## Ejercicios 16-31

## Arruti, Sergio

Lema 1. Sea f un morfismo en Sets, entonces

- a)  $f:A\hookrightarrow B$  es un mono en Sets si y sólo si f es inyectiva;
- b)  $f: A \rightarrow B$  es un epi en Sets si y sólo si f es suprayectiva.

Demostración. a) Notemos primeramente que una función vacía  $\varnothing_C$ ,  $C \in Sets$ , es inyectiva por la vacuidad de su dominio. Más aún, es un mono en Sets, en efecto: si  $g,h \in Sets$  son tales que  $\varnothing_C f = \varnothing_A g$ , entonces necesariamente  $D = \varnothing_A g$  y así, dado que existe una única función de  $\varnothing$  en  $\varnothing$ , f = g. Con lo cual la afirmación es válida para funciones vacía y podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $A \neq \varnothing$  (y en consecuencia que  $B \neq \varnothing$ ).

a)  $\Longrightarrow$  Sean  $a, b \in A$  tales que f(a) = f(b), entonces las funciones

$$g: A \to A$$
$$x \mapsto a,$$
$$h: A \to A$$
$$x \mapsto b.$$

satisfacen que fg = fh, luego g = h por ser f mono y por tanto a = b. a bSupongamos que  $g, h \in \text{son tales que } fg = fh$ . Si  $A' = \emptyset$  entonces

 $\overline{g=\varnothing_A}=h;$  en caso contrario sea  $a\in A',$  así

$$\begin{split} f\left(g\left(a\right)\right) &= fg\left(a\right) = fh\left(a\right) = f\left(h\left(a\right)\right) \\ &\Longrightarrow g\left(a\right) = h\left(a\right), & f \text{ es inyectiva} \\ &\Longrightarrow g = h. \end{split}$$

- b) Verificaremos primero que la función  $\varnothing_\varnothing$  i.e. la única función cuyo dominio y contradominio es  $\varnothing$  es epi y suprayectiva. Si  $g,h\in$  son tales que  $g\varnothing_\varnothing=h\varnothing_\varnothing$ , entonces  $g=\varnothing_Z=h$ ; por su parte la suprayectividad de  $\varnothing_\varnothing$  se sigue por la vacuidad de su contradominio. Así, en adelante podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $B\neq\varnothing$ .
- $b) \implies$  Notemos que necesariamente  $A \neq \emptyset$ , pues en caso contrario las apli-

caciones

$$\phi: B \to \{0, 1\}$$

$$x \mapsto 0,$$

$$\psi: B \to \{0, 1\}$$

$$x \mapsto 1,$$

son funciones bien definidas, pues  $B \neq \emptyset$ , las cuales satisfacen que  $\phi \neq \psi$  y sin embargo  $\phi f = \varnothing_{\{0,1\}} = \psi f$ , lo cual contradeciría que f es epi. Así  $1_B|_{f(A)}$  no es una función vacía y más aún satisface que

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{B}|_{f(A)}\,f &= f = \mathbf{1}_{B}f\\ &\implies \mathbf{1}_{B} = \mathbf{1}_{B}|_{f(A)}\,, & f \text{ es epi}\\ &\implies f\left(A\right) = B\\ &\implies f \text{ es suprayectiva.} \end{aligned}$$

b)  $\Leftarrow$  Sean  $g, h \in Hom_{Sets}(B, C)$  tales que gf = hf y  $b \in B$ . Como f es suprayectiva  $\exists a \in A \ f(a) = b$ , así

$$g(b) = gf(a) = hf(a) = h(b)$$
  
 $\implies g = h.$ 

Ej 16.

