# Ejercicios 16-31

Arruti, Sergio

**Lema 1.** Sea $f$ un morfismo en $Sets$, entonces

*a*) $f : A \hookrightarrow B$ es un mono en $Sets$ si y sólo si $f$ es inyectiva;

*b*) $f : A \twoheadrightarrow B$ es un epi en $Sets$ si y sólo si $f$ es suprayectiva.

Así en partícular se tiene que los monomorfismos, respectivamente epimorfismos, categóricos en $Mod\,(R)$ son los monomorfismos, respectivamente epimorfismos, de $R$-módulos.

*Demostración.* $\boxed{a)}$ Notemos primeramente que una función vacía $\varnothing_C$, $C \in Sets$, es inyectiva por la vacuidad de su dominio. Más aún, es un mono en $Sets$, en efecto: si $g, h \in$ son tales que $\varnothing_C f = \varnothing_A g$, entonces necesariamente $D = \varnothing$ y así, dado que existe una única función de $\varnothing$ en $\varnothing$, $f = g$. Con lo cual la afirmación es válida para funciones vacía y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \neq \varnothing$ (y en consecuencia que $B \neq \varnothing$).
$\boxed{a) \implies}$ Sean $a, b \in A$ tales que $f\,(a) = f\,(b)$, entonces las funciones

$$\begin{aligned} g : A &\to A \\ x &\mapsto a, \\ h : A &\to A \\ x &\mapsto b, \end{aligned}$$

satisfacen que $fg = fh$, luego $g = h$ por ser $f$ mono y por tanto $a = b$.
$\boxed{a) \impliedby}$ Supongamos que $g, h \in$ son tales que $fg = fh$. Si $A' = \varnothing$ entonces $g = \varnothing_A = h$; en caso contrario sea $a \in A'$, así

$$\begin{aligned} & f\,(g\,(a)) = fg\,(a) = fh\,(a) = f\,(h\,(a)) \\ \implies\ & g\,(a) = h\,(a)\,, && f \text{ es inyectiva} \\ \implies\ & g = h. \end{aligned}$$

$\boxed{b)}$ Verificaremos primero que la función $\varnothing_\varnothing$ i.e. la única función cuyo dominio y contradominio es $\varnothing$ es epi y suprayectiva. Si $g, h \in$ son tales que $g\varnothing_\varnothing = h\varnothing_\varnothing$, entonces $g = \varnothing_Z = h$; por su parte la suprayectividad de $\varnothing_\varnothing$ se sigue por la vacuidad de su contradominio. Así, en adelante podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B \neq \varnothing$.

$\boxed{b) \implies}$ Notemos que necesariamente $A \neq \varnothing$, pues en caso contrario las aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi : B &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto 0, \\ \psi : B &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto 1, \end{aligned}$$

son funciones bien definidas, pues $B \neq \varnothing$, las cuales satisfacen que $\phi \neq \psi$ y sin embargo $\phi f = \varnothing_{\{0,1\}} = \psi f$, lo cual contradeciría que $f$ es epi. Así $1_B|_{f(A)}$ no es una función vacía y más aún satisface que

$$\begin{aligned} & 1_B|_{f(A)} f = f = 1_B f \\ \implies & 1_B = 1_B|_{f(A)}, && f \text{ es epi} \\ & \implies f(A) = B \\ & \implies f \text{ es suprayectiva.} \end{aligned}$$

$\boxed{b) \impliedby}$ Sean $g, h \in Hom_{Sets}(B, C)$ tales que $gf = hf$ y $b \in B$. Como $f$ es suprayectiva $\exists\ a \in A\ f(a) = b$, así

$$\begin{aligned} & g(b) = gf(a) = hf(a) = h(b) \\ \implies & g = h. \end{aligned}$$

□

**Ej 16.** La categoría $Sets$ tiene uniones.

*Demostración.* Sea $\{u_i : A_i \hookrightarrow A\}$ una familia de subobjetos de un conjunto $A$ y $U := \bigcup_{i \in I} \Im(u_i)$. Si $I = \varnothing$ entonces $U = \varnothing$ y la función vacía $\varnothing_A : \varnothing \to A$ es un subobjeto de $A$ que satisface por vacuidad que $\forall\ i \in I$ $u_i \leq \varnothing_A$. Resta verificar que $\varnothing_A$ satisface la propiedad universal de la unión, para lo cual por vacuidad basta con verificar que si $f \in Hom(Sets)$ y $\mu \in Mon_{Sets}(-, A)$, entonces $\varnothing_A$ es llevado a $\mu$ vía $f$. Si consideramos la función vacía $\varnothing_B : \varnothing \to B$, entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \varnothing_A \arrow[r, "\varnothing_B"] \arrow[d, "\varnothing_A"'] & B' \arrow[d, "\mu"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta en $Sets$ puesto que $f\varnothing_A, \mu\varnothing_B \in Hom_{Sets}(\varnothing, B)$ y existe una única función de $\varnothing$ en $B$.
En adelante supondremos que $I \neq \varnothing$. Si $U = \varnothing$ entonces $\forall\ i \in I\ A_i = \varnothing$

y por lo tanto cada $u_i$ coincide con la función vacía $\varnothing_A$. De modo que se satisface que $\forall\ i \in I\ u_i \leq \varnothing_A$ y en forma análoga al caso $I = \varnothing$ se verifica que si $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ son tales que cada $u_i$ es llevado a $\mu$ vía $f$, entonces $\varnothing_A$ es llevado a $\mu$ vía $f$, y así $\varnothing_A$ es una unión para la familia $\{u_i\}_{i\in I}$.
Finalmente si $U \neq \varnothing$ entonces necesariamente $\exists\ i \in I$ tal que $A_i \neq \varnothing$. Así consideremos $inc$ la inclusión de $U$ en $A$, la cual es un mono en $Sets$ y para cada $i \in I$ las funciones dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_i : A_i &\to U \\ a &\mapsto u_i\left(a\right), \end{aligned}$$

en caso que $A_i \neq \varnothing$, o bien $\gamma_i := \varnothing_U$ si $A_i = \varnothing$.
Así, si $A_i = \varnothing$, como $\varnothing_A$ es la única función de $\varnothing$ en $A$, entonces

$$u_i = \varnothing_A = inc\varnothing_U = inc\gamma_i.$$

Si ahora $A_i \neq \varnothing$, entonces

$$\begin{aligned} & u_i\left(a\right) = inc\gamma_i\left(a\right), && \forall\ a \in A_i \\ \Longrightarrow\ & u_i = inc\gamma_i. \end{aligned}$$

Con lo cual se ha verificado que $\forall\ i \in I\ u_i \leq inc$. Supongamos ahora que $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ son funciones tales que cada $u_i$ es llevado a $\mu$ vía $f$, es decir para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta en $Sets$

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\exists\ g_i"] \arrow[d, "u_i"'] & B' \arrow[d, "\mu"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}.$$

Notemos que para cada $y \in U\ \exists\ i \in I$ y $x \in A_i$ tales que $y = u_i\left(x\right)$, así consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} h : U &\to B' \\ u_i\left(x\right) &\mapsto g_i\left(x\right). \end{aligned}$$

Sea $y \in U$ con $i, j \in I$ y $x \in A_i, z \in A_j$ tales que $u_i\left(x\right) = y = u_j\left(z\right)$, entonces de la conmutatividad de los diagramas anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} \mu\left(g_j\left(z\right)\right) &= fu_j\left(b\right) = f\left(x\right) = f\left(u_i\left(x\right)\right) \\ &= fu_i\left(x\right) = \mu\left(g_i\left(x\right)\right). \end{aligned}$$

Lo anterior, en conjunto a que $\mu$ es inyectiva por ser un mono en $Sets$, garantiza que $g_j\left(z\right) = g_i\left(x\right)$ y así $h$ está bien definida.
Sea $y \in U$, con $i \in I$ y $x \in A_i$ tales que $y = u_i\left(x\right)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} & finc\left(y\right) = f\left(y\right) = f\left(u_i\left(x\right)\right) = \mu g_i\left(x\right) = \mu\left(h\left(y\right)\right) \\ & \qquad\qquad = \mu h\left(y\right) \\ \Longrightarrow\ & finc = \mu h. \end{aligned}$$

Con lo cual *inc* es llevado a $\mu$ vía $f$ y por tanto es una unión para la familia $\{u_i\}_{i\in I}$.

$\square$

**Ej 17.** Pruebe que, para un anillo $R$, La categoría $Mod(R)$ tiene uniones.

*Demostración.* Sean $A \in Mod(R)$, $\{\alpha_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$ en $Mod(R)$ y la inclusión de submódulos

$$\nu\colon \sum_{i\in I} Im(\alpha_i) \longrightarrow A.$$

Recordemos que $\left(x \in \sum_{i\in I} Im(\alpha_i) \iff x = \sum_{i\in J} \alpha_j(a_j)\right)$ con $J$ finito y $a_j \in A_j$ para cada $j \in J$.

$\boxed{U_1)}$ $(\alpha_i \leq \nu \ \forall i \in I)$

Como $\alpha_i(x) \in Im(\alpha_i)\ \forall x \in A_i$, entonces definimos $\nu_i : A_i \to Im(\alpha_i)$ como $\nu_i(x) = \alpha_i(x)$. Observemos que $\nu_i(x) \in \sum_{i\in I} Im(\alpha_i)$ pues si $J = \{i\}$ entonces $\sum_{i\in J} \alpha_i(x) = \alpha_i(x) = \nu(x)$. Por lo tanto $\alpha_i(x) = \nu \circ \nu_i(x)$ y así $\alpha_i \leq \nu \ \ \forall i \in I$.

$\boxed{U_2)}$ Supongamos $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$ es tal que cada $u_i$ es llevado via $f$, a algún subobjeto $\mu : B' \hookrightarrow B$. Tal como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\sum_{i\in I} Im(\alpha_i) \arrow[ddr, bend right, "\nu"'] & & \\
& A_i \arrow[r, dotted, "f_i'"] \arrow[d, hook, "\alpha_i"'] & B' \arrow[d, hook, "\mu"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Como para todo $x \in \sum_{j\in I} Im(\alpha_j)$, $\ x = \alpha_{i_0}(x_0) + \ldots + \alpha_{i_n}(x_n)$ donde $x_n \in A_{i_n}$ e $i_n \in J \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, así definimos $g : \sum_{j\in I} Im(\alpha_j) \longrightarrow B'$ como $g(x) = f'_{i_0}(x_o) + \ldots + f'_{i_n}(x_n)$.

Observemos que es morfismo de módulos:

Sean $r \in R$, $a, b \in \sum_{i\in I} Im(\alpha_i)$ y supongamos que

$$\begin{aligned} a &= \alpha_{h_0}(a_0) + \ldots + \alpha_{h_n}(a_n) \\ b &= \alpha_{k_0}(b_0) + \ldots + \alpha_{k_m}(b_m) \qquad n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} g(ra+b) &= g\left(r\alpha_{h_0}(a_0) + \ldots + r\alpha_{h_n}(a_n) + r\alpha_{k_0}(b_0) + \ldots + r\alpha_{k_m}(b_m)\right) \\ &= g\left(\alpha_{h_0}(ra_0) + \ldots + \alpha_{h_n}(ra_n) + \alpha_{k_0}(b_0) + \ldots + \alpha_{k_m}(b_m)\right) \\ &= f'_{h_0}(ra_0) + \ldots + f'_{h_n}(ra_n) + f'_{k_0}(b_0) + \ldots + f'_{k_m}(b_m) \\ &= \left(rf'_{h_0}(a_0) + \ldots + rf'_{h_n}(a_n)\right) + f'_{k_0}(b_0) + \ldots + f'_{k_m}(b_m) \\ &= r\left(f'_{h_0}(a_0) + \ldots + f'_{h_n}(a_n)\right) + f'_{k_0}(b_0) + \ldots + f'_{k_m}(b_m) \\ &= rg(a) + g(b). \end{aligned}$$

Por lo tanto es morfismo.

