¡Sí, lo matamos!— dijo el estadista.

Ej 1.

Ej 2.

Ej 3. Sea $f : A \to B$ en una categoría $\mathscr{C}$, así:

a) si f es un split-epi y monoformismo, entonces f es un isomorfismo;

b) si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es un funtor y f es un isomorfismo, split-mono o split-epi, entonces $F(f)$ también lo es.

Demostración. $\boxed{a)}$ Como f es un split-epi $\exists\ g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, A)$ tal que $fg = 1_B$. Notemos que

$$\begin{aligned} & f(gf) = (fg)f = 1_B f = f = f1_A \\ \Longrightarrow\ & gf = 1_A, \qquad\qquad\qquad\qquad f \text{ es mono} \\ & \therefore f \text{ es un isomorfismo.} \end{aligned}$$

$\boxed{b)}$ Supongamos que f es un split-mono, entonces $\exists\ g : B \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $gf = 1_A$, con lo cual $Ff : FA \to FB$, $Fg : FB \to FA$ en $\mathscr{D}$ y

$$\begin{aligned} F(g)F(f) = (gf) = F(1_A) = 1_{F(A)} \\ \Longrightarrow F(f) \text{ es un split-mono.} \end{aligned}$$

Supongamos ahora que f es un split-epi, luego $\exists\ g : B \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $fg = 1_B$, con lo cual $Ff : FA \to FB$, $Fg : FB \to FA$ en $\mathscr{D}$ y

$$\begin{aligned} F(f)F(g) = (fg) = F(1_B) = 1_{F(B)} \\ \Longrightarrow F(f) \text{ es un split-epi.} \end{aligned}$$

Lo anterior, en conjunto a la equivalencia dada en el Ej. 1 (f), se sigue que si f es un isomorfismo en $\mathscr{C}$ entonces $F(f)$ lo es en $\mathscr{D}$.

□

Ej 4. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías.

a) Sea $\eta \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F, G)$. Si $\forall\ A \in \mathscr{A}$ $\eta_A : FA \to GA$ es un isomorfismo en $\mathscr{B}$ y $\eta^{-1} := \left\{\left(\eta^{-1}\right)_A\right\}_{A\in\mathscr{A}}$, con $\left(\eta^{-1}\right)_A := (\eta_A)^{-1}$, entonces $\eta^{-1} \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(G, F)$.

b) Si $\eta \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F, G)$, $\rho \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(G, H)$ entonces la composición de transformaciónes naturales, con $\rho\eta$ dada por $(\rho\eta)_A := \rho_A \circ \eta_A$ $\forall\ A \in \mathscr{A}$, es una operación asociativa.

c) Si $T \in [\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ y $1_T : T \to T$ está dada por $(1_T)_A := 1_{T(A)}$ $\forall\ A \in \mathscr{A}$, entonces $1_T \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(T, T)$.

d) Si $\alpha \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F, G)$, entonces

$$\alpha 1_F = \alpha = 1_G \alpha.$$

Demostración. $\boxed{a)}$ Dado que $\forall\ A \in \mathscr{A}\ \eta_A : FA \to GA$ es un isomorfismo en $\mathscr{B}$, se tiene que $(\eta_A)^{-1} \in Hom_{\mathscr{B}}(GA, FA)$ y que si $\alpha : A \to A'$ está en $\mathscr{A}$, entonces

$$\begin{aligned} G(\alpha)\,\eta_A &= \eta_{A'} F(\alpha), & \eta \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F,G) \\ \Longrightarrow F(\alpha)(\eta_A)^{-1} &= (\eta_{A'})^{-1} G(\alpha). \end{aligned}$$

Así $\eta^{-1} : G \to F$ es una transformación natural, pues lo anterior garantiza que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "(\eta_A)^{-1}"] \arrow[d, "G(\alpha)"'] & F(A) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\ G(A') \arrow[r, "(\eta_{A'})^{-1}"'] & F(A') \end{tikzcd}.$$

$\boxed{b)}$ Notemos que $\forall\ A \in \mathscr{A}$ se tiene que $\rho_A \eta_A \in Hom_{\mathscr{B}}(F(A), G(A))$. Además si $\alpha : A \to A'$ está en $\mathscr{A}$, por ser η y ρ transformaciones naturales, se tiene que $G(\alpha)\,\eta_A = \eta_{A'} F(\alpha)$ y $H(\alpha)\,\rho_A = \rho_{A'} G(\alpha)$, con lo cual

$$\begin{aligned} H(\alpha)(\rho_A \eta_A) &= (H(\alpha)\,\rho_A)\,\eta_A = (\rho_{A'} G(\alpha))\,\eta_A \\ &= \rho_{A'}(G(\alpha)\,\eta_A) = \rho_{A'}(\eta_{A'} F(\alpha)) \\ &= (\rho_{A'} \eta_{A'})\,F(\alpha), \end{aligned}$$

