

Ejercicios 32-42

Luis Gerardo Arruti Sebastian
Sergio Rosado Zúñiga

Ej 32. $Mod(R)$ es normal y conormal.

Demostración. Se tiene que, por el Ej. 28, $Mod(R)$ tiene objeto cero y más aún, que $\forall M, N \in Mod(R)$ el morfismo 0 de M en N está dado por

$$\begin{aligned} 0_{M,N} : M &\rightarrow N \\ m &\mapsto 0_N, \end{aligned}$$

con 0_N el neutro aditivo de N . En vista de lo anterior, en lo sucesivo prescindiremos de los subíndices en la notación de los morfismos cero.

Normal Sean $\alpha : M \rightarrow N$ en $Mod(R)$, $P := N/Im(\alpha)$ y β el epi canónico dado por

$$\begin{aligned} \beta : N &\rightarrow P \\ n &\mapsto n + In(\alpha). \end{aligned}$$

Afirmamos que α es un kernel para β . En efecto:

Dado que $Im(\alpha)$ es el neutro aditivo de P y $Im(\alpha) = \{\alpha(m) \mid m \in M\}$, se tiene que $\beta\alpha = 0$.

Supongamos ahora que $\alpha' : M' \rightarrow N$ en $Mod(R)$ es tal que $\beta\alpha' = 0$, así

$$\begin{aligned} \beta(\alpha'(a)) &= Im(\alpha) & \forall a \in M' \\ \implies Im(\alpha') &\subseteq Im(\alpha) \end{aligned}$$

De lo cual se sigue que $\forall a \in M' \exists b_a \in M$ tal que $\alpha(b_a) = \alpha'(a)$. Más aún, como α es un monomorfismo se tiene que tal b_a es único, y por lo tanto la siguiente aplicación es una función bien definida

$$\begin{aligned} \gamma : M' &\rightarrow M \\ a &\mapsto b_a. \end{aligned}$$

Sean $r \in R$, $a_1, a_2 \in M'$. Así

$$\begin{aligned} \alpha(b_{ra_1-a_2}) &= \alpha'(ra_1 - a_2) = r\alpha'(a_1) - \alpha(a_2) \\ &= r\alpha(b_{a_1}) - \alpha(b_{a_2}) = \alpha(rb_{a_1} - b_{a_2}), \\ \implies b_{ra_1-a_2} &= rb_{a_1} - b_{a_2}, & \alpha \text{ es mono} \\ \implies \gamma(ra_1 - a_2) &= r\gamma(a_1) - \gamma(a_2). \end{aligned}$$

Con lo cual γ es un morfismo de R -módulos que satisface que, si $a \in M'$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha\gamma(a) &= \alpha(b_a) = \alpha'(a), \\ \therefore \alpha\gamma &= \alpha'.\end{aligned}$$

Más aún, puesto que α es mono, γ es el único morfismo de R -módulos de M' en M que satisface lo anterior, con lo cual se ha verificado la afirmación.

Conormal Ahora supongamos que $\alpha : M \rightarrow N$ es epi en $Mod(R)$ y denotemos por β al morfismo inclusión de $Ker(\alpha)$ en M . Afirmamos que α es un cokernel para β , en efecto:
Como $Ker(\alpha) = \{m \in M \mid \alpha(m) = 0_N\}$, entonces $\alpha\beta = 0$. Sea $\alpha' : M \rightarrow N'$ en $Mod(R)$ tal que $\alpha'\beta = 0$, así

$$Ker(\alpha') \supseteq Im(\beta) = Ker(\alpha).$$

Como α es epi se tiene que $N = Im(\alpha)$. Así, consideremos la aplicación

$$\begin{aligned}\gamma : N &\rightarrow N' \\ \alpha(m) &\mapsto \alpha'(m),\end{aligned}$$

la cual es una función bien definida, puesto que si $m, o \in M$ son tales que $\alpha(m) = \alpha(o)$, entonces

$$\begin{aligned}m - o &\in Ker(\alpha) \subseteq Ker(\alpha') \\ \implies \alpha'(m) &= \alpha'(o).\end{aligned}$$

Más aún, es un morfismo de R -módulos, pues α y α' lo son, que satisface que $\gamma\alpha = \alpha'$. Finalmente γ es el único morfismo de R -módulos que satisface la igualdad anterior dado que α es epi. □

Ej 33. Pruebe que $Mod(R)$ es colocalmente pequeña.