Así $\forall x \in \sum_{i\in I} Im(\alpha_i)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mu g(x) &= \mu\left(\sum_{k=0}^{n} f'_{i_k}(x_k)\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu f'_{i_k}(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\alpha_{i_k}(x_k) = f\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_{i_k}(x_k)\right) \\ &= f\nu(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{i\in I} Im(\alpha_i)$ es la unión categorica.

$\square$

**Ej 18.** Sean $\mathscr{C}$ una categoría con ecualizadores $\alpha, \beta \colon A \to B$ y $\{\mu_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$ tal que existe $\mu : \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow A$. Pruebe que $(\alpha\mu_i = \beta\mu_i \;\; \forall i \in I) \Rightarrow (\alpha\mu = \beta\mu)$.

*Demostración.* Supongamos $\alpha\mu_i = \beta\mu_i$ $\forall i \in I$ y que $I \neq \emptyset$ entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[d, "\mu_i"] & \\ A \arrow[r, shift left, "\beta"] \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & B \end{tikzcd}.$$

Como $\mathscr{C}$ tiene ecualizadores, existe $\eta : K \to A$ tal que $\alpha\eta = \beta\eta$ y si $f : X \to A$ en $\mathscr{C}$ es tal que $\beta f = \alpha f$, entonces $\exists! f' : X \to K$ tal que $\eta f' = f$.

Así como $\alpha\mu_i = \beta\mu_i$ $\forall i \in I$, entonces para cada $i \in I$ $\exists! \mu_i' : A_i \to K$ tal que $\eta\mu_i' = \mu_i$, es decir, se tiene que para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[dl, dashed, "\exists! f_i"'] \arrow[d, hook, "\mu_i"] & \\
K \arrow[r, "\eta"'] & A \arrow[r, shift left, "\beta"] \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & B
\end{tikzcd}$$

entonces, $\eta f_i = \mu_i$. Con esto en mente, tenemos el siguiente diagrama para cada $i \in I$:

$$\begin{tikzcd}
\bigcup\limits_{i\in I} A_i \arrow[ddr, bend right, "\mu"'] & & \\
& A_i \arrow[r, "f_i'"] \arrow[d, hook, "\mu_i"'] & K \arrow[d, hook, "\eta"] \\
& A \arrow[r, "Id_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

Entonces por la propiedad $(U_2)$ de la unión, existe $f : \bigcup\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow K$ tal que $\eta f = \mu$. Así

$$\alpha\mu = \alpha\eta f = \beta\eta f = \beta\mu.$$

En el caso en que $I = \emptyset$, $\eta : K \to A$ el ecualizador de $(\alpha, \beta)$ cumple que $\forall i \in I \quad \mu_i \leq \eta$ (por vacuidad), entonces por la observación 1.3.4(2) $\mu \leq \eta$, es decir, existe $\gamma : \bigcup\limits_{i\in I} A_i \longrightarrow K$ tal que $\mu = \eta\gamma$ así

$$\alpha\mu = \alpha\eta\gamma = \beta\eta\gamma = \beta\mu.$$

$\square$

**Ej 19.** Si $f : A \hookrightarrow B$ está en una categoría $\mathscr{C}$, entonces $f : A \hookrightarrow B$ es una imagen de $f$.

*Demostración.* Se tiene que $f$ es un subobjeto y que $f = f 1_A$. Si $g : C \hookrightarrow B$ es un subobjeto para el cual $\exists\ h : A \to C$ tal que $f = gh$, entonces $f \leq g$ y por tanto $Im(f) \simeq f$ en $Mon_{Sets}(-, B)$. $\square$

**Ej 20.** $Mod(R)$ y $Sets$ tienen imágenes epimórficas.

*Demostración.* Sea $f : A \to B$ en $Sets$. Si $f$ es la función vacía $\varnothing_B$ entonces por el Lema 1 se tiene que $f$ es mono y por tanto es una imagen para sí mismo. Así supongamos sin pérdida de generalidad que $A \neq \varnothing$. Luego $B \neq \varnothing$ y se tiene que $inc : f(A) \to B$ es una función no vacía e inyectiva, por tanto un mono en $Sets$, la cual satisface que, si

$$\begin{aligned} g : A &\to F(A) \\ a &\mapsto f(A), \end{aligned}$$

$f = incg$.
Ahora supongamos que $\mu : C \hookrightarrow B$ y $h : A \to C$ son tales que $f = \mu h$. Notemos que para cada $y \in f(A)$ $\exists$ $a \in A$ tal que $y = f(a)$, así consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} k : f(A) &\to C \\ f(a) &\mapsto h(a). \end{aligned}$$

Si $a, b \in A$ son tales que $x = f(a) = f(b)$, entonces

$$\begin{aligned} &\mu h(a) = f(a) = x = f(b) = \mu h(b) \\ \implies\ & h(a) = h(b), && \mu \text{ es mono} \end{aligned}$$

con lo cual $k$ es una función bien definida y satisface que, dados $y \in f(A)$ y $x \in A$ tal que $y = f(x)$,

$$\begin{aligned} &\mu k(y) = \mu(h(x)) = f(x) = y = inc(y) \\ \implies\ & inc = \mu k. \end{aligned}$$

Con lo anterior se ha verificado que $Sets$ tiene imágenes, más aún, tiene imágenes epimórficas puesto que la función $g$ así construida es suprayectiva y por tanto epi.
Dado que todo $R$-módulo es en partícular un conjunto no vacío, en forma análoga a lo anterior se verifica que $Mod(R)$ tiene imágenes epimórficas, puesto que si ahora $f : A \to B$ en $Mod(R)$ entonces la inclusión de módulos es un morfismo de $R$-módulos, $g$ también lo es al serlo $f$, y $k$ lo es al serlo $f$ y $h$.

