¡Sí, lo matamos!— dijo el estadista.

Ej 1.

Ej 2.

- **Ej 3.** Sea  $f: A \to B$  en una categoría  $\mathscr{C}$ , así:
  - a) si f es un split-epi y monoformismo, entonces f es un isomorfismo;
  - b) si  $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$  es un funtor y f es un isomorfismo, split-mono o split-epi, entonces F(f) también lo es.

Demostración. (a) Como f es un split-epi  $\exists g \in Hom_{\mathscr{C}}(B,A)$  tal que  $fg = 1_B$ . Notemos que

$$f(gf) = (fg) f = 1_B f = f = f1_A$$
  
 $\implies gf = 1_A,$   $f$  es mono  
 $\therefore f$  es un isomorfismo.

b) Supongamos que f es un split-mono, entonces  $\exists g: B \to A$  en  $\mathscr C$  tal que  $gf = 1_A$ , con lo cual  $Ff: FA \to FB, Fg: FB \to FA$  en  $\mathscr D$  y

$$F(g) F(f) = (gf) = F(1_A) = 1_{F(A)}$$
  
 $\Longrightarrow F(f)$  es un split-mono.

Supongamos ahora que f es un split-epi, luego  $\exists g: B \to A$  en  $\mathscr C$  tal que  $fg=1_B$ , con lo cual  $Ff: FA \to FB, Fg: FB \to FA$  en  $\mathscr D$  y

$$F(f) F(g) = (fg) = F(1_B) = 1_{F(B)}$$
  
 $\Longrightarrow F(f)$  es un split-epi.

Lo anterior, en conjunto a la equivalencia dada en el Ej. 1 (f), se sigue que si f es un isomorfismo en  $\mathscr C$  entonces F(f) lo es en  $\mathscr D$ .

Ej 4. Sean  $\mathscr{A}$  y  $\mathscr{B}$  categorías.

- a) Sea  $\eta \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F,G)$ . Si  $\forall A \in \mathscr{A} \ \eta_A : FA \to GA$  es un isomorfismo en  $\mathscr{B} \ y \ \eta^{-1} := \left\{ \left( \eta^{-1} \right)_A \right\}_{A \in \mathscr{A}}, \ \operatorname{con} \left( \eta^{-1} \right)_A := \left( \eta_A \right)^{-1}, \ \operatorname{entonces} \ \eta^{-1} \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(G,F).$
- b) Si  $\eta \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F,G)$ ,  $\rho \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(G,H)$  entonces la composición de transformaciónes naturales, con  $\rho\eta$  dada por  $(\rho\eta)_A := \rho_A \circ \eta_A$   $\forall A \in \mathscr{A}$ , es una operación asociativa.
- c) Si  $T \in [\mathscr{A}, \mathscr{B}]$  y  $1_T : T \to T$  está dada por  $(1_T)_A := 1_{T(A)} \ \forall \ A \in \mathscr{A}$ , entonces  $1_T \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(T,T)$ .
- d) Si  $\alpha \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F,G)$ , entonces

$$\alpha 1_F = \alpha = 1_G \alpha$$
.

Demostración. a) Dado que  $\forall A \in \mathcal{A} \ \eta_A : FA \to GA$  es un isomorfismo en  $\mathcal{B}$ , se tiene que  $(\eta_A)^{-1} \in Hom_{\mathcal{B}}(GA, FA)$  y que si  $\alpha : A \to A'$  está en  $\mathcal{A}$ , entonces

$$G(\alpha) \eta_{A} = \eta_{A'} F(\alpha), \qquad \eta \in Nat_{[\mathscr{A},\mathscr{B}]}(F,G)$$
  
$$\Longrightarrow F(\alpha) (\eta_{A})^{-1} = (\eta_{A'})^{-1} G(\alpha).$$

Así  $\eta^{-1}:G\to F$  es una transformación natural, pues lo anterior garantiza que el siguiente diagrama conmuta