Demostración. Este ejercicio es consecuencia de varios resultados pasados: Dado un anillo R se cumple que:

- $Mod(R)$ tiene kerneles y Cokernels (ejercicios 29 y 30 respectivamente).
- $Mod(R)$ es localmente pequeña (ejercicio 31).
- $Mod(R)$ es normal y conormal (ejercicio 32).

Entonces por el teorema 1.6.3 $Mod(R)$ es colocalmente pequeña. □

Ej 34. Sean \mathcal{C} una categoría exacta y

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{\beta'} & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

un diagrama en \mathcal{C} con filas exactas. Pruebe que $\exists f : A \rightarrow A'$ tal que $\gamma\alpha = \alpha'f \iff \exists g : C \rightarrow C'$ tal que $\beta'\gamma = g\beta$. Mas aún, dado uno de ellos ("f" o "g") el otro queda determinado univocamente.

Demostración. Supongamos tenemos el diagrama de las hipótesis sobre una categoría exacta \mathcal{C} . Como α' es mono y la sucesión es exacta, se tiene que $\alpha' \simeq \text{Im}(\alpha') \simeq \text{Ker}(\beta')$.

Si existe $g : C \rightarrow C'$ tal que $\beta'\gamma = g\beta$, entonces $\beta'(\gamma\alpha) = (\beta'\gamma)\alpha = g\beta\alpha = g0 = 0$, por la propiedad universal del $\text{Ker}(\beta')$ existe una única $f : A \rightarrow A'$ tal que $\alpha'f = \gamma\alpha$.

Ahora, como \mathcal{C} es exacta, por 1.7.3 se tiene el siguiente diagrama con renglones exactos en \mathcal{C}^{op}

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{(\beta')^{op}} & B' & \xrightarrow{(\alpha')^{op}} & A' \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \gamma^{op} & & \\ 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\beta^{op}} & B & \xrightarrow{\alpha^{op}} & A \longrightarrow 0. \end{array}$$

Si existiera $f : A \rightarrow A'$ tal que $\alpha'f = \gamma\alpha$ entonces existe $f^{op} \in \text{Mor}(\mathcal{C}^{op})$ tal que $\alpha^{op}\gamma^{op} = f^{op}(\alpha')^{op}$. Así, como \mathcal{C}^{op} es exacta y como se tienen las hipótesis de la primera parte de la demostración, entonces existe una única $g^{op} : C' \rightarrow C$ tal que $\beta^{op}g^{op} = \gamma^{op}(\beta')^{op} = (\beta'\gamma)^{op}$.

Por lo tanto existe una única $g : C \rightarrow C'$ tal que $(\beta'\gamma)^{op} = \beta^{op}g^{op} = (g\beta)^{op}$ por lo tanto $\beta'\gamma = g\beta$. □

Ej 35. Construiremos la noción dual a la intersección de una familia de subobjetos.

Intersección: $\mu : B \rightarrow A$ es una intersección para $\{\mu_i : A_i \hookrightarrow A\}$ en \mathcal{C} si

- IntI) $\forall i \in I \exists \lambda_i : B \rightarrow A_i$ tal que $\mu = \mu_i\lambda_i$;
IntII) si $\nu : C \rightarrow A$ satisface que $\forall i \in I \exists \eta_i : C \rightarrow A_i$ tal que $\nu = \mu_i\eta_i$, entonces $\exists \eta : C \rightarrow B$ tal que $\nu = \mu\eta$.

