Ejercicios 73-87

Luis Gerardo Arruti Sebastian
Sergio Rosado Zúñiga

Ej 73. Para una categoría abeliana $\mathscr{A}$, pruebe que:

a) Si $0 \longrightarrow A \longrightarrow P \longrightarrow B \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{A}$, con $P \in Proj(\mathscr{A})$, entonces $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(B,X) \simeq \mathrm{Ext}^{n}_{\mathscr{A}}(A,X) \quad \forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathscr{A}$.

b) Si

$$\ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

es resolución proyectiva de $\mathscr{A}$, entonces
$\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A,X) \simeq \mathrm{Ext}^{1}_{\mathscr{A}}(Ker(d_{n-1}),X) \quad \forall X \in \mathscr{A}$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Por 1.10.28, como $0 \longrightarrow A \longrightarrow P \longrightarrow B \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{A}$, entonces para cada $X \in \mathscr{A}$ se tiene la sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow (B,X) \xrightarrow{(g,X)} (P,X) \xrightarrow{(f,X)} (A,X) \xrightarrow{\delta_0^*}$$

$$\xrightarrow{\delta_0^*} {}^1(B,X) \xrightarrow{{}^1(g,X)} {}^1(P,X) \xrightarrow{{}^1(f,X)} {}^1(A,X) \xrightarrow{\delta_0^*}$$

$$\xrightarrow{\delta_1^*} \quad \ldots$$

pero por 1.10.26 c), se tiene que $\mathrm{Ext}^{k}_{\mathscr{A}}(P,X) = 0,\ \forall P \in Proj(\mathscr{A})\ \forall k \geq 1$, entonces la sucesión

$$\mathrm{Ext}^{k}_{\mathscr{A}}(P,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^{k}_{\mathscr{A}}(f,X)} \mathrm{Ext}^{k}_{\mathscr{A}}(A,X) \xrightarrow{\delta_{k*}} \mathrm{Ext}^{k+1}_{\mathscr{A}}(B,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^{k+1}_{\mathscr{A}}(g,X)} \mathrm{Ext}^{k+1}_{\mathscr{A}}(P,X)$$

es en realidad de esta forma:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^{k}_{\mathscr{A}}(A,X) \xrightarrow{\delta_{k*}} \mathrm{Ext}^{k+1}_{\mathscr{A}}(B,X) \longrightarrow 0$$

para toda $k \geq 1$.

Así $\mathrm{Ext}^{k}_{\mathscr{A}}(A,X) \simeq \mathrm{Ext}^{k+1}_{\mathscr{A}}(B,X)\ \forall k \geq 1$.

$\boxed{b)}$ Supongamos

$$\ldots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva en $\mathscr{A}$. Consideremos las siguientes sucesiones exactas para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$0 \longrightarrow Ker(d_n) \xrightarrow{K_{d_n}} P_n \xrightarrow{i_{d_n}} Im(d_n) \longrightarrow 0.$$

Como la resolución proyectiva es exacta, entonces $Ker(d_{n-1}) = Im(d_n)$ $\forall n \geq 1$, así se tiene que

$$0 \longrightarrow Ker(d_n) \xrightarrow{K_{d_n}} P_n \xrightarrow{i_{d_n}} Ker(d_{n-1}) \longrightarrow 0$$

son sucesiones exactas para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, como

$0 \longrightarrow Ker(d_0) \xrightarrow{K_{d_0}} P_0 \xrightarrow{i_{d_0}} A \xrightarrow{d-1} 0$ es exacta, por a) $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A, X) \simeq \mathrm{Ext}^{n}_{\mathscr{A}}(Ker(d_0), X), \ \forall n \geq 1.$

Afirmamos que $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A, X) \simeq \mathrm{Ext}^{n-j}_{\mathscr{A}}(Ker(d_j), X), \ \forall n \geq 1$ $\forall 0 \leq j \leq n-1.$

Procedamos por inducción sobre j. Base $j = 0$. Por lo anterior sabemos que $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A, X) \simeq \mathrm{Ext}^{n}_{\mathscr{A}}(Ker(d_0), X), \ \forall n \geq 1$, y como $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A, X) = \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(Ker(d_{-1}), X)$ (considerando $d_{-1} : A \to 0$) entonces se sigue el resultado.

