Ejercicios 43-53

Arruti, Sergio

Ej 43. Sea $\{\pi_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ una familia de morfismos en una categoría semiaditiva $\mathscr{C}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) A y $\{\pi_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ son un producto para $\{A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$;

b) $\exists\ \{\mu_i : A_i \to A\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$ tal que $\sum_{i=1}^n \mu_i \pi_i = 1_A$ y, $\forall\ i, j \in [1, n]$, $\pi_i \mu_j = \delta_{i,j}^A$.

Demostración. Se tiene el siguiente resultado

Proposición (1.9.2)**.** Sea $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i=1}^n$ una familia de morfismos en una categoría semiaditiva $\mathscr{C}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) A y $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i=1}^n$ son un coproducto para $\{A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$;

b) $\exists\ \{\pi_i : A \to A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}$ tal que $\sum_{i=1}^n \mu_i \pi_i = 1_A$ y, $\forall\ i, j \in [1, n]$, $\pi_i \mu_j = \delta_{i,j}^A$.

Así, considerando que

$$\begin{aligned}
\left(\delta_{i,j}^A\right)^{op} &= \begin{cases} 0^{op}, & i \neq j \\ {1_{A_i}}^{op}, & i = j \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1_{A_i}, & i = j \end{cases} \\
&= \delta_{i,j}^A
\end{aligned}$$

y pasando a la categoría opuesta, se tiene:

Proposición (1.9.2$^{\text{op}}$)**.** Sea $\{\mu_i^{op} : A_i \to A\}_{i=1}^n$ una familia de morfismos en una categoría semiaditiva $\mathscr{C}^{op}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) A y $\{\mu_i^{op} : A_i \to A\}_{i=1}^n$ son un coproducto para $\{A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}^{op}$;

b) $\exists\ \{\pi_i^{op} : A \to A_i\}_{i=1}^n$ en $\mathscr{C}^{op}$ tal que $\sum_{i=1}^n \mu_i^{op} \pi_i^{op} = 1_A$ y, $\forall\ i, j \in [1, n]$, $\pi_i^{op} \mu_j^{op} = \delta_{i,j}^A$.

Lo cual, sabiendo que la noción dual de coproducto es producto, nos da el siguiente resultado dual

Proposición (1.9.2*)**.** Sea $\{\mu_i : A \to A_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de morfismos en una categoría semiaditiva $\mathscr{C}^{op}$. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) A y $\{\mu_i : A \to A_i\}_{i=1}^{n}$ son un producto para $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ en $\mathscr{C}$;

b) $\exists\ \{\pi_i : A_i \to A\}_{i=1}^{n}$ en $\mathscr{C}$ tal que $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i \mu_i = 1_A$ y, $\forall\ i, j \in [1, n]$, $\mu_j \pi_i = \delta_{i,j}^{A}$.

Podemos reescribir la proposición anterior intercambiando μ por π y viceversa, con lo cual por el principio de dualidad se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 44. Sean $\mathscr{C}$ una categoría semiaditiva, $A = \coprod\limits_{i=1}^{n} A_i$ y $B = \coprod\limits_{i=1}^{n} B_i$ en $\mathscr{C}$. Si la aplicación $+$ está dada por

$$\begin{aligned} + : Mat_{m\times n}(A,B) \times Mat_{m\times n}(A,B) &\to Mat_{m\times n(A,B)} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \gamma, \\ [\gamma]_{i,j} &:= [\alpha]_{i,j} + [\beta]_{i,j}\,, \quad \forall\ i,j \in [1,n] \end{aligned}$$

con $+$ al lado derecho de la igualdad anterior siendo la operación suma en $Hom_{\mathscr{C}}(A_j, B_i)$, entonces $(Mat_{m\times n}(A,B), +)$ es un monoide abeliano.

