

Ejercicios 16-31

Arruti, Sergio

Lema 1. Sea f un morfismo en $Sets$, entonces

a) $f : A \hookrightarrow B$ es un mono en $Sets$ si y sólo si f es inyectiva;

b) $f : A \twoheadrightarrow B$ es un epi en $Sets$ si y sólo si f es suprayectiva.

Demostración. a) Notemos primeramente que una función vacía \emptyset_C , $C \in Sets$, es inyectiva por la vacuidad de su dominio. Más aún, es un mono en $Sets$, en efecto: si $g, h \in$ son tales que $\emptyset_C f = \emptyset_A g$, entonces necesariamente $D = \emptyset$ y así, dado que existe una única función de \emptyset en \emptyset , $f = g$. Con lo cual la afirmación es válida para funciones vacía y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \neq \emptyset$ (y en consecuencia que $B \neq \emptyset$).

a) \implies Sean $a, b \in A$ tales que $f(a) = f(b)$, entonces las funciones

$$\begin{aligned} g : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto a, \\ h : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto b, \end{aligned}$$

satisfacen que $fg = fh$, luego $g = h$ por ser f mono y por tanto $a = b$.

a) \Leftarrow Supongamos que $g, h \in$ son tales que $fg = fh$. Si $A' = \emptyset$ entonces $g = \emptyset_A = h$; en caso contrario sea $a \in A'$, así

$$\begin{aligned} f(g(a)) &= fg(a) = fh(a) = f(h(a)) \\ \implies g(a) &= h(a), & f \text{ es inyectiva} \\ \implies g &= h. \end{aligned}$$

b) Verificaremos primero que la función \emptyset_\emptyset i.e. la única función cuyo dominio y contradominio es \emptyset es epi y suprayectiva. Si $g, h \in$ son tales que $g\emptyset_\emptyset = h\emptyset_\emptyset$, entonces $g = \emptyset_\emptyset = h$; por su parte la suprayectividad de \emptyset_\emptyset se sigue por la vacuidad de su contradominio. Así, en adelante podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B \neq \emptyset$.

b) \implies Notemos que necesariamente $A \neq \emptyset$, pues en caso contrario las apli-

caciones

$$\begin{aligned}\phi : B &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto 0, \\ \psi : B &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto 1,\end{aligned}$$

son funciones bien definidas, pues $B \neq \emptyset$, las cuales satisfacen que $\phi \neq \psi$ y sin embargo $\phi f = \emptyset_{\{0,1\}} = \psi f$, lo cual contradeciría que f es epi. Así $1_B|_{f(A)}$ no es una función vacía y más aún satisface que

$$\begin{aligned}1_B|_{f(A)} f &= f = 1_B f \\ \implies 1_B &= 1_B|_{f(A)}, & f \text{ es epi} \\ \implies f(A) &= B \\ \implies f &\text{ es suprayectiva.}\end{aligned}$$

$\boxed{b) \Leftarrow}$ Sean $g, h \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(B, C)$ tales que $gf = hf$ y $b \in B$. Como f es suprayectiva $\exists a \in A$ $f(a) = b$, así

$$\begin{aligned}g(b) &= gf(a) = hf(a) = h(b) \\ \implies g &= h.\end{aligned}$$

□

Ej 16.

Ej 17. Pruebe que, para un anillo R , La categoría $\text{Mod}(R)$ tiene uniones.

Demostración. Sean $A \in \text{Mod}(R)$, $\{\alpha_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i \in I}$ en $\text{Mod}(R)$ y la inclusión de submódulos

$$\nu : \sum_{i \in I} \text{Im}(\alpha_i) \longrightarrow A.$$

Recordemos que $\left(x \in \sum_{i \in I} \text{Im}(\alpha_i) \iff x = \sum_{i \in J} \alpha_j(a_j) \right)$
con J finito y $a_j \in A_j$ para cada $j \in J$.

$$\boxed{U_1) \quad (\alpha_i \leq \nu \ \forall i \in I)}$$

Como $\alpha_i(x) \in \text{Im}(\alpha_i) \ \forall x \in A_i$, entonces definimos $\nu_i : A_i \rightarrow \text{Im}(\alpha_i)$ como $\nu_i(x) = \alpha_i(x)$. Observemos que $\nu_i(x) \in \sum_{i \in I} \text{Im}(\alpha_i)$ pues si $J = \{i\}$

entonces $\sum_{i \in J} \alpha_i(x) = \alpha_i(x) = \nu(x)$. Por lo tanto $\alpha_i(x) = \nu \circ \nu_i(x)$ y así $\alpha_i \leq \nu \quad \forall i \in I$.