Intersección^{op}: $\mu^{op} : B \rightarrow A$ es una intersección para $\{\mu_i^{op} : A_i \hookrightarrow A\}$ en \mathcal{C} si

Int^{op}I) $\forall i \in I \exists \lambda_i^{op} : B \rightarrow A_i$ tal que $\mu^{op} = \mu_i^{op} \lambda_i^{op}$;

Int^{op}II) si $\nu^{op} : C \rightarrow A$ satisface que $\forall i \in I \exists \eta_i^{op} : C \rightarrow A_i$ tal que $\nu^{op} = \mu_i^{op} \eta_i^{op}$, entonces $\exists \eta^{op} : C \rightarrow B$ tal que $\nu^{op} = \mu^{op} \eta^{op}$.

Así, aplicando el funtor $D_{\mathcal{C}^{op}}$ a las flechas que aparecen en lo anterior, y sabiendo que el dual de mono es epi, se llega a la siguiente definición
Intersección*:

Definición. $\beta : A \rightarrow B$ es una **cointersección** para $\{\beta_i : A \rightarrow A_i\}$ en \mathcal{C} si

CointI) $\forall i \in I \exists \delta_i : A_i \rightarrow B$ tal que $\beta = \delta_i \beta_i$;

CointII) si $\omega : A \rightarrow C$ satisface que $\forall i \in I \exists \gamma_i : A_i \rightarrow C$ tal que $\omega = \gamma_i \beta_i$, entonces $\exists \gamma : B \rightarrow C$ tal que $\omega = \gamma \beta$.

Ej 36. Sean \mathcal{C} una categoría exacta y $\theta : A \twoheadrightarrow A'$, $\{\alpha_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i \in I}$ y, $\forall i \in I$, $\beta_i := \text{coker}(\alpha_i)$, en \mathcal{C} . Si θ es una cointersección para $\{\beta_i\}_{i \in I}$, entonces $\ker(\theta)$ es una unión para $\{\alpha_i\}_{i \in I}$.

Demostración. Denotemos por k_θ un kernel de θ . Se tiene que k_θ es un subobjeto de A .

$I = \emptyset$ En este caso, por la vacuidad de I , basta con verificar que si $f : A \rightarrow B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$, entonces θ es llevado a μ vía f . Notemos que por vacuidad f satisface la condición CointI) para la familia $\{\beta_i\}_{i \in I}$, y así por la propiedad universal de la cointersección, CointII), $\exists \gamma : A' \rightarrow B$ tal que $f = \gamma \theta$. Con lo cual $f k_\theta = f \gamma (\theta k_\theta) = 0$, y por tanto si denotamos por ρ al morfismo 0 de A en B' se tiene que

$$f k_\theta = 0 = \rho \mu,$$

i.e. θ es llevado a μ vía f .

$I \neq \emptyset$ Dado que θ es una cointersección para $\{\beta_i\}_{i \in I}$ se tiene en particular que $\forall i \in I \exists \eta_i : A/A_i \rightarrow A'$ tal que $\theta = \eta_i \beta_i$, así

$$\theta \alpha_i = (\eta_i \beta_i) \alpha_i = \eta_i (\beta_i \alpha_i) = 0, \quad \beta_i = \text{coker}(\alpha_i)$$

Luego para cada $i \in I$, por la propiedad universal del kernel, se tiene que $\exists! \lambda_i : A_i \rightarrow \text{Ker}(\theta)$ tal que $\alpha_i = k_\theta \lambda_i$. Por lo tanto $\forall i \in I \alpha_i \leq k_\theta$.

Ahora, sean $f : A \rightarrow B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ en \mathcal{C} tales que α_i es llevado a μ vía f , $\forall i \in I$, i.e., tales que $\forall i \in I \exists \rho_i : A_i \rightarrow B'$ de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\rho_i} & B' \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \mu \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (*)$$

Si c_μ es un cokernel para μ , entonces por lo anterior se tiene que

$$(c_\mu f) \alpha_i = (c_\mu \mu) \rho_i = 0, \quad \forall i \in I$$

Luego, aplicando para cada $i \in I$ la propiedad universal del cokernel, se tiene que $\forall i \in I \exists! \chi_i : A/A_i \rightarrow B/B'$ tal que

$$c_\mu f = \chi_i \text{coker}(\mu_i) = \chi_i \beta_i.$$

Esto último, por la propiedad universal de la cointersección, garantiza que $\exists \chi : A' \rightarrow B/B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \theta \downarrow & & \downarrow c_\mu \\ A' & \xrightarrow{\chi} & B/B' \end{array} \quad (**)$$

De (*) y (**) se sigue que

$$\begin{aligned} c_\mu(fk_\theta) &= \chi(\theta k_\theta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual, en conjunto a que

$$\mu \simeq \text{Im}(\mu) \simeq \text{Ker}(\text{Coker}(\mu)) \simeq \text{Ker}(c_\mu), \quad \text{en } \text{Mon}_{\mathcal{C}}(-, B)$$

(pues \mathcal{C} es exacta y μ es mono) garantiza que por medio de la propiedad universal del kernel $\exists! \rho : \text{Ker}(\theta) \rightarrow B'$ tal que $fk_\theta = \rho\mu$, i.e. el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(\theta) & \xrightarrow{\rho} & B' \\ k_\theta \downarrow & & \downarrow \mu \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

y así se tiene lo deseado. □

Ej 37. Sea \mathcal{C} una categoría y $\{A_i\}_{i \in I}$ en \mathcal{C} . Pruebe que si $I = \emptyset$, el producto de esa familia (si es que existe) es un objeto final en \mathcal{C} .

Notación: En una categoría \mathcal{C} con objeto cero, para cada $\{A_i\}_{i \in I}$ en \mathcal{C} , se define la familia de morfismos $\delta_i^A := \{\delta_{ij}^A : A_i \rightarrow A_j\}_{(i,j) \in I^2}$ en \mathcal{C}

$$\delta_{i,j}^A := \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1_{A_j} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Demostración. Como $I = \emptyset$ por vacuidad se tiene que para todo $C \in \mathcal{C}$, se tiene una familia $\{\alpha_i : C \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ en \mathcal{C} . Entonces (puesto que el producto existe) existe una única $\alpha : C \rightarrow P$ tal que $\pi_i \alpha = \alpha_i \quad \forall i \in I$, donde π_i son los morfismos que cumplen la propiedad universal del producto. Si existiera otro morfismo $\gamma : C \rightarrow P$ éste cumpliría por vacuidad que $\pi_i \gamma = \alpha_i \quad \forall i \in I$, y como existe un único morfismo con esta propiedad, tenemos que para cada objeto $C \in \mathcal{C} \quad |\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, P)| = 1$ por lo que P es objeto final. \square

Ej 38. Pruebe que, $\forall \{A_i\}_{i \in I}$ en Sets , el producto de conjuntos (cartesiano) es el categórico.

Demostración. Primero se mostrará el caso en que $I \neq \emptyset$ y $A_j \neq \emptyset \quad \forall j \in J$, definimos $P = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i\}$ y $\{\pi_i : P \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ las funciones tales que para cada

$$x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, \quad \pi_j(x) = x(j) \in A_j \quad \forall j \in I.$$

Observemos primero que si $Q = \emptyset$ entonces α_i es la función vacía para cada $i \in I$, entonces tomando $\alpha : Q \rightarrow P$ como la función vacía, se tiene la propiedad universal del producto en P . De la misma forma, si alguna $\alpha_j = \emptyset$ para alguna $i \in I$, entonces $Q = \emptyset$ y se repite el argumento anterior.