$$G(A) \xrightarrow{(\eta_A)^{-1}} F(A)$$

$$G(\alpha) \downarrow \qquad \qquad \downarrow F(\alpha) \cdot$$

$$G(A') \xrightarrow[(\eta_{A'})^{-1}]{} F(A')$$

b) Notemos que  $\forall A \in \mathscr{A}$  se tiene que  $\rho_A \eta_A \in Hom_{\mathscr{B}}(F(A), G(A))$ . Además si  $\alpha : A \to A'$  está en  $\mathscr{A}$ , por ser  $\eta$  y  $\rho$  transformaciones naturales, se tiene que  $G(\alpha) \eta_A = \eta_{A'} F(\alpha)$  y  $H(\alpha) \rho_A = \rho_{A'} G(\alpha)$ , con lo cual

$$H(\alpha)(\rho_{A}\eta_{A}) = (H(\alpha)\rho_{A})\eta_{A} = (\rho_{A'}G(\alpha))\eta_{A}$$
$$= \rho_{A'}(G(\alpha)\eta_{A}) = \rho_{A'}(\eta_{A'}F(\alpha))$$
$$= (\rho_{A'}\eta_{A'})F(\alpha),$$

de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$F(A) \xrightarrow{\rho_{A}\eta_{A}} H(A)$$

$$F(\alpha) \downarrow \qquad \qquad \downarrow_{G(\alpha)},$$

$$F(A') \xrightarrow{\rho_{A'}\eta_{A'}} H(A')$$

y por lo tanto  $\rho \eta : F \to H$  es una tranformación natural.

Verificaremos ahora que la composición de transformaciones naturales es asociativa. Si  $\rho$  y  $\eta$  están dados como al comienzo,  $I:\in\to [\mathscr{A},\mathscr{B}]$  y  $\chi:H\to I$  es una transformación natural, entonces si  $A\in\mathscr{A}$ 

$$\chi_A(\rho_A \eta_A) = (\chi_A \rho_A) \eta_A \in (\chi \rho) \eta, \Longrightarrow \chi(\rho \eta) \subseteq (\chi \rho) \eta.$$

En forma análoga se verifica la otra contención, y así se tiene que  $\chi\left(\rho\eta\right)=(\chi\rho)\,\eta.$ 

c) Si  $\alpha: A \to A'$  está en  $\mathscr{A}$ , entonces

$$T(\alpha) 1_{T(\alpha)} = T(\alpha)$$
$$= 1_{T(A')} T(\alpha),$$

luego

$$T(A) \xrightarrow{1_{T(A)}} T(A)$$

$$T(\alpha) \downarrow \qquad \qquad \downarrow T(\alpha)$$

$$T(A') \xrightarrow{1_{T(A')}} T(A')$$

conmuta, y por tanto  $1_T: T \to T$  es una transformación natural.

d) Se tiene que  $\forall A \in \mathscr{A} \ \alpha_A 1_{F(A)} = \eta_A$ , con lo cual  $(\alpha 1_F)_A = \alpha_A$  y por tanto  $\alpha 1_F = \alpha$ . Análogamente se verifica que  $1_G \alpha = \alpha$ .

Ej 5.

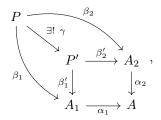
Ej 6.

Ej 7. Si los siguientes diagramas conmutativos en una categoría  $\mathscr C$ 

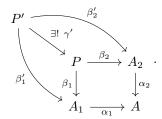
$$\begin{array}{cccc} P & \xrightarrow{\beta_2} & A_2 & P' & \xrightarrow{\beta_2'} & A_2 \\ \downarrow^{\beta_1} & & \downarrow^{\alpha_2} & \downarrow^{\alpha_1} & & \downarrow^{\alpha_2} \\ A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A \end{array}$$

son pull-backs, entonces  $\exists \ \gamma: P \to P'$  en  $\mathscr C$  un isomorfismo tal que  $\beta_i=\beta_i'\gamma, \ \forall \ i\in [1,2].$ 

Demostración. Por la propiedad universal del pull-back aplicada a P', se tiene el siguiente diagrama conmutativo



mientras que la propiedad universal del pull-back aplicada a P grantiza que el siguiente diagrama conmuta