de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\rho_A \eta_A"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & H(A) \arrow[d, "G(\alpha)"] \\ F(A') \arrow[r, "\rho_{A'} \eta_{A'}"'] & H(A') \end{tikzcd},$$

y por lo tanto $\rho\eta : F \to H$ es una tranformación natural.
Verificaremos ahora que la composición de transformaciones naturales es asociativa. Si ρ y η están dados como al comienzo, $I :\in\to [\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ y $\chi : H \to I$ es una transformación natural, entonces si $A \in \mathscr{A}$

$$\chi_A(\rho_A \eta_A) = (\chi_A \rho_A)\,\eta_A \in (\chi\rho)\,\eta, \Longrightarrow \qquad \chi(\rho\eta) \subseteq (\chi\rho)\,\eta.$$

En forma análoga se verifica la otra contención, y así se tiene que $\chi(\rho\eta) = (\chi\rho)\,\eta$.
$\boxed{c)}$ Si $\alpha : A \to A'$ está en $\mathscr{A}$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha)\,1_{T(\alpha)} &= T(\alpha) \\ &= 1_{T(A')} T(\alpha), \end{aligned}$$

luego

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "1_{T(A)}"] \arrow[d, "T(\alpha)"'] & T(A) \arrow[d, "T(\alpha)"] \\ T(A') \arrow[r, "1_{T(A')}"'] & T(A') \end{tikzcd}$$

conmuta, y por tanto $1_T : T \to T$ es una transformación natural.
$\boxed{d)}$ Se tiene que $\forall\ A \in \mathscr{A}\ \alpha_A 1_{F(A)} = \eta_A$, con lo cual $(\alpha 1_F)_A = \alpha_A$ y por tanto $\alpha 1_F = \alpha$. Análogamente se verifica que $1_G \alpha = \alpha$. □

Ej 5.

Ej 6.

Ej 7. Si los siguientes diagramas conmutativos en una categoría $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\beta'_2"] \arrow[d, "\beta'_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

son pull-backs, entonces $\exists\ \gamma : P \to P'$ en $\mathscr{C}$ un isomorfismo tal que $\beta_i = \beta'_i \gamma$, $\forall\ i \in [1, 2]$.

Demostración. Por la propiedad universal del pull-back aplicada a P', se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\exists!\ \gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\ & P' \arrow[r, "\beta'_2"] \arrow[d, "\beta'_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd},$$

mientras que la propiedad universal del pull-back aplicada a P grantiza que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, "\exists!\ \gamma'"] \arrow[drr, bend left, "\beta'_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta'_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}.$$

Así

$$\begin{aligned}
\beta_1 (\gamma' \gamma) &= (\beta_1') \gamma \\
&= \beta_1, \\
\beta_2 (\gamma' \gamma) &= (\beta_2') \gamma \\
&= \beta_2,
\end{aligned} \tag{*}$$

de modo que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "\gamma'\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_1"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, "1_P"] \arrow[drr, bend left, "\beta_1"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto, empleando la propiedad universal del pull-back para P, se tiene que $\gamma'\gamma = 1_P$. En forma análoga, empleando ahora la propiedad universal del pull-back para P', se verifica que $\gamma\gamma' = 1_{P'}$, de modo que $\gamma : P \to P'$ es un isomorfismo en $\mathscr{C}$. Con lo anterior y (*) se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 8. Sea el siguiente diagrama conmutativo en una categoría $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd}$$

un pull-back, entonces

a) si α_1 es un monomorfismo, entonces β_2 también lo es;

b) β_2 es un split-epi si y sólo si α_2 se factoriza a través de α_1.

Demostración. $\boxed{a)}$ Supongamos que α_1 es un monomorfismo y que $f, g : B \to P$ son morfismos en $\mathscr{C}$ tales que $\beta_2 f = \beta_2 g$. Notemos primeramente que así

$$\begin{aligned}
\alpha_1 (\beta_1 f) &= (\alpha_2 \beta 2) f = \alpha_2 (\beta_2 g) = (\alpha_1 \beta_1) g \\
&= \alpha_1 (\beta_1 g) \\
\Longrightarrow\ \beta_1 f &= \beta_1 g, \qquad\qquad\qquad \alpha_1 \text{ es un mono}
\end{aligned}$$

con lo cual se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "{f,\, g}"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2 f"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1 f"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd},$$

y así la propiedad universal del pull-back garantiza que $f = g$, con lo cual β_2 es un mono.