Supongamos pasa para cierto $j \in \mathbb{N}$, entonces, como

$$0 \longrightarrow Ker(d_{j+1}) \xrightarrow{K_{d_{j+1}}} P_j \xrightarrow{i_{d_{j+1}}} Ker(d_j) \longrightarrow 0$$

es exacta, por a) se tiene que $\mathrm{Ext}^{n}_{\mathscr{A}}(Ker(d_{j+1}), X) \simeq \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(Ker(d_j), X)$ $\forall n \geq 1$, y puesto que el resultado vale para j por hipótesis inductiva, entonces

$$\mathrm{Ext}^{n-(j+1)}_{\mathscr{A}}(Ker(d_{j+1}), X) = \mathrm{Ext}^{n-j-1}_{\mathscr{A}}(Ker(d_{j+1}), X) \simeq \mathrm{Ext}^{n-j}_{\mathscr{A}}(Ker(d_j), X)$$
$$\mathrm{Ext}^{n+(j+1)-j}_{\mathscr{A}}(A, X) \simeq \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A, X).$$

Entonces el resultado es cierto, y en particular si tomamos $j = n - 2$ obtenemos b).

$\square$

Ej 74. Para un anillo R y M en $Mod(R)$, pruebe que:

a) $\forall e^2 = e \in \mathrm{End}_R(M)$, eM y $(1-e)M$ son R-submódulos de M y $M = eM \bigoplus (1-e)M$.

b) Si $M_1, M_2 \leq M$ son tales que $M = M_1 \bigoplus M_2$, entonces $\exists e \in \mathrm{End}_R(M)$ tal que $M1 = eM$ y $M_2 = (1-e)M$.

c) M es inescindible $\iff$ $\mathrm{End}_R(M)$ es no trivial y los únicos idempotentes en $\mathrm{End}_R(M)$ son los triviales (i.e. $0, 1$ el morfismo cero y la identidad).

d) Si R es local entonces R tiene solo idempotentes triviales.

Demostración. Primero hay que notar que $\forall f \in \mathrm{End}_R(M)$ $rf(x)+f(y) = f(rx+y)$ por ser morfismo de módulos, así fM es submódulo de M. Ahora, sea $e^2 = e \in \mathrm{End}_R(M)$, entonces $(1-e) \in \mathrm{End}_R(M)$ y $eM, (1-e)M$ son submódulos de M. Sea $x \in M$ entonces $e(x)+(1-e)(x) = e(x)+x-e(x) = x$ así $M = eM+(1-e)M$. Por último, sea $x \in eM \cap (1-e)M$, entonces $\exists y, z \in M$ tal que $e(y) = x = (1-e)(z)$, en particular

$$x = e(y) = e^2(y) = e(x) = e(1-e)(z) = e(z) - e^2(z) = e(z) - e(z) = 0.$$

Por lo tanto $M = eM \bigoplus (1-e)M$.

$\boxed{b)}$ Definamos $e \in End_R(M)$ como $e := \mu_1\pi_1 : M \to M$, donde $\mu_1 : M_1 \hookrightarrow M$ es la inclusión canónica de M_1 en M y $\pi_1 : M \twoheadrightarrow M_1$ es la proyección canónica de M en M_1.

Entonces dado $x \in M$, $x \in M1 \bigoplus M_2$, es decir, $x \in M_1$ o $x \in M_2$. Así, si $x \in M_1$ entonces $e(x) = \mu_1\pi_1(x) = \mu_1(x) = x$, es decir $M_1 \subseteq eM$.

Si $x \in M_2$ entonces $e(x) = \mu_1\pi_1(x) = \mu_1(0) = 0$, por lo que $M_2 \cap eM = \{0\}$. Entonces, como $M = M1 \bigoplus M_2$, se tiene que $eM \subseteq M_1$ y así $eM = M_1$.

De manera análoga, si $x \in M_2$ entonces $(1-e)(x) = (1-\mu_1\pi_1)(x) = 1(x) - \mu_1\pi_1(x) = x - 0 = x$, y si $x \notin M_2$ entonces $x \in M_1$ y $(1-e)(x) = 1(x) - e(x) = x - x = 0$. Por lo tanto $M_2 = (1-e)M$.

