Ejercicios 43-53

Luis Gerardo Arruti Sebastian
Sergio Rosado Zúñiga

Ej 43.

Ej 44.

Ej 45. Sean $\{R_i\}_{i=1}^n$ una familia de anillos (asociativos con 1). Considere el conjunto $R := \bigtimes_{i=1}^n R_i$, con las operaciones suma y producto dadas coordenada a coordenada, i.e., para $x = (x_i)_{i=1}^n$ y $y = (y_i)_{i=1}^n$ en R, definimos $x + y := (x_i + y_i)_{i=1}^n$ y $xy = (x_i y_i)_{i=1}^n$.

Pruebe que

a) Con las operaciones anteriores R es un anillo con $1_R = (1_{R_i})_{i=1}^n$.

b) Para cada $j \in [1, n]$, la j-ésima pritección $proy_j : R \to R_j$, $x = (x_i)_{i=1}^n \mapsto x_j$, es un morfismo en *Rings* y suryectivo en *Sets*.

c) R y $\{proy_j : R \to R_i\}_{i=1}^n$ son un producto en *Rings* para $\{R_i\}_{i=1}^n$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Sean $x, y \in R$, con $x = (x_i)_{i=1}^n,\ y = (y_i)_{i=1}^n$, $z = (z_i)_{i=1}^n$ y $0_R = (0_i)_{i=1}^n$ donde 0_i es el neutro aditivo de R_i para cada $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Grupo con respecto a la suma

i) Como $x_i, y_i \in R_i\ \forall i \in I$ entonces $x_i + y_i \in R_i\ \forall i \in I$, así $x + y := (x_i + y_i)_{i=1}^n \in R$. Mas aún, $(x_i + y_i)_{i=1}^n = (y_i + x_i)_{i=1}^n$, por lo que $x + y = y + x$.

ii) Como R es anillo para toda $i \in I$, entonces

$$(x + y) + z = [(x_i + y_i) + z_i]_{i=1}^n = [x_i + (y_i + z_i)]_{i=1}^n = x + (y + z).$$

iii) $0_R + x = (0_i + x_i)_{i=1}^n = (x_i)_{i=1}^n = x$.

iv) Definimos para cada $x \in R \quad -x := (-x_i)_{i=1}^n$, entonces $x + (-x) = (x_i + (-x_i))_{i=1}^n = (0_i)_{i=1}^n = 0_R$.

Por lo tanto R es un grupo abeliano con la suma.

Monoide con respecto a la multiplicación:

Como R_i es un anillo para cada $i \in I$ se tiene que

i) $xy = (x_i y_i)_{i=1}^n \in R$ pues $x_i y_i \in R_i \quad \forall i \in I$.
ii) $(xy)z = [(x_i y_i)z_i]_{i=1}^n = [x_i(y_i z_i)]_{i=1}^n = x(yz)$.
iii) $x1_R = (x_i 1_{R_i})_{i=1}^n = (x_i)_{i=1}^n = x = (x_i)_{i=1}^n = (1_{R_i} x_i)_{i=1}^n = 1_R x$.
iv) $(x+y)z = [(x_i + y_i)z_i]_{i=1}^n = [x_i z_i + y_i z_i]_{i=1}^n = xz + yz$.

Por lo tanto R es un anillo con $1_R = (1_{R_i})_{i=1}^n$.

$\boxed{b)}$ Sea $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$, tomamos $proy_j : R \to R_j$ tal que $z = (z_i)_{i=1}^n \mapsto z_j$ y sean x, y descritos como en el inciso a).

Entonces $proy_j(x+y) = proy_j[(x_i+y_i)_{i=1}^n] = x_j+y_j = proy_j(x)+proy_j(y)$ y $proy_j(xy) = proy_j[(x_i y_i)_{i=1}^n] = x_j y_j = proy_j(x) proy_j(y)$.

Además, si $a \in R_j$ para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene el elemento $\hat{a} \in R$ tal que $\hat{a} = (a_i)_{i=1}^n$ donde $a_i = 0 \quad \forall i \neq j$ y $a_j = a$. Así $proy_j(\hat{a}) = a$ y en consecuencia $proy_j$ es un morfismo de anillos suprayectivo.

$\boxed{c)}$ Sea P un anillo y $\{p_i : P \to R_i\}_{i=1}^n$ una familia de morfismos de anillos. Sea $\varphi : P \to R$ tal que $\varphi(x) = x_p$ donde x es el elemento de R tal que $x_p = (x_i)_{i=1}^n$ con $x_i = p_i(x)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Veamos que es morfismo de anillos.

Como p_i es morfismo de anillos y $p_i(x) \in R_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y para cada $x \in P$, entonces si $(a_i)_{i=1}^n = \varphi(x)$ se tiene que $a_i = p_i(x)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ por lo tanto φ está bien definida.

