aligned} c_\mu\,(f k_\theta) &= \chi\,(\theta k_\theta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual, en conjunto a que

$$\mu \simeq Im\,(\mu) \simeq Ker\,(Coker\,(\mu)) \simeq Ker\,(c_\mu)\,, \qquad \text{en } Mon_{\mathscr{C}}\,(-, B)$$

(pues $\mathscr{C}$ es exacta y μ es mono) garantiza que por medio de la propiedad universal del kernel $\exists!\; \rho : Ker\,(\theta) \to B'$ tal que $f k_\theta = \rho\mu$, i.e. el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Ker\,(\theta) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "k_\theta"'] & B' \arrow[d, "\mu"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

y así se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 37. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$. Pruebe que si $I = \emptyset$, el producto de esa familia (si es que existe) es un objeto final en $\mathscr{C}$.

Notación: En una categoría $\mathscr{C}$ con objeto cero, para cada $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$, se define la familia de morfismos $\delta_i^A := \{\delta_{ij}^A : A_i \to A_j\}_{(i,j)\in I^2}$ en $\mathscr{C}$

$$\delta_{i,j}^A := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1_{A_j} & \text{si} \quad i = j\,. \end{cases}$$

Demostración. Como $I = \emptyset$ por vacuidad se tiene que para todo $C \in \mathscr{C}$, se tiene una familia $\{\alpha_i : C \to A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$. Entonces (puesto que el producto existe) existe una única $\alpha : C \to P$ tal que $\pi_i \alpha = \alpha_i \quad \forall i \in I$, donde π_i son los morfismos que cumplen la propiedad universal del producto. Si existiera otro morfismo $\gamma : C \to P$ éste cumpliría por vacuidad que $\pi_i \gamma = \alpha_i \quad \forall i \in I$, y como existe un único morfismo con esta propiedad, tenemos que para cada objeto $C \in \mathscr{C} \quad \left|\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, P)\right| = 1$ por lo que P es objeto final. $\square$

Ej 38. Pruebe que, $\forall \{A_i\}_{i\in I}$ en Sets, el producto de conjuntos (cartesiano) es el categórico.

Demostración. Primero se mostrará el caso en que $I \neq \emptyset$ y $A_j \neq \emptyset \quad \forall j \in J$, definimos $P = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i\}$ y $\{\pi_i : P \to A_i\}_{i\in I}$ las funciones tales que para cada

$$x : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, \qquad \pi_j(x) = x(j) \in A_j \quad \forall j \in I.$$

Observemos primero que si $Q = \emptyset$ entonces α_i es la función vacia para cada $i \in I$, entonces tomando $\alpha : Q \to P$ como la función vacia, se tiene la propiedad universal del producto en P. De la misma forma, si alguna $\alpha_j = \emptyset$ para alguna $i \in I$, entonces $Q = \emptyset$ y se repite el argumento anterior.

Supongamos entoces que existe $Q \in Sets$ con $Q \neq \emptyset$ tal que existe la familia $\{\alpha_i : Q \to A_i\}_{i\in I}$ en $Sets$, como $A_j \neq \emptyset \quad \forall j \in I$ entonces $\alpha_i \neq \emptyset \quad \forall i \in I$, además como π_i es suprayectiva para toda $i \in I$, se tiene que para cada $i \in I$ y $\forall q \in Q$, $\alpha_i(q) = \pi_i(r_q)$ para algún $r_q \in P$. Así definimos $\alpha : Q \to P$ como $\alpha(q) = r_q$.

Se afirma que α está bien definida.
En efecto, si r_q y s_q son elementos en P tales que $\pi_i(r_q) = \pi_i(s_q) = q \quad \forall i \in I$, entonces $r_q(i) = s_q(i) \quad \forall i \in I$ pero $r_q, s_q : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$, entonces $r_q = s_q$. Mas aún, $\pi_i \alpha(q) = \pi_i(r_q) = \alpha_i(q)$.

Supongamos que existe $\beta : Q \to P$ tal que $\pi_i \beta = \alpha_i \quad \forall i \in I$. Por definición, para toda $q \in Q$, $\beta(q) \in P$, es decir, $\beta(q)$ es una función con dominio I y contradominio $\bigcup_{i\in I} A_i$. Así, para toda $i \in I$

$$\begin{aligned}(\alpha(q))(i) &= \pi_i(\alpha(q))\\ &= \alpha_i(q)\\ &= \pi_i(\beta(q))\\ &= \beta(q)(i).\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la unicidad.

Supongamos ahora que $A_j = \emptyset$ para alguna $j \in I$. Se tiene entonces que el producto cartesiano de la familia es $\varnothing$, pues no existe una función $u : I \to \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ tal que $u(j) \in A_j$. Así para cada $i \in I$ denotemos por π_i a la función vacía de $\varnothing$ en A_i. Sean $Q \in Sets$ y $\{\alpha_i : Q \to A_i\}_{i\in I}$ en $Sets$, en partícular se tendría que existe una función de Q en $A_j = \varnothing$ y por tanto necesariamente $Q = \varnothing$. Así, $\forall\ i \in I$, $\alpha_i = \pi_i = \pi_i 1_{\varnothing}$, y más aún la función identidad $1_{\varnothing} : \varnothing \to \varnothing$ es la única que satisface lo anterior puesto que es la única función en $Hom_{Sets}(\varnothing, \varnothing)$. Con lo cual se tiene que $\varnothing$ en conjunto a la familia $\{\pi_i\}_{i\in I}$ es un producto categórico para $\{A_i\}_{i\in I}$.

Por último se mostrará el caso en que $I = \emptyset$.

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Sea P un conjunto con un único elemento $*$ y $\{\pi_i : P \to A_i\}_{i\in I}$ una familia vacia de funciones. Observamos que, para toda $A \in Sets$ se tiene que: Si $A = \emptyset$, existe $\varphi : A \to P$ la función vacia y esta es única.
Si $A \neq \emptyset$ existe $\varphi : A \to P$ la función constante, donde $\varphi(x) = *$, esta es única, pues si $f : A \to P$ es función, para toda $r \in A$ se tiene que $f(a) \in P$, por lo que $f(a) = *$. Así φ es única.

Ahora, sea $Q \in Sets$ y $\{\alpha_i : Q \to A_i\}_{i\in I}$ en $Sets$, por lo anterior existe una única $\varphi : Q \to P$ y es tal que $\forall i \in I\ \pi_i\alpha = \alpha_i$ (Como I es vacio esta propiedad se cumple por vacuidad). Así P con la familia $\{\pi_i : P \to A_i\}_{i\in I}$ es un producto en $Sets$.

Ahora, el producto cartesiano de $\prod\limits_{i\in I} X_i = \{g : I \to \bigcup\limits_{i\in I} X_i \mid \forall i \in I \quad g(i) \in X_i\}$, si I es vacio, la única $g : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ es la función vacia $f_\emptyset$, por lo que $\prod\limits_{i\in I} X_i = \{f_\emptyset : \emptyset \to \emptyset\} = \{\emptyset\}$, el cual es un conjunto con un único elemento.

$\square$

Ej 39. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$. Si $I = \varnothing$ y dicha familia admite un coproducto, entonces este es un objeto inicial en $\mathscr{C}$.

Demostración. Se tiene que, por definición, dada una familia de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$, un objeto C en conjunto a una familia de morfismos $\{\mu_i : A_i \to C\}$ es un coproducto para $\{A_i\}_{i\in I}$ si $\forall\ B \in$ y $\forall\ \{\beta_i : A_i \to B\}\ \exists!\ \alpha : C \to B$ tal que $\beta_i = \alpha\mu_i$. De modo que si $I = \varnothing$ lo anterior se reduce a que $\forall\ B \in \mathscr{C}$ existe un único morfismo $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(C, B)$, i.e. C es un objeto

inicial en $\mathscr{C}$.
Notemos que, más aún, si C es un objeto inicial entonces C en conjunto una familia vacía de morfismos es un coproducto para cualquier familia vacía de objetos en $\mathscr{C}$.

$\square$

Ej 40. Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $C \in \mathscr{C}$ y $\{\mu_i : A_i \to C\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$. C y $\{\mu_i : A_i \to C\}_{i\in I}$ es un coproducto para $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$ si y sólo si C y $\{\mu_i{}^{op} : C \to A_i\}_{i\in I}$ es un producto para $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}^{op}$.

Demostración. Si $I = \varnothing$ la equivalencia se sigue de los ejercicios 37 y 39, y que $A \in \mathscr{C}$ es un objeto inicial si y sólo si $A \in \mathscr{C}^{op}$ es un objeto final. En adelante supondremos que $I \neq \varnothing$.