$\boxed{c)}$ Supongamos M es inesindible.
Primero se observa que $\mathrm{End}_R(M)$ no puede ser trivial, pues de serlo M sería el módulo 0 lo cual no puede pasar por definición de inescindible.

Sea e un idempotente en $\mathrm{End}_R(M)$, por el inciso a) eM y $(1-e)M$ son R-módulos de M y $M = eM \bigoplus (1-e)M$, pero M es inescindible, por lo tanto $eM = 0$ o $(1-e)M = 0$, así $e = 0$ o $e = 1$ (los morfismos triviales).

Ahora supongamos que $\mathrm{End}_R(M)$ es no trivial y los únicos idempotentes en $\mathrm{End}_R(M)$ son los triviales.

Sean $M_1, M_2 \leq M$ tales que $M = M_1 \bigoplus M_2$, por el inciso b) existe $e \in \mathrm{End}_R(M)$ tal que $M_1 = eM$ y $M_2 = (1-e)M$. Afirmamos que e

es idempotente.

Sea $x \in M$, si $x \in M_2$ entonces $e(x) = 0$ pues $eM \cap (1-e)M = \{0\}$, y así $e^2(x) = e(x) = 0$.
Si $x \in M_1$ entonces $(1-e)(x) = 0$ y asi $x = e(x)$ por lo tanto $e^2(x) = e(x)$ por lo que e es idempotente, pero los únicos idempotentes en $\text{End}_R(M)$ son los triviales, entonces $e = 0$ o $e = 1$, en ambos casos $M \neq 0$ y $M_1 = 0$ o $M_2 = 0$.

$\boxed{d)}$ Supongamos R es local.

Por 2.1.2 d), se tiene que $\{r, 1-r\} \cap U(R) \neq \emptyset \quad \forall r \in R$. Supongamos $r = r^2$ en R, entonces $r - r^2 = 0$ lo cual implica que $r(1-r) = 0$. Como $\{r, 1-r\} \cap U(R) \neq \emptyset$ entonces r o $(1-r)$ es unidad, así $r = 0$ o $(1-r) = 0$ por lo tanto $r = 0$ o $r = 1$, es decir, r es un idempotente trivial.

□

Ej 75.

Ej 76.

Ej 77. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $X, Y \in \mathscr{A}$. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes

a) Y es un sumando directo propio de X.
b) $\exists$ un spli-mono $\alpha : Y \to X$ que no es iso.
c) Todo split-mono $\beta : Y \to X$ no es iso.

Demostración. $\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Como Y es un sumando propio de X, entonces $Y|X$ y la inclusión canónica $\mu_Y : Y \to X$ (asosiada con la descomposición en producto $X = Y \coprod Y'$) no es un isomorfismo. μ_Y es split-mono, pues al ser $\mathscr{A}$ categoría abeliana, por 1.8.3 existe una única familia $\{\pi_Y : Y \coprod Y' \longrightarrow Y,\ \pi_{Y'} : Y \coprod Y' \longrightarrow Y'\}$ en $\mathscr{A}$ tal que $\pi_Y \mu_Y = 1_Y$ y $\pi_{Y'} \mu Y' = 1_{Y'}$ (las proyecciones naturales de $Y \coprod Y'$ en Y y Y'), las cuales por a) no son iso.

$\boxed{b) \Rightarrow c)}$ Sean $\eta : Y \to X$ un split-mono no iso y $\beta : Y \to x$ un split-mono cualquiera, observemos que por b) existe dicho β. Sean $\gamma : X \to Y$ y $\alpha : X \to Y$ split-epi tales que $\gamma\eta = 1_Y$ y $\alpha\beta = 1_y$.

Supongamos β es iso con inverso α. Observemos que, como η es split-epi, se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Ker(\eta) \xrightarrow{k_\eta} Y \xrightarrow{\eta} X \longrightarrow 0.$$

Como β es iso, entonces β es split-mono y split-epi, así

$$0 \longrightarrow Ker(\eta) \xrightarrow{k_\eta} Y \xrightarrow{\beta\eta} X \longrightarrow 0$$

es exacta, pues $\beta\eta$ es epi por ser β mono.

Así se tiene que $\beta\eta k_\eta = 0$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \gamma\alpha(\beta\eta k_\eta) &= \gamma\alpha 0 = 0 \\ \gamma 1_X \eta k_\eta &= 0 \\ 1_Y k_\eta &= 0 \\ k_\eta &= 0. \end{aligned}$$

Esto es una contradicción, pues implicaría que $Ker(\eta) = 0$ y como

$$0 \longrightarrow Ker(\eta) \xrightarrow{k_\eta} Y \xrightarrow{\eta} X \longrightarrow 0.$$

es exacta, entonces $0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\eta} X \longrightarrow 0$ es exacta por lo que η sería iso. Por lo tanto β no puede ser iso.

$\boxed{c) \Rightarrow a)}$ Supongamos $Y|X$ entonces la inclusión canónica $\mu_1 : Y \to X$ (asociada a la descomposición en coproducto $X = Y \coprod Y'$) es un split-mono en $\mathscr{A}$ donde $\pi_1 : Y \coprod Y' \longrightarrow Y$ (la proyección canónica) es el único split-epi tal que $\pi_1\mu_1 = 1_Y$, por $c)$ π_1 no puede ser iso, entonces μ_1 no puede ser iso. Por lo tanto Y es sumando directo de X.

$\square$

Ej 78. Sea $\mathscr{C}$ una categoría preaditiva y $M, N \in \mathscr{C}$. Pruebe que la composición de morfismos en $\mathscr{C}$ induce en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$ una estructura de $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(N)$-izquierdo $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(M)$-derecho bimódulo, i.e.
$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N) \in {}_{\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(N)}Mod_{\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(M)}$ donde
$\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(N) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N) \times \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$ con
$(\beta, g, \alpha) \mapsto \beta \circ g \circ \alpha$.

Demostración. **Definición.** Sean M un grupo abeliano y R, S anillos. Decimos que M es un R-izquierdo y S-derecho bimódulo, si

1) $M \in {}_RMod \cap Mod_S$.
2) $r(ms) = (rm)s$.

Veamos primero que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N) \in {}_{\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(N)}Mod \cap Mod_{\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(M)}$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(N)$, $\quad f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$ $\;$ y $\;$ $\gamma, \eta \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(M)$.

Por 1.9.10, tenemos que la suma $f + g$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$ sólo puede estar dada por alguna de las siguientes tres composiciones de morfismos en $\mathscr{C}$.

a)

$$M \xrightarrow{\Delta_M} M \coprod M \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f & g \end{smallmatrix}\right)} N \ .$$

b)

$$M \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right)} N \coprod N \xrightarrow{\nabla_N} N \ .$$

c)

$$M \xrightarrow{\Delta_M} M \coprod M \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{smallmatrix}\right)} N \coprod N \xrightarrow{\nabla_N} N \ .$$

Análogamente para $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, N)$ y $\gamma, \eta \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(M)$.
Veamos que $\alpha \circ (f+g) = \alpha f + \alpha g$.

Caso a) $f + g = \left(\begin{smallmatrix} f & g \end{smallmatrix}\right) \Delta_M$

$$\alpha \circ (f+g) = \alpha \left(\begin{smallmatrix} f & g \end{smallmatrix}\right) \Delta_M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha f & \alpha g \end{smallmatrix}\right) \Delta_M = \alpha f + \alpha g.$$

Caso b) $f + g = \nabla_N \left(\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right)$

$$\alpha \circ (f+g) = \alpha \nabla_N \left(\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} f \\ g \end{smallmatrix}\right) = \alpha f + \alpha g.$$

Caso c) $f + g = \nabla_N \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \Delta_M$

$$\begin{aligned}\alpha \circ (f+g) &= \alpha \circ \left(\nabla_N \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \Delta_M\right) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \Delta_M \\ &= \left(\begin{smallmatrix} \alpha f + 0 & 0 + \alpha g \end{smallmatrix}\right) \Delta_M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha f & \alpha g \end{smallmatrix}\right) \Delta_M = \alpha f + \alpha g.\end{aligned}$$

Veamos ahora que $(\alpha + \beta) \circ f = \alpha f + \beta f$
Caso a) $\alpha + \beta = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right) \Delta_N$

$$(\alpha + \beta) \circ f = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right) \Delta_N \circ f = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} = \alpha f + \beta f.$$

