Ejercicios 54-71

Luis Gerardo Arruti Sebastian
Sergio Rosado Zúñiga

Ej 54. Sea $G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor contravariante entre categorías abelianas. Pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) G es exacto a izquierda (derecha).

b) $G_{op} := G \circ D_{\mathscr{A}^{op}} : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathscr{B}$ es exacto a izquierda (derecha).

c) $G^{op} := D_{\mathscr{B}} \circ G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}^{op}$ es exacto a derecha (izquierda).

Demostración. $\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Supongamos G es exacta a izquierda.

Observamos que, como $D_{\mathscr{A}^{op}}$ es contravariante, entonces G_{op} es covariante. Sea $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1^{op}} M_2 \xrightarrow{f_2^{op}} M_3$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}^{op}$. Como $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son categorías abelianas en particular son exactas y $\mathscr{A}^{op}$, $\mathscr{B}^{op}$ también lo son, así, $M_3 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_1} M_1 \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{A}$, y como G es exacto a izquierda, entonces
$0 \longrightarrow G(M_1) \xrightarrow{G(f_1)} G(M_2) \xrightarrow{G(f_2)} G(M_3)$ es exacta.

Como $G(f_i) = G \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f_i^{op})$ para $i \in \{1,2\}$, y $G(M_j) = G \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(M_j)$ para $j \in \{1,2,3\}$, entonces $0 \longrightarrow G_{op}(M_1) \xrightarrow{G_{op}(f_1^{op})} G_{op}(M_2) \xrightarrow{G_{op}(f_2^{op})} G_{op}(M_3)$ es exacta y en consecuencia G_{op} es exacta a izquierda.

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Supongamos G_{op} es exacta a izquierda.

Sea $M_3 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_1} M_1 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$, entonces $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1^{op}} M_2 \xrightarrow{f_2^{op}} M_3$ es exacta en $\mathscr{A}^{op}$. Como G_{op} es exacta a izquierda $0 \longrightarrow G_{op}(M_1) \xrightarrow{G_{op}(f_1^{op})} G_{op}(M_2) \xrightarrow{G_{op}(f_2^{op})} G_{op}(M_3)$ es exacta en $\mathscr{B}$, pero $G_{op}(M_i) = G(M_i)$ para $i \in \{1,2,3\}$ y $G(f_i) = G \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f_i^{op})$ para $i \in \{1,2\}$ entonces $0 \longrightarrow G(M_1) \xrightarrow{G(f_1)} G(M_2) \xrightarrow{G(f_2)} G(M_3)$ es exacta en $\mathscr{B}$ y en consecuencia G es exacta.

$\boxed{a) \Rightarrow c)}$ Supongamos G es exacta a izquierda.

Observemos que G^{op} es covariante por ser $D_{\mathscr{B}}$ contravariante. Sea $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$, entonces $0 \longrightarrow G(M_3) \xrightarrow{G(f_2)} G(M_2) \xrightarrow{G(f_1)} G(M_1)$ es exacta en $\mathscr{B}$ por ser G exacta, así por 1.7.3 $G(M_1) \xrightarrow{(G(f_1))^{op}} G(M_2) \xrightarrow{(G(f_2))^{op}} G(M_3) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{B}^{op}$. Pero $D_{\mathscr{B}}$ manda $B \xrightarrow{f^{op}} A$ en $A \xrightarrow{f} B$, entonces $G(M_i) = D_{\mathscr{B}} \circ G(M_i)$ para $i \in \{1,2,3\}$ y $D_{\mathscr{B}} \circ G(f_j) = (G(f_j))^{op}$ para $j \in \{1,2\}$, así $G^{op}(M_1) \xrightarrow{G^{op}(f_1)} G^{op}(M_2) \xrightarrow{G^{op}(f_2)} G^{op}(M_3) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{B}^{op}$, y así G^{op} es exata a derecha.

$\boxed{c) \Rightarrow a)}$ Supongamos G^{op} es exacta a derecha.

Sea $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$ entonces, como G^{op} es exacta a derecha,
$G^{op}(M_1) \xrightarrow{G^{op}(f_1)} G^{op}(M_2) \xrightarrow{G^{op}(f_2)} G^{op}(M_3) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{B}^{op}$.
Asi $0 \longrightarrow G^{op}(M_3) \xrightarrow{(G^{op}(f_2))^{op}} G^{op}(M_2) \xrightarrow{(G^{op}(f_1))^{op}} G^{op}(M_1)$ es exacta en $\mathscr{B}$ pero $G(M_i) = D_{\mathscr{B}} \circ G(M_i)$ para $i \in \{1,2,3\}$ y $D_{\mathscr{B}} \circ G(f_j) = (G(f_j))^{op}$ para $j \in \{1,2\}$. Entonces $0 \longrightarrow G(M_3) \xrightarrow{G(f_2)} G(M_2) \xrightarrow{G(f_1)} G(M_1)$ es exacto, es decir, G es exacto a izquierda.

Las equivalencias entre

a) G es exacto a derecha.
b) $G_{op} := G \circ D_{\mathscr{A}^{op}} \colon \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathscr{B}$ es exacto a derecha.
c) $G^{op} := D_{\mathscr{B}} \circ G \colon \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}^{op}$ es exacto a izquierda.

se demuestra de manera análoga a lo anterior.

□

Ej 55. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $A \in \mathscr{A}$. Entonces los funtores $Hom_{\mathscr{A}}(A,-) : \mathscr{A} \to Ab$ y $Hom_{\mathscr{A}}(-,A) : \mathscr{A} \to Ab$ son aditivos y exactos a izquierda.

Demostración. content... □

Ej 56. Sean R, S anillos y $M \in {}_R Mod_S$. Entonces el funtor $M \otimes_S - : Mod(S) \to Mod(R)$ es aditivo y exacto a derecha.

Demostración. content... $\square$

Ej 57. Sea $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor entre categorías abelianas. Pruebe que F es exacto izquierdo $\iff F_{op}^{op} := D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}} : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathscr{B}^{op}$ es exacto a derecha.

Demostración. Primero observemos que $F_{op}^{op} = (F_{op})^{op} = (F^{op})_{op}$
$F = (F^{op})^{op}$ y $F = (F_{op})_{op}$. Esto pasa por lo siguiente:

$$
\begin{gathered}
(F_{op})^{op} = D_{\mathscr{B}} \circ F_{op} = D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}} = F_{op}^{op}. \\
(F^{op})_{op} = F^{op} \circ D_{\mathscr{A}^{op}} = D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}} = F_{op}^{op}. \\
(F^{op})^{op} = D_{\mathscr{B}^{op}} \circ D_{\mathscr{B}} \circ F = 1_{\mathscr{B}} F = F. \\
(F_{op})_{op} = F \circ D_{\mathscr{A}^{op}} \circ D_{\mathscr{A}} = F 1_{\circ} D_{\mathscr{A}} = F.
\end{gathered}
$$

Caso 1) F es covariante.

En este caso se tiene que, como $D_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}^{op}$ es un funtor contravariante para cualquier categoría $\mathscr{C}$, entonces F_{op}^{op} es covariante y F_{op} es contravariante. Como $F_{op}^{op} = (F_{op})^{op}$ entonces por el ejercicio 54 F_{op}^{op} es exacto a derecha si y sólo si F_{op} es exacto a izquierda, y como $(F_{op})_{op} = F$, entonces F_{op} es exacto a izquierda si y sólo si $(F_{op})_{op} = F$ es exacto a izquierda.

Caso 2) F es contravariante.

En este caso se tiene que F_{op}^{op} es contravariante y F_{op} es covariante. Como F es contravariante entonces por el ejercicio 54 F_{op} es exacto a izquierda si y sólo si F es exacto a izquierda, y como $(F_{op}^{op})^{op} = ((F_{op})^{op})^{op} = F^{op}$ entonces por el ejercicio 54 F_{op}^{op} es exacto a derecha si y sólo si
$(F_{op}^{op})^{op} = F^{op}$ es exacto a izquierda. Por lo tanto F es exacto a izquierda si y sólo si F_{op}^{op} es exacta a derecha.

$\square$

Ej 58. Para un funtor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ entre categorías abelianas, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) F es exacto a derecha.

b) F preserva cokernels, i.e.

$$F(Coker(\ X \xrightarrow{\alpha} Y\ )) \simeq Coker(\ F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y)\ ).$$

c) Para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ en $\mathscr{A}$, se tiene que $F(K) \xrightarrow{F(f)} F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{B}$.

Demostración. $\boxed{a) \iff c)}$ Por el ejercicio 57 se tiene que F_{op}^{op} es exacto a izquierda $\iff$ $(F_{op}^{op})_{op}^{op}$ es exacto a derecha, pero

$$(F_{op}^{op})_{op}^{op} = \{[(F_{op})^{op}]^{op}\}_{op} = (f_{op})_{op} = F$$

por lo tanto F_{op}^{op} es exacto a izquierda $\iff$ F es exacto a derecha.

Así por 1.10.3 las siguientes condiciones son equivalentes:

a*) F_{op}^{op} es exacto a derecha.
b*) F_{op}^{op} preserva kernels.
c*) Para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ en $\mathscr{A}^{op}$, se tiene que $0 \longrightarrow F_{op}^{op}(K) \xrightarrow{F_{op}^{op}(f)} F_{op}^{op}(L) \xrightarrow{F_{op}^{op}(g)} F_{op}^{op}(M)$ es exacta en $\mathscr{B}^{op}$.

Entonces F es exacta a izquierda si y sólo si
para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ en $\mathscr{A}^{op}$, se tiene que $0 \longrightarrow F_{op}^{op}(K) \xrightarrow{F_{op}^{op}(f)} F_{op}^{op}(L) \xrightarrow{F_{op}^{op}(g)} F_{op}^{op}(M)$ es exacta en $\mathscr{B}^{op}$
si y sólo si
Para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{g^{op}} L \xrightarrow{f^{op}} K \longrightarrow 0$ en $\mathscr{A}$, se tiene que $F_{op}^{op}(M) \xrightarrow{[F_{op}^{op}(g)]^{op}} F_{op}^{op}(L) \xrightarrow{[F_{op}^{op}(f)]^{op}} F_{op}^{op}(K) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{B}$.

Observando que $F_{op}^{op}(A) = F(A)$ para cada $A \in \mathscr{A}$ y que para cada

$\alpha \in Mor(\mathscr{A}^{op})$ $F_{op}^{op}(\alpha) = D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(\alpha) = [F(\alpha^{op})]^{op}$

Entonces se tiene que F es exacta a izquierda si y sólo si para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{g^{op}} L \xrightarrow{f^{op}} K \longrightarrow 0$ en $\mathscr{A}$ se tiene que $F(M) \xrightarrow{F(g^{op})} F(L) \xrightarrow{F(f^{op})} F(K) \longrightarrow 0$ en $\mathscr{A}$.

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Sea $\alpha : X \to Y$ en $\mathscr{A}$. Luego, se tiene la sucesión exacta $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{C_\alpha} Coker(\alpha) \longrightarrow 0$ en $\mathscr{A}$. Ahora, como F es exacta a derecha tenemos que $F(X) \xrightarrow{F(\alpha)} F(Y) \xrightarrow{F(C_\alpha)} F(Coker(\alpha)) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{B}$, por lo tanto $F(C_\alpha) \simeq CoIm(F_\alpha) \simeq Coker(F_\alpha)$ en $Epi_{\mathscr{B}}(\bullet, F(Y))$.

$\boxed{b) \Rightarrow c)}$ Supongamos F preserva cokerneles.

Sea $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}^{op}$. Luego, $(\ M \longrightarrow 0\ ) \simeq Coker(\ L \xrightarrow{g} M\ )$ y
$(\ L \xrightarrow{g} M\ ) \simeq Coker(\ K \xrightarrow{f} L\ ) \ldots (*)$ por la exactitud en L; y como F preserva cokernels, aseguramos que $F(0) = 0$.

En efecto, como $(\ 0 \xrightarrow{1_0} 0\ ) \simeq Coker(\ 0 \xrightarrow{1_0} 0\ )$, y F preserva cokernels, se tiene que
$(\ F(0) \xrightarrow{1_{F(0)}} F(0)\ ) \simeq Coker(\ F(0) \xrightarrow{1_{F(0)}} F(0)\ ) \simeq Coker(\ F(0) \xrightarrow{0} F(0)\ )$.
Por lo tanto $1_{F(0)} = 0$ y por el ejercicio 51, se tiene que $F(0) = 0$.

Ahora bien, por $(*)$ y dado que F preserva cokerneles, se tiene que

$$(\ F(M) \longrightarrow 0\ ) \simeq Coker(\ F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M)\ )$$

y

$$(\ F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M)\ ) \simeq Coker(\ F(K) \xrightarrow{F(f)} F(L)\ )$$

de donde se sigue que $F(K) \xrightarrow{F(f)} F(L) \xrightarrow{F(g)} F(M) \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{B}$.

$\square$

Ej 59. Si $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es un funtor contravariante entre categorías abelianas, entonces las siguientes condiciones son equivalentes

(a) G es exacto a izquierda.

(b) G manda cokerneles en kerneles.

(c) Si $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en $\mathscr{A}$, entonces $0 \longrightarrow GM \xrightarrow{Gg} BL \xrightarrow{Gf} GK$ es exacta en $\mathscr{B}$.

Demostración. $\boxed{(a) \implies (b)}$ Bajo estas condiciones, por el Ej. 54c), $D_{\mathscr{B}}G$ es exacto a derecha y por tanto, por el Ej. 58, preserva cokerneles. Sea

$\alpha : X \to Y$ en $\mathscr{A}$, entonces

$$\begin{aligned} G\left(Coker\left(\ X \xrightarrow{\ \alpha\ } Y\ \right)\right) &= D_{\mathscr{B}^{op}}\left(D_{\mathscr{B}}G\left(Coker\left(\ X \xrightarrow{\ \alpha\ } Y\ \right)\right)\right) \\ &\simeq D_{\mathscr{B}^{op}}\left(Coker\left(\ GX \xrightarrow{G\alpha^{op}} GY\ \right)\right) \\ &\simeq Ker\left(\ GY \xrightarrow{G\alpha} GX\ \right). \end{aligned}$$

Lo anterior implica que G manda cokerneles en kerneles.

$\boxed{(a) \impliedby (b)}$ Sea $\alpha : X \to Y$ en $\mathscr{A}$. Bajo estas hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned} D_{\mathscr{B}}G\left(Coker\left(\ X \xrightarrow{\ \alpha\ } Y\ \right)\right) &= D_{\mathscr{B}}\left(G\left(Coker\left(\ X \xrightarrow{\ \alpha\ } Y\ \right)\right)\right) \\ &\simeq D_{\mathscr{B}}\left(Ker\left(\ GY \xrightarrow{G\alpha} GX\ \right)\right) \\ &\simeq Coker\left(\ GX \xrightarrow{G\alpha^{op}} GY\ \right). \end{aligned}$$

Lo cual garantiza que $D_{\mathscr{B}}G$ preserva cokerneles, por lo tanto este funtor es exacto a derecha (por el Ej 58) y así (por el Ej. 54) G es exacto a izquierda.6

$\boxed{(a) \iff (c)}$ Empleando nuevamente las hipótesis en conjunto los Ejercicios 54 y 58 se tiene que G es exacto a izquierda si y sólo si $D_{\mathscr{B}}G$ es exacto a derecha, lo cual a su vez es equivalente a que para toda

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\ f\ } L \xrightarrow{\ g\ } M \longrightarrow 0$$

sucesión exacta en $\mathscr{A}$ se tenga que

$$D_BG\,(K) \xrightarrow{D_BG(f)} D_BG\,(L) \xrightarrow{D_BG(g)} D_BG\,(M) \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathscr{B}^{op}$. Esto último sucede si y sólo si para toda

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\ f\ } L \xrightarrow{\ g\ } M \longrightarrow 0$$

sucesión exacta en $\mathscr{A}$ se tiene que

$$G\,(K) \xrightarrow{(Gf)^{op}} G\,(L) \xrightarrow{(Gg)^{op}} G\,(M) \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathscr{B}^{op}$, lo cual por su parte es equivalente a que para toda

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\ f\ } L \xrightarrow{\ g\ } M \longrightarrow 0$$

sucesión exacta en $\mathscr{A}$ se tenga que

$$0 \longrightarrow G\,(M) \xrightarrow{G(g)} G\,(L) \xrightarrow{G(f)} G\,(K)$$

es exacta en $\mathscr{B}$.

$\square$

Ej 60. Si $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es un funtor contravariante entre categorías abelianas, entonces las siguientes condiciones son equivalentes

(a) G es exacto a derecha.

(b) G manda kerneles en cokerneles.

(c) Si $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en $\mathscr{A}$, entonces $GM \xrightarrow{Gg} BL \xrightarrow{Gf} GK \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{B}$.

Demostración. $\boxed{(a) \iff (b)}$ Verificar esta equivalencia se realiza en forma análoga a lo realizado para probar la equivalencia entre los incisos (a) y (b) del Ej. 59, empleando ahora que por el 54 G es exacto a derecha si y sólo si $D_{\mathscr{B}}G$ es exacto a izquierda, y que por el Teorema 1.10.3 $D_{\mathscr{B}}G$ es exacto a izquierda si y sólo si $D_{\mathscr{B}}G$ preserva kerneles.

$\boxed{(a) \iff (c)}$ Se demuestra en forma análoga a lo realizado para probar la equivalencia entre los incisos (a) y (c) del Ej. 59, empleando ahoa que por el 54 G es exacto a derecha si y sólo si $D_{\mathscr{B}}G$ es exacto a izquierda, y que por el Teorema 1.10.3 $D_{\mathscr{B}}G$ es exacto a izquierda si y sólo si para toda

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

sucesión exacta en $\mathscr{A}$ se tiene que

$$0 \longrightarrow G(K) \xrightarrow{(Gf)^{op}} G(L) \xrightarrow{(Gg)^{op}} G(M)$$

es exacta en $\mathscr{B}^{op}$. □

Ej 61. Para un funtor $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$, entre categorías abelianas, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) F es exacto.

b) $\forall \mathscr{D} = \{\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C\ \}$ en $\mathscr{A}$, se tiene que:
$\mathscr{D}$ es exacto en $\mathscr{A} \Rightarrow F(\mathscr{D})$ es exacto en $\mathscr{B}$.

Demostración. □

Ej 62. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "u_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
A'_1 \arrow[r, "u'_1"] & A'_2 \arrow[r, "u'_2"] & A'_3 \arrow[r, "u'_3"] & A'_4 \arrow[r, "u'_4"] & A'_5
\end{tikzcd}$$

y con filas exactas en una categoría abeliana $\mathscr{A}$. Pruebe que:

a) Si f_2 y f_4 son monos y f_1 es epi, entonces f_3 es mono.

b) Si f_2 y f_4 son epis y f_5 es mono, entonces f_3 es epi.

Demostración. Por el teorema 1.10.9 existe una subcategoría abeliana $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ tal que $\mathscr{A}'$ es subcategoría plena y pequeña de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{A}'$. Por 1.10.10 existe un anillo R y un funtor fiel, pleno y exacto $F : \mathscr{A}' \longrightarrow Mod(R)$.

Considerando el diagrama $F(\mathscr{D})$ en $Mod(R)$

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[r, "F(u_1)"] \arrow[d, "F(f_1)"] & F(A_2) \arrow[r, "F(u_2)"] \arrow[d, "F(f_2)"] & F(A_3) \arrow[r, "F(u_3)"] \arrow[d, "F(f_3)"] & F(A_4) \arrow[r, "F(u_4)"] \arrow[d, "F(f_4)"] & F(A_5) \arrow[d, "F(f_5)"] \\
F(A_1') \arrow[r, "F(u_1')"] & F(A_2') \arrow[r, "F(u_2')"] & F(A_3') \arrow[r, "F(u_3')"] & F(A_4') \arrow[r, "F(u_4')"] & F(A_5')
\end{tikzcd}$$

por 1.10.7 se tiene que $F(\mathscr{D})$ es conmutativo y con filas exactas en $Mod(R)$. Veamos que a) y b) se cumplen para el diagrama en $Mod(R)$.

$\boxed{a)}$ Si $F(f_2)$ y $F(f_4)$ son monos y $F(f_1)$ es epi afirmamos que $Ker(F(f_3)) = 0$.

Sea $x \in Ker(F(f_3)) \leq F(A_3)$, en particular $F(f_4)F(u_3)(x) = F(u_3')F(f_3)(x)$ el cual es 0, entonces $x \in Ker(F(f_4)F(u_3)) = Ker(F(u_3))$ pues $F(f_4)$ es mono, así, como los renglones son exactos, $x \in Ker(F(u_3)) = Im(F(u_2))$ y por lo tanto existe $y \in F(A_2)$ tal que $F(u_2)(y) = x$.

Ahora, $F(f_3)(x) = 0$ entonces $0 = F(f_3)F(u_2)(y) = F(u_2')F(f_2)(y)$ por lo que $y \in Ker(F(u_2')F(f_2))$ entonces, como $F(f_2)$ es mono, $F(f_2)(y) \in Ker(F(u_2')) = Im(F(u_1'))$. Por lo anterior, se tiene entonces que $\exists z' \in F(A_1')$ tal que $F(u_1')(z') = F(f_2)(y)$, y como $F(f_1)$ es epi, entonces existe $z \in F(A_1)$ tal que $F(f_1)(z) = z'$, es decir, $F(u_1')F(f_1)(z) = F(f_2)(y)$ y esto implica que $F(f_2)(y) = F(f_2)F(u_1)(z)$ pero $F(f_2)$ es mono en $Mod(R)$, entonces es inyectivo, por lo que $y = F(u_1)(z)$ y así $x = F(u_2)F(u_1)(z) = 0$.
Por lo tanto $F(f_3)$ es mono.

$\boxed{b)}$ Dado un diagrama en $\mathscr{A}$ como se muestra en las hipótesis se tiene que el siguiente diagrama es un diagrama conmutativo con renglones exactos en $\mathscr{A}^{op}$

$$\begin{tikzcd}
A_5' \arrow[r, "u_4'^{op}"] \arrow[d, "f_5^{op}"] & A_4' \arrow[r, "u_3'^{op}"] \arrow[d, "f_4^{op}"] & A_3' \arrow[r, "u_2'^{op}"] \arrow[d, "f_3^{op}"] & A_2' \arrow[r, "u_1'^{op}"] \arrow[d, "f_2^{op}"] & A_1' \arrow[d, "f_1^{op}"] \\
A_5 \arrow[r, "u_4^{op}"] & A_4 \arrow[r, "u_3^{op}"] & A_3 \arrow[r, "u_2^{op}"] & A_2 \arrow[r, "u_1^{op}"] & A_1
\end{tikzcd}$$

Ahora, si f_2 y f_4 son epi y f_5 es mono, entonces f_2^{op} y f_4^{op} son monos y f_5^{op} es epi, así por el inciso a) se tiene que f_3^{op} es mono lo cual implica que f_3 es epi.

$\square$

Ej 63. Sean $\mathscr{C}$ una categoría aditiva, sean $f : X \to Z, g : Y \to Z$ en $\mathscr{C}$. Si α, o β, es epi, entonces $h : X \coprod Y \to Z$ el morfismo asociado a la matriz $(f \ g)$ es epi.

Demostración. Esta resultado ya fue probado previamente (ver Ej. 48b)).

$\square$

Ej 64. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\beta_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & Q \end{tikzcd}$$

un push-out en $\mathscr{A}$. Así:

(a) si α_1 es mono, entonces β_2 es mono;

(b) α_2 se factoriza a través de α_1 si y sólo si β_2 es split-mono.

Demostración. Notemos primeramente que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & A_1 \arrow[d, "\beta_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & Q \end{tikzcd}$$

es un push-out en $\mathscr{A}$ si y sólo si

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "{\beta_2}^{op}"] \arrow[d, "{\beta_1}^{op}"'] & A_2 \arrow[d, "{\alpha_2}^{op}"] \\ A_1 \arrow[r, "{\alpha_1}^{op}"'] & A \end{tikzcd}$$

es un pull-back en $\mathscr{A}^{op}$. Dado que por el Ej. 48a) $\mathscr{A}$ es abeliana si y sólo si $\mathscr{A}^{op}$ lo es, entonces por el corolario 1.10.15 se tiene que:

$\boxed{(a)}$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \text{ es mono} &\implies {\alpha_1}^{op} \text{ es epi} \\ &\implies {\beta_2}^{op} \text{ es epi} \\ &\implies \beta_2 \text{ es mono.} \end{aligned}$$

$\boxed{(b)}$

$$\begin{aligned}\alpha_2 \text{ se factoriza a través de } \alpha_1 &\iff {\alpha_2}^{op} \text{ se factoriza a través de } {\alpha_1}^{op}\\ &\iff {\beta_2}^{op} \text{ es split-epi}\\ &\iff \beta_2 \text{ es split-mono.}\end{aligned}$$

$\square$

Ej 65. Pruebe que para una sucesión exacta $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ en una categoría abeliana $\mathscr{A}$ y $\gamma \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A')$, las siguientes condiciones se satisfacen:

a) Si (B', α', γ') es un push-out de $A' \xleftarrow{\gamma} A \xrightarrow{\alpha} B$, entonces existe $\beta' : B' \to C$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma'"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \ldots(*)$$

en $\mathscr{A}$, cuyas filas son sucesiones exactas.

b) Si se tiene un diagrama conmutativo como en (*), con filas exactas, entonces (B', α', γ') es un push-out de $A' \xleftarrow{\gamma} A \xrightarrow{\alpha} B$.

Demostración. Puesto que $\mathscr{A}$ es abeliana y $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ es exacta, se tiene entonces que $0 \longrightarrow C \xrightarrow{\beta^{op}} B \xrightarrow{\alpha^{op}} A \longrightarrow 0$ es exacta en $\mathscr{A}^{op}$, además por hipótesis $\gamma \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A')$, entonces $\gamma^{op} \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(A', A)$.

Sea (B', α', γ') un push-out de $A' \xleftarrow{\gamma} A \xrightarrow{\alpha} B$, entonces $(B', (\alpha')^{op}, (\gamma')^{op})$ es un pull-back de $A' \xrightarrow{\gamma^{op}} A \xleftarrow{\alpha^{op}} B$, así por 1.10.16 existe $(\beta')^{op} : C \to B'$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "(\beta')^{op}"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "(\alpha')^{op}"] \arrow[d, "(\gamma')^{op}"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^{op}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "\beta^{op}"] & B \arrow[r, "\alpha^{op}"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \ldots(1)$$

en $\mathscr{A}^{op}$ cuyas silas son exactas.

Así, $\beta' : B' \to C$ es tal que hace conmutar el siguiente diagrama en $\mathscr{A}$, cuyas filas son exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma'"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C' \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Veamos ahora que se cumple b). Si tenemos un diagrama conmutativo como en (*) con filas exactas en $\mathscr{A}$, entonces tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas en $\mathscr{A}^{op}$ como se muestra en (1). Así, por 1.10.16 $(B', (\alpha')^{op}, (\gamma')^{op})$ es un pull-back de $A' \xrightarrow{\gamma^{op}} A \xleftarrow{\alpha^{op}} B$ por lo que (B', α', γ') es un push-out de $A' \xleftarrow{\gamma} A \xrightarrow{\alpha} B$ en $\mathscr{A}$.

□

Ej 66. Para una categoría abeliana $\mathscr{A}$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes.

a) El diagrama
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & A_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & Q
\end{tikzcd}$$
es un Push-out en $\mathscr{A}$.

b) La sucesión

$$A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_2 \end{smallmatrix}\right)} A_1 \coprod A_2 \xrightarrow{(\beta_1\ \beta_2)} Q \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathscr{A}$.

Demostración. El diagrama
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & A_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\
A_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & Q
\end{tikzcd}$$
es un Push-out en $\mathscr{A}$ si y sólo si el diagrama
$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "(\beta_2)^{op}"] \arrow[d, "(\beta_1)^{op}"'] & A_2 \arrow[d, "(\alpha_2)^{op}"] \\
A_1 \arrow[r, "(\alpha_1)^{op}"'] & A
\end{tikzcd}$$
es un Pull-back en $\mathscr{A}^{op}$ lo cual, por la proposición 1.10.17, es equivalente a que la sucesión

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \beta_1^{op} \\ \beta_2^{op} \end{smallmatrix}\right)} A_1 \coprod A_2 \xrightarrow{(\alpha_1^{op}\ (-\alpha_2)^{op})} A$$

es exacta en $\mathscr{A}^{op}$. Pero esto pasa si y sólo si

$$A \xrightarrow{(\,\alpha_1^{op}\ \ (-\alpha_2)^{op}\,)^{op}} A_1 \coprod A_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix}\beta_1^{op}\\ \beta_2^{op}\end{pmatrix}^{op}} Q \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathscr{A}$ si y sólo si

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ -\alpha_2\end{pmatrix}} A_1 \coprod A_2 \xrightarrow{(\,\beta_1\ \ \beta_2\,)} Q \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathscr{A}$.