Así

$$\beta_{1} (\gamma' \gamma) = (\beta'_{1}) \gamma$$

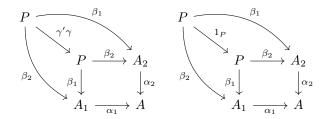
$$= \beta_{1},$$

$$\beta_{2} (\gamma' \gamma) = (\beta'_{2}) \gamma$$

$$= \beta_{2},$$

$$(*)$$

de modo que los diagramas



y por lo tanto, empleando la propiedad universal del pull-back para P, se tiene que  $\gamma'\gamma=1_P$ . En forma análoga, empleando ahora la propiedad universal del pull-back para P', se verifica que  $\gamma\gamma'=1_{P'}$ , de modo que  $\gamma:P\to P'$  es un isomorfismo en  $\mathscr C$ . Con lo anterior y (\*) se tiene lo deseado.

Ej 8. Sea el siguiente diagrama conmutativo en una categoría  $\mathscr C$ 

$$P \xrightarrow{\beta_2} A_2$$

$$\downarrow^{\beta_1} \qquad \qquad \downarrow^{\alpha_2}$$

$$A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A$$

un pull-back, entonces

- a) si  $\alpha_1$  es un monomorfismo, entonces  $\beta_2$  también lo es;
- b)  $\beta_2$  es un split-epi si y sólo si  $\alpha_2$  se factoriza a través de  $\alpha_1$ .

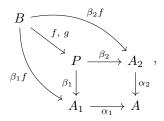
Demostración. [a] Supongamos que  $\alpha_1$  es un monomorfismo y que  $f,g: B \to P$  son morfismos en  $\mathscr C$  tales que  $\beta_2 f = \beta_2 g$ . Notemos primeramente que así

$$\alpha_1 (\beta_1 f) = (\alpha_2 \beta_2) f = \alpha_2 (\beta_2 g) = (\alpha_1 \beta_1) g$$

$$= \alpha_1 (\beta_1 g)$$

$$\Rightarrow \beta_1 f = \beta_1 g, \qquad \alpha_1 \text{ es un mono}$$

con lo cual se tiene el siguiente diagrama conmutativo



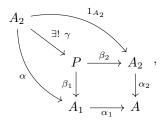
y así la propiedad universal del pull-back garantiza que f=g, con lo cual  $\beta_2$  es un mono.

b)  $\Longrightarrow$  Dado que  $\beta_2$  es un split-epi  $\exists \ \gamma: A_2 \to P$  tal que  $\beta_2 \gamma = 1_{A_2}$ , así

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left( \beta_1 \gamma \right) &= \left( \alpha_2 \beta_2 \right) \gamma = \alpha_2 \left( 1_{A_2} \right) \\ &= \alpha_2, \end{aligned}$$

 $\implies \alpha_2$  se factoriza a través de  $\alpha_1$ .

b)  $\Leftarrow$  Se tiene que  $\exists \alpha : A_2 \to A_1$  en  $\mathscr C$  tal que  $\alpha_2 = \alpha_1 \alpha$ , con lo cual a partir de la propiedad universal del pull-back se obtiene el siguiente diagrama conmutativo



del cual se deduce que en partícular  $\beta_2\gamma=1_{A_2},$  y así se tiene lo deseado.

Г

Ej 9.

Ej 10.

**Ej 11.** Enunciaremos y probaremos la proposición dual al Ej. 8. Notemos primeramente que

Pull-back:

PBI)  $\exists \ \beta_1: P \to A_1, \beta_2: P \to A_2 \ \text{tales que} \ \alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2.$ 

PBII)  $\forall P' \in \mathscr{C} \ y \ \forall \beta'_1 : P' \to A_1, \beta'_2 : P' \to A_2 \text{ tales que } \alpha_1 \beta'_1 = \alpha_2 \beta'_2, \ \exists! \ \gamma : P' \to P \text{ tal que } \beta'_1 = \beta_1 \gamma \ y \ \beta'_2 = \beta_2 \gamma.$ 

Pull-back<sup>op</sup>:

PB<sup>op</sup>I)  $\exists \beta_1^{op}: A_1 \to P, \beta_2^{op}: A_2 \to P \text{ tales que } \alpha_1^{op}\beta_1^{op} = \alpha_2^{op}\beta_2^{op}.$ 

PB<sup>op</sup>II)  $\forall P' \in \mathscr{C} \text{ y } \forall \beta_1^{\prime op} : A_1 \to P', \beta_2^{\prime op} : A_2 \to P' \text{ tales que } \alpha_1^{op} \beta_1^{\prime op} = \alpha_2^{op} \beta_2^{\prime op}, \exists ! \gamma^{op} : P \to P' \text{ tal que } \beta_1^{\prime op} = \beta_1^{op} \gamma^{op} \text{ y } \beta_2^{\prime op} = \beta_2^{op} \gamma^{op}.$ 

## Pull-back\*:

 $PB^*I$ )  $\exists \beta_1 : A_1 \to P, \beta_2 : A_2 \to P$  tales que  $\beta_1 \alpha_1 = \beta_2 \alpha_2$ .

PB\*II) 
$$\forall P' \in \mathscr{C} \text{ y } \forall \beta_1': A_1 \to P', \beta_2': A_2 \to P' \text{ tales que } \beta_1'\alpha_1 = \beta_2'\alpha_2, \exists ! \ \gamma: P \to P' \text{ tal que } \beta_1' = \gamma\beta_1 \text{ y } \beta_2' = \gamma\beta_2.$$

Esto último es la definición de que un objeto P sea un push-out de  $\alpha_1$ :  $A \to A_1$  y  $\alpha_2 : A \to A_2$ . Por lo anterior, y dado que las propiedades duales de mono y split-epi son respectivamente epi y split-mono, la proposición dual del Ej. 8 es:

Sea el siguiente diagrama conmutativo en una categoria  $\operatorname{\mathscr{C}}$ 

$$P \xleftarrow{\beta_2} A_2$$

$$\beta_1 \uparrow \qquad \uparrow \alpha_2$$

$$A_1 \xleftarrow{\alpha_1} A$$

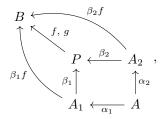
un push-out, entonces

- a) si  $\alpha_1$  es un epimorfismo, entonces  $\beta_2$  también lo es;
- b)  $\beta_2$  es un split-mono si y sólo si  $\exists \delta : A_1 \to A_2$  en  $\mathscr C$  tal que  $\alpha_2 = \delta \alpha_1$ .

Demostración. a Supongamos que  $f: P \to Q$  y  $g: P \to Q$  en  $\mathscr C$  son tales que  $f\beta_2 = g\beta_2$ . Notemos que

$$\begin{split} (f\beta_1)\,\alpha_1 &= f\left(\beta_2\alpha 2\right) = (g\beta_2)\,\alpha_2 = g\left(\beta_1\alpha_1\right) \\ &= (g\beta_1)\,\alpha_1 \\ \Longrightarrow f\beta_1 &= g\beta_1, \end{split} \qquad \qquad \alpha_1 \text{ es un epi}$$

con lo cual se tiene el siguiente diagrama conmutativo

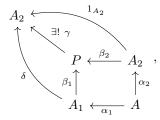


y así la propiedad universal del push-out garantiza que f=g, con lo cual  $\beta_2$  es un epi.

b)  $\Longrightarrow$  Por ser  $\beta_2$  un split-mono  $\exists \gamma : P \to A_2$  en  $\mathscr C$  tal que  $\gamma\beta_2 = 1_{A_2}$ , de modo que si  $\delta := \gamma\beta_1$ , entonces

$$\delta\alpha_1 = \gamma (\beta_1 \alpha_1) = (\gamma \beta_2) \alpha_2 = 1_{A_2} \alpha_2$$
$$= \alpha_2.$$

 $b) \Leftarrow$  Bajo estas condiciones de la propiedad universal del push-out se obtiene el siguiente diagrama conmutativo



del cual se sigue en partícular que  $\gamma \beta_2 = 1_{A_2}$ .