Caso b) $\alpha + \beta = \nabla_N \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right)$

$$(\alpha + \beta) \circ f = \nabla_N \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right) \circ f = \nabla_N \begin{pmatrix} \alpha f \\ \beta f \end{pmatrix} = \alpha f + \beta f.$$

Caso c) $\alpha + \beta = \nabla_N \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right) \Delta_N$

$$(\alpha + \beta) \circ f = \nabla_N \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right) \Delta_N \circ f = \left(\begin{smallmatrix} \alpha + 0 & 0 + \beta \end{smallmatrix}\right) \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix} = \alpha f + \beta f.$$

Observemos que $1_{\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(N)} \circ f = f$, pues $1_{\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(N)} = Id_N$.
Además $(\alpha \circ \beta) \circ f = \alpha \circ (\beta \circ f)$ por ser la composición asociativa en $\mathscr{C}$.

Entonces $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$ tiene estructura de módulo a izquierda sobre $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(N)$. Análogamente se prueba que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$ tiene estructura de módulo a derecha sobre $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(M)$.

2) es trivial por que la composición es asosiativa en $\mathscr{C}$ para toda $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$, $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(N)$ y $\gamma \in \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(M)$, es decir, se tiene que $\alpha \circ (f \circ \gamma) = (\alpha \circ f) \circ \gamma$. Por lo tanto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)$ es un bimódulo.

□

Ej 78*.

Ej 79.

Ej 80.

Ej 81.

Ej 82. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, $X \subseteq \mathscr{A}$ e $i \geq 1$. Pruebe que las clases ${}^{\perp_i}X, X^{\perp_i}, {}^{\perp}X$ y $X^{\perp}$ son cerradas por: sumandos directos en $\mathscr{A}$, extensiones e isomorfismos.

Demostración. Veamos que ${}^{\perp_n}X$ es cerrada bajo extenciones para $n \geq 1$.

Sea $0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X_2 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta con $X_1, X_2 \in {}^{\perp_n}X$ y $n \geq 1$, por 1.10.28 se tiene que la sucesión

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,X_1) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,f)} \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,E) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,g)} \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,X_2) \longrightarrow \ldots$$

es exacta para toda $A \in \mathscr{A}$, pero $X_1, X_2 \in {}^{\perp_n}X$, entonces $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,X_1) = 0 = \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,X_2)$, por lo que $0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,E) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{A}$ lo cual implica que $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,E) = 0$ para toda$A \in \mathscr{A}$, y así $E \in {}^{\perp_n}X$.

Cerrado bajo isomorfismos:
Sea $X_0 \in {}^{\perp_n}X$ y $M \in \mathscr{A}$ tales que $\varphi : M \to X_0$ es iso. Por definición el funtor $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,\bullet)|_X = 0$ para toda $A \in \mathscr{A}$. Consideremos un elemnto ϵ de $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,M)$, entonces

$$\epsilon = \; 0 \longrightarrow A \xrightarrow{e_n} E_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_0 \xrightarrow{e_0} M \longrightarrow 0\,.$$

Como φ es isomorfismo, se tiene que

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "e_n"] \arrow[d, equal] & E_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ldots \arrow[r] & E_0 \arrow[r, "e_0"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "e_n"] & E_n \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & E_0 \arrow[r, "e_0"] & X_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, por lo que $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,M) = \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A,X_0)$ por lo tanto

$M \in {}^{\perp_n}X$.

Cerrado bajo sumandos directos:
Sean $X_0 \in {}^{\perp_n}X$ y $Y|X_0$, entonces $X_0 = Y \coprod Y'$. Si β es split-mono, entonces no es iso por el ejercicio 77, y por la observación 1.10.27 b) se tiene que $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, Y \coprod Y') = \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, Y) \coprod \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, Y')$.

Como $X_0 \in {}^{\perp_n}X$, por a) entonces $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, Y) \coprod \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, Y') = 0$ por lo que $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, Y) = 0$ y así $Y \in {}^{\perp_n}X$.

Ahora veamos que ${}^{\perp}X$ es cerrado bajo sumandos directos, isomorfismos y extensiones.
Consideramos ${}^{\perp}X = \bigcap\limits_{i>0} {}^{\perp_i}X$ como la clase $\{Z \in \mathscr{A} \mid Z \in {}^{\perp_i}X \;\; \forall i \geq 1\}$.