□

**Ej 21.** Pruebe que Sets tiene coimagenes.

*Demostración.* Sea $f : A \to B$ en Sets. Consideremos la relación $\sim_f$ en $A$, donde $x \sim_f y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$.

Esta relación (que denotaremos por $\sim$ por simplicidad) es una relación de equivalencia como se muestra a continuación:

$\boxed{\text{Reflexividad}}$ Sea $x \in A$, como $f(x) = f(x)$ entonces $x \sim x$.

$\boxed{\text{Simetría}}$ Sean $a, b \in A$ tales que $a \sim b$, entonces $f(a) = f(b)$, por lo que $f(b) = f(a)$ y así $b \sim a$.

$\boxed{\text{Transitividad}}$ Sean $x, y, z \in A$ tales que $x \sim y$, $y \sim z$, entonces $f(x) = f(y) = f(z)$ por lo tanto $f(x) = f(z)$ y en consecuencia $x \sim z$.

Sea $\pi : a \to {}^{A}\!/\!_{\sim}$ el epi canonico donde $\pi(a) = [a] := \{x \in A \,|\, x \sim a\}$, se afirma que es una coimagen de $f$.

Observemos que, si $A, B \neq \emptyset$, para toda $b \in B$ tal que $b = f(a)$ con $a \in A$ se tiene que $\pi(a) = [a]$ por lo que se puede definir $f' : {}^{A}\!/\!_{\sim} \to B$ como $f'([a]) = f(a)$. Así se tiene que:

(1) $f'$ está bie definida.

Sean $[a][b] \in [x]$ con $[x] \in {}^{A}\!/\!_{\sim}$, entonces $a \sim x \sim b$, por lo que $f(a) = f(x) = f(b)$, es decir, $f'([a]) = f'([x]) = f'([b])$.

(2) $(f = f'\pi)$.

Sea $a \in A$. $f'\pi(a) = f'([a]) = f(a)$.

Para ver que $(CoIm_2)$ se cumple, supongamos que existe $p' : A \twoheadrightarrow J'$ un objeto cociente de $A$ tal que $\exists f'' : J' \to B$ donde $f = f''p'$.
Sea $a \in A$, entonces $\pi(a) = [a]$ y $p'(a) = a' \in J'$. Como $p'$ es epi en Sets entonces es supra, así para todo $x \in J'$ existe $a_x \in A$ tal que $p'(a_x) = x$, así definimos $\nu : J' \to {}^{A}\!/\!_{\sim}$ como $\nu(x) = \pi(a_x)$.

Se tiene entonces que $\forall a \in A, \quad \nu p'(a) = \nu(p'(a)) = \pi(a)$.

En el caso de que $B$ sea el conjunto vacio, entonces $A$ tiene que ser el conjunto vacio y $f : A \to B$ es la función vacia, así $f = p$ tiene que ser su coimagen pues si $f' : B \to B$ es la función identidad en $B$, entonces $f = f'p$ y si $p' : B \twoheadrightarrow B$ es un objeto cociente de $A$ tal que $f'' : J' \to B$ con $f''p' = f$ entonces $f'' : J' \to B$ es la función vacia y $J'$ es el conjunto vacio. Así $p' : A \to J'$ es la función vacia y por lo tanto $p' = p$ y $Id_{J'} \circ p' = p$.

En caso de que $A$ sea el conjunto vacio y $B$ sea distinto del vacio, entonces $(CoIm_1)$ se cumple igual que en el caso anterior, tomando a $p : \emptyset \to \emptyset$.

Para probar $(CoIm_2)$ supongamos que $p' : A \twoheadrightarrow J'$ es un objeto cociente de $A$ tal que $exists f'' : J' \to B$ tal que $f = f''p'$, pero $p'$ es epi, y como $A = \emptyset$ entonces $J' = \emptyset$. Así, si definimos $u$ como la identidad en el vacio se tiene que $p = up'$.

$\square$

**Ej 22.** Pruebe que $Mod(R)$ tiene coimagenes.

*Demostración.* Sea $A \in Obj(Mod(R))$, entonces $A \neq \emptyset$. Se afirma que el epi canonico $\pi : A \to A/_{Ker(f)}$ es una coimagen.

Sea $a \in A$, entonces $f(a) \in B$. Definimos $f' : A/_{Ker(f)} \to B$ como $f'([a]) = f(a)$.

Probemos que está bien definido. Sean $a, b \in [x]$ entonces $a + k_1 = b + k_2 = x$ con $k_1, k_2 \in Ker(f)$, asi

$$
\begin{aligned}
f'([a]) &= f(a) = f(a) + f(K_1) = f(a + K_1) \\
&= f(b + K_2) = f(b) + f(K_2) = f(b) = f'([b]).
\end{aligned}
$$

Veamos que es morfismo. Sean $r \in R,\ [a], [b] \in A/_{Ker(f)}$ entonces

$$f'(r[a] + [b]) = f'([ra + b]) = f(ra + b) = rf(a) + f(b) = f'(r[a]) + f'([b]).$$

En consecuencia se tiene que $\pi$ cumple $(CoIm_1)$.

Ahora supongamos que $p' : A \twoheadrightarrow J'$ es un objeto cociente de $A$ tal que existe $f'' : J' \to B$ que cumple que $f = f''p'$. Como $p'$ es epi, entonces es suprayectiva en $Mod(R)$, porlo que para cada $x \in J'$ existe $a \in A$ tal que $p'(a) = x$.