$\boxed{U_2}$ Supongamos $f : A \rightarrow B$ en \mathcal{C} es tal que cada u_i es llevado via f , a algún subobjeto $\mu : B' \hookrightarrow B$. Tal como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \sum_{i \in I} Im(\alpha_i) & & \\ \searrow \nu & & \\ & \begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{f'_i} & B' \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \mu \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} & \end{array}$$

Como para todo $x \in \sum_{j \in I} Im(\alpha_j)$, $x = \alpha_{i_0}(x_0) + \dots + \alpha_{i_n}(x_n)$ donde

$x_n \in A_{i_n}$ e $i_n \in J \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$, así definimos $g : \sum_{j \in I} Im(\alpha_j) \rightarrow B'$

como $g(x) = f'_{i_0}(x_0) + \dots + f'_{i_n}(x_n)$.

Observemos que es morfismo de módulos:

Sean $r \in R$, $a, b \in \sum_{i \in I} Im(\alpha_i)$ y supongamos que

$$\begin{aligned} a &= \alpha_{h_0}(a_0) + \dots + \alpha_{h_n}(a_n) \\ b &= \alpha_{k_0}(b_0) + \dots + \alpha_{k_m}(b_m) \quad n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} g(ra + b) &= g(r\alpha_{h_0}(a_0) + \dots + r\alpha_{h_n}(a_n) + r\alpha_{k_0}(b_0) + \dots + r\alpha_{k_m}(b_m)) \\ &= g(\alpha_{h_0}(ra_0) + \dots + \alpha_{h_n}(ra_n) + \alpha_{k_0}(b_0) + \dots + \alpha_{k_m}(b_m)) \\ &= f'_{h_0}(ra_0) + \dots + f'_{h_n}(ra_n) + f'_{k_0}(b_0) + \dots + f'_{k_m}(b_m) \\ &= (rf'_{h_0}(a_0) + \dots + rf'_{h_n}(a_n)) + f'_{k_0}(b_0) + \dots + f'_{k_m}(b_m) \\ &= r(f'_{h_0}(a_0) + \dots + f'_{h_n}(a_n)) + f'_{k_0}(b_0) + \dots + f'_{k_m}(b_m) \\ &= rg(a) + g(b). \end{aligned}$$

Por lo tanto es morfismo.

Así $\forall x \in \sum_{i \in I} Im(\alpha_i)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mu g(x) &= \mu \left(\sum_{k=0}^n f'_{i_k}(x_k) \right) = \sum_{k=0}^n \mu f'_{i_k}(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^n f_{\alpha_{i_k}}(x_k) = f \left(\sum_{k=0}^n \alpha_{i_k}(x_k) \right) \\ &= f\nu(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{i \in I} Im(\alpha_i)$ es la unión categorica.

□

Ej 18. Sean \mathcal{C} una categoría con ecualizadores $\alpha, \beta: A \rightarrow B$ y $\{\mu_i: A_i \hookrightarrow A\}_{i \in I}$ tal que existe $\mu: \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow A$. Pruebe que $(\alpha\mu_i = \beta\mu_i \ \forall i \in I) \Rightarrow (\alpha\mu = \beta\mu)$.

Demostración. Supongamos $\alpha\mu_i = \beta\mu_i \ \forall i \in I$ entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A_i & & \\ \downarrow \mu_i & & \\ A & \xrightarrow[\alpha]{\beta} & B. \end{array}$$

Como \mathcal{C} tiene ecualizadores, existe $\eta: K \rightarrow A$ tal que $\alpha\eta = \beta\eta$ y si $f: X \rightarrow A$ en \mathcal{C} es tal que $\beta f = \alpha f$, entonces $\exists! f': X \rightarrow K$ tal que $\eta f' = f$.

Así como $\alpha\mu_i = \beta\mu_i \ \forall i \in I$, entonces para cada $i \in I \ \exists! \mu'_i: A_i \rightarrow K$ tal que $\eta\mu'_i = \mu_i$, es decir, se tiene que para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} & & A_i & & \\ & \swarrow \exists! f_i & \downarrow \mu_i & \searrow \beta & \\ K & \xrightarrow{\eta} & A & \xrightarrow[\alpha]{\beta} & B \end{array}$$

es decir, $\eta f_i = \mu_i$. Con esto en mente, tenemos el siguiente diagrama para cada $i \in I$:

$$\begin{array}{ccc}
\bigcup_{i \in I} A_i & & \\
\searrow \mu & & \\
& \begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{f'_i} & K \\ \mu_i \downarrow & & \downarrow \eta \\ A & \xrightarrow{Id_A} & A \end{array} &
\end{array}$$

Entonces por la propiedad (U_2) de la unión, existe $f : \bigcup_{i \in I} A_i \longrightarrow K$ tal que $\eta f = \mu$. Así

$$\alpha\mu = \alpha\eta f = \beta\eta f = \beta\mu.$$

□

Ej 19.

Ej 20.

Ej 21. Pruebe que Sets tiene coimágenes.

Demostración. Sea $f : A \rightarrow B$ en Sets. Consideremos la relación \sim_f en A , donde $x \sim_f y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$.

Esta relación (que denotaremos por \sim por simplicidad) es una relación de equivalencia como se muestra a continuación:

Reflexividad Sea $x \in A$, como $f(x) = f(x)$ entonces $x \sim x$.

Simetría Sean $a, b \in A$ tales que $a \sim b$, entonces $f(a) = f(b)$, por lo que $f(b) = f(a)$ y así $b \sim a$.

Transitividad Sean $x, y, z \in A$ tales que $x \sim y$, $y \sim z$, entonces $f(x) = f(y) = f(z)$ por lo tanto $f(x) = f(z)$ y en consecuencia $x \sim z$.

Sea $\pi : A \rightarrow A/\sim$ el epi canónico donde $\pi(a) = [a] := \{x \in A \mid x \sim a\}$, se afirma que es una coimagen de f .

Observemos que, si $A, B \neq \emptyset$, para toda $b \in B$ tal que $b = f(a)$ con $a \in A$ se tiene que $\pi(a) = [a]$ por lo que se puede definir $f' : A/\sim \rightarrow B$ como $f'([a]) = f(a)$. Así se tiene que:

(1) f' está bien definida.

Sean $[a][b] \in [x]$ con $[x] \in A/\sim$, entonces $a \sim x \sim b$, por lo que $f(a) = f(x) = f(b)$, es decir, $f'([a]) = f'([x]) = f'([b])$.

(2) $(f = f'\pi)$.

Sea $a \in A$. $f'\pi(a) = f'([a]) = f(a)$.

Para ver que $(CoIm_2)$ se cumple, supongamos que existe $p' : A \twoheadrightarrow J'$ un objeto cociente de A tal que $\exists f'' : J' \rightarrow B$ donde $f = f''p'$.

Sea $a \in A$, entonces $\pi(a) = [a]$ y $p'(a) = a' \in J'$. Como p' es epi en Sets entonces es supra, así para todo $x \in J'$ existe $a_x \in A$ tal que $p'(a_x) = x$, así definimos $\nu : J' \rightarrow A/\sim$ como $\nu(x) = \pi(a_x)$.

Se tiene entonces que $\forall a \in A$, $\nu p'(a) = \nu(p'(a)) = \pi(a)$.

En el caso de que B sea el conjunto vacío, entonces A tiene que ser el conjunto vacío y $f : A \rightarrow B$ es la función vacía, así $f = p$ tiene que ser su coimagen pues si $f' : B \rightarrow B$ es la función identidad en B , entonces $f = f'p$ y si $p' : B \twoheadrightarrow B$ es un objeto cociente de A tal que $f'' : J' \rightarrow B$ con $f''p' = f$ entonces $f'' : J' \rightarrow B$ es la función vacía y J' es el conjunto vacío. Así $p' : A \rightarrow J'$ es la función vacía y por lo tanto $p' = p$ y $Id_{J'} \circ p' = p$.

En caso de que A sea el conjunto vacío y B sea distinto del vacío, entonces $(CoIm_1)$ se cumple igual que en el caso anterior, tomando a $p : \emptyset \rightarrow \emptyset$.

Para probar $(CoIm_2)$ supongamos que $p' : A \twoheadrightarrow J'$ es un objeto cociente de A tal que $\exists f'' : J' \rightarrow B$ tal que $f = f''p'$, pero p' es epi, y como $A = \emptyset$ entonces $J' = \emptyset$. Así, si definimos u como la identidad en el vacío se tiene que $p = up'$.

