

Lema 1. Sea f un morfismo en $Sets$, entonces

a) $f : A \hookrightarrow B$ es un mono en $Sets$ si y sólo si f es inyectiva;

b) $f : A \twoheadrightarrow B$ es un epi en $Sets$ si y sólo si f es suprayectiva.

Demostración. a) Notemos primeramente que una función vacía \emptyset_C , $C \in Sets$, es inyectiva por la vacuidad de su dominio. Más aún, es un mono en $Sets$, en efecto: si $g, h \in$ son tales que $\emptyset_C f = \emptyset_A g$, entonces necesariamente $D = \emptyset$ y así, dado que existe una única función de \emptyset en \emptyset , $f = g$. Con lo cual la afirmación es válida para funciones vacía y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \neq \emptyset$ (y en consecuencia que $B \neq \emptyset$).

a) \implies Sean $a, b \in A$ tales que $f(a) = f(b)$, entonces las funciones

$$\begin{aligned} g : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto a, \\ h : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto b, \end{aligned}$$

satisfacen que $fg = fh$, luego $g = h$ por ser f mono y por tanto $a = b$.

a) \Leftarrow Supongamos que $g, h \in$ son tales que $fg = fh$. Si $A' = \emptyset$ entonces $g = \emptyset_A = h$; en caso contrario sea $a \in A'$, así

$$\begin{aligned} f(g(a)) &= fg(a) = fh(a) = f(h(a)) \\ \implies g(a) &= h(a), & f \text{ es inyectiva} \\ \implies g &= h. \end{aligned}$$

b) Verificaremos primero que la función \emptyset_\emptyset i.e. la única función cuyo dominio y contradominio es \emptyset es epi y suprayectiva. Si $g, h \in$ son tales que $g\emptyset_\emptyset = h\emptyset_\emptyset$, entonces $g = \emptyset_Z = h$; por su parte la suprayectividad de \emptyset_\emptyset se sigue por la vacuidad de su contradominio. Así, en adelante podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B \neq \emptyset$.

b) \implies Notemos que necesariamente $A \neq \emptyset$, pues en caso contrario las aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi : B &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto 0, \\ \psi : B &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto 1, \end{aligned}$$

son funciones bien definidas, pues $B \neq \emptyset$, las cuales satisfacen que $\phi \neq \psi$ y sin embargo $\phi f = \emptyset_{\{0,1\}} = \psi f$, lo cual contradeciría que f es epi. Así $1_B|_{f(A)}$ no

es una función vacía y más aún satisface que

$$\begin{aligned}
1_B|_{f(A)} f &= f = 1_B f \\
\implies 1_B &= 1_B|_{f(A)}, & f \text{ es epi} \\
\implies f(A) &= B \\
\implies f &\text{ es suprayectiva.}
\end{aligned}$$

b) \Leftarrow Sean $g, h \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(B, C)$ tales que $gf = hf$ y $b \in B$. Como f es suprayectiva $\exists a \in A$ $f(a) = b$, así

$$\begin{aligned}
g(b) &= gf(a) = hf(a) = h(b) \\
\implies g &= h.
\end{aligned}$$

□

Ej 16. La categoría *Sets* tiene uniones.

Demostración. Sea $\{u_i : A_i \hookrightarrow A\}$ una familia de subobjetos de un conjunto A y $U := \bigcup_{i \in I} \Im(u_i)$. Si $I = \emptyset$ entonces $U = \emptyset$ y la función vacía $\emptyset_A : \emptyset \rightarrow A$ es un subobjeto de A que satisface por vacuidad que $\forall i \in I$ $u_i \leq \emptyset_A$. Resta verificar que \emptyset_A satisface la propiedad universal de la unión, para lo cual por vacuidad basta con verificar que si $f \in \text{Hom}(\text{Sets})$ y $\mu \in \text{Mon}_{\text{Sets}}(-, A)$, entonces \emptyset_A es llevado a μ vía f . Si consideramos la función vacía $\emptyset_B : \emptyset \rightarrow B$, entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\emptyset_A & \xrightarrow{\emptyset_B} & B' \\
\emptyset_A \downarrow & & \downarrow \mu \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

conmuta en *Sets* puesto que $f\emptyset_A, \mu\emptyset_B \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(\emptyset, B)$ y existe una única función de \emptyset en B .

En adelante supondremos que $I \neq \emptyset$. Si $U = \emptyset$ entonces $\forall i \in I$ $A_i = \emptyset$ y por lo tanto cada u_i coincide con la función vacía \emptyset_A . De modo que se satisface que $\forall i \in I$ $u_i \leq \emptyset_A$ y en forma análoga al caso $I = \emptyset$ se verifica que si $f : A \rightarrow B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ son tales que cada u_i es llevado a μ vía f , entonces \emptyset_A es llevado a μ vía f , y así \emptyset_A es una unión para la familia $\{u_i\}_{i \in I}$.

Finalmente si $U \neq \emptyset$ entonces necesariamente $\exists i \in I$ tal que $A_i \neq \emptyset$. Así consideremos *inc* la inclusión de U en A , la cual es un mono en *Sets* y para cada $i \in I$ las funciones dadas por

$$\begin{aligned}
\gamma_i : A_i &\rightarrow U \\
a &\mapsto u_i(a),
\end{aligned}$$

en caso que $A_i \neq \emptyset$, o bien $\gamma_i := \emptyset_U$ si $A_i = \emptyset$.
 Así, si $A_i = \emptyset$, como \emptyset_A es la única función de \emptyset en A , entonces

$$u_i = \emptyset_A = inc \emptyset_U = inc \gamma_i.$$

Si ahora $A_i \neq \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} u_i(a) &= inc \gamma_i(a), & \forall a \in A_i \\ \implies u_i &= inc \gamma_i. \end{aligned}$$

Con lo cual se ha verificado que $\forall i \in I \ u_i \leq inc$. Supongamos ahora que $f : A \rightarrow B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ son funciones tales que cada u_i es llevado a μ vía f , es decir para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta en *Sets*

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\exists g_i} & B' \\ u_i \downarrow & & \downarrow \mu \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Notemos que para cada $y \in U \ \exists i \in I$ y $x \in A_i$ tales que $y = u_i(x)$, así consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} h : U &\rightarrow B' \\ u_i(x) &\mapsto g_i(x). \end{aligned}$$

Sea $y \in U$ con $i, j \in I$ y $x \in A_i, z \in A_j$ tales que $u_i(x) = y = u_j(z)$, entonces de la conmutatividad de los diagramas anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(g_j(z)) &= f u_j(z) = f(x) = f(u_i(x)) \\ &= f u_i(x) = \mu(g_i(x)). \end{aligned}$$

Lo anterior, en conjunto a que μ es inyectiva por ser un mono en *Sets*, garantiza que $g_j(z) = g_i(x)$ y así h está bien definida.
 Sea $y \in U$, con $i \in I$ y $x \in A_i$ tales que $y = u_i(x)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} f inc(y) &= f(y) = f(u_i(x)) = \mu g_i(x) = \mu(h(y)) \\ &= \mu h(y) \\ \implies f inc &= \mu h. \end{aligned}$$

Con lo cual inc es llevado a μ vía f y por tanto es una unión para la familia $\{u_i\}_{i \in I}$. \square

Ej 17.

Ej 18.

Ej 19. Si $f : A \hookrightarrow B$ está en una categoría \mathcal{C} , entonces $f : A \hookrightarrow B$ es una imagen de f .

Demostración. Se tiene que f es un subobjeto y que $f = f1_A$. Si $g : C \hookrightarrow B$ es un subobjeto para el cual $\exists h : A \rightarrow C$ tal que $f = gh$, entonces $f \leq g$ y por tanto $Im(f) \simeq f$ en $Mon_{Sets}(-, B)$. \square

Ej 20. $Mod(R)$ y $Sets$ tienen imágenes epimórficas.

Demostración. Sea $f : A \rightarrow B$ en $Sets$. Si f es la función vacía \emptyset_B entonces por el Lema 1 se tiene que f es mono y por tanto es una imagen para sí mismo. Así supongamos sin pérdida de generalidad que $A \neq \emptyset$. Luego $B \neq \emptyset$ y se tiene que $inc : f(A) \rightarrow B$ es una función no vacía e inyectiva, por tanto un mono en $Sets$, la cual satisface que, si

$$\begin{aligned} g : A &\rightarrow f(A) \\ a &\mapsto f(a), \end{aligned}$$

$f = incg$.

Ahora supongamos que $\mu : C \hookrightarrow B$ y $h : A \rightarrow C$ son tales que $f = \mu h$. Notemos que para cada $y \in f(A) \exists a \in A$ tal que $y = f(a)$, así consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} k : f(A) &\rightarrow C \\ f(a) &\mapsto h(a). \end{aligned}$$

Si $a, b \in A$ son tales que $x = f(a) = f(b)$, entonces

$$\begin{aligned} \mu h(a) &= f(a) = x = f(b) = \mu h(b) \\ \implies h(a) &= h(b), \end{aligned} \quad \mu \text{ es mono}$$

con lo cual k es una función bien definida y satisface que, dados $y \in f(A)$ y $x \in A$ tal que $y = f(x)$,

$$\begin{aligned} \mu k(y) &= \mu(h(x)) = f(x) = y = inc(y) \\ \implies inc &= \mu k. \end{aligned}$$

Con lo anterior se ha verificado que $Sets$ tiene imágenes, más aún, tiene imágenes epimórficas puesto que la función g así construida es suprayectiva y por tanto epi.

Dado que todo R -módulo es en particular un conjunto no vacío, en forma análoga a lo anterior se verifica que $Mod(R)$ tiene imágenes epimórficas, puesto que si ahora $f : A \rightarrow B$ en $Mod(R)$ entonces la inclusión de módulos es un morfismo de R -módulos, g también lo es al serlo f , y k lo es al serlo f y h . \square

Ej 21.

Ej 22.

Ej 23. Sean \mathcal{C} una categoría balanceada, con imágenes epimórficas y

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

en \mathcal{C} . Si $\mu : A' \hookrightarrow A$ en \mathcal{C} , entonces $g(f(A')) = gf(A')$ en $\overline{Mon_{\mathcal{C}}(-, C)}$.

Demostración. Dado que \mathcal{C} tiene imágenes epimórficas existen subobjetos

$$\begin{aligned} \nu : Im(f\mu) &\hookrightarrow B, \\ \eta : Im(g\nu) &\hookrightarrow B, \\ \psi : Im((gf)\mu) &\hookrightarrow B, \end{aligned}$$

que son imágenes respectivamente de $f\mu$, $g\nu$ y $(gf)\mu$, y existen epimorfismos $\alpha_1 : A' \twoheadrightarrow Im(f\mu)$ y $\alpha_2 : Im(f\mu) \twoheadrightarrow Im(g\nu)$ tales que

$$\begin{aligned} f\mu &= \nu\alpha_1, \\ g\nu &= \eta\alpha_2. \end{aligned} \tag{*}$$

Notemos que por ser ν imagen de $f\mu$ y subobjeto de B se tiene que $g(f(A')) = g(Im(f\mu)) = Im(g\nu)$, mientras que $gf(A') = Im((gf)\mu)$. Así pues basta con verificar que η es una imagen para $(gf)\mu$, ya que en tal caso $Im(g\nu) \simeq Im((gf)\mu)$ en $Mon_{\mathcal{C}}(-, C)$.

De (*) se tiene que

$$gf(\mu) = g(f\mu) = g(\nu\alpha_1) = (\eta\alpha_2)\alpha_1 = \eta(\alpha_2\alpha_1).$$

En la última igualdad η es un mono, mientras que $\alpha_2\alpha_1$ es un epi al serlo α_1 y α_2 , de modo que al ser \mathcal{C} balanceada (ver Proposición 1.4.3) se tiene que η es una imagen para $(gf)\mu$. □

Ej 24. Sea el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & B'' & & \\ & f' \nearrow & & \searrow \mu & \\ P & \xrightarrow{\beta_2} & B' & & \\ \beta_1 \downarrow & & & & \downarrow \alpha \\ A & \xrightarrow{f} & B & & \end{array}$$

conmutativo en una categoría \mathcal{C} , con μ y α subobjetos. Si β_1 es una imagen inversa por f de α_1 , entonces también lo es de $\alpha\mu$.

Demostración. Notemos que de la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que

$$\begin{aligned} (\alpha\mu) f' &= \alpha (\mu f') = \alpha \beta_2 \\ &= f \beta_1, \end{aligned}$$

i.e. el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f'} & B'' \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \alpha\mu \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (*)$$

Sean $\gamma_1 : P' \rightarrow A$ y $\gamma_2 : P' \rightarrow B''$ tales que $f\gamma_1 = (\alpha\mu)\gamma_2 = \alpha(\mu\gamma_2)$. Como