Demostración. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in Mat_{m\times n}(A,B)$. Dado que $\mathscr{C}$ es semiaditiva se tiene que $\forall\ (r,t) \in [1,m] \times [1,n]$ $Hom_{\mathscr{C}}(A_t, B_r)$ tiene estructura de monoide abeliano, en patícular su operación es asociativa. Así

$$\begin{aligned} [(\alpha+\beta)+\gamma]_{r,t} &= [\alpha+\beta]_{r,t} + [\gamma]_{r,t} \\ &= \Big([\alpha]_{r,t} + [\beta]_{r,t}\Big) + [\gamma]_{r,t} \\ &= [\alpha]_{r,t} + \Big([\beta]_{r,t} + [\gamma]_{r,t}\Big) \\ &= [\alpha + (\beta+\gamma)]_{r,t}\,; \qquad\qquad \forall\,(r,t) \in [1,m]\times[1,n] \\ \implies &+ \text{ en } Mat_{m\times n}(A,B) \text{ es asociativa.} \end{aligned}$$

En forma análoga a lo anterior, empleando ahora que la operación en cada $Hom_{\mathscr{C}}(A_t, B_r)$ es conmutativa, se verifica que $+$ en $Mat_{m\times n}(A,B)$ también lo es y que, si $(r,t) \in [1,m] \times [1,n]$ e_{A_t,B_r} es el neutro en $Hom_{\mathscr{C}}(A_t, B_r)$ y E la matriz en $Mat_{m\times n}(A,B)$ dada por $[E]_{r,t} = e_{A_t,B_r}$, entonces E es el neutro de $+$ en $Mat_{m\times n}(A,B)$.

$\square$

Ej 45.

Ej 46.

Ej 47. Sean $\mathscr{C}$ una categoría preaditiva, $A \in \mathscr{C}$ y $\theta \in End_{\mathscr{C}}(A)$. Si θ es idempotente, entonces $1_A - \theta$ también lo es.

Demostración. Se tiene que $\theta^2 = \theta$ y, como $\mathscr{C}$ es preaditiva, la composición de morfismos en $\mathscr{C}$ es bilineal con respecto a $+$ en $End_{\mathscr{C}}(A)$. Así

$$
\begin{aligned}
(1_A - \theta)^2 &= (1_A - \theta)(1_A - \theta) = 1_A^2 - 1_A\theta - \theta 1_A + \theta^2 \\
&= 1_A - \theta - \theta + \theta \\
&= 1_A - \theta.
\end{aligned}
$$

□

Ej 48. Sea $\mathscr{C}$ una categoría, entonces:

a) $\mathscr{C}$ es abeliana si y sólo si $\mathscr{C}^{op}$ es abeliana.

b) Supongamos que $\mathscr{C}$ es abeliana y sean $\alpha : A \to B, \beta : C \to B$ en $\mathscr{C}$. Si α, o β, es epi, entonces λ el morfismo asociado a la matriz $(\alpha\ \beta)$ es epi.

Demostración. $\boxed{a)}$ Se tiene del Teorema 1.10.1 d) que una categoría es abeliana si y sólo si satisface las siguientes dos condiciones

C1) $\mathscr{C}$ es normal y conormal,

C2) $\mathscr{C}$ tiene pull-backs y push-outs.

Dado que $C1)$ y $C2)$ son condiciones autoduales, pues $(\text{normal})^*$=conormal y $(\text{pull-back})^*$=push-out, entonces una categoría $\mathscr{C}$ las satisface si y sólo si $\mathscr{C}^{op}$ las satisface.

$\boxed{b)}$ Sean $\{\pi_1, \pi_2\}$ las proyecciones naturales y $\{\mu_1, \mu_2\}$ las inclusiones naturales del biproducto $A \coprod C$. Entonces $\lambda = \alpha\pi_1 + \beta\pi_2 \in Hom_{\mathscr{C}}(A \coprod C, B)$. Supongamos que $f, g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, D)$ son tales que $f\lambda = g\lambda$. Así

$$
\begin{aligned}
f(\alpha\pi_1 + \beta\pi_2) &= g(\alpha\pi_1 + \beta\pi_2), \\
\implies f(\alpha\pi_1 + \beta\pi_2)\mu_1 &= f(\alpha\pi_1 + \beta\pi_2)\mu_1 \\
\implies f(\alpha(\pi_1\mu_1) + \beta(\pi_2\mu_1)) &= g(\alpha(\pi_1\mu_1) + \beta(\pi_2\mu_1)) \\
\implies f(\alpha(1_A) + \beta 0) &= g(\alpha 1_A + \beta 0) \\
\implies f\alpha &= g\alpha.
\end{aligned}
$$

De lo anterior se sigue que $f = g$ si α es epi. La prueba es análoga, componiendo por μ_2 a derecha, si suponemos que β es epi.

□

Ej 49.

Ej 50.

Ej 51. Sean $\mathscr{A}$ una categoría aditiva y $A \in \mathscr{A}$ tal que $1_A = 0_{A,A}$. Entonces A es un objeto cero en $\mathscr{A}$.

Demostración. Como $\mathscr{A}$ es aditiva, en partícular es una $\mathbb{Z}$-categoría, con lo cual por la Observación 1,9,1(2) todo objeto inicial en $\mathscr{A}$ es un objeto cero en $\mathscr{A}$. Así pues basta con verificar que bajo estas condiciones A es un objeto inicial en $\mathscr{A}$.
Sea $X \in \mathscr{A}$ y $f \in Hom_{\mathscr{A}}(A, X)$. Como $\mathscr{A}$ tiene objeto cero, por ser aditiva, entonces existe un (único) morfismo cero $0_{A,X} \in Hom_{\mathscr{A}}(A, X)$. Además

$$\begin{aligned} f = f1_A = f0_{A,A} = 0_{A,X}, \\ \implies Hom_{\mathscr{A}}(A, X) = \{0_{A,X}\}. \end{aligned}$$

□

Ej 52. Sean $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ categorías aditivas, $X = \coprod_{i=1}^{n} X_i$, $Y = \coprod_{j=1}^{m} Y_i$ en $\mathscr{A}$, F un funtor que preserva coproductos finitos, $\alpha \in Mat_{m\times n}(X, Y)$ y $\overline{\alpha}$ el morfismo en $Hom_{\mathscr{A}}(X, Y)$ asociado a α. Entonces la matriz asociada al morfismo $F(\overline{\alpha})$, $\varphi_{FY,FX}(F(\overline{\alpha})) \in Mat_{m\times n}(FX, FY)$, está dada por

$$[\varphi_{FY,FX}(F(\overline{\alpha}))]_{i,j} = F\left([\alpha]_{i,j}\right), \qquad \forall\ i, j$$

Demostración. Dado que $\mathscr{A}$ es abeliana, X y Y son biproductos en $\mathscr{A}$, al igual que FX y FY lo son en $\mathscr{B}$ por ser esta última abeliana y ser F un funtor que preserva coproductos finitos. Más aún, si $\left\{\mu_{i\ i}^{X}\right\}_{i=1}^{n}$, $\left\{\mu_{i\ i}^{Y}\right\}_{i=1}^{m}$, $\left\{\pi_{i\ i}^{X}\right\}_{i=1}^{n}$ y $\left\{\pi_{i\ i}^{Y}\right\}_{i=1}^{m}$ son respectivamente las inclusiones y proyecciones naturales de X y Y, entonces $\left\{F\left(\mu_i^X\right)_i\right\}_{i=1}^{n}$, $\left\{F\left(\mu_i^Y\right)_i\right\}_{i=1}^{m}$, $\left\{F\left(\pi_i^X\right)_i\right\}_{i=1}^{n}$ y $\left\{F\left(\pi_i^Y\right)_i\right\}_{i=1}^{m}$ son respectivamente las inclusiones y proyecciones naturales de FX y FY. Así

$$\begin{aligned}
\left[\varphi_{FY,FX}\left(F\left(\overline{\alpha}\right)\right)\right]_{i,j} &= F\left(\pi_i^Y\right) F\left(\overline{\alpha}\right) F\left(\mu_j^X\right) \\
&= F\left(\pi_i^Y \overline{\alpha} \mu_j^X\right) \\
&= F\left(\pi_i^Y \left(\sum_{r,t} \mu_t^Y \left[\alpha\right]_{i,j} \pi_r^X\right) \mu_j^X\right) \\
&= F\left(\sum_{r,t} \left(\left(\pi_i^Y \mu_t^Y\right) \left[\alpha\right]_{i,j} \left(\pi_r^X \mu_j^X\right)\right)\right) \\
&= F\left(\sum_{r,t} \delta_{i,t}^Y \left[\alpha\right]_{i,j} \delta_{r,j}^X\right) \\
&= F\left(1_{Y_i} \left[\alpha\right]_{i,j} 1_{X_j}\right) \\
&= F\left(\left[\alpha\right]_{i,j}\right).
\end{aligned}$$

□

Ej 53.