$\boxed{b) \implies}$ Dado que β_2 es un split-epi $\exists\ \gamma : A_2 \to P$ tal que $\beta_2\gamma = 1_{A_2}$, así

$$\begin{aligned}
\alpha_1 (\beta_1\gamma) &= (\alpha_2\beta_2)\,\gamma = \alpha_2\,(1_{A_2}) \\
&= \alpha_2, \\
&\implies \alpha_2 \text{ se factoriza a través de } \alpha_1.
\end{aligned}$$

$\boxed{b) \impliedby}$ Se tiene que $\exists\ \alpha : A_2 \to A_1$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_2 = \alpha_1\alpha$, con lo cual a partir de la propiedad universal del pull-back se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[dr, "\exists!\ \gamma"] \arrow[drr, bend left, "1_{A_2}"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A
\end{tikzcd},$$

del cual se deduce que en partícular $\beta_2\gamma = 1_{A_2}$, y así se tiene lo deseado.

□

Ej 9.

Ej 10.

Ej 11. Enunciaremos y probaremos la proposición dual al Ej. 8. Notemos primeramente que

Pull-back:

PBI) $\exists\ \beta_1 : P \to A_1, \beta_2 : P \to A_2$ tales que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$.

PBII) $\forall\ P' \in \mathscr{C}$ y $\forall\ \beta_1' : P' \to A_1, \beta_2' : P' \to A_2$ tales que $\alpha_1\beta_1' = \alpha_2\beta_2'$, $\exists!\ \gamma : P' \to P$ tal que $\beta_1' = \beta_1\gamma$ y $\beta_2' = \beta_2\gamma$.

Pull-back$^{\mathbf{op}}$:

PB$^{\text{op}}$I) $\exists\, \beta_1^{op} : A_1 \to P, \beta_2^{op} : A_2 \to P$ tales que $\alpha_1^{op}\beta_1^{op} = \alpha_2^{op}\beta_2^{op}$.

PB$^{\text{op}}$II) $\forall\ P' \in \mathscr{C}$ y $\forall\ \beta_1'^{op} : A_1 \to P', \beta_2'^{op} : A_2 \to P'$ tales que $\alpha_1^{op}\beta_1'^{op} = \alpha_2^{op}\beta_2'^{op}$, $\exists!\ \gamma^{op} : P \to P'$ tal que $\beta_1'^{op} = \beta_1^{op}\gamma^{op}$ y $\beta_2'^{op} = \beta_2^{op}\gamma^{op}$.

Pull-back*:

PB*I) $\exists\, \beta_1 : A_1 \to P, \beta_2 : A_2 \to P$ tales que $\beta_1\alpha_1 = \beta_2\alpha_2$.

PB*II) $\forall\ P' \in \mathscr{C}$ y $\forall\ \beta_1' : A_1 \to P', \beta_2' : A_2 \to P'$ tales que $\beta_1'\alpha_1 = \beta_2'\alpha_2$, $\exists!\ \gamma : P \to P'$ tal que $\beta_1' = \gamma\beta_1$ y $\beta_2' = \gamma\beta_2$.

Esto último es la definición de que un objeto P sea un push-out de $\alpha_1 : A \to A_1$ y $\alpha_2 : A \to A_2$. Por lo anterior, y dado que las propiedades duales de mono y split-epi son respectivamente epi y split-mono, la proposición dual del Ej. 8 es:
Sea el siguiente diagrama conmutativo en una categoria $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
P & A_2 \arrow[l, "\beta_2"'] \\
A_1 \arrow[u, "\beta_1"] & A \arrow[l, "\alpha_1"] \arrow[u, "\alpha_2"']
\end{tikzcd}$$

un push-out, entonces

a) si α_1 es un epimorfismo, entonces β_2 también lo es;

b) β_2 es un split-mono si y sólo si $\exists\, \delta : A_1 \to A_2$ en $\mathscr{C}$ tal que $\alpha_2 = \delta\alpha_1$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Supongamos que $f : P \to Q$ y $g : P \to Q$ en $\mathscr{C}$ son tales que $f\beta_2 = g\beta_2$. Notemos que

$$\begin{aligned}
(f\beta_1)\,\alpha_1 &= f\,(\beta_2\alpha 2) = (g\beta_2)\,\alpha_2 = g\,(\beta_1\alpha_1) \\
&= (g\beta_1)\,\alpha_1 \\
\implies f\beta_1 &= g\beta_1, && \alpha_1 \text{ es un epi}
\end{aligned}$$

con lo cual se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
B & & \\
& P \arrow[ul, "{f,\ g}"'] & A_2 \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[ull, bend right, "\beta_2 f"'] \\
& A_1 \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[uul, bend left, "\beta_1 f"] & A \arrow[l, "\alpha_1"] \arrow[u, "\alpha_2"']
\end{tikzcd},$$

y así la propiedad universal del push-out garantiza que $f = g$, con lo cual β_2 es un epi.