**Ej 17.** Pruebe que, para un anillo R, La categoría Mod(R) tiene uniones.

Demostración. Sean  $A\in Mod(R),$   $\{\alpha_i:A_i\hookrightarrow A\}_{i\in I}$ en Mod(R)y la inclusión de submódulos

$$\nu \colon \sum_{i \in I} Im(\alpha_i) \longrightarrow A.$$

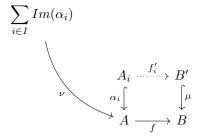
Recordemos que  $\left(x \in \sum_{i \in I} Im(\alpha_i) \iff x = \sum_{i \in J} \alpha_j(a_j)\right)$  con J finito y  $a_j \in A_j$  para cada  $j \in J$ .

$$\boxed{U_1) \quad (\alpha_i \le \nu \ \forall i \in I)}$$

Como  $\alpha_i(x) \in Im(\alpha_i) \ \forall x \in A_i$ , entonces definimos  $\nu_i : A_i \to Im(\alpha_i)$  como  $\nu_i(x) = \alpha_i(x)$ . Observemos que  $\nu_i(x) \in \sum_{i \in I} Im(\alpha_i)$  pues si  $J = \{i\}$ 

entonces  $\sum_{i\in J} \alpha_i(x) = \alpha_i(x) = \nu(x)$ . Por lo tanto  $\alpha_i(x) = \nu \circ \nu_i(x)$  y así  $\alpha_i \leq \nu \ \forall i \in I$ .

 $\overline{U_2)}$  Supongamos  $f:A\to B$  en  $\mathscr C$  es tal que cada  $u_i$  es llevado via f, a algún subobjeto  $\mu:B'\hookrightarrow B$ . Tal como se muestra en el siguiente diagrama:



Como para todo  $x \in \sum_{j \in I} Im(\alpha_j), \quad x = \alpha_{i_0}(x_0) + \ldots + \alpha_{i_n}(x_n)$  donde  $x_n \in A_{i_n}$  e  $i_n \in J \ \forall i \in \{1, \ldots, n\},$  así definimos  $g : \sum_{j \in I} Im(\alpha_j) \longrightarrow B'$ 

como  $g(x) = f'_{i_0}(x_o) + \ldots + f'_{i_n}(x_n)$ . Observemos que es morfismo de módulos:

Sean  $r \in R$ ,  $a, b \in \sum_{i \in I} Im(\alpha_i)$  y supongamos que

$$a = \alpha_{h_0}(a_0) + \ldots + \alpha_{h_n}(a_n)$$
  
$$b = \alpha_{k_0}(b_0) + \ldots + \alpha_{k_m}(b_m) \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Así

$$g(ra+b) = g(r\alpha_{h_0}(a_0) + \dots + r\alpha_{h_n}(a_n) + r\alpha_{k_0}(b_0) + \dots + r\alpha_{k_m}(b_m))$$

$$= g(\alpha_{h_0}(ra_0) + \dots + \alpha_{h_n}(ra_n) + \alpha_{k_0}(b_0) + \dots + \alpha_{k_m}(b_m))$$

$$= f'_{h_0}(ra_0) + \dots + f'_{h_n}(ra_n) + f'_{k_0}(b_0) + \dots + f'_{k_m}(b_m)$$

$$= (rf'_{h_0}(a_0) + \dots + rf'_{h_n}(a_n)) + f'_{k_0}(b_0) + \dots + f'_{k_m}(b_m)$$

$$= r(f'_{h_0}(a_0) + \dots + f'_{h_n}(a_n)) + f'_{k_0}(b_0) + \dots + f'_{k_m}(b_m)$$

$$= ra(a) + a(b)$$

Por lo tanto es morfismo.

Así  $\forall x \in \sum_{i \in I} Im(\alpha_i)$  se tiene que

$$\mu g(x) = \mu \left( \sum_{k=0}^{n} f'_{i_k}(x_k) \right) = \sum_{k=0}^{n} \mu f'_{i_k}(x_k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f \alpha_{i_k}(x_k) = f \left( \sum_{k=0}^{n} \alpha_{i_k}(x_k) \right)$$
$$= f \nu(x).$$

Por lo tanto  $\sum_{i \in I} Im(\alpha_i)$  es la unión categorica.