Sean $x, y \in P$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) = (x+y)_p = (p_i(x+y))_{i=1}^n = (p_i(x) + p_i(y))_{i=1}^n \\ = (p_i(x))_{i=1}^n + (p_i(y))_{i=1}^n = x_p + y_p = \varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\varphi(xy) = (xy)_p = (p_i(xy))_{i=1}^n = (p_i(x)p_i(y))_{i=1}^n \\ = (p_i(x))_{i=1}^n (p_i(y))_{i=1}^n = x_p y_p = \varphi(x)\varphi(y).\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es un morfismo de anillos. Notemos que, para toda $x \in P$, $proy_j \circ \varphi(x) = proy_j(x_p) = p_j(x)$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por lo tanto $p_j = proy_j \circ \varphi$.

Por último si existiera $\eta : P \to R$ tal que $p_j = proy_j \eta$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces para cada $x \in P$ se tiene que $\eta(x) \in R$, es decir, $\eta(x) = (x_i)_{i=1}^n$ con $x_i \in R_i \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ahora, como $proy_j \eta(x) = p_j(x)$, entonces $x_j = p_j(x) \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, es decir, $\eta(x) = (p_i(x))_{i=1}^n = x_p = \varphi(x)$.

Por lo tanto φ es único y así R y $\{proy_j : R \to R_i\}_{i=1}^n$ son un producto en *Rings* para $\{R_i\}_{i=1}^n$.

$\square$

Ej 46. Para una categoría $\mathscr{C}$, pruebe que las siguientes condiciones son equivalentes

a) $\mathscr{C}$ tiene objeto cero y biproductos $A \coprod A$ en $\mathscr{C}$, $\forall A \in \mathscr{C}$.

b) $\mathscr{C}^{op}$ tiene objeto cero y biproductos $A \coprod A$ en $\mathscr{C}^{op}$, $\forall A \in \mathscr{C}$.

Demostración. Notemos que $\mathscr{C}$ tiene objeto cero si y sólo si $\mathscr{C}^{op}$ tiene objeto cero, pues si $\mathscr{C}$ tiene objeto cero 0, entonces $|\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, 0)| = 1 = |\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(0, X)|, \quad \forall X \in \mathscr{C}$, pero esto pasa si y sólo si $|\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(0, X)| = 1 = |\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, 0)|, \quad \forall X \in \mathscr{C}^{op}$.

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Como $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}^{op}$ tienen objeto cero, si $A \coprod A$ es biproducto en $\mathscr{C}$, entonces existe $A \prod A$ en $\mathscr{C}$ y $\delta : A \coprod A \longrightarrow A \prod A$ un isomorfismo. Sean $\{\mu_1, \mu, 2 : A \longrightarrow A \coprod A\}$ y $\{\pi_1, \pi_2 : A \prod A \longrightarrow A\}$ los morfismos canonicos del coproducto y producto respectivamente, entonces por el ejercicio 40 $A \coprod A$ con $\{\mu_1^{op}, \mu_2^{op} : A \coprod A \longrightarrow A\}$ y $A \prod A$ con $\{\pi_1^{op}, \pi_2^{op} : A \longrightarrow A \prod A\}$ son un producto y un coproducto en $\mathscr{C}^{op}$ respectivamente tales que $\delta^{op} : A \prod A \longrightarrow A \coprod A$ es un isomorfismo al ser δ iso. Por lo tanto $A \coprod A$ es un biproducto en $\mathscr{C}^{op}$.

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Es análogo a lo anterior pues $(\mathscr{C}^{op})^{op} = \mathscr{C}$.

$\square$

Ej 47.

Ej 48.

Ej 49. Pruebe que, para un anillo R

a) $Mod(R)$ es abeliana.

b) $mod(R)$ es abeliana si R es un anillo artiniano izquierdo, donde $mod(R)$ es la subcategoría de $Mod(R)$, cuyos objetos son los R-módulos finitamente generados.

Demostración. $\boxed{a)}$ Por los ejercicios 29 y 30, $Mod(R)$ tiene kerneles y cokerneles, por el ejercicio 32 es normal y conormal y por el ejercicio 41 tiene productos y coproductos (en particular tiene productos y coproductos finitos) entonces por el teorema 1.10.1 c) se tiene que $Mod(R)$ es abeliana.

□

Ej 50. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ categorías aditivas y $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor de cualquier varianza. Pruebe que los siguientes son equivalentes:

a) F es aditivo.
b) $F_{op} := F \circ D_{\mathscr{A}^{op}} : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathscr{B}$ es aditivo.
c) $F^{op} := D_{\mathscr{B}} \circ F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}^{op}$ es aditivo.
d) $F^{op}_{op} := D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}} : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathscr{B}^{op}$ es aditivo.

(Se cambió ligeramente el enunciado para fines practicos de la demostración.)

Demostración. Recordemos que $\mathscr{A}^{op}$ y $\mathscr{B}^{op}$ son categorías abelianas por 1.9.15, también que $D_{\mathscr{A}^{op}} : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathscr{A}$ es un funtor contravariante tal que $(A \xrightarrow{f} B) \mapsto (B \xrightarrow{f^{op}} A)$ y, como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$ es un grupo abeliano, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(Y, X)$ es también un grupo abeliano.