Definimos $\nu : J' \to A/_{Ker(f)}$ como $\nu(x) = [a]$ donde $p'(a) = x$. Esta función está bien definida pues si $a, b \in A$ son tales que $p'(a) = p'(b)$ entonces $f''p'(a) = f''p'(b)$ y así $f(a) = f(b)$, entonces $f(a - b) = 0$, por lo que $a - b \in Ker(f)$ y en consecuencia $[a] = [b]$.

Veamos que $\nu$ es morfismo. Si $r \in R\ a, b \in J'$ donde $\nu(a) = [x]$, $\nu(b) = [y]$, $a = p'(x)$ y $b = p'(y)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\nu(ra + b) &= \nu(rp'(x) + p'(y)) = \nu(p'(rx + y)) \\
&= [rx + y] = r[x] + [y] = r\nu(a) + \nu(b).
\end{aligned}
$$

Así se tiene que $\forall a \in A\ \ \nu p'(a) = \nu(p'(a)) = [a] = \pi(a)$ por lo que $(CoIm_2)$ se cumple y $Mod(R)$ tiene coimagenes.

□

**Ej 23.** Sean $\mathscr{C}$ una categoría balanceada, con imágenes epimórficas y

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

en $\mathscr{C}$. Si $\mu : A' \hookrightarrow A$ en $\mathscr{C}$, entonces $g\left(f\left(A'\right)\right) = gf\left(A'\right)$ en $\overline{Mon_{\mathscr{C}}\left(-,C\right)}$.

*Demostración.* Dado que $\mathscr{C}$ tiene imágenes epimórficas existen subobjetos

$$\begin{aligned} \nu : Im\left(f\mu\right) &\hookrightarrow B, \\ \eta : Im\left(g\nu\right) &\hookrightarrow B, \\ \psi : Im\left(\left(gf\right)\mu\right) &\hookrightarrow B, \end{aligned}$$

que son imágenes respectivamente de $f\mu, g\nu$ y $\left(gf\right)\mu$, y existen epimorfismos $\alpha_1 : A' \twoheadrightarrow Im\left(f\mu\right)$ y $\alpha_2 : Im\left(f\mu\right) \twoheadrightarrow Im\left(g\nu\right)$ tales que

$$\begin{aligned} f\mu &= \nu\alpha_1, \\ g\nu &= \eta\alpha_2. \end{aligned} \tag{*}$$

Notemos que por ser $\nu$ imagen de $f\mu$ y subobjeto de $B$ se tiene que $g\left(f\left(A'\right)\right) = g\left(Im\left(f\mu\right)\right) = Im\left(g\nu\right)$, mientras que $gf\left(A'\right) = Im\left(\left(gf\right)\mu\right)$. Así pues basta con verificar que $\eta$ es una imagen para $\left(gf\right)\mu$, ya que en tal caso $Im\left(g\nu\right) \simeq Im\left(\left(gf\right)\mu\right)$ en $Mon_{\mathscr{C}}\left(-,C\right)$.
De (*) se tiene que

$$gf\left(\mu\right) = g\left(f\mu\right) = g\left(\nu\alpha_1\right) = \left(\eta\alpha_2\right)\alpha_1 = \eta\left(\alpha_2\alpha_1\right).$$

En la última igualdad $\eta$ es un mono, mientras que $\alpha_2\alpha_1$ es un epi al serlo $\alpha_1$ y $\alpha_2$, de modo que al ser $\mathscr{C}$ balanceada (ver Proposición 1.4.3) se tiene que $\eta$ es una imagen para $\left(gf\right)\mu$.

□

**Ej 24.** Sea el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & B'' \arrow[dr, "\mu"] & \\ P \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & & B' \arrow[d, "\alpha"] \\ A \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd}$$

conmutativo en una categoría $\mathscr{C}$, con $\mu$ y $\alpha$ subobjetos. Si $\beta_1$ es una imagen inversa por $f$ de $\alpha_1$, entonces también lo es de $\alpha\mu$.

*Demostración.* Notemos que de la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que

$$\begin{aligned}(\alpha\mu)\,f' = \alpha\,(\mu f') &= \alpha\beta_2\\ &= f\beta_1,\end{aligned}$$

i.e. el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B'' \arrow[d, "\alpha\mu"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}. \tag{*}$$

Sean $\gamma_1 : P' \to A$ y $\gamma_2 : P' \to B''$ tales que $f\gamma_1 = (\alpha\mu)\,\gamma_2 = \alpha\,(\mu\gamma_2)$. Como

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\alpha"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \tag{**}$$

es un pull-back por ser $\beta_1$ imagen inversa por $f$ de $\alpha$, de la propiedad universal del pull-back se sigue que $\exists!\ \delta : P' \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "\mu\gamma_2"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\alpha"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}.$$

De modo que $\delta$ es tal que $\gamma_1 = \beta_1\delta$ y además

$$\begin{aligned}&(\alpha\mu)\,(f'\delta) = \alpha\,(\beta_2)\,\delta = \alpha\,(\mu\gamma_2) = (\alpha\mu)\,\gamma_2\\ &\implies \gamma_2 = f'\delta. \qquad\qquad \alpha\mu \text{ es mono}\end{aligned}$$

Sea $\delta' : P' \to P$ en $\mathscr{C}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, "\delta'"] \arrow[drr, bend left, "\gamma_2"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B'' \arrow[d, "\alpha\mu"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, luego $\delta'$ es tal que $\gamma_1 = \beta_1\delta'$ y

$$\mu\gamma_2 = (\mu f')\,\delta' = \beta_2\delta'.$$

Por lo tantto, aplicando la propiedad universal del pull-back a (**) se tiene que $\delta' = \delta$, con lo cual se tien que existe un único morfismo $\delta$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "\gamma_2"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B'' \arrow[d, "\alpha\mu"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd},$$

i.e. (*) es un pull-back y así se tiene lo deseado.