Cerrado bajo isomorfismos:
Sea $X_0 \in {}^{\perp}$ y $M \in \mathscr{A}$ tal que $\varphi : X_0 \to M$ es iso, entonces $\forall n \geq 1$,
$X_0 \in {}^{\perp_n}X$, así por la primera parte $M \in {}^{\perp_n}X$ para cada $n \geq 1$, es decir, $M \in {}^{\perp}X$.

Cerrado bajo extensiones:
Sea $0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X_2 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$ con $X_1, X_2 \in {}^{\perp}X$, entonces para cada $n \geq 1$ se tiene que
$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} X_2 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en $\mathscr{A}$ con $X_1, X_2 \in {}^{\perp_n}X$, así por la primera parte $M \in {}^{\perp_n}X$ para cada $n \geq 1$, es decir $M \in {}^{\perp}X$.

Cerrado bajo sumandos directos.
Sea $X_0 \in {}^{\perp}X$ y supongamos $Y|X_0$ es sumando directo. Como $X_0 \in {}^{\perp}$ entonces $\forall n \geq 1$, $X_0 \in {}^{\perp_n}X$ y por la primera parte entonces $Y \in {}^{\perp_n}X$ $\forall n \geq 1$ lo cual implica que $Y \in {}^{\perp}X$.

La prueba para $X^{\perp_n}$ y $X^{\perp}$ son análogas a las anteriores.

□

Ej 83.

Ej 84.

Ej 85. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$. Pruebe que:

a) $\mathscr{C} \subseteq {}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1})$ y $\mathscr{C} \subseteq ({}^{\perp_1}\mathscr{C})^{\perp_1}$.

b) $\left({}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1}), \mathscr{C}^{\perp_1}\right)$ es un par de cotorsión, y se le conoce como el par de cotorsión en $\mathscr{A}$ generado por $\mathscr{C}$.

c) $\left({}^{\perp_1}\mathscr{C}, ({}^{\perp_1}\mathscr{C})^{\perp_1}\right)$ es un par de cotorsión, y se le conoce como el par de cotorsión en $\mathscr{A}$ cogenerado por $\mathscr{C}$.

Demostración.

$\boxed{a)}$ Por definición ${}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1}) = \{Z \in \mathscr{A} \mid \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(Z, \bullet)|_{\mathscr{C}^{\perp_1}} = 0\}$.
Sea $C \in \mathscr{C}$, por definición $\mathscr{C}^{\perp_1} = \{Z \in \mathscr{A} \mid \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\bullet, Z)|_{\mathscr{C}} = 0\}$, entonces $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(C, X) = 0 \ \forall X \in \mathscr{C}^{\perp_1}$, es decir,
$C \in \{Z \in \mathscr{A} \mid \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(Z, \bullet)|_{\mathscr{C}^{\perp_1}} = 0\} = {}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1})$.

Análogamente tomamos $C \in \mathscr{C}$. Por definición
${}^{\perp_1}\mathscr{C} = \{Z \in \mathscr{A} \mid \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(Z, \bullet)|_{\mathscr{C}} = 0\}$, entonces para cada $X \in {}^{\perp_1}\mathscr{C}$ se tiene que $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X, C) = 0$. Esto implica que
$C \in \{Z \in \mathscr{A} \mid \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(\bullet, Z)|_{{}^{\perp_1}\mathscr{C}} = 0\} = ({}^{\perp_1}\mathscr{C})^{\perp_1}$.

$\boxed{b)}$ Por definición (X, Y) es un par de cotorsión si $X = {}^{\perp_1}Y$ y $Y = X^{\perp_1}$.
Por una parte ${}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1})$ ya es el ortogonal 1 a izquierda de $\mathscr{C}^{\perp_1}$, solo falta ver que $\mathscr{C}^{\perp_1}$ es el ortogonal 1 a derecha de ${}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1})$.