Supongamos entonces que existe $Q \in \text{Sets}$ con $Q \neq \emptyset$ tal que existe la familia $\{\alpha_i : Q \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ en Sets , como $A_j \neq \emptyset \quad \forall j \in I$ entonces $\alpha_i \neq \emptyset \quad \forall i \in I$, además como π_i es suprayectiva para toda $i \in I$, se tiene que para cada $i \in I$ y $\forall q \in Q$, $\alpha_i(q) = \pi_i(r_q)$ para algún $r_q \in P$. Así definimos $\alpha : Q \rightarrow P$ como $\alpha(q) = r_q$.

Se afirma que α está bien definida.

En efecto, si r_q y s_q son elementos en P tales que $\pi_i(r_q) = \pi_i(s_q) = q \quad \forall i \in I$, entonces $r_q(i) = s_q(i) \quad \forall i \in I$ pero $r_q, s_q : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$, entonces $r_q = s_q$. Mas aún, $\pi_i \alpha(q) = \pi_i(r_q) = \alpha_i(q)$.

Supongamos que existe $\beta : Q \rightarrow P$ tal que $\pi_i \beta = \alpha_i \quad \forall i \in I$. Por definición, para toda $q \in Q$, $\beta(q) \in P$, es decir, $\beta(q)$ es una función con dominio I y contradominio $\bigcup_{i \in I} A_i$. Así, para toda $i \in I$

$$\begin{aligned} (\alpha(q))(i) &= \pi_i(\alpha(q)) \\ &= \alpha_i(q) \\ &= \pi_i(\beta(q)) \\ &= \beta(q)(i). \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la unicidad.

Supongamos ahora que $A_j = \emptyset$ para alguna $j \in I$. Se tiene entonces que $P = \emptyset$ pues no existen funciones de I en el vacío. Así $\{\pi_i : P \rightarrow A_i\}$ es una familia de funciones vacías las cuales cumplen que $\forall Q \in \text{Sets}, \forall \{\alpha_i : Q \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ en Sets , $\alpha_j : Q \rightarrow A_j$ existe si y sólo si $Q = \emptyset$, por lo que existe un único $\alpha : Q \rightarrow P$ "la función del vacío en el vacío" tal que $\pi_i \alpha = \alpha_i$ la función vacío.

Por último se mostrará el caso en que $I = \emptyset$.

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos. Sea P un conjunto con un único elemento $*$ y $\{\pi_i : P \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ una familia vacía de funciones. Observamos que, para toda $A \in \text{Sets}$ se tiene que: Si $A = \emptyset$, existe $\varphi : A \rightarrow P$ la función vacía y esta es única.

Si $A \neq \emptyset$ existe $\varphi : A \rightarrow P$ la función constante, donde $\varphi(x) = *$, esta es única, pues si $f : A \rightarrow P$ es función, para toda $r \in A$ se tiene que $f(r) \in P$, por lo que $f(r) = *$. Así φ es única.

Ahora, sea $Q \in \text{Sets}$ y $\{\alpha_i : Q \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ en Sets , por lo anterior existe una única $\varphi : Q \rightarrow P$ y es tal que $\forall i \in I \pi_i \varphi = \alpha_i$ (Como I es vacío esta propiedad se cumple por vacuidad). Así P con la familia $\{\pi_i : P \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ es un producto en Sets .

Ahora, el producto cartesiano de $\prod_{i \in I} X_i = \{g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i \in I \ g(i) \in X_i\}$, si I es vacío, la única $g : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ es la función vacía f_\emptyset , por lo que $\prod_{i \in I} X_i = \{f_\emptyset : \emptyset \rightarrow \emptyset\} = \{\emptyset\}$, el cual es un conjunto con un único elemento.

□

Ej 39. Sean \mathcal{C} una categoría y $\{A_i\}_{i \in I}$ en \mathcal{C} . Si $I = \emptyset$ y dicha familia admite un coproducto, entonces este es un objeto inicial en \mathcal{C} .