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\beta_2} & B' \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \alpha \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad (**)$$

es un pull-back por ser β_1 imagen inversa por f de α , de la propiedad universal del pull-back se sigue que $\exists! \delta : P' \rightarrow P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} P' & & \xrightarrow{\mu\gamma_2} & & B' \\ & \searrow \delta & & \searrow \beta_2 & \\ & & P & \xrightarrow{\beta_2} & B' \\ & \searrow \gamma_1 & \searrow \beta_1 & & \downarrow \alpha \\ & & A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

De modo que δ es tal que $\gamma_1 = \beta_1 \delta$ y además

$$\begin{aligned} (\alpha\mu)(f'\delta) &= \alpha(\beta_2)\delta = \alpha(\mu\gamma_2) = (\alpha\mu)\gamma_2 \\ \implies \gamma_2 &= f'\delta. \end{aligned} \quad \alpha\mu \text{ es mono}$$

Sea $\delta' : P' \rightarrow P$ en \mathcal{C} tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} P' & & \xrightarrow{\gamma_2} & & B'' \\ & \searrow \delta' & & \searrow f' & \\ & & P & \xrightarrow{f'} & B'' \\ & \searrow \gamma_1 & \searrow \beta_1 & & \downarrow \alpha\mu \\ & & A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta, luego δ' es tal que $\gamma_1 = \beta_1 \delta'$ y

$$\mu \gamma_2 = (\mu f') \delta' = \beta_2 \delta'.$$

Por lo tanto, aplicando la propiedad universal del pull-back a $(**)$ se tiene que $\delta' = \delta$, con lo cual se tiene que existe un único morfismo δ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} P' & & \xrightarrow{\gamma_2} & & B'' \\ & \searrow \delta & & \searrow f' & \\ & P & & & \\ & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \alpha \mu & \\ & A & \xrightarrow{f} & B & \end{array} \quad ,$$

i.e. $(*)$ es un pull-back y así se tiene lo deseado. □

Ej 25.

Ej 26.

Ej 27. Sea \mathcal{C} una categoría con objeto cero. Entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \simeq 0$, si $I = \emptyset$.

Demostración. Afirmamos que en este caso el morfismo $0_{0,A}$ en \mathcal{C} (el cual existe y es único por ser 0 un objeto cero de la categoría \mathcal{C}) es una unión para la familia de subobjetos $\mu_i : A_i \rightarrow A$. En efecto:

Notemos que $0_{A,0}0_{0,A}, 0_{0,A}0_{A,0}, Id_0 \in Hom_{\mathcal{C}}(0,0)$ y que $|Hom_{\mathcal{C}}(0,0)|$, luego $0_{A,0}0_{0,A} = Id_0 = 0_{0,A}0_{A,0}$ y por tanto μ es un iso en \mathcal{C} , así que en particular es un subobjeto de A .

Sean $f : A \rightarrow B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ en \mathcal{C} , por ser $I = \emptyset$ basta con verificar que $0_{0,A}$ es llevado a μ vía f . Se tiene que

$$f0_{0,A} = 0_{0,B} = \mu0_{0,B'},$$

con lo cual el diagrama

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0_{0,B'}} & B' \\ 0_{0,A} \downarrow & & \downarrow \mu \\ a & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta y así se tiene lo deseado. □

Ej 28. $Mod(R)$ es una categoría con objeto cero, en tanto que $Sets$ no lo es.

Demostración. $\boxed{Mod(R)}$ Sea R un anillo. Consideremos un conjunto de la forma $A = \{*\}$, i.e. un conjunto de un sólo elemento. Notemos que por medio de las operaciones

$$\begin{aligned} + : A \times A &\rightarrow A \\ (*, *) &\mapsto *, \\ \cdot : R \times A &\rightarrow R \\ (r, *) &\mapsto *, \end{aligned}$$

se tiene que $(A, +, \cdot) \in Mod(R)$.

Sea $M \in Mod(R)$. Como $\forall B \in Sets \ |Hom_{Sets}(B, A)| = 1$, y todo morfismo de R -módulos en particular es una función, se tiene que $|Hom_{Mod(R)}(M, A)| \leq 1$. Así pues para verificar que A es objeto inicial en $Mod(R)$ resta verificar que existe un morfismo de R -módulos de M en A . Sean $r \in R, m, n \in M$ y

$$\begin{aligned} f_M : M &\rightarrow A \\ m &\mapsto *, \end{aligned}$$

entonces $f(rm + n) = * = * + * = r \cdot * + * = rf(m) + f(n)$, y así $f_M \in Hom_{Mod(R)}(M, A)$.

