# Ejercicios 32-42

Arruti, Sergio

**Ej 32.** $Mod\,(R)$ es normal y conormal.

*Demostración.* Se tiene que, por el Ej. 28, $Mod\,(R)$ tiene objeto cero y más aún, que $\forall\ M, N \in Mod\,(R)$ el morfismo 0 de $M$ en $N$ está dado por

$$\begin{aligned} 0_{M,N} : M &\to N \\ m &\mapsto 0_N, \end{aligned}$$

con $0_N$ el neutro aditivo de $N$. En vista de lo anterior, en lo sucesivo prescindiremos de los subíndices en la notación de los morfismos cero.

$\boxed{\text{Normal}}$ Sean $\alpha : M \to N$ en $Mod\,(R)$, $P := {}^{N}\!\diagup_{Im\,(\alpha)}$ y $\beta$ el epi canónico dado por

$$\begin{aligned} \beta : N &\to P \\ n &\mapsto n + In\,(\alpha)\,. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\alpha$ es un kernel para $\beta$. En efecto:
Dado que $Im\,(\alpha)$ es el neutro aditivo de $P$ y $Im\,(\alpha) = \{\alpha\,(m) \mid m \in M\}$, se tiene que $\beta\alpha = 0$.
Supongamos ahora que $\alpha' : M' \to N$ en $Mod\,(R)$ es tal que $\beta\alpha' = 0$, así

$$\begin{aligned} \beta\,(\alpha'\,(a)) &= Im\,(\alpha) && \forall\ a \in M' \\ \implies Im\,(\alpha') &\subseteq Im\,(\alpha) \end{aligned}$$

De lo cual se sigue que $\forall\ a \in M' \exists\ b_a \in M$ tal que $\alpha\,(b_a) = \alpha'\,(a)$. Más aún, como $\alpha$ es un monomorfismo se tiene que tal $b_a$ es único, y por lo tanto la siguiente aplicación es una función bien definida

$$\begin{aligned} \gamma : M' &\to M \\ a &\mapsto b_a. \end{aligned}$$

Sean $r \in R$, $a_1, a_2 \in M'$. Así

$$\begin{aligned} \alpha\,(b_{ra_1 - a_2}) &= \alpha'\,(ra_1 - a_2) = r\alpha'\,(a_1) - \alpha\,(a_2) \\ &= r\alpha\,(b_{a_1}) - \alpha\,(b_{a_2}) = \alpha\,(rb_{a_1} - b_{a_2})\,, \\ \implies b_{ra_1 - a_2} &= rb_{a_1} - b_{a_2}, && \alpha \text{ es mono} \\ \implies \gamma\,(ra_1 - a_2) &= r\gamma\,(a_1) - \gamma\,(a_2)\,. \end{aligned}$$

Con lo cual $\gamma$ es un morfismo de $R$-módulos que satisface que, si $a \in M'$, entonces

$$\alpha\gamma(a) = \alpha(b_a) = \alpha'(a),$$
$$\therefore\ \alpha\gamma = \alpha'.$$

Más aún, puesto que $\alpha$ es mono, $\gamma$ es el único morfismo de $R$-módulos de $M'$ en $M$ que satisface lo anterior, con lo cual se ha verificado la afirmación.

$\boxed{\text{Conormal}}$ Ahora supongamos que $\alpha : M \to N$ es epi en $Mod(R)$ y denotemos por $\beta$ al morfismo inclusión de $Ker(\alpha)$ en $M$. Afirmamos que $\alpha$ es un cokernel para $\beta$, en efecto:
Como $Ker(\alpha) = \{m \in M \mid \alpha(m) = 0_N\}$, entonces $\alpha\beta = 0$. Sea $\alpha' : M \to N'$ en $Mod(R)$ tal que $\alpha'\beta = 0$, así

$$Ker(\alpha') \supseteq Im(\beta) = Ker(\alpha).$$

Como $\alpha$ es epi se tiene que $N = Im(\alpha)$. Así, consideremos la aplicación

$$\gamma : N \to N'$$
$$\alpha(m) \mapsto \alpha'(m),$$

la cual es una función bien definida, puesto que si $m, o \in M$ son tales que $\alpha(m) = \alpha(o)$, entonces

$$m - o \in Ker(\alpha) \subseteq Ker(\alpha')$$
$$\implies \alpha'(m) = \alpha'(o).$$