Para la necesidad comencemos notando que C también es un objeto de $\mathscr{C}^{op}$. Sean A y $\{\gamma_i^{op} : A \to A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}^{op}$, luego A es un objeto de $\mathscr{C}$ y $\{\gamma_i : A_i \to A\}$ es una familia de morfismos en $\mathscr{C}$, con lo cual por la propiedad universal del coproducto $\exists!\ \alpha : C \to A$ tal que $\forall\ i \in I\ \gamma_i = \alpha\mu_i$ en $\mathscr{C}$. De modo que α^{op} satisface que $\alpha^{op} \in Hom_{\mathscr{C}^{op}}(A, C)$ y $\forall\ i \in I$ $\gamma_i^{op} = \mu_i{}^{op}\alpha^{op}$. Finalmente, si suponemos que $\beta^{op} : A \to C$ satisface que $\forall\ i \in I\ \gamma_i^{op} = \mu_i{}^{op}\beta^{op}$, entonces $\beta \in Hom_{\mathscr{C}}(C, A)$ y $\forall\ i \in I\ \gamma = \beta\mu_i$. De esto último y la unicidad de α se sigue que $\beta = \alpha$ en $\mathscr{C}$, y así $\beta^{op} = \alpha^{op}$ en $\mathscr{C}^{op}$, con lo cual se tiene lo dseeado.

La suficiencia se verifica en forma análoga, puesto que tomar una familia de morfismos en la categoría $\mathscr{C}$ induce una familia de morfismos en $\mathscr{C}^{op}$, empleando ahora la propiedad universal del producto.

$\square$

Ej 41. Pruebe que $Mod(R)$ tiene productos y coproductos.

Demostración. Por los ejercicios 37 y 39, se tiene que si el producto y el coproducto existen, en el caso de familias no vacias, entonces estos deben ser un objeto inicial y un objeto final respectivamente, los cuales para $Mod(R)$ existen y son el objeto cero.

Afirmamos entonces que, si $I = \emptyset$, $CP = \{0_R\}$ junto a $\{\pi_i : CP \to A_i\}_{i\in I}$ es el producto de $\{A_i\}_{i\in I}$ y junto a $\{\mu_i : A_i \to CP\}_{i\in I}$ es el coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$ en $Mod(R)$, donde π_i y μ_i son morfismos cero.

Sea $Q \in Mod(R)$ entonces $\varphi : Q \to CP$ y $\psi : CP \to Q$ dadas por $\varphi(q) = 0_R$ y $\psi(0_R) = 0_Q$ son R-morfismos de módulos, mas aún, son únicos.

En particular, si $\{\alpha_i : Q \to A_i\}_{i\in I}$ y $\{\beta : A_i \to Q\}$ son familias de morfismos en $Mod(R)$, por vacuidad de I se cumple que $\pi_i\varphi = \eta_i$ y

$\psi\mu_i = \beta_i \quad \forall i \in I$. Por lo tanto CP es producto y coproducto de $\{A_i\}$.

Consideremos $I \neq \emptyset$ un conjunto, y a $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos. Veamos que existe el producto.
Sea P el producto cartesiano de conjuntos, es decir, $P = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i\}$ y sean $\{\pi_i : P \to A_i\}_{i\in I}$ las funciones tales que para cada $x : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, \quad \pi_j(x) = x(j) \in A_j \quad \forall j \in I.$

Por el ejercicio 38 sabemos que π_i está bien definida para cada $i \in I$, veamos que es morfismo. Sean $r \in R$ y $a, b \in P$ (se dará por hecho que P es un R-módulo), entonces

$$\pi_i(ra + b) = (ra + b)(i) = ra(i) + b(i) = r\pi_i(a) + \pi_i(b).$$

Por lo tanto para toda $i \in I$, $\pi_i \in Mor(Mod(R))$.

Ahora, puesto que todo morfismo de R- módulos es función, e $I \neq \emptyset$, por el ejercicio 38 si $Q \in Mod(R)$ es tal que existe una familia
$\{\alpha_i : Q \to A_i\}$ en $Mod(R)$, entonces existe una única función $\alpha : Q \to P$ tal que $\pi_i\alpha = \alpha_i \quad \forall i \in I$ definida como $\alpha(q) = r_q$ con $q \in Q$ y $r_q \in P$ tales que $\pi_i(r_q) = \alpha_i(q)$.

Esta función está bien definida, solo es necesario probar que es morfismo de R-módulos. Sean $s \in R$, y $a, b \in Q$, entonces, como π_i es morfismo para cada $i \in I$, se tiene que si $(sr_a + r_b) \in P$ se cumple que

$$\pi_i(sr_a + r_b) = s\pi_i(r_a) + \pi_i(r_b) = s\alpha_i(a) + \alpha_i(b) = \alpha_i(sa + b).$$

Por lo tanto $r_{sa+b} = sr_a + r_b$, y así $\alpha(sa + b) = s\alpha(a) + \alpha(b)$, es decir, α es morfismo y en consecuencia P es el producto
categórico.

Veamos que existe el coproducto para $I \neq \emptyset$. Se afirma que $\sum_{i\in I} A_i \in Mod(R)$ junto con la familia $\{\mu_i : A_i \to \sum_{i\in I} A_i\}_{i\in I}$ donde $\mu_i(a) = a$, "la inclusión natural", son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$.