**Ej 18.** Sean  $\mathscr{C}$  una categoría con ecualizadores  $\alpha, \beta \colon A \to B$  y  $\{\mu_i: A_i \hookrightarrow A\}_{i \in I}$  tal que existe  $\mu: \bigcup_{i \in I} A_i \longrightarrow A$ . Pruebe que  $(\alpha \mu_i = \beta \mu_i \ \forall i \in I) \Rightarrow (\alpha \mu = \beta \mu)$ .

$$(\alpha \mu_i = \beta \mu_i \ \forall i \in I) \Rightarrow (\alpha \mu = \beta \mu).$$

Demostración. Supongamos  $\alpha \mu_i = \beta \mu_i \ \forall i \in I$  entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{c}
A_i \\
\downarrow^{\mu_i} \\
A \xrightarrow{\alpha} B
\end{array}.$$

Como  $\mathscr C$  tiene ecualizadores, existe  $\eta:K\to A$  tal que  $\alpha\eta=\beta\eta$  y si  $f: X \to A$  en  $\mathscr C$  es tal que  $\beta f = \alpha f$ , entonces  $\exists ! f': X \to K$  tal que  $\eta f' = f$ .

Así como  $\alpha \mu_i = \beta \mu_i \ \forall i \in I$ , entonces para cada  $i \in I \ \exists ! \mu_i' : A_i \to K \ \text{tal}$ que  $\eta \mu'_i = \mu_i$ , es decir, se tiene que para cada  $i \in I$  el siguiente diagrama conmuta:

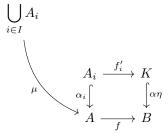
$$\begin{array}{c}
A_i \\
\downarrow \\
K \xrightarrow{\eta} A \xrightarrow{\beta} B
\end{array}$$

es decir,  $\eta f_i = \mu_i$ . Ahora por  $(U_1)$  de las propiedades de la unión, se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\bigcup_{i \in I} A_i \xrightarrow{\mu_i} A \xrightarrow{\alpha} B$$

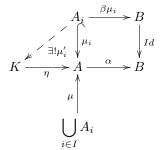
por lo que  $\mu f_i' = \mu_i = \eta f_i$ .

Notemos entonces que, como  $\alpha \eta = \beta \eta$ , se tiene el siguiente diagrama para cada  $i \in I$  y para f igual a  $\alpha$  y  $\beta$ :



Entonces por  $(U_2)$  de las propiedades de la unión, existen  $\gamma_{\alpha}, \gamma_{\beta}: \bigcup_{i \in I} A_i \longrightarrow K$  tal que  $\alpha \eta \gamma_{\alpha} = \alpha \mu$  y  $\alpha \eta \gamma_{\beta} = \beta \mu$ . Pero  $\beta \eta = \alpha \eta$  por lo tanto  $\alpha \mu = \alpha \eta \gamma_{\alpha} = \beta \eta \gamma_{\beta} = \beta \mu$ .

Además, como  $\alpha \mu_i = \beta \mu_i$ , entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo:



Entonces, por la propiedad universal de la unión existe  $\theta:\bigcup_{i\in I}A_i\longrightarrow B$  tal que  $\alpha\mu=Id\theta=\theta$ . Análogamente se tiene que existe  $\theta':\bigcup_{i\in I}A_i\longrightarrow B$  tal que  $\beta\mu=Id\theta'=\theta'$ , y como  $\mathscr C$  tiene igualadores entonces existe  $\gamma:X\to\bigcup_{i\in I}A_i$  tal que  $\mu_i=\eta\mu_i'$ .

Por lo que  $\bigcup_{i \in I} A_i$ 

Ej 19.

Ej 20.

Ej 21. Pruebe que Sets tiene coimagenes.

Demostración. Sea  $f: A \to B$  en Sets. Consideremos la relación  $\sim_f$  en A, donde  $x \sim_f y$  si y sólo si f(x) = f(y).

Esta relación (que denotaremos por  $\sim$  por simplicidad) es una relación de equivalencia como se muestra a continuación:

Reflexividad Sea  $x \in A$ , como f(x) = f(x) entonces  $x \sim x$ .

Simetría Sean  $a, b \in A$  tales que  $a \sim b$ , entonces f(a) = f(b), por lo que f(b) = f(a) y así  $b \sim a$ .

Transitividad Sean  $x, y, z \in A$  tales que  $x \sim y, y \sim z$ , entonces f(x) = f(y) = f(z) por lo tanto f(x) = f(z) y en consecuencia  $x \sim z$ .

Sea  $\pi: a \to A/\sim$  el epi canonico donde  $\pi(a) = [a] := \{x \in A \mid x \sim a\}$ , se afirma que es una coimagen de f.

Observemos que, si  $A, B \neq \emptyset$ , para toda  $b \in B$  tal que b = f(a) con  $a \in A$  se tiene que  $\pi(a) = [a]$  por lo que se puede definir  $f' : A / \sim B$  como f'([a]) = f(a). Así se tiene que:

(1) f' está bie definida.

Sean  $[a][b] \in [x]$  con  $[x] \in A/\sim$ , entonces  $a \sim x \sim b$ , por lo que f(a) = f(x) = f(b), es decir, f'([a]) = f'([b]).

(2)  $(f = f'\pi)$ .

Sea  $a \in A$ .  $f'\pi(a) = f'([a]) = f(a)$ .

Para ver que  $(CoIm_2)$  se cumple, supongamos que existe  $p': A \to J'$  un objeto cociente de A tal que  $\exists f'': J' \to B$  donde f = f''p'. Sea  $a \in A$ , entonces  $\pi(a) = [a]$  y  $p'(a) = a' \in J'$ . Como p' es epi en Sets entonces es supra, así para todo  $x \in J'$  existe  $a_x \in A$  tal que  $p'(a_x) = x$ , así definimos  $\nu: J' \to A/\sim \text{como } \nu(x) = \pi(a_x)$ .

Se tiene entonces que  $\forall a \in A$ ,  $\nu p'(a) = \nu(p'(a)) = \pi(a)$ .

En el caso de que B sea el conjunto vacio, entonces A tiene que ser el conjunto vacio y  $f:A\to B$  es la función vacia, así f=p tiene que ser su coimagen pues si  $f':B\to B$  es la función identidad en B, entonces

f = f'p y si  $p' : B \rightarrow B$  es un objeto cociente de A tal que  $f'' : J' \rightarrow B$  con f''p' = f entonces  $f'' : J' \rightarrow B$  es la función vacia y J' es el conjunto vacio. Así  $p' : A \rightarrow J'$  es la función vacia y por lo tanto p' = p y  $Id_{J'} \circ p' = p$ .

En caso de que A sea el conjunto vacio y B sea distinto del vacio, entonces  $(CoIm_1)$  se cumple igual que en el caso anterior, tomando a  $p: \emptyset \to \emptyset$ .

Para probar  $(CoIm_2)$  supongamos que  $p': A \to J'$  es un objeto cociente de A tal que  $existsf'': J' \to B$  tal que f = f''p', pero p' es epi, y como  $A = \emptyset$  entonces  $J' = \emptyset$ . Así, si definimos u como la identidad en el vacio se tiene que p = up'.

**Ej 22.** Pruebe que Mod(R) tiene coimagenes.

Demostración. Sea  $A \in Obj(Mod(R))$ , entonces  $A \neq \emptyset$ . Se afirma que el epi canonico  $\pi: A \to A/Ker(f)$  es una coimagen.

Sea  $a \in A$ , entonces  $f(a) \in B$ . Definimos  $f': \frac{A}{Ker(f)} \to B$  como f'([a]) = f(a).

Probemos que está bien definido. Sean  $a, b \in [x]$  entonces  $a + k_1 = b + k_2 = x$  con  $k_1, k_2 \in Ker(f)$ , asi

$$f'([a]) = f(a) = f(a) + f(K_1) = f(a + K_1)$$
  
=  $f(b + K_2) = f(b) + f(K_2) = f(b) = f'([b]).$ 

Veamos que es morfismo. Sean  $r \in R$ ,  $[a], [b] \in {}^{A}/_{Ker(f)}$  entonces

$$f'(r[a] + [b]) = f'([ra + b]) = f(ra + b) = rf(a) + f(b) = f'(r[a]) + f'([b]).$$

En consecuencia se tiene que  $\pi$  cumple  $(CoIm_1)$ .