Más aún, es un morfismo de $R$-módulos, pues $\alpha$ y $\alpha'$ lo son, que satisface que $\gamma\alpha = \alpha'$. Finalmente $\gamma$ es el único morfismo de $R$-módulos que satisface la igualdad anterior dado que $\alpha$ es epi.

$\square$

**Ej 33.**

**Ej 34.**

**Ej 35.** Construiremos la noción dual a la intersección de una familia de subobjetos.
**Intersección:** $\mu : B \to A$ es una intersección para $\{\mu_i : A_i \hookrightarrow A\}$ en $\mathscr{C}$ si

IntI) $\forall\ i \in I\ \exists\ \lambda_i : B \to A_i$ tal que $\mu = \mu_i\lambda_i$;

IntII) si $\nu : C \to A$ satisface que $\forall\ i \in I\ \exists\ \eta_i : C \to A_i$ tal que $\nu = \mu_i\eta_i$, entonces $\exists\ \eta : C \to B$ tal que $\nu = \mu\eta$.

**Intersección$^{\mathbf{op}}$:** $\mu^{op} : B \to A$ es una intersección para $\{\mu_i{}^{op} : A_i \hookrightarrow A\}$ en $\mathscr{C}$ si

Int$^{\text{op}}$I) $\forall\ i \in I\ \exists\ \lambda_i{}^{op} : B \to A_i$ tal que $\mu^{op} = \mu_i{}^{op}\lambda_i{}^{op}$;

Int$^{\text{op}}$II) si $\nu^{op} : C \to A$ satisface que $\forall\ i \in I\ \exists\ \eta_i{}^{op} : C \to A_i$ tal que $\nu^{op} = \mu_i{}^{op}\eta_i{}^{op}$, entonces $\exists\ \eta^{op} : C \to B$ tal que $\nu^{op} = \mu^{op}\eta^{op}$.

Así, aplicando el funtor $D_{\mathscr{C}^{op}}$ a las flechas que aparecen en lo anterior, y sabiendo que el dual de mono es epi, se llega a la siguiente definición **Intersección*:**

**Definición.** $\beta : A \to B$ es una **cointersección** para $\{\beta_i : A \twoheadrightarrow A_i\}$ en $\mathscr{C}$ si

CointI) $\forall\ i \in I\ \exists\ \delta_i : A_i \to B$ tal que $\beta = \delta_i\beta_i$;

CointII) si $\omega : A \to C$ satisface que $\forall\ i \in I\ \exists\ \gamma_i : A_i \to C$ tal que $\omega = \gamma_i\beta_i$, entonces $\exists\ \gamma : B \to C$ tal que $\omega = \gamma\beta$.

**Ej 36.** Sean $\mathscr{C}$ una categoría exacta y $\theta : A \twoheadrightarrow A'$, $\{\alpha_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$ y, $\forall\ i \in I$, $\beta_i := \mathit{coker}\,(\alpha_i)$, en $\mathscr{C}$. Si $\theta$ es una cointersección para $\{\beta_i\}_{i\in I}$, entonces $\mathit{ker}\,(\theta)$ es una unión para $\{\alpha_i\}_{i\in I}$.

*Demostración.* Denotemos por $k_\theta$ un kernel de $\theta$. Se tiene que $k_\theta$ es un subobjeto de $A$.