Demostración. Se tiene que, por definición, dada una familia de objetos $\{A_i\}_{i \in I}$, un objeto C en conjunto a una familia de morfismos $\{\mu_i : A_i \rightarrow C\}$ es un coproducto para $\{A_i\}_{i \in I}$ si $\forall B \in \mathcal{C}$ y $\forall \{\beta_i : A_i \rightarrow B\} \exists! \alpha : C \rightarrow B$ tal que $\beta_i = \alpha \mu_i$. De modo que si $I = \emptyset$ lo anterior se reduce a que $\forall B \in \mathcal{C}$ existe un único morfismo $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, B)$, i.e. C es un objeto inicial en \mathcal{C} .

Notemos que, más aún, si C es un objeto inicial entonces C en conjunto a una familia vacía de morfismos es un coproducto para cualquier familia vacía de objetos en \mathcal{C} .

□

Ej 40. Sean \mathcal{C} una categoría, $C \in \mathcal{C}$ y $\{\mu_i : A_i \rightarrow C\}_{i \in I}$ en \mathcal{C} . C y $\{\mu_i : A_i \rightarrow C\}_{i \in I}$ es un coproducto para $\{A_i\}_{i \in I}$ en \mathcal{C} si y sólo si C y $\{\mu_i^{op} : C \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ es un producto para $\{A_i\}_{i \in I}$ en \mathcal{C}^{op} .

Demostración. Si $I = \emptyset$ la equivalencia se sigue de los ejercicios 37 y 39, y que $A \in \mathcal{C}$ es un objeto inicial si y sólo si $A \in \mathcal{C}^{op}$ es un objeto final. En adelante supondremos que $I \neq \emptyset$.

Para la necesidad comencemos notando que C también es un objeto de \mathcal{C}^{op} . Sean A y $\{\gamma_i^{op} : A \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ en \mathcal{C}^{op} , luego A es un objeto de \mathcal{C} y $\{\gamma_i : A_i \rightarrow A\}$ es una familia de morfismos en \mathcal{C} , con lo cual por la propiedad universal del coproducto $\exists! \alpha : C \rightarrow A$ tal que $\forall i \in I \gamma_i = \alpha \mu_i$ en \mathcal{C} . De modo que α^{op} satisface que $\alpha^{op} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, C)$ y $\forall i \in I \gamma_i^{op} = \mu_i^{op} \alpha^{op}$. Finalmente, si suponemos que $\beta^{op} : A \rightarrow C$ satisface que $\forall i \in I \gamma_i^{op} = \mu_i^{op} \beta^{op}$, entonces $\beta \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ y $\forall i \in I \gamma = \beta \mu_i$. De esto último y la unicidad de α se sigue que $\beta = \alpha$ en \mathcal{C} , y así $\beta^{op} = \alpha^{op}$ en \mathcal{C}^{op} , con lo cual se tiene lo deseado.

La suficiencia se verifica en forma análoga, puesto que tomar una familia de morfismos en la categoría \mathcal{C} induce una familia de morfismos en \mathcal{C}^{op} , empleando ahora la propiedad universal del producto. \square

Ej 41. Pruebe que $\text{Mod}(R)$ tiene productos y coproductos.

Demostración. Por los ejercicios 37 y 39, se tiene que si el producto y el coproducto existen, en el caso de familias no vacías, entonces estos deben ser un objeto inicial y un objeto final respectivamente, los cuales para $\text{Mod}(R)$ existen y son el objeto cero.

Afirmamos entonces que, si $I = \emptyset$, $CP = \{0_R\}$ junto a $\{\pi_i : CP \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ es el producto de $\{A_i\}_{i \in I}$ y junto a $\{\mu_i : A_i \rightarrow CP\}_{i \in I}$ es el coproducto de $\{A_i\}_{i \in I}$ en $\text{Mod}(R)$, donde π_i y μ_i son morfismos cero.

Sea $Q \in \text{Mod}(R)$ entonces $\varphi : Q \rightarrow CP$ y $\psi : CP \rightarrow Q$ dadas por $\varphi(q) = 0_R$ y $\psi(0_R) = 0_Q$ son R -morfismos de módulos, mas aún, son únicos.