$\boxed{b)\ \Longrightarrow}$ Por ser β_2 un split-mono $\exists\ \gamma : P \to A_2$ en $\mathscr{C}$ tal que $\gamma\beta_2 = 1_{A_2}$, de modo que si $\delta := \gamma\beta_1$, entonces

$$\begin{aligned}\delta\alpha_1 &= \gamma\left(\beta_1\alpha_1\right) = \left(\gamma\beta_2\right)\alpha_2 = 1_{A_2}\alpha_2\\ &= \alpha_2.\end{aligned}$$

$\boxed{b)\ \Longleftarrow}$ Bajo estas condiciones de la propiedad universal del push-out se obtiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_2 & & \\
& P \arrow[ul, "\exists!\ \gamma"'] & A_2 \arrow[l, "\beta_2"'] \arrow[ull, bend right, "1_{A_2}"'] \\
& A_1 \arrow[u, "\beta_1"] \arrow[uul, bend left, "\delta"] & A \arrow[l, "\alpha_1"] \arrow[u, "\alpha_2"']
\end{tikzcd},$$

del cual se sigue en partícular que $\gamma\beta_2 = 1_{A_2}$. $\square$

Ej 12. Si R es un anillo entonces la categoría $Mod\,(R)$ tiene pull-backs.

Demostración. Sean $\alpha_1 : A_1 \to A$ y $\alpha_2 : A_2 \to A$ morfismos de R-módulos y

$$A_1 \times_A A_2 := \{(x,y) \in A_1 \times A_2 \mid \alpha_1(x) = \alpha_2(y)\}$$

Notemos que $A_1 \times_A A_2 \neq \varnothing$, pues si 0_1, 0_2 y 0 son los neutros aditivos de A_1, A_2 y A, respectivamente, entonces $\alpha_1(0_1) = 0 = \alpha_2(0_2)$, con lo cual $(0_1, 0_2) \in A_1 \times_A A_2$. Más aún, $A_1 \times_A A_2 \leq A_1 \times A_2$, con $A_1 \times A_2$ dotado de la estructura usual de R-módulo, pues si $(a,b), (c,d) \in A_1 \times_A A_2$ y $r \in R$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha_1(ra - b) &= r\alpha_1(a) - \alpha_1(b)\\ &= r\alpha_2(c) - \alpha_2(d)\\ &= \alpha_2(rc - d)\,,\\ &\Longrightarrow\ r(a,b) - (c,d) \in A_1 \times_A A_2.\end{aligned}$$

Con lo cual $A_1 \times_A A_2 \in Mod\,(R)$. Así, si π_1 y π_2 son las proyecciones canónicas de $A_1 \times_A A_2$ sobre A_1 y A_2, respectivamente, y $(x,y) \in A_1 \times_A A_2$, entonces π_1, π_2 son morfismos de R-módulos y

$$\begin{aligned}\alpha_1\pi_1(x,y) &= \alpha_1(x) = \alpha_2(y) = \alpha_2(\pi_2(x,y))\\ &= \alpha_2\pi_2(x,y)\,,\\ \Longrightarrow\ \alpha_1\pi_1 &= \alpha_2\pi_2.\end{aligned}$$

Es decir, se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_1 \times_A A_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}.$$

Ahora, si $P \in Mod(R)$ y $\beta_1 : P \to A_1, \beta_2 : P \to A_2$ son morfismos de R-módulos tales que $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2$, entonces sea

$$\begin{aligned} \gamma : P &\to A_1 \times_A A_2 \\ p &\mapsto (\beta_1(p), \beta_2(p)). \end{aligned}$$

Notemos que γ es un morfismo de R-módulos, puesto que β_1 y β_2 lo son, y que si $p \in P$ entonces

$$\begin{aligned} &\pi_1\gamma(p) = \pi_1(\beta_1(p), \beta_2(p)) = \beta_1(p) \\ \implies &\pi_1\gamma = \beta_1. \end{aligned}$$

Análogamente se verifica que $\pi_2\gamma = \beta_2$, con lo cual el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend right, "\beta_1"'] & & \\ & A_1 \times_A A_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & A \end{tikzcd}$$

Finalmente, si $\gamma' : P \to A_1 \times_A A_2$ es un morfismo de R-módulos tal que $\pi_1\gamma' = \beta_1$ y $\pi_2\gamma' = \beta_2$ y $p \in P$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_1\gamma'(p) &= \beta_1(p), \\ \pi_2\gamma'(p) &= \beta_2(p), \end{aligned}$$

con lo cual $\gamma'(p) = (\pi_1(\gamma'(p)), \pi_2(\gamma'(p))) = (\beta_1(p), \beta_2(p)) = \gamma(p)$ y por lo tanto $\gamma' = \gamma$.

□

Ej 13.

Ej 14.

Ej 15. Si $\mathscr{C}$ es una categoría con pull-backs, entonces $\mathscr{C}$ tiene intersecciones finitas.

Demostración. content... □