Sean B y $\{\beta_i : A_i \to B\}_{i\in I}$ una familia de morfismos. Como $I \neq \emptyset$ y A_i, B son módulos para toda $i \in I$, β_i no puede ser la función vacia para ninguna $i \in I$. Así, podemos tomar $x \in \sum_{i\in I} A_i$, es decir, $x = x_{i_1} + x_{i_2} \ldots + x_{i_n}$ para alguna $n \in \mathbb{N}, \quad i_k \in I$ y $x_{i_k} \in A_{i_k} \quad \forall k \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

Definimos $\beta : \sum_{i\in I} A_i \longrightarrow B$ como $\beta(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{i_k}(x_{i_k})$.

Como β_{i_k} es morfismo $\forall i_k \in I$ entonces β es morfismo de R-módulos. Además, $\forall i \in I$, si $x \in A_i$, se tiene que $\beta\mu_i(x) = \beta(x) = \beta_i(x)$, por lo que $\beta\mu_i = \beta_i \quad \forall i \in I$.

Mas aún, si $\gamma : \sum_{i\in I} A_i \longrightarrow B$ es un morfismo tal que $\gamma\mu_i = \beta_i \quad \forall i \in I$, entonces, si $x \in \sum_{i\in I} A_i$ (y usando la descripción de la "x"que usamos anteriormente),

$$\begin{aligned}
\gamma(x) = \gamma\left(\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \gamma(x_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \gamma\mu_{i_k}(x_{i_k}) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{i_k}(x_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \beta\mu_{i_k}(x_{i_k}) = \sum_{k=1}^{n} \beta(x_{i_k}) \\
&= \beta\sum_{k=1}^{n}(x_{i_k}) = \beta(x).
\end{aligned}$$

Por lo que β es única, y así $\sum_{i\in I} A_i$ es un coproducto. □

Ej 42. Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $\left\{\mu_i : A_i \to \coprod_{i\in I} A_i\right\}$ un coproducto en $\mathscr{C}$, $C \in \mathscr{C}$ y $\{\nu_i : A_i \to C\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) C y $\{\nu_i : A_i \to C\}_{i\in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$;

b) $\exists\ \varphi : \coprod_{i\in I} A_i \tilde{\to} C$ tal que $\varphi\mu_i = \nu_i \quad \forall\ i \in I$.

Demostración. Supongamos C y $\{\nu_i : A_i \to C\}_{i\in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$ entonces, como $\coprod_{i\in I} A_i$ es un coproducto, existe una única

$\alpha : \coprod_{i\in I} A_i \longrightarrow C$ tal que $\alpha\mu_i = \nu_i \quad i \in I$.

De la misma forma, como $\{\nu_i : A_i \to C\}_{i\in I}$ es un coproducto para $\{A_i\}_{i\in I}$, existe un único $\beta : C \to \coprod_{i\in I} A_i$ tal que $\beta\nu_i = \mu_i \quad \forall i \in I$.

Notemos ahora que $\beta\alpha : \coprod_{i\in I} A_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} A_i$ es tal que

$$(\beta\alpha)\mu_i = \beta(\alpha\mu_i) = \beta\nu_i = \mu_i.$$

Pero $\coprod_{i\in I} A_i$ es coproducto, entonces sólo existe un morfismo con dicha propiedad, el cual, en este caso, sería $1_{\coprod A_i}$. Por lo tanto $\beta\alpha = 1_{\coprod A_i}$. Análogamente $\alpha\beta : C \to C$ es tal que

$$(\alpha\beta)\nu_i = \alpha(\beta\nu_i) = \alpha\mu_i = \nu_i$$

y como C es coproducto $\alpha\beta = 1_C$. Así $\alpha : \coprod_{i\in I} A_i \to C$ es un isomorfismo tal que $\mu_i = \nu_i \quad \forall i \in I$.

Supongamos ahora que existe $\varphi : \coprod_{i\in I} A_i \tilde{\to} C$ tal que $\varphi\mu_i = \nu_i \quad \forall i \in I$.

Sea $M \in \mathscr{C}$ y $\{\eta_i : A_i \to M\}_{i\in I}$ una famiilia en $\mathscr{C}$. Como $\coprod_{i\in I} A_i$ es coproducto existe una única $\alpha : \coprod_{i\in I} A_i \longrightarrow M$ tal que $\alpha\mu_i = \eta_i \quad \forall i \in I$.
Tomando $\beta := \alpha\varphi^{-1} : C \to M$ se tiene que

$$\beta\nu_i = \alpha(\varphi^{-1}\nu_i) = \alpha\mu_i = \eta_i \quad \forall i \in I,$$

entonces C, $\{\nu_i : A_i \to C\}_{i\in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$. $\square$