**Ej 12.** Si R es un anillo entonces la categoría Mod(R) tiene pull-backs.

Demostración. Sean  $\alpha_1:A_1\to A$  y  $\alpha_2:A_2\to A$  morfismos de R-módulos y

$$A_1 \times_A A_2 := \{(x, y) \in A_1 \times A_2 \mid \alpha_1(x) = \alpha_2(y)\}$$

Notemos que  $A_1 \times_A A_2 \neq \varnothing$ , pues si  $0_1, 0_2$  y 0 son los neutros aditivos de  $A_1, A_2$  y A, respectivamente, entonces  $\alpha_1 (0_1) = 0 = \alpha_2 (0_2)$ , con lo cual  $(0_1, 0_2) \in A_1 \times_A A_2$ . Más aún,  $A_1 \times_A A_2 \leq A_1 \times A_2$ , con  $A_1 \times A_2$  dotado de la estructura usual de R-módulo, pues si  $(a,b), (c,d) \in A_1 \times_A A_2$  y  $r \in R$ , entonces

$$\alpha_{1} (ra - b) = r\alpha_{1} (a) - \alpha_{1} (b)$$

$$= r\alpha_{2} (c) - \alpha_{2} (d)$$

$$= \alpha_{2} (rc - d),$$

$$\implies r (a, b) - (c, d) \in A_{1} \times_{A} A_{2}.$$

Con lo cual  $A_1 \times_A A_2 \in Mod(R)$ . Así, si  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son las proyecciones canónicas de  $A_1 \times_A A_2$  sobre  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente, y  $(x,y) \in A_1 \times_A A_2$ , entonces  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  son morfismos de R-módulos y

$$\alpha_{1}\pi_{1}(x, y) = \alpha_{1}(x) = \alpha_{2}(y) = \alpha_{2}(\pi_{2}(x, y))$$
$$= \alpha_{2}\pi_{2}(x, y),$$
$$\Longrightarrow \alpha_{1}\pi_{1} = \alpha_{2}\pi_{2}.$$

Es decir, se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A_1 \times_A A_2 & \xrightarrow{\pi_2} & A_2 \\ \downarrow^{\pi_1} & & \downarrow^{\alpha_2} & \cdot \\ A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A \end{array}$$

Ahora, si  $P \in Mod(R)$  y  $\beta_1: P \to A_1, \beta_2: P \to A_2$  son morfismos de R-módulos tales que  $\alpha_1\beta_1=\alpha_2\beta_2$ , entonces sea

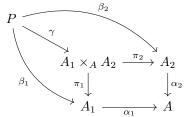
$$\gamma: P \to A_1 \times_A A_2$$
  
 $p \mapsto (\beta_1(p), \beta_2(p)).$ 

Notemos que  $\gamma$  es un morfismo de R-m'odulos, puesto que  $\beta_1$  y  $\beta_2$  lo son, y que si  $p\in P$  entonces

$$\pi_1 \gamma (p) = \pi_1 (\beta_1 (p), \beta_2 (p)) = \beta_1 (p)$$
  

$$\implies \pi_1 \gamma = \beta_1.$$

Análogamente se verifica que  $\pi_2 \gamma = \beta_2$ , con lo cual el siguiente diagrama conmuta



Finalmente, si  $\gamma':P\to A_1\times_A A_2$  es un morfismo de R-módulos tal que  $\pi_1\gamma'=\beta_1$  y  $\pi_2\gamma'=\beta_2$  y  $p\in P$ , entonces

$$\pi_1 \gamma'(p) = \beta_1(p),$$
  
$$\pi_2 \gamma'(p) = \beta_2(p),$$

con lo cual  $\gamma'(p) = (\pi_1(\gamma'(p)), \pi_2(\gamma'(p))) = (\beta_1(p), \beta_2(p)) = \gamma(p)$  y por lo tanto  $\gamma' = \gamma$ .

- Ej 13.
- Ej 14.
- **Ej 15.** Si  ${\mathscr C}$  es una categoría con pull-backs, entonces  ${\mathscr C}$  tiene intersecciones finitas.

Demostración. content...