□

Ej 67. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "Id_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo y de filas exactas en $\mathscr{A}$. Entonces

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{pmatrix}\gamma\\ -\alpha\end{pmatrix}} A' \coprod B \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha' & \gamma'\end{pmatrix}} B' \longrightarrow 0$$

Demostración. Notemos que bajo estas hipótesis al pasar a la categoría opuesta se tiene que

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, "Id_C"'] & B' \arrow[r, "\alpha'^{op}"] \arrow[d, "\gamma'^{op}"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^{op}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r] & B \arrow[r, "\alpha^{op}"'] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo de filas exactas en $\mathscr{A}^{op}$, lo cual por el Coloralio 1.10.18 implica que

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\begin{pmatrix}\gamma'^{op}\\ \alpha'^{op}\end{pmatrix}} B \coprod A' \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha^{op} & -\gamma^{op}\end{pmatrix}} A \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta en $\mathscr{A}^{op}$, lo cual sucede si y sólo si

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{-\begin{pmatrix}\gamma\\ -\alpha\end{pmatrix}} A' \coprod B \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha' & \gamma'\end{pmatrix}} B' \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta en $\mathscr{A}$, puesto que $B \coprod A'$ es un biproducto en $\mathscr{A}$ y en $\mathscr{A}^{op}$ y además $A' \coprod B \simeq B \coprod A'$. Dado que claramente en toda categoría abeliana sucede que si $f, g \in \mathscr{C}$

a) f es mono si y sólo si $-f$ lo es;

b) f es un kernel para g si y sólo si $-f$ lo es,

con lo anterior se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 68. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ una familia de sucesiones en $\mathscr{A}$, con

$$\mu_i : \ A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \quad \forall\ i \in [1, n],$$

$$A := \coprod_{i=1}^n A_i, B := \coprod_{i=1}^n B_i, C := \coprod_{i=1}^n C_i, f = \begin{pmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_n \end{pmatrix}$$

y

$$\mu := \coprod_{i=1}^n \mu_i : \ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \ .$$

Entonces μ es exacta en $\mathscr{A}$ si y sólo si $\forall\ i \in [1, n]$ μ_i es exacta en $\mathscr{A}$.

Demostración. content... $\square$

Ej 68*. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $M \in \mathscr{A}$. Pruebe que

a) $M \in Proj(\mathscr{A}) \iff \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, \bullet) : \mathscr{A} \to Ab$ es exacto.

a) $M \in Inj(\mathscr{A}) \iff \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\bullet, M) : \mathscr{A} \to Ab$ es exacto.

Demostración. Observemos que $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, \bullet)$ y $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\bullet, M)$ son aditivos y exactos a izquierda por el ejercicio 55.

$\boxed{a), \Rightarrow)}$ Supongamos $M \in Proj(\mathscr{A})$ y sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. Como $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, \bullet)$ es exacta a izquierda, se tiene que

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, A) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,f)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, B) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,g)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, C)$$

es exacta en Ab.

Basta mostrar que $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, g)$ es epi en Ab. Mostraremos que, de hecho, $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, g)$ es suprayectiva.

Sea $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, C)$, como $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ es exacta, se tiene que g es epi y $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B, C)$ así, como M es proyectivo, existe un $\eta \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, B)$ tal que $g\eta = \alpha$, por lo tanto $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M, g)$ es suprayectivo y en particular es epi, por lo tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,A) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,f)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,B) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,g)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,C) \longrightarrow 0$$

es exacta en Ab.

$\boxed{a), \Leftarrow)}$ Supongamos ahora que $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\bullet)$ es exacto. Sea $h \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,C)$ y $\gamma \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(X,C)$ en epi, entonces tenemos el siguiente diagrama con renglón exacto

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\eta"] & \\ X \arrow[r, two heads, "\gamma"'] & C \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Como $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\bullet)$ es exacto, entonces

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,X) \xrightarrow[\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,g)]{} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,C) \longrightarrow 0$$

es exacto en Ab, por lo tanto $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,g)$ es epi y en consecuencia suprayectivo. Así como $\eta \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,C)$, existe $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,X)$ tal que $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(M,\gamma)(f) = \eta$ es decir, $\gamma f = \eta$, por lo tanto M es proyectivo.

$\boxed{b), \Rightarrow)}$ Supongamos M es inyectivo en $\mathscr{A}$. Sea

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$. Como $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\bullet,M)$ es un funtor exacto izquierdo contravariante, por el ejercicio 55, entonces

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(C,M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(g,M)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B,M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(f,M)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A,M)$$

es exacta. Basta probar entonces que $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(f,M)$ es suprayectivo.