$\boxed{I = \varnothing}$ En este caso, por la vacuidad de $I$, basta con verificar que si $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$, entonces $\theta$ es llevado a $\mu$ vía $f$. Notemos que por vacuidad $f$ satisface la condición CointI) para la familia $\{\beta_i\}_{i\in I}$, y así por la propiedad universal de la cointersección, CointII), $\exists\ \gamma : A' \to B$ tal que $f = \gamma\theta$. Con lo cual $fk_\theta = f\gamma\,(\theta k_\theta) = 0$, y por tanto si denotamos por $\rho$ al morfismo 0 de $A$ en $B'$ se tiene que

$$fk_\theta = 0 = \rho\mu,$$

i.e. $\theta$ es llevado a $\mu$ vía $f$.

$\boxed{I \neq \varnothing}$ Dado que $\theta$ es una cointersección para $\{\beta_i\}_{i\in I}$ se tiene en particular que $\forall\ i \in I\ \exists\ \eta_i : {}^{A}\!/\!_{A_i} \to A'$ tal que $\theta = \eta_i\beta_i$, así

$$\theta\alpha_i = (\eta_i\beta_i)\,\alpha_i = \eta_i\,(\beta_i\alpha_i) = 0, \qquad \beta_i = \mathit{coker}\,(\alpha_i)$$

Luego para cada $i \in I$, por la propiedad universal del kernel, se tiene que $\exists!\ \lambda_i : A_i \to \mathit{Ker}\,(\theta)$ tal que $\alpha_i = k_\theta\lambda_i$. Por lo tanto $\forall\ i \in I\ \alpha_i \leq k_\theta$.

Ahora, sean $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ en $\mathscr{C}$ tales que $\alpha_i$ es llevado a $\mu$ vía $f$, $\forall\ i \in I$, i.e., tales que $\forall\ i \in I\ \exists\ \rho_i : A_i \to B'$ de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\rho_i} & B' \\ {\scriptstyle\alpha_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array} \qquad (*)$$

Si $c_\mu$ es un cokernel para $\mu$, entonces por lo anterior se tiene que

$$(c_\mu f)\,\alpha_i = (c_\mu \mu)\,\rho_i = 0, \qquad\qquad \forall\ i \in I$$

Luego, aplicando para cada $i \in I$ la propiedad universal del cokernel, se tiene que $\forall\ i \in I\ \exists!\ \chi_i : {}^{A}\!/\!_{A_i} \to {}^{B}\!/\!_{B'}$ tal que

$$c_\mu f = \chi_i coker\,(\mu_i) = \chi_i \beta_i.$$

Esto último, por la propiedad universal de la cointersección, garantiza que $\exists\ \chi : A' \to {}^{B}\!/\!_{B'}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta"'] & B \arrow[d, "c_\mu"] \\ A' \arrow[r, "\chi"'] & {}^{B}\!/\!_{B'} \end{tikzcd} \qquad (**)$$

De (*) y (**) se sigue que

$$\begin{aligned} c_\mu\,(f k_\theta) &= \chi\,(\theta k_\theta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual, en conjunto a que

$$\mu \simeq Im\,(\mu) \simeq Ker\,(Coker\,(\mu)) \simeq Ker\,(c_\mu)\,, \qquad \text{en } Mon_{\mathscr{C}}\,(-, B)$$

(pues $\mathscr{C}$ es exacta y $\mu$ es mono) garantiza que por medio de la propiedad universal del kernel $\exists!\ \rho : Ker\,(\theta) \to B'$ tal que $f k_\theta = \rho\mu$, i.e. el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Ker\,(\theta) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "k_\theta"'] & B' \arrow[d, "\mu"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

y así se tiene lo deseado.

$\square$

**Ej 37.**

**Ej 38.**

**Ej 39.** Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$. Si $I = \varnothing$ y dicha familia admite un coproducto, entonces este es un objeto inicial en $\mathscr{C}$.

*Demostración.* Se tiene que, por definición, dada una familia de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$, un objeto $C$ en conjunto a una familia de morfismos $\{\mu_i : A_i \to C\}$ es un coproducto para $\{A_i\}_{i\in I}$ si $\forall\ B \in\ $ y $\forall\ \{\beta_i : A_i \to B\}\ \exists!\ \alpha : C \to B$ tal que $\beta_i = \alpha\mu_i$. De modo que si $I = \varnothing$ lo anterior se reduce a que $\forall\ B \in \mathscr{C}$ existe un único morfismo $\alpha \in Hom_{\mathscr{C}}(C, B)$, i.e. $C$ es un objeto inicial en $\mathscr{C}$.

Notemos que, más aún, si $C$ es un objeto inicial entonces $C$ en conjunto una familia vacía de morfismos es un coproducto para cualquier familia vacía de objetos en $\mathscr{C}$.

□

**Ej 40.** Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $C \in \mathscr{C}$ y $\{\mu_i : A_i \to C\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$. $C$ y $\{\mu_i : A_i \to C\}_{i\in I}$ es un coproducto para $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}$ si y sólo si $C$ y $\{{\mu_i}^{op} : C \to A_i\}_{i\in I}$ es un producto para $\{A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}^{op}$.

*Demostración.* Si $I = \varnothing$ la equivalencia se sigue de los ejercicios 37 y 39, y que $A \in \mathscr{C}$ es un objeto inicial si y sólo si $A \in \mathscr{C}^{op}$ es un objeto final. En adelante supondremos que $I \neq \varnothing$.

Para la necesidad comencemos notando que $C$ también es un objeto de $\mathscr{C}^{op}$. Sean $A$ y $\{\gamma_i^{op} : A \to A_i\}_{i\in I}$ en $\mathscr{C}^{op}$, luego $A$ es un objeto de $\mathscr{C}$ y $\{\gamma_i : A_i \to A\}$ es una familia de morfismos en $\mathscr{C}$, con lo cual por la propiedad universal del coproducto $\exists!\ \alpha : C \to A$ tal que $\forall\ i \in I\ \gamma_i = \alpha\mu_i$ en $\mathscr{C}$. De modo que $\alpha^{op}$ satisface que $\alpha^{op} \in Hom_{\mathscr{C}^{op}}(A, C)$ y $\forall\ i \in I$ $\gamma_i^{op} = {\mu_i}^{op}\alpha^{op}$. Finalmente, si suponemos que $\beta^{op} : A \to C$ satisface que $\forall\ i \in I\ \gamma_i^{op} = {\mu_i}^{op}\beta^{op}$, entonces $\beta \in Hom_{\mathscr{C}}(C, A)$ y $\forall\ i \in I\ \gamma = \beta\mu_i$. De esto último y la unicidad de $\alpha$ se sigue que $\beta = \alpha$ en $\mathscr{C}$, y así $\beta^{op} = \alpha^{op}$ en $\mathscr{C}^{op}$, con lo cual se tiene lo dseeado.

La suficiencia se verifica en forma análoga, puesto que tomar una familia de morfismos en la categoría $\mathscr{C}$ induce una familia de morfismos en $\mathscr{C}^{op}$, empleando ahora la propiedad universal del producto.

□

**Ej 41.**

**Ej 42.** Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $\left\{\mu_i : A_i \to \coprod\limits_{i\in I} A_i\right\}$ un coproducto en $\mathscr{C}$, $C \in \mathscr{C}$ y $\{\nu_i : A_i \to C\}_{i\in I}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

*a)* $C$ y $\{\nu_i : A_i \to C\}_{i\in I}$ son un coproducto de $\{A_i\}_{i\in I}$;

*b)* $\exists\ \varphi : \coprod\limits_{i\in I} A_i \tilde{\to} C$ tal que $\forall\ i \in I\ \varphi\mu_i = \nu_i$.