Ahora supongamos que  $p':A \to J'$  es un objeto cociente de A tal que existe  $f'':J'\to B$  que cumple que f=f''p'. Como p' es epi, entonces es suprayectiva en Mod(R), porlo que para cada  $x\in J'$  existe  $a\in A$  tal que p'(a)=x.

Definimos  $\nu: J' \to A/\ker(f)$  como  $\nu(x) = [a]$  donde p'(a) = x. Esta función está bien definida pues si  $a, b \in A$  son tales que p'(a) = p'(b) entonces f''p'(a) = f''p'(b) y así f(a) = f(b), entonces f(a - b) = 0, por lo que  $a - b \in Ker(f)$  y en consecuencia [a] = [b].

Veamos que  $\nu$  es morfismo. Si  $r \in R$   $a, b \in J'$  donde  $\nu(a) = [x], \nu(b) = [y], a = p'(x)$  y b = p'(y), entonces

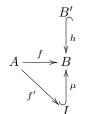
$$\nu(ra+b) = \nu(rp'(x) + p'(y)) = \nu(p'(rx+y))$$
  
=  $[rx+y] = r[x] + [y] = r\nu(a) + \nu(b).$ 

Así se tiene que  $\forall a \in A \ \nu p'(a) = \nu(p'(a)) = [a] = \pi(a)$  por lo que  $(CoIm_2)$  se cumple y Mod(R) tiene coimagenes.

Ej 23.

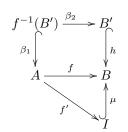
Ej 24.

Ej 25. Considere el siguiente diagrama conmutativo en una categoría  $\mathscr C$ 



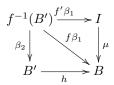
Pruebe que: si  $\exists f^{-1}(B')$  y  $B' \cap Y$ , entonces  $f^{-1}(I \cap B') = f^{-1}(B')$  en  $Mon_{\mathscr{C}}(-,A)$ .

Demostraci'on. Como  $f^{-1}(B')$  y  $B'\cap I$  existen, entonces se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

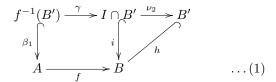


 $I \cap B' \xrightarrow{\nu_1} I \xrightarrow{i} \mu$   $B' \xrightarrow{h} B$ 

Así se tiene que este diagrama



es conmutativo. Por lo tanto, como  $I\cap B'$  es pull-back existe un único  $\gamma:f^{-1}(B')\to I\cap B'$  tal que el siguiente diagrama conmuta:



Sean  $\eta: X \to I \cap B'$ ,  $\eta_2: X \to A$  tales que  $i\eta_1 = f\eta_2$ .

Observamos que, entonces,  $\nu_2\eta_1:X\to B'$  y es tal que  $h(\nu_2\eta_1)=i\eta_1=f\eta_2.$ 

Así, como  $f^{-1}(B')$  es pull-back de  $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{\mu} B'$ , existe una única  $\gamma': X \to f^{-1}(B')$  tal que  $\nu_2 \gamma \gamma' = \nu_2 \eta_1$  y  $\beta_1 \gamma' = \eta_2$  pero  $\nu_2$  es mono por ser i mono. Entonces  $\gamma \gamma' = \eta_1$  y  $\beta_1 \gamma' = \eta_2$ .

Ahora, si existiera  $\alpha: X \to f^{-1}(B')$  tal que  $\beta_1 \alpha = \eta_2$  y  $\gamma \alpha = \eta_1$ , entonces  $\nu_2 \gamma \alpha = \gamma_2 \eta_1$  y por lo anterior  $\alpha = \gamma'$  pues es el único con esas propiedades. Por lo tanto  $f^{-1}(B')$  es un pull-back, del diagrama (1), e implica que  $f^{-1}(I \cap B')$  existe y sea igual a  $f^{-1}(B)$  con los morfismos  $\gamma$  y  $\beta_1$ .