□

**Ej 25.** Considere el siguiente diagrama conmutativo en una categoría $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
& B' \arrow[d, hook, "h"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & B \\
& I \arrow[u, hook', "\mu"']
\end{tikzcd}$$

<u>Pruebe que:</u> si $\exists f^{-1}(B')$ y $B' \cap Y$, entonces $f^{-1}(I \cap B') = f^{-1}(B')$ en $Mon_{\mathscr{C}}(-, A)$.

*Demostración.* Como $f^{-1}(B')$ y $B' \cap I$ existen, entonces se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(B') \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, hook, "h"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & B \\
& I \arrow[u, hook', "\mu"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
I \cap B' \arrow[r, "\nu_1"] \arrow[d, "\nu_2"'] \arrow[dr, hook, "i"] & I \arrow[d, hook, "\mu"] \\
B' \arrow[r, hook, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

Así se tiene que este diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(B') \arrow[r, "f'\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] \arrow[dr, "f\beta_1"] & I \arrow[d, "\mu"] \\
B' \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por lo tanto, como $I \cap B'$ es pull-back existe un único $\gamma : f^{-1}(B') \to I \cap B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B') \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & I \cap B' \arrow[r, "\nu_2"] \arrow[d, hook, "i"'] & B' \arrow[dl, hook', "h"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B & \end{tikzcd} \qquad \ldots(1)$$

Sean $\eta : X \to I \cap B'$, $\eta_2 : X \to A$ tales que $i\eta_1 = f\eta_2$.

Observamos que, entonces, $\nu_2\eta_1 : X \to B'$ y es tal que $h(\nu_2\eta_1) = i\eta_1 = f\eta_2$.

Así, como $f^{-1}(B')$ es pull-back de $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{\mu} B'$ , existe una única $\gamma' : X \to f^{-1}(B')$ tal que $\nu_2\gamma\gamma' = \nu_2\eta_1$ y $\beta_1\gamma' = \eta_2$ pero $\nu_2$ es mono por ser $i$ mono. Entonces $\gamma\gamma' = \eta_1$ y $\beta_1\gamma' = \eta_2$.

Ahora, si existiera $\alpha : X \to f^{-1}(B')$ tal que $\beta_1\alpha = \eta_2$ y $\gamma\alpha = \eta_1$, entonces $\nu_2\gamma\alpha = \gamma_2\eta_1$ y por lo anterior $\alpha = \gamma'$ pues es el único con esas propiedades. Por lo tanto $f^{-1}(B')$ es un pull-back, del diagrama (1), e implica que $f^{-1}(I \cap B')$ existe y sea igual a $f^{-1}(B)$ con los morfismos $\gamma$ y $\beta_1$.

$\square$

**Ej 26.** Sea $f : A \to B$ en una categoría $\mathscr{C}$. Consideremos subobjetos $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B$. Pruebe que se satisfacen las siguientes relaciones cada vez que ambos lados estén definidos.

*a*) $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

*b*) $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

*c*) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$

*d*) $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$

*Demostración.* Comenzaremos por nombrar monomorfismos correspondientes como subobjetos de $A$ y de $B$

$$A_1 \xhookrightarrow{\mu_1} A_2 \xhookrightarrow{\mu_2} A$$

$$B_1 \xhookrightarrow{\gamma_1} B_2 \xhookrightarrow{\gamma_2} B$$

$\boxed{a)}$ Sabemos que $f(A_1) = Im(f\mu_2\mu_1)$ y $f(A_2) = Im(f\mu_2)$. Llamaremos

$$\mu'_1 : Im(f\mu_2\mu_1) \to B\,, \qquad \alpha_1 : A_2 \to Im(f\mu_2\mu_1)\,,$$
$$\mu'_2 : Im(f\mu_2) \to B \quad \text{y} \quad \alpha_2 : A_2 \to Im(f\mu_2)$$

a los morfismos tales que $f\mu_2 = \mu'_2\alpha_2$ y $f\mu_2\mu_1 = \mu'_1\alpha_1$.
Entonces $f\mu_2\mu_1 = (\mu'_2\alpha_2)\mu_1$. Por la propiedad universal de la imagen en $Im(f\mu_2\mu_1)$ existe $\gamma : Im(f\mu_2\mu_1) \to Im(f\mu_2)$ tal que $\mu'_2\gamma = \mu_1$.
En particular $\gamma$ es mono, entonces $Im(f\mu_2\mu_1) \subseteq Im(f\mu_2)$ y así $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

$\boxed{b)}$ Como se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B_1) \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & B_1 \arrow[d, hook, "\nu_2\nu_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^{-1}(B_2) \arrow[r, "\beta'_2"] \arrow[d, hook, "\beta'_1"'] & B_2 \arrow[d, hook, "\nu_2"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

en particular se tiene que $f\beta_1 = \nu_2(\nu_1\beta_2)$ y este diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B_1) \arrow[r, "\nu_1\beta_2"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[d, hook, "\nu_2"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Entonces $\exists \eta : f^{-1}(B_1) \to f^{-1}(B_2)$ tal que $\beta'_2\eta = \nu\beta_2$ y $\beta'_1\eta = \beta_1$

Como $f^{-1}(B_2)$ es pull-back, y $\nu_2$ es mono, entonces $\beta'_1$ es mono y por lo tanto $\eta$ es mono. Así $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

$\boxed{c)}$ Puesto que $f^{-1}(f(A_1))$ es un pull back, tenemos un diagrama conmutativo de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(f(A_1)) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & f(A_1) \arrow[d, "\mu'_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Además (apoyandonos con la notación del inciso a) ) tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\mu_2\mu_1"'] & f(A_1) \arrow[d, "\mu'_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Entonces, por ser $f^{-1}(f(A_1))$ un pull-back, $\exists! g : A_1 \to f^{-1}(f(A_1))$ tal que $f_2 g = \alpha_1$ y $f_1 g = \mu_2\mu_1$.