Se probará el caso en que F es covariante

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Supongamos F es aditivo. Entonces $F : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(X), F(Y))$ es un morfismo en Ab para toda $X, Y \in \mathscr{A}$. Así para cualesquiera $f^{op} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(B, A)$ y $g^{op} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(C, B)$, entonces

$$
\begin{aligned}
F_{op}(f^{op} \circ g^{op}) &= F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f^{op} \circ g^{op}) = F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}((g \circ f)^{op}) = F(g \circ f) \\
&= F(g) \circ F(f) = F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op}) \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f^{op}) = F_{op}(g^{op}) \circ F_{op}(f^{op}).
\end{aligned}
$$

Es decir, F_{op} es un funtor aditivo (pues es contravariante).

$\boxed{b) \Rightarrow c)}$ Supongamos F_{op} es aditivo.Entonces $F_{op} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(Y, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(X), F(Y))$ es un morfismo en Ab para toda $X, Y \in \mathscr{A}$. Así para cualesquiera $f : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B, C)$ y $g : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$, entonces

$$
\begin{aligned}
F^{op}(f \circ g) &= D_{\mathscr{B}} \circ F(f \circ g) = D_{\mathscr{B}}(F(f \circ g)) = (F(f \circ g))^{op} = [F((g^{op} \circ f^{op})^{op})]^{op} \\
&= [F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op} \circ f^{op})]^{op} = [F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f^{op}) \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op})]^{op} \\
&= [F(f) \circ F(g)]^{op} = (F(g))^{op} \circ (F(f))^{op} = D_{\mathscr{B}} \circ F(g) \circ D_{\mathscr{B}} \circ F(f) = F^{op}(g) \circ F^{op}(f).
\end{aligned}
$$

Es decir, F^{op} es un funtor aditivo (pues es contravariante).

$\boxed{c) \Rightarrow d)}$ Supongamos F^{op} es aditivo.Entonces
$F^{op} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}^{op}}(F(Y),F(X))$ es un morfismo en Ab para toda $X,Y \in \mathscr{A}$. Así para cualesquiera $g : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ y
$f : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,C)$, entonces

$$\begin{aligned} F^{op}_{op}(f^{op} \circ g^{op}) &= D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f^{op} \circ g^{op}) = D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}((g \circ f)^{op}) \\ &= D_{\mathscr{B}} \circ F(g \circ f) = D_{\mathscr{B}} \circ F(f) \circ D_{\mathscr{B}} \circ F(g) \\ &= D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f^{op}) \circ D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op}) \\ &= F^{op}_{op}(f^{op}) \circ F^{op}_{op}(g^{op}). \end{aligned}$$

Es decir, F^{op}_{op} es un funtor aditivo covariante.

$\boxed{d) \Rightarrow a)}$ Supongamos F^{op}_{op} es aditivo.Entonces
$F^{op}_{op} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}^{op}}(F(X),F(Y))$ es un morfismo en Ab para toda $X,Y \in \mathscr{A}$. Así para cualesquiera $g : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ y
$f : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,C)$, entonces

$$\begin{aligned} F(f \circ g) &= F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op} \circ f^{op}) = [D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op} \circ f^{op})]^{op} \\ &= [D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(g^{op}) \circ D_{\mathscr{B}} \circ F \circ D_{\mathscr{A}^{op}}(f^{op})]^{op} = [D_{\mathscr{B}} \circ F(g) \circ D_{\mathscr{B}} \circ F(f)]^{op} \\ &= (D_{\mathscr{B}} \circ F(f))^{op} \circ (D_{\mathscr{B}} \circ F(g))^{op} = F(f) \circ F(g). \end{aligned}$$

Es decir, F^{op}_{op} es un funtor aditivo covariante.

El caso en que F es contravariante es análogo a esta demostración. □

Ej 51.

Ej 52.

Ej 53. Sea $G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ un funtor contravariante entre categorías aditivas. Pruebe que G s aditivo si y sólo si manda productos finitos en $\mathscr{A}$ a coproductos finitos en $\mathscr{B}$.

Demostración. Decimos que un funtor contravariante $G : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ entre categorías aditivas manda productos finitos en $\mathscr{A}$ a coproductos finitos en $\mathscr{B}$ si el funtor $G_{op} := G \circ D_{\mathscr{A}^{op}}$ preserva coproductos finitos en $\mathscr{A}^{op}$.

Supongamos G es aditivo, entonces $G_{op} := G \circ D_{\mathscr{A}^{op}}$ es aditivo por el ejercicio 50. Así, por 1.10.2 G_{op} preserva coproductos finitos en $\mathscr{B}$.

Ahora, si suponemos que G manda productos finitos de $\mathscr{A}$ en coproductos finitos de $\mathscr{B}$ se tiene por definición que $G \circ D_{\mathscr{A}^{op}}$ preserva coproductos finitos en $\mathscr{A}^{op}$, entonces por 1.10.2 G_{op} es aditivo, así G es aditivo.

$\square$