En particular, si $\{\alpha_i : Q \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ y $\{\beta : A_i \rightarrow Q\}$ son familias de morfismos en $\text{Mod}(R)$, por vacuidad de I se cumple que $\pi_i \varphi = \eta_i$ y $\psi \mu_i = \beta_i \quad \forall i \in I$. Por lo tanto CP es producto y coproducto de $\{A_i\}$.

Consideremos $I \neq \emptyset$ un conjunto, y a $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de R -módulos. Veamos que existe el producto.

Sea P el producto cartesiano de conjuntos, es decir, $P = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i\}$

y sean $\{\pi_i : P \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ las funciones tales que para cada $x : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$, $\pi_j(x) = x(j) \in A_j \quad \forall j \in I$.

Por el ejercicio 38 sabemos que π_i está bien definida para cada $i \in I$, veamos que es morfismo. Sean $r \in R$ y $a, b \in P$ (se dará por hecho que P es un R -módulo), entonces

$$\pi_i(ra + b) = (ra + b)(i) = ra(i) + b(i) = r\pi_i(a) + \pi_i(b).$$

Por lo tanto para toda $i \in I$, $\pi_i \in \text{Mor}(\text{Mod}(R))$.

Ahora, puesto que todo morfismo de R -módulos es función, e $I \neq \emptyset$, por el ejercicio 38 si $Q \in \text{Mod}(R)$ es tal que existe una familia $\{\alpha_i : Q \rightarrow A_i\}$ en $\text{Mod}(R)$, entonces existe una única función $\alpha : Q \rightarrow P$ tal que $\pi_i \alpha = \alpha_i \quad \forall i \in I$ definida como $\alpha(q) = r_q$ con $q \in Q$ y $r_q \in P$ tales que $\pi_i(r_q) = \alpha_i(q)$.

Esta función está bien definida, solo es necesario probar que es morfismo de R -módulos. Sean $s \in R$, y $a, b \in Q$, entonces, como π_i es morfismo para cada $i \in I$, se tiene que si $(sr_a + r_b) \in P$ se cumple que

$$\pi_i(sr_a + r_b) = s\pi_i(r_a) + \pi_i(r_b) = s\alpha_i(a) + \alpha_i(b) = \alpha_i(sa + b).$$

Por lo tanto $r_{sa+b} = sr_a + r_b$, y así $\alpha(sa + b) = s\alpha(a) + \alpha(b)$, es decir, α es morfismo y en consecuencia P es el producto categórico.

Veamos que existe el coproducto para $I \neq \emptyset$. Se afirma que $\sum_{i \in I} A_i \in \text{Mod}(R)$ junto con la familia $\{\mu_i : A_i \rightarrow \sum_{i \in I} A_i\}_{i \in I}$ donde $\mu_i(a) = a$, "la inclusión natural", son un coproducto de $\{A_i\}_{i \in I}$.

Sean B y $\{\beta_i : A_i \rightarrow B\}_{i \in I}$ una familia de morfismos. Como $I \neq \emptyset$ y A_i, B son módulos para toda $i \in I$, β_i no puede ser la función vacía para ninguna $i \in I$. Así, podemos tomar $x \in \sum_{i \in I} A_i$, es decir, $x = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, $i_k \in I$ y $x_{i_k} \in A_{i_k} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definimos $\beta : \sum_{i \in I} A_i \longrightarrow B$ como $\beta(x) = \sum_{k=1}^n \beta_{i_k}(x_{i_k})$.

Como β_{i_k} es morfismo $\forall i_k \in I$ entonces β es morfismo de R -módulos. Además, $\forall i \in I$, si $x \in A_i$, se tiene que $\beta\mu_i(x) = \beta(x) = \beta_i(x)$, por lo que $\beta\mu_i = \beta_i \quad \forall i \in I$.