□

Ej 22. Pruebe que $Mod(R)$ tiene coimágenes.

Demostración. Sea $A \in Obj(Mod(R))$, entonces $A \neq \emptyset$. Se afirma que el epi canónico $\pi : A \rightarrow A/Ker(f)$ es una coimagen.

Sea $a \in A$, entonces $f(a) \in B$. Definimos $f' : A/Ker(f) \rightarrow B$ como $f'([a]) = f(a)$.

Probemos que está bien definido. Sean $a, b \in [x]$ entonces $a + k_1 = b + k_2 = x$ con $k_1, k_2 \in Ker(f)$, así

$$\begin{aligned} f'([a]) &= f(a) = f(a) + f(K_1) = f(a + K_1) \\ &= f(b + K_2) = f(b) + f(K_2) = f(b) = f'([b]). \end{aligned}$$

Veamos que es morfismo. Sean $r \in R$, $[a], [b] \in A/Ker(f)$ entonces

$$f'(r[a] + [b]) = f'([ra + b]) = f(ra + b) = rf(a) + f(b) = f'(r[a]) + f'([b]).$$

En consecuencia se tiene que π cumple $(CoIm_1)$.

Ahora supongamos que $p' : A \twoheadrightarrow J'$ es un objeto cociente de A tal que existe $f'' : J' \rightarrow B$ que cumple que $f = f''p'$. Como p' es epi, entonces es suprayectiva en $Mod(R)$, por lo que para cada $x \in J'$ existe $a \in A$ tal que $p'(a) = x$.

Definimos $\nu : J' \rightarrow A/Ker(f)$ como $\nu(x) = [a]$ donde $p'(a) = x$. Esta función está bien definida pues si $a, b \in A$ son tales que $p'(a) = p'(b)$ entonces $f''p'(a) = f''p'(b)$ y así $f(a) = f(b)$, entonces $f(a - b) = 0$, por lo que $a - b \in Ker(f)$ y en consecuencia $[a] = [b]$.

Veamos que ν es morfismo. Si $r \in R$, $a, b \in J'$ donde $\nu(a) = [x]$, $\nu(b) = [y]$, $a = p'(x)$ y $b = p'(y)$, entonces

$$\begin{aligned} \nu(ra + b) &= \nu(rp'(x) + p'(y)) = \nu(p'(rx + y)) \\ &= [rx + y] = r[x] + [y] = r\nu(a) + \nu(b). \end{aligned}$$

Así se tiene que $\forall a \in A$ $\nu p'(a) = \nu(p'(a)) = [a] = \pi(a)$ por lo que $(CoIm_2)$ se cumple y $Mod(R)$ tiene coimágenes.

□

Ej 23.

Ej 24.

Ej 25. Considere el siguiente diagrama conmutativo en una categoría \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccc} & B' & \\ & \downarrow h & \\ A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow f' & \uparrow \mu \\ & I & \end{array}$$

Pruebe que: si $\exists f^{-1}(B')$ y $B' \cap Y$, entonces $f^{-1}(I \cap B') = f^{-1}(B')$ en $Mon_{\mathcal{C}}(-, A)$.

Demostración. Como $f^{-1}(B')$ y $B' \cap I$ existen, entonces se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(B') & \xrightarrow{\beta_2} & B' \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow f' & \uparrow \mu \\ & & I \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I \cap B' & \xrightarrow{\nu_1} & I \\ \nu_2 \downarrow & \searrow i & \downarrow \mu \\ B' & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Así se tiene que este diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(B') & \xrightarrow{f' \beta_1} & I \\ \beta_2 \downarrow & \searrow f \beta_1 & \downarrow \mu \\ B' & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

es conmutativo. Por lo tanto, como $I \cap B'$ es pull-back existe un único $\gamma : f^{-1}(B') \rightarrow I \cap B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}(B') & \xrightarrow{\gamma} & I \cap B' & \xrightarrow{\nu_2} & B' \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow i & \nearrow h & \\ A & \xrightarrow{f} & B & & \end{array} \quad \dots (1)$$

Sean $\eta : X \rightarrow I \cap B'$, $\eta_2 : X \rightarrow A$ tales que $i\eta_1 = f\eta_2$.

Observamos que, entonces, $\nu_2\eta_1 : X \rightarrow B'$ y es tal que $h(\nu_2\eta_1) = i\eta_1 = f\eta_2$.

Así, como $f^{-1}(B')$ es pull-back de $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{\mu} B'$, existe una única $\gamma' : X \rightarrow f^{-1}(B')$ tal que $\nu_2\gamma\gamma' = \nu_2\eta_1$ y $\beta_1\gamma' = \eta_2$ pero ν_2 es mono por ser i mono. Entonces $\gamma\gamma' = \eta_1$ y $\beta_1\gamma' = \eta_2$.

Ahora, si existiera $\alpha : X \rightarrow f^{-1}(B')$ tal que $\beta_1\alpha = \eta_2$ y $\gamma\alpha = \eta_1$, entonces $\nu_2\gamma\alpha = \gamma_2\eta_1$ y por lo anterior $\alpha = \gamma'$ pues es el único con esas propiedades. Por lo tanto $f^{-1}(B')$ es un pull-back, del diagrama (1), e implica que $f^{-1}(I \cap B')$ existe y sea igual a $f^{-1}(B)$ con los morfismos γ y β_1 .

□

Ej 26. Sea $f : A \rightarrow B$ en una categoría \mathcal{C} . Consideremos subobjetos $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B$. Pruebe que se satisfacen las siguientes relaciones cada vez que ambos lados estén definidos.

- a) $f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- b) $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- c) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$
- d) $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$

Demostración. Comenzaremos por nombrar monomorfismos correspondientes como subobjetos de A y de B

$$A_1 \xrightarrow{\mu_1} A_2 \xrightarrow{\mu_2} A$$

$$B_1 \xrightarrow{\gamma_1} B_2 \xrightarrow{\gamma_2} B$$

a) Sabemos que $f(A_1) = \text{Im}(f\mu_2\mu_1)$ y $f(A_2) = \text{Im}(f\mu_2)$. Llamaremos

$$\begin{aligned} \mu'_1 : \text{Im}(f\mu_2\mu_1) &\rightarrow B, & \alpha_1 : A_2 &\rightarrow \text{Im}(f\mu_2\mu_1), \\ \mu'_2 : \text{Im}(f\mu_2) &\rightarrow B \quad \text{y} & \alpha_2 : A_2 &\rightarrow \text{Im}(f\mu_2) \end{aligned}$$

a los morfismos tales que $f\mu_2 = \mu'_2\alpha_2$ y $f\mu_2\mu_1 = \mu'_1\alpha_1$. Entonces $f\mu_2\mu_1 = (\mu'_2\alpha_2)\mu_1$. Por la propiedad universal de la imagen en $\text{Im}(f\mu_2\mu_1)$ existe $\gamma : \text{Im}(f\mu_2\mu_1) \rightarrow \text{Im}(f\mu_2)$ tal que $\mu'_2\gamma = \mu_1$. En particular γ es mono, entonces $\text{Im}(f\mu_2\mu_1) \subseteq \text{Im}(f\mu_2)$ y así $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

b) Como se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(B_1) & \xrightarrow{\beta_2} & B_1 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \nu_2 \nu_1 \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f^{-1}(B_2) & \xrightarrow{\beta'_2} & B_2 \\ \beta'_1 \downarrow & & \downarrow \nu_2 \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

en particular se tiene que $f\beta_1 = \nu_2(\nu_1\beta_2)$ y este diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(B_1) & \xrightarrow{\nu_1\beta_2} & B_2 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \nu_2 \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Entonces $\exists \eta : f^{-1}(B_1) \rightarrow f^{-1}(B_2)$ tal que $\beta'_2\eta = \nu\beta_2$ y $\beta'_1\eta = \beta_1$

Como $f^{-1}(B_2)$ es pull-back, y ν_2 es mono, entonces β'_1 es mono y por lo tanto η es mono. Así $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

c) Puesto que $f^{-1}(f(A_1))$ es un pull back, tenemos un diagrama conmutativo de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(f(A_1)) & \xrightarrow{f_2} & f(A_1) \\ f_1 \downarrow & & \downarrow \mu'_1 \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Además (apoyandonos con la notación del inciso a)) tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & f(A_1) \\ \mu_2 \mu_1 \downarrow & & \downarrow \mu'_1 \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Entonces, por ser $f^{-1}(f(A_1))$ un pull-back, $\exists! g : A_1 \rightarrow f^{-1}(f(A_1))$ tal que $f_2 g = \alpha_1$ y $f_1 g = \mu_2 \mu_1$.

Como $\mu_2 \mu_1$ es mono por ser μ_2 y μ_1 monos, entonces g es mono y así $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$.

d) Observemos que, como $f^{-1}(B_1)$ es pull-back, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(B_1) & \xrightarrow{\beta_2} & B_1 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow \nu_2 \nu_1 \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta, entonces por propiedades de las imagenes, existen $\mu :: Im(f\beta_1) \hookrightarrow B$ y $f' : f^{-1}(B_1) \rightarrow Im(f\beta_1)$ tales que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(B_1) & \xrightarrow{f'} & Im(f\beta_1) \\ \beta_2 \downarrow & \searrow f\beta_1 & \downarrow \mu \\ B_1 & \xrightarrow{\nu_2 \nu_1} & B \end{array}$$

es un diagrama conmutativo, por lo que existe un único $g' : Im(f\beta_1) \rightarrow B_1$, tal que $\nu_2 \nu_1 g' = \mu$ y $g f' = \beta_2$ dado por la propiedad universal de las imagenes. Mas aún, notemos que g' es mono, pues μ es mono y $\mu = \nu_2 \nu_1 g'$. Así $f\beta_1 = \nu_2 \nu_1 \beta_2$. Por lo que $Im(f\beta_1) = f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$.

□

Ej 27.

Ej 28.

Ej 29. Pruebe que $Mod(R)$ tiene kerneles.

Demostración. Sea $f : A \rightarrow B$ morfismo en $Mod(R)$,
 $K = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ y $\mu : K \rightarrow A$ la función inclusión.

Primero demostraremos que $K \leq A$.

Sean $r \in R$, $a, b \in K$, entonces $f(ra + b) = rf(a) + f(b) = r \cdot 0 + 0 = 0$,
por lo tanto $ra + b \in K$, entonces $K \in Mod(R)$ y μ es morfismo.

$\boxed{Ker_1}$ Como $f\mu : K \rightarrow B$ y para toda $x \in K$ se tiene que $f\mu(x) = f(\mu(x)) = f(x) = 0$ entonces $f\mu = 0$.

$\boxed{Ker_2}$ Supongamos $g : X \rightarrow A$ es un morfismo tal que $fg = 0$, entonces $g(x) \in K$ pues $f(g(x)) = 0$. Así definimos el morfismo $h : X \rightarrow K$ tal que $h(x) = g(x)$, entonces $\mu h(x) = \mu(g(x)) = g(x) \quad \forall x \in X$, por lo tanto $\mu h = g$ y así K es kernel de f .

Por lo tanto $Mod(R)$ tiene kernels.

□

Ej 30. Pruebe que $Mod(R)$ tiene cokernels.

Demostración. Sea $f : M \rightarrow N$ en $Mod(R)$. Como f es morfismo de R -módulos, entonces $im(f) \leq N$.

Consideremos $\pi : N \rightarrow N/Im(f)$, donde $\pi(k) = k + Im(f)$ es la proyección canónica. Se afirma que π es un cokernel de f .

$\boxed{CoKer_1}$ Para toda $x \in M$ se tiene que $\pi f(x) = \pi(f(x)) = 0$ pues $f(x) \in Im(f)$.

$\boxed{CoKer_2}$ Propiedad universal. Supongamos existe $g : N \rightarrow X$ un morfismo de módulos tal que $gf = 0$, entonces definimos $g' : N/Im(f) \rightarrow X$ de tal forma tal que $\forall [x] \in N/Im(f)$, $g'([x]) = g(x)$, donde $[x]$ es el representante de la clase de equivalencia de x .

Sean $[x], [y] \in N/Im(f)$ y $r \in R$, entonces

$$g'(r[x] + [y]) = g'([rx + y]) = g(rx + y) = rg(x) + g(y) = rg'(x) + g'(y).$$

Observamos que g' está bien definida, pues si $a, b \in [x]$, entonces existen $k_1, k_2 \in Im(f)$ tales que $a + k_1 = b + k_2 = x$ y $g(k_1) = g(k_2) = 0$, entonces

$$g'([a]) = g(a) = g(a) + g(k_1) = g(a + k_1) = g(b + k_2) = g(b) + g(k_2) = g(b) = g'([b]).$$

Por lo tanto g' es un morfismo de R -módulos y $g'\pi(x) = g'([x]) = g(x)$ por lo que $g'\pi = g$ y así π es Cokernel.

□