- **Ej 26.** Sea  $f:A\to B$  en una categoría  $\mathscr C$ . Consideremos subobjetos  $A_1\subseteq A_2\subseteq A$  y  $B_1\subseteq B_2\subseteq B$ . Pruebe que se satisfacen las siguientes relaciones cada vez que ambos lados estén definidos.
  - a)  $f(A_1) \subseteq f(A_2)$
  - b)  $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
  - $c) \quad A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$
  - $d) \quad f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$

Demostraci'on. Comenzaremos por nombrar monomorfismos correspondientes como subobjetos de Ay de B

$$A_1 \xrightarrow{\mu_1} A_2 \xrightarrow{\mu_2} A$$

$$B_1 \xrightarrow{\gamma_1} B_2 \xrightarrow{\gamma_2} B$$

a) Sabemos que  $f(A_1) = Im(f\mu_2\mu_1)$  y  $f(A_2) = Im(f\mu_2)$ . Llamaremos

$$\mu'_1: Im(f\mu_2\mu_1) \to B$$
,  $\alpha_1: A_2 \to Im(f\mu_2\mu_1)$ ,  $\mu'_2: Im(f\mu_2) \to B$  y  $\alpha_2: A_2 \to Im(f\mu_2)$ 

a los morfismos tales que  $f\mu_2 = \mu_2'\alpha_2$  y  $f\mu_2\mu_1 = \mu_1'\alpha_1$ . Entonces  $f\mu_2\mu_1 = (\mu_2'\alpha_2)\mu_1$ . Por la propiedad universal de la imagen en  $Im(f\mu_2\mu_1)$  existe  $\gamma: Im(f\mu_2\mu_1) \to Im(f\mu_2)$  tal que  $\mu_2'\gamma = \mu_1$ . En particular  $\gamma$  es mono, entonces  $Im(f\mu_2\mu_1) \subseteq Im(f\mu_2)$  y así  $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ .

b) Como se tienen los siguientes diagramas conmutativos



en particular se tiene que  $f\beta_1 = \nu_2(\nu_1\beta_2)$  y este diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}(B_1) & \xrightarrow{\nu_1 \beta_2} & B_2 \\
& & \downarrow & \downarrow \\
& & A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

Entonces  $\exists \eta: f^{-1}(B_1) \to f^{-1}(B_2)$  tal que  $\beta'_2 \eta = \nu \beta_2$  y  $\beta'_1 \eta = \beta_1$ 

Como  $f^{-1}(B_2)$  es pull-back, y  $\nu_2$  es mono, entonces  $\beta_1'$  es mono y por lo tanto  $\eta$  es mono. Así  $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ .

c) Puesto que  $f^{-1}(f(A_1))$  es un pull back, tenemos un diagrama conmutativo de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}(f(A_1)) & \xrightarrow{f_2} & f(A_1) \\
\downarrow^{f_1} & & \downarrow^{\mu'_1} \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

Además (apoyandonos con la notación del inciso a) ) tenemos que el siguiente diagrama conmuta  $\,$ 

$$\begin{array}{ccc}
A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & f(A_1) \\
\downarrow^{\mu_2 \mu_1} & & \downarrow^{\mu'_1} \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

Entonces, por ser  $f^{-1}(f(A_1))$  un pull-back,  $\exists ! g : A_1 \to f^{-1}(f(A_1))$  tal que  $f_2g = \alpha_1$  y  $f_1g = \mu_2\mu_1$ .

Como  $\mu_2\mu_1$  es mono por ser  $\mu_2$  y  $\mu_1$  monos, entonces g es mono y así  $A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$ .

d) Observemos que, como  $f^{-1}(B_1)$  es pull-back, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}(B_1) & \xrightarrow{\beta_2} & B_1 \\
& & \downarrow \\
\beta_1 & & \downarrow \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

conmuta, entonces por propiedades de las imagenes, existen  $\mu::Im(f\beta_1)\hookrightarrow B$  y  $f':f^{-1}(B_1)\to Im(f\beta_1)$  tales que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}(B_1) & \xrightarrow{f'} & Im(f\beta_1) \\
\beta_2 & & & \downarrow \\
B_1 & \xrightarrow{f\beta_1} & & B
\end{array}$$

es un diagrama conmutativo, por lo que existe un único  $g': Im(f\beta_1) \to B_1$ , tal que  $\nu_2\nu_1g' = \mu$  y  $gf' = \beta_2$  dado por la propiedad universal de las imagenes. Mas aún, notemos que g' es mono, pues  $\mu$  es mono y  $\mu = \nu_2\nu_1g'$ . Así  $f\beta_1 = \nu_2\nu_1\beta_2$ . Por lo que  $Im(f\beta_1) = f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$ .

Ej 27.

Ej 28.

**Ej 29.** Pruebe que Mod(R) tiene kerneles.

Demostración. Sea  $f: A \to B$  morfismo en Mod(R),  $K = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$  y  $\mu: K \to A$  la función inclusión.

Primero demostraremos que  $K \leq A$ .

Sean  $r \in R$   $a, b \in K$ , entonces  $f(ra + b) = rf(a) + f(b) = r \cdot 0 + 0 = 0$ , por lo tanto  $ra + b \in K$ , entonces  $K \in Mod(R)$  y  $\mu$  es morfismo.

 $Ker_1$  Como  $f\mu: K \to B$  y para toda  $x \in K$  se tiene que  $f\mu(x) = f(\mu(x)) = f(x) = 0$  entonces  $f\mu = 0$ .

 $Ker_2$  Supongamos  $g: X \to A$  es un morfismo tal que fg = 0, entonces  $g(x) \in K$  pues f(g(x)) = 0. Así definimos el morfismo  $h: X \to K$  tal que h(x) = g(x), entonces  $\mu h(x) = \mu(g(x)) = g(x) \ \forall x \in X$ , por lo tanto  $\mu h = g$  y así K es kernel de f.

Por lo tanto Mod(R) tiene kernels.

**Ej 30.** Pruebe que Mod(R) tiene cokernels.

Demostración. Sea  $f: M \to N$  en Mod(R). Como f es morfismo de R- módulos, entonces  $im(f) \leq N$ .

Consideremos  $\pi: N \to N/Im(f)$ , donde  $\pi(k) = k + Im(f)$  es la proyección canónica. Se afirma que  $\pi$  es un cokernel de f.

CoKer<sub>1</sub> Para toda  $x \in M$  se tiene que  $\pi f(x) = \pi(f(x)) = 0$  pues  $f(x) \in Im(f)$ .

 $[CoKer_2]$  Propiedad universal. Supongamos existe  $g: N \to X$  un morfismo de modulos tal que gf = 0, entonces definimos  $g': {}^{N}/_{Im(f)} \to X$  de tal forma tal que  $\forall [x] \in {}^{N}/_{Im(f)}$ , g'([x]) = g(x), donde [x] es el representante de la clase de equivalenia de x.

Sean  $[x], [y] \in ^{N}/_{Im(f)}$  y  $r \in R$ , entonces

$$g'(r[x] + [y]) = g'([rx + y]) = g(rx + y) = rg(x) + g(y) = rg'(x) + g'(y).$$

Observamos que g' está bien definida, pues si  $a, b \in [x]$ , etonces existen  $k_1, k_2 \in Im(f)$  tales que  $a + k_1 = b + k_2 = x$  y  $g(k_1) = g(k_2) = 0$ , entonces

$$g'([a]) = g(a) = g(a) + g(k_1) = g(a+k_1) = g(b+k_2) = g(b) + g(k_2) = g(b) = g([b]).$$

Por lo tanto g' es un morfismo de R-módulos y  $g'\pi(x)=g'([x])=g(x)$  por lo que  $g'\pi=g$  y así  $\pi$  es Cokernel.