Por otro lado, si 0_M es el neutro aditivo de M , entonces la función

$$\begin{aligned} g_M : A &\rightarrow M \\ * &\mapsto 0_M \end{aligned}$$

satisface $g_M \in Hom_{Mod(R)}(A, M)$. Más aún, si $h \in Hom_{Mod(R)}(A, M)$, entonces necesariamente h es un morfismo de grupos y así

$$\begin{aligned} h(0_A) &= h(*) = 0_M = g_M(*) \\ \implies h &= g_M. & A = \{*\} \end{aligned}$$

Por lo tanto A también es un objeto final y así es un objeto cero para $Mod(R)$.

\boxed{Sets} Supongamos que existe un conjunto A tal que A es objeto cero de $Sets$. Luego $\exists! f \in Hom_{Sets}(A, \emptyset)$, y así necesariamente $A = \emptyset$, lo cual es absurdo ya que \emptyset no es un objeto final en $Sets$, puesto que si $B \neq \emptyset$ no existen funciones cuyo dominio sea B y contradominio sea \emptyset .

□

Ej 29.

Ej 30.

Ej 31. $Sets$ y $Mod(R)$ son categorías localmente pequeñas.

Demostración. Sea $A \in Sets$. Afirmamos que si $\varphi : B \hookrightarrow A$, $\psi : C \hookrightarrow A \in Mon_{Sets}(-, A)$ entonces

$$\varphi \simeq \psi \text{ en } Mon_{Sets}(-, A) \iff Im(\varphi) = Im(\psi). \quad (A)$$

\implies Se tiene que $\psi \leq \varphi$ y $\varphi \leq \psi$, luego $\exists g : C \rightarrow B$ y $h : B \rightarrow C$ tales que

$$\psi = \varphi g, \quad (*)$$

$$\varphi = \psi h \quad (**)$$

De (*) se sigue que

$$\begin{aligned} \psi(C) &= \varphi(g(C)) \subseteq \varphi(B) \\ \implies Im(\psi) &\subseteq Im(\varphi). \end{aligned}$$

Análogamente, de (**) se obtiene que $Im(\varphi) \subseteq Im(\psi)$.

\Leftarrow Notemos que si $B = \emptyset$, entonces $Im(\psi) = Im(\varphi) = \emptyset$, y por lo tanto $C = \emptyset$, con lo cual $\varphi = \emptyset_A = \psi$; similarmente en caso que $C = \emptyset$. Por lo tanto en adelante supondremos que $B \neq \emptyset \neq C$.

Afirmamos que $\forall c \in C \exists! b_c \in B$ tal que $\psi(c) = \varphi(b_c)$. En efecto la existencia se sigue de que en particular $Im(\psi) \subseteq Im(\varphi)$, mientras que la unicidad se sigue del hecho que φ es un mono y por tanto inyectiva (ver Lema 1). Lo previamente demostrado garantiza que la aplicación

$$\begin{aligned} g : C &\rightarrow B \\ c &\mapsto b_c \end{aligned}$$

está bien definida y satisface que $\psi = \varphi g$. En forma análoga, empleando ahora que $Im(\psi) \supseteq Im(\varphi)$ y el que ψ es un mono en $Sets$, se verifica que $\exists h : B \rightarrow C$ tal que $\varphi = \psi h$ y así $\psi \simeq \varphi$ en $Mon_{Sets}(-, A)$.

La caracterización dada por (A) garantiza que la aplicación dada por

$$\begin{aligned} f : \overline{Mon_{Sets}(-, A)} &\rightarrow \mathcal{P}(A) \\ [\varphi] &\mapsto Im(\varphi). \end{aligned}$$

está bien definida y es inyectiva. Más aún, f es biyectiva puesto que si $D \subseteq A$ e i es la inclusión conjuntista de B en A , entonces $i \in Mon_{Sets}(-, A)$. La inyectividad de f garantiza que la clase $\overline{Mon_{Sets}(-, A)}$ es un conjunto, puesto que $\mathcal{P}(A)$ lo es. Por tanto $Sets$ es localmente pequeña.

Por su parte, el que $Mod(R)$ sea localmente pequeña se sigue de que si $M \in Mod(R)$, entonces

$$\begin{aligned} k_M : \overline{Mon_{Mod(R)}(-, M)} &\rightarrow \overline{Mon_{Mod(R)}(-, M)} \\ [\varphi] &\mapsto [\varphi] \end{aligned}$$

está bien definida y es inyectiva. □