Sea $\eta \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A,M)$, como $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en $\mathscr{A}$, en particular f es mono así, como M es inyectivo, se tiene entonces que $\exists \gamma \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B,M)$ tal que $\eta = \gamma f$ por lo tanto $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(f,M)$ es suprayectivo, en particular es epi. Así

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(C,M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(g,M)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(B,M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(f,M)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A,M)$$

es exacta en Ab lo que implica que $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\bullet,M)$ es exacto.

$\boxed{b), \Leftarrow)}$ Supongamos $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\bullet,M)$ es exacto. Si $\eta \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A,M)$ y $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A,X)$ es mono, entonces se tiene el siguiente diagrama con renglón exacto

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta"'] & X \\ & M & \end{tikzcd}$$

como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\bullet, M)$ es exacto, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\alpha,M)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,M) \longrightarrow 0$$

es exacto, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\alpha, M)$ es epi en Ab por lo tanto es suprayectivo.

Así, como $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, M)$, $\quad \exists \gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, M)$ tal que $\eta = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\alpha, M)(\gamma) = \gamma \circ \alpha$. Por lo tanto M es proyectivo.

$\square$

Ej 69. Sea $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $\beta : I \twoheadrightarrow M$ un split-epi en $\mathscr{A}$, con $I \in Inj(\mathscr{A})$. Pruebe que $M \in Inj(\mathscr{A})$.

Demostración. Sea $\alpha : M \to I$ tal que $\beta\alpha = 1_M$, este morfismo existe por ser β split-epi, y consideremos un diagrama en $\mathscr{A}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ M. & \end{tikzcd}$$

Como $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(M, I)$, entonces $\alpha g : A \to I$. Como I es inyectivo en $\mathscr{A}$ existe $\eta : B \to I$ tal que $\alpha g = \eta f$, entonces $\beta\eta f = \beta\alpha g = 1_M g = g$. Por lo tanto M es inyectivo en A.

$\square$

Ej 70. Para una categoría abeliana A e $I \in A$, pruebe las siguientes condiciones equivalentes

a) $I \in Inj(\mathscr{A})$.

b) Todo mono $\alpha : I \to X$ en $\mathscr{A}$ es split-mono.

Demostración. $\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Supongamos I es inyectivo en $\mathscr{A}$ y $\alpha : I \to X$ es mono, entonces se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, "Id_I"'] & X \\ I & . \end{tikzcd}$$

Como I es inyectivo $\exists \beta : X \to I$ tal que $\beta\alpha = Id_I$, es decir, α es split-mono.

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Supongamos que todo mono $\alpha : I \to X$ en $\mathscr{A}$ es split-mono.

Consideremos el diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & B \\ I & . \end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{A}$ es abeliana, existe el Push-out de f y η

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & B \arrow[d, "\alpha_1"] \\ I \arrow[r, "\alpha_2"'] & P \end{tikzcd} .$$

Por el ejercicio 64 a) se tiene que, como f es mono, α_2 es mono, y por el ejercicio 64 b), que η se factoriza a travéz de f si y sólo si α_2 es split-mono. Pero por hipótesis α_2 al ser mono, tiene que ser split-mono, por lo tanto η se factoriza a travéz de f e implica que I es inyectivo.

□

Ej 71. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $\{Q_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos en $\mathscr{A}$ que admite un producto Q. Entonces $Q \in Inj\,(\mathscr{A})$ si y sólo si $\forall\ i \in I$ $Q_i \in Inj\,(\mathscr{A})$.

Demostración. Sean $\{\mu_i : Q_i \to Q\}_{i \in I}$ y $\{\pi_i : Q \to Q_i\}_{i \in I}$ las inclusiones y proyecciones naturales de Q y la familia $\{Q_i\}_{i \in I}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Dado que $\forall\ i \in I$ $\pi_i \mu_i = 1_{Q_i}$, se tiene que $\forall\ i \in I$ $\pi_i : Q \to Q_i$ es un split-epi, con $Q \in Inj\,(\mathscr{A})$. De modo que por el Ej. 69 $\forall\ i \in I$ $Q_i \in Inj\,(\mathscr{A})$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Consideremos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ Q & \end{tikzcd}$$

con g un mono. Luego para cada $i \in I$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\exists\ f_i"] \\ Q \arrow[r, "\pi_i"'] & Q_i \end{tikzcd} .$$

Así, aplicando la propiedad universal del producto a la familia $\{f_i : Y \to Q_i\}$, se tiene que $\exists\ f' \in Hom_{\mathscr{A}}(Y, Q)$ tal que $\forall\ i \in I\ \pi_i f' = f_i$. Así, si $i \in I$,

$$\begin{aligned} \pi_i (f'g) &= (\pi_i f')\, g \\ &= f_i g \\ &= \pi_i f. \end{aligned}$$

Lo anterior, por la propiedad universal del porducto, garantiza que $f'g = f$ y así se tiene lo deseado.

$\square$