Como $\mu_2\mu_1$ es mono por ser $\mu_2$ y $\mu_1$ monos, entonces $g$ es mono y así $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$.

$\boxed{d)}$ Observemos que, como $f^{-1}(B_1)$ es pull-back, el diagrama

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B_1) \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & B_1 \arrow[d, hook, "\nu_2\nu_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces por propiedades de las imagenes, existen
$\mu :: Im(f\beta_1) \hookrightarrow B$ y $f' : f^{-1}(B_1) \to Im(f\beta_1)$ tales que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B_1) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, hook, "\beta_2"'] \arrow[dr, "f\beta_1"] & Im(f\beta_1) \arrow[d, hook, "\mu"] \\ B_1 \arrow[r, "\nu_2\nu_1"'] & B \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, por lo que existe un único
$g' : Im(f\beta_1) \to B_1$, tal que $\nu_2\nu_1 g' = \mu$ y $gf' = \beta_2$ dado por la propiedad universal de las imagenes. Mas aún, notemos que $g'$ es mono, pues $\mu$ es mono y $\mu = \nu_2\nu_1 g'$. Así $f\beta_1 = \nu_2\nu_1\beta_2$.
Por lo que $Im(f\beta_1) = f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$.

$\square$

**Ej 27.** Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero. Entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \simeq 0$, si $I = \varnothing$.

*Demostración.* Afirmamos que en este caso el morfismo $0_{0,A}$ en $\mathscr{C}$ (el cual existe y es único por ser 0 un objeto cero de la categoría $\mathscr{C}$) es una unión para la familia de subobjetos $\mu_i : A_i \to A$. En efecto:
Notemos que $0_{A,0}0_{0,A}, 0_{0,A}0_{A,0}, Id_0 \in Hom_{\mathscr{C}}(0,0)$ y que $|Hom_{\mathscr{C}}(0,0)|$, luego $0_{A,0}0_{0,A} = Id_0 = 0_{0,A}0_{A,0}$ y por tanto $\mu$ es un iso en $\mathscr{C}$, así que en partícular es un subobjeto de $A$.
Sean $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ en $\mathscr{C}$, por ser $I = \varnothing$ basta con verificar que $0_{0,A}$ es llevado a $\mu$ vía $f$. Se tiene que

$$f0_{0,A} = 0_{0,B} = \mu 0_{0,B'},$$

con lo cual el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_{0,B'}"] \arrow[d, "0_{0,A}"'] & B' \arrow[d, "\mu"] \\ a \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta y así se tiene lo deseado.

$\square$

**Ej 28.** $Mod(R)$ es una categoría con objeto cero, en tanto que $Sets$ no lo es.

*Demostración.* $\boxed{Mod\,(R)}$ Sea $R$ un anillo. Consideremos un conjunto de la forma $A = \{*\}$, i.e. un conjunto de un sólo elemento. Notemos que por medio de las operaciones

$$\begin{aligned} + : A \times A &\to A \\ (*, *) &\mapsto *, \\ \cdot : R \times A &\to R \\ (r, *) &\mapsto *, \end{aligned}$$

se tiene que $(A, +, \cdot) \in Mod\,(R)$.
Sea $M \in Mod\,(R)$. Como $\forall\ B \in Sets\ |Hom_{Sets}\,(B, A)| = 1$, y todo morfismo de $R-$módulos en partícular es una función, se tiene que $\left|Hom_{Mod(R)}\,(M, A)\right| \leq 1$. Así pues para verificar que $A$ es objeto inicial en $Mod\,(R)$ resta verificar que existe un morfismo de $R-$módulos de $M$ en $A$. Sean $r \in R$, $m, n \in M$ y

$$\begin{aligned} f_M : M &\to A \\ m &\mapsto *, \end{aligned}$$

entonces $f\,(rm + n) = * = * + * = r \cdot * + * = rf\,(m) + f\,(n)$, y así $f_M \in Hom_{Mod(R)}\,(M, A)$.
Por otro lado, si $0_M$ es el neutro aditivo de $M$, entonces la función

$$\begin{aligned} g_M : A &\to M \\ * &\mapsto 0_M \end{aligned}$$

satisface $g_M \in Hom_{Mod(R)}\,(A, M)$. Más aún, si $h \in Hom_{Mod(R)}\,(A, M)$, entonces necesariamente $h$ es un morfismo de grupos y así

$$\begin{aligned} & h\,(0_A) = h\,(*) = 0_M = g_M\,(*) \\ \Longrightarrow\ & h = g_M. \qquad\qquad A = \{*\} \end{aligned}$$

Por lo tanto $A$ también es un objeto final y así es un objeto cero para $Mod\,(R)$.

$\boxed{Sets}$ Supongamos que existe un conjunto $A$ tal qu $A$ es objeto cero de $Sets$. Luego $\exists!\ f \in Hom_{Sets}(A, \varnothing)$, y así necesariamente $A = \varnothing$, lo cual es absurdo ya que $\varnothing$ no es un objeto final en $Sets$, puesto que si $B \neq \varnothing$ no existen funciones cuyo dominio sea $B$ y contradominio sea $\varnothing$.

$\square$

**Ej 29.** Pruebe que $Mod(R)$ tiene kerneles.

*Demostración.* Sea $f : A \to B$ morfismo en $Mod(R)$,
$K = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ y $\mu : K \to A$ la función inclusión.

Primero demostraremos que $K \leq A$.

Sean $r \in R$ $a, b \in K$, entonces $f(ra + b) = rf(a) + f(b) = r \cdot 0 + 0 = 0$, por lo tanto $ra + b \in K$, entonces $K \in Mod(R)$ y $\mu$ es morfismo.

$\boxed{Ker_1}$ Como $f\mu : K \to B$ y para toda $x \in K$ se tiene que $f\mu(x) = f(\mu(x)) = f(x) = 0$ entonces $f\mu = 0$.