Mas aún, si $\gamma : \sum_{i \in I} A_i \longrightarrow B$ es un morfismo tal que $\gamma\mu_i = \beta_i \quad \forall i \in I$, entonces, si $x \in \sum_{i \in I} A_i$ (y usando la descripción de la "x" que usamos anteriormente),

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \gamma\left(\sum_{k=1}^n x_{i_k}\right) = \sum_{k=1}^n \gamma(x_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \gamma\mu_{i_k}(x_{i_k}) = \sum_{k=1}^n \beta_{i_k}(x_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \beta\mu_{i_k}(x_{i_k}) = \sum_{k=1}^n \beta(x_{i_k}) \\ &= \beta\sum_{k=1}^n (x_{i_k}) = \beta(x). \end{aligned}$$

Por lo que β es única, y así $\sum_{i \in I} A_i$ es un coproducto. \square

Ej 42. Sean \mathcal{C} una categoría, $\left\{\mu_i : A_i \rightarrow \coprod_{i \in I} A_i\right\}$ un coproducto en \mathcal{C} , $C \in \mathcal{C}$ y $\{\nu_i : A_i \rightarrow C\}_{i \in I}$ en \mathcal{C} . Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) C y $\{\nu_i : A_i \rightarrow C\}_{i \in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i \in I}$;
- b) $\exists \varphi : \coprod_{i \in I} A_i \rightarrow C$ tal que $\varphi\mu_i = \nu_i \quad \forall i \in I$.

Demostración. Supongamos C y $\{\nu_i : A_i \rightarrow C\}_{i \in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i \in I}$ entonces, como $\coprod_{i \in I} A_i$ es un coproducto, existe una única

$$\alpha : \coprod_{i \in I} A_i \longrightarrow C \text{ tal que } \alpha\mu_i = \nu_i \quad i \in I.$$

De la misma forma, como $\{\nu_i : A_i \rightarrow C\}_{i \in I}$ es un coproducto para $\{A_i\}_{i \in I}$, existe un único $\beta : C \rightarrow \coprod_{i \in I} A_i$ tal que $\beta\nu_i = \mu_i \quad \forall i \in I$.

Notemos ahora que $\beta\alpha : \coprod_{i \in I} A_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} A_i$ es tal que

$$(\beta\alpha)\mu_i = \beta(\alpha\mu_i) = \beta\nu_i = \mu_i.$$

Pero $\coprod_{i \in I} A_i$ es coproducto, entonces sólo existe un morfismo con dicha propiedad, el cual, en este caso, sería $1_{\coprod_{i \in I} A_i}$. Por lo tanto $\beta\alpha = 1_{\coprod_{i \in I} A_i}$. Análogamente

$\alpha\beta : C \rightarrow C$ es tal que

$$(\alpha\beta)\nu_i = \alpha(\beta\nu_i) = \alpha\mu_i = \nu_i$$

y como C es coproducto $\alpha\beta = 1_C$. Así $\alpha : \coprod_{i \in I} A_i \rightarrow C$ es un isomorfismo tal que $\mu_i = \nu_i \quad \forall i \in I$.

Supongamos ahora que existe $\varphi : \coprod_{i \in I} A_i \xrightarrow{\sim} C$ tal que $\varphi\mu_i = \nu_i \quad \forall i \in I$.

Sea $M \in \mathcal{C}$ y $\{\eta_i : A_i \rightarrow M\}_{i \in I}$ una familia en \mathcal{C} . Como $\coprod_{i \in I} A_i$ es coproducto existe una única $\alpha : \coprod_{i \in I} A_i \rightarrow M$ tal que $\alpha\mu_i = \eta_i \quad \forall i \in I$.

Tomando $\beta := \alpha\varphi^{-1} : C \rightarrow M$ se tiene que

$$\beta\nu_i = \alpha(\varphi^{-1}\nu_i) = \alpha\mu_i = \eta_i \quad \forall i \in I,$$

entonces $C, \{\nu_i : A_i \rightarrow C\}_{i \in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i \in I}$. □