Por el inciso a) se tiene que $\mathscr{C}^{\perp_1} \subseteq \left[{}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1})\right]^{\perp_1}$. Si $C \in \left[{}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1})\right]^{\perp_1}$ entonces por definición $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X, C) = 0 \ \forall X \in {}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1})$, pero si $Y \in \mathscr{C}$, por el inciso a) $Y \in {}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1})$, es decir, $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(Y, C) = 0 \ \ \forall Y \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $\left[{}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1})\right]^{\perp_1} \subseteq \mathscr{C}^{\perp_1}$ y se tiene que $\left[{}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1})\right]^{\perp_1} = \mathscr{C}^{\perp_1}$.

Así $\left({}^{\perp_1}(\mathscr{C}^{\perp_1}), \mathscr{C}^{\perp_1}\right)$ es un par de cotorsión a derecha y por lo tanto un par de cotorsión.

$\boxed{c)}$ Análogamente a b), como ${}^{\perp_1}\mathscr{C} \subseteq {}^{\perp_1}\left[({}^{\perp_1}\mathscr{C})^{\perp_1}\right]$ por a) se tiene que cada $C \in {}^{\perp_1}\left[({}^{\perp_1}\mathscr{C})^{\perp_1}\right]$ cumple que $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(C, Y) = 0 \ \forall Y \in \mathscr{C}$, por lo tanto $C \in {}^{\perp_1}\mathscr{C}$ y así ${}^{\perp_1}\mathscr{C} = {}^{\perp_1}\left[({}^{\perp_1}\mathscr{C})^{\perp_1}\right]$ y $\left({}^{\perp_1}\mathscr{C}, ({}^{\perp_1}\mathscr{C})^{\perp_1}\right)$ es un par de cotorsión a izquierda.

Notando además que $({}^{\perp_1}\mathscr{C})^{\perp_1}$ es el ortogonal 1 a derecha de ${}^{\perp_1}\mathscr{C}$ entonces $\left({}^{\perp_1}\mathscr{C}, ({}^{\perp_1}\mathscr{C})^{\perp_1}\right)$ es un par de cotorsión. $\square$

Ej 86. Sean $X, Y \subseteq \mathscr{A}$ con $\mathscr{A}$ una categoría abeliana. Pruebe que : (X, Y) es un par de cotorsión completo a derecha si y sólo si, las siguientes condiciones se satisfacen:

a) $Y = Smd(Y)$ y $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X, Y) = 0$.

b) $\forall A \in \mathscr{A} \ \exists$ una Y-preenvolvente $\varphi : A \to Y$ tal que φ es mono y $Coker(\varphi) \in X$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Sea (X, Y) un par de cotorsión completo a derecha. Dado que $Y = X^{\perp_1}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X, Y) = 0$ se sigue trivialmente y $Y = Smd(Y)$ es consecuencia del ejercicio 82. Veremos ahora que se cumple b).

En efecto, sea $A \in \mathscr{A}$. Por ser (X, Y) completo a derecha, existe una sucesión exacta $\epsilon :\ 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} Y_0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0$ en $\mathscr{A}$, con $x_0 \in X$ y $Y_0 \in Y$. veamos que φ es Y-preenvolvente. Sea $f : A \to Y_0'$, con $Y_0' \in Y$. Aplicando $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\bullet, Y)$ a ϵ, se tiene por 1.10.28 b) la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(Y_0, Y_0') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\varphi, Y_0')} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, Y_0') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X_0, Y_0')$$

y como $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(X_0, Y_0') = 0$ por estar $Y_0' \in Y$, entonces se sigue que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\varphi, Y_0')$ es supra.
Así φ es una Y-preenvolvente, φ es mono y $Coker(\varphi) \in X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que a) y b) se satisfacen. Por a) se tiene que $Y \subset X^{\perp_1}$. Sea $Z \in X^{\perp_1}$. Luego por b), existe una sucesión exacta
$\epsilon :\ 0 \longrightarrow Z \longrightarrow Y_0 \longrightarrow X_0 \longrightarrow 0$ en $\mathscr{A}$, con $x_0 \in X$ y $Y_0 \in Y$.

Dado que $Z \in X^{\perp_1}$, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(Z, X_0) = 0$ y así ϵ se parte. Así $Z | Y_0$, con $Y_0 \in Y$; y como $Y = Smd(Y)$, se concluye que $Z \in Y$. Por lo tanto $Y = X^{\perp_1}$. Finalmente la completitud (a derecha) se sigue inmediatamente de b).

$\square$