$\boxed{Ker_2}$ Supongamos $g : X \to A$ es un morfismo tal que $fg = 0$, entonces $g(x) \in K$ pues $f(g(x)) = 0$. Así definimos el morfismo $h : X \to K$ tal que $h(x) = g(x)$, entonces $\mu h(x) = \mu(g(x)) = g(x)\ \ \forall x \in X$, por lo tanto $\mu h = g$ y así $K$ es kernel de $f$.

Por lo tanto $Mod(R)$ tiene kernels.

$\square$

**Ej 30.** Pruebe que $Mod(R)$ tiene cokernels.

*Demostración.* Sea $f : M \to N$ en $Mod(R)$. Como $f$ es morfismo de $R-$ módulos, entonces $im(f) \leq N$.

Consideremos $\pi : N \to {}^{N}\!/_{Im(f)}$, donde $\pi(k) = k + Im(f)$ es la proyección canónica. Se afirma que $\pi$ es un cokernel de $f$.

$\boxed{CoKer_1}$ Para toda $x \in M$ se tiene que $\pi f(x) = \pi(f(x)) = 0$ pues $f(x) \in Im(f)$.

$\boxed{CoKer_2}$ Propiedad universal. Supongamos existe $g : N \to X$ un morfismo de modulos tal que $gf = 0$, entonces definimos $g' : {}^{N}\!/_{Im(f)} \to X$ de tal forma tal que $\forall [x] \in {}^{N}\!/_{Im(f)}$, $\ g'([x]) = g(x)$, donde $[x]$ es el representante de la clase de equivalenia de $x$.

Sean $[x], [y] \in {}^{N}\!/_{Im(f)}$ y $r \in R$, entonces

$$g'(r[x] + [y]) = g'([rx + y]) = g(rx + y) = rg(x) + g(y) = rg'(x) + g'(y).$$

Observamos que $g'$ está bien definida, pues si $a, b \in [x]$, etonces existen $k_1, k_2 \in Im(f)$ tales que $a + k_1 = b + k_2 = x$ y $g(k_1) = g(k_2) = 0$, entonces

$$g'([a]) = g(a) = g(a) + g(k_1) = g(a + k_1) = g(b + k_2) = g(b) + g(k_2) = g(b) = g([b]).$$

Por lo tanto $g'$ es un morfismo de $R$-módulos y $g'\pi(x) = g'([x]) = g(x)$ por lo que $g'\pi = g$ y así $\pi$ es Cokernel.

$\square$

**Ej 31.** *Sets* y $Mod(R)$ son categorías localmente pequeñas.

*Demostración.* Sea $A \in Sets$. Afirmamos que si $\varphi : B \hookrightarrow A$, $\psi : C \hookrightarrow A \in Mon_{Sets}(-, A)$ entonces

$$\varphi \simeq \psi \text{ en } Mon_{Sets}(-, A) \iff Im(\varphi) = Im(\psi). \tag{A}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Se tiene que $\psi \leq \varphi$ y $\varphi \leq \psi$, luego $\exists\ g : C \to B$ y $h : B \to C$ tales que

$$\psi = \varphi g, \tag{*}$$
$$\varphi = \psi g \tag{**}$$

De (*) se sigue que

$$\begin{aligned} \psi(C) &= \varphi(g(C)) \subseteq \varphi(B) \\ \Longrightarrow\ Im(\psi) &\subseteq Im(\varphi). \end{aligned}$$

Análogamente, de (**) se obtiene que $Im(\varphi) \subseteq Im(\psi)$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Notemos que si $B = \varnothing$, entonces $Im(\psi) = Im(\varphi) = \varnothing$, y por lo tanto $C = \varnothing$, con lo cual $\varphi = \varnothing_A = \psi$; similarmente en caso que $C = \varnothing$. Por lo tanto en adelante supondremos que $B \neq \varnothing \neq C$.
Afirmamos que $\forall\ c \in C\ \exists!\ b_c \in B$ tal que $\psi(c) = \varphi(b)$. En efecto la existencia se sigue de que en partícular $Im(\psi) \subseteq Im(\varphi)$, mientras que la unicidad se sigue del hecho que $\varphi$ es un mono y por tanto inyectiva (ver Lema 1). Lo previamente demostrado garantiza que la aplicación

$$\begin{aligned} g : C &\to B \\ c &\mapsto b_C \end{aligned}$$

está bien definida y satisface que $\psi = \varphi g$. En forma análoga, empleando ahora que $Im(\psi) \supseteq Im(\varphi)$ y el que $\psi$ es un mono en *Sets*, se verifica que

$\exists\ h : B \to C$ tal que $\varphi = \psi h$ y así $\psi \simeq \varphi$ en $Mon_{Sets}(-, A)$.

La caracterización dada por (A) garantiza que la aplicación dada por

$$\begin{aligned} f : \overline{Mon_{Sets}(-, A)} &\to \mathscr{P}(A) \\ [\varphi] &\mapsto Im(\phi). \end{aligned}$$

está bien definida y es inyectiva. Más aún, $f$ es biyectiva puesto que si $D \subseteq A$ e $i$ es la inclusión conjuntista de $B$ en $A$, entonces $i \in Mon_{Sets}(-, A)$. La inyectividad de $f$ garantiza que la clase $\overline{Mon_{Sets}(-, A)}$ es un conjunto, puesto que $\mathscr{P}(A)$ lo es. Por tanto $Sets$ es localmente pequeña.

Por su parte, el que $Mod(R)$ sea localmente pequeña se sigue de que si $M \in Mod(R)$, entonces

$$\begin{aligned} k_M : \overline{Mon_{Mod(R)}(-, M)} &\to \overline{Mon_{Mod(R)}(-, M)} \\ [\varphi] &\mapsto [\varphi] \end{aligned}$$

está bien definida y es inyectiva.

$\square$