## Ejercicios 16-31

## Arruti, Sergio

Lema 1. Sea f un morfismo en Sets, entonces

- a)  $f:A\hookrightarrow B$  es un mono en Sets si y sólo si f es inyectiva;
- b)  $f: A \rightarrow B$  es un epi en Sets si y sólo si f es suprayectiva.

Demostración. a) Notemos primeramente que una función vacía  $\varnothing_C$ ,  $C \in Sets$ , es inyectiva por la vacuidad de su dominio. Más aún, es un mono en Sets, en efecto: si  $g,h \in Sets$  son tales que  $\varnothing_C f = \varnothing_A g$ , entonces necesariamente  $D = \varnothing_A g$  y así, dado que existe una única función de  $\varnothing$  en  $\varnothing$ , f = g. Con lo cual la afirmación es válida para funciones vacía y podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $A \neq \varnothing$  (y en consecuencia que  $B \neq \varnothing$ ).

a)  $\Longrightarrow$  Sean  $a, b \in A$  tales que f(a) = f(b), entonces las funciones

$$g: A \to A$$
$$x \mapsto a,$$
$$h: A \to A$$
$$x \mapsto b.$$

satisfacen que fg = fh, luego g = h por ser f mono y por tanto a = b. a bSupongamos que  $g, h \in \text{son tales que } fg = fh$ . Si  $A' = \emptyset$  entonces

 $\overline{g=\varnothing_A}=h;$  en caso contrario sea  $a\in A',$  así

$$\begin{split} f\left(g\left(a\right)\right) &= fg\left(a\right) = fh\left(a\right) = f\left(h\left(a\right)\right) \\ &\implies g\left(a\right) = h\left(a\right), & f \text{ es inyectiva} \\ &\implies g = h. \end{split}$$

- b) Verificaremos primero que la función  $\varnothing_\varnothing$  i.e. la única función cuyo dominio y contradominio es  $\varnothing$  es epi y suprayectiva. Si  $g,h\in$  son tales que  $g\varnothing_\varnothing=h\varnothing_\varnothing$ , entonces  $g=\varnothing_Z=h$ ; por su parte la suprayectividad de  $\varnothing_\varnothing$  se sigue por la vacuidad de su contradominio. Así, en adelante podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $B\neq\varnothing$ .
- $b) \implies$  Notemos que necesariamente  $A \neq \emptyset$ , pues en caso contrario las apli-

caciones

$$\phi: B \to \{0, 1\}$$

$$x \mapsto 0,$$

$$\psi: B \to \{0, 1\}$$

$$x \mapsto 1,$$

son funciones bien definidas, pues  $B \neq \emptyset$ , las cuales satisfacen que  $\phi \neq \psi$  y sin embargo  $\phi f = \emptyset_{\{0,1\}} = \psi f$ , lo cual contradeciría que f es epi. Así  $1_B|_{f(A)}$  no es una función vacía y más aún satisface que

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{B}|_{f(A)}\,f &= f = \mathbf{1}_{B}f\\ &\Longrightarrow \,\mathbf{1}_{B} = \mathbf{1}_{B}|_{f(A)}\,, & f \text{ es epi}\\ &\Longrightarrow \,f\left(A\right) = B\\ &\Longrightarrow \,f \text{ es suprayectiva}. \end{aligned}$$

b)  $\Leftarrow$  Sean  $g, h \in Hom_{Sets}(B, C)$  tales que gf = hf y  $b \in B$ . Como f es suprayectiva  $\exists a \in A \ f(a) = b$ , así

$$g(b) = gf(a) = hf(a) = h(b)$$

$$\implies g = h.$$

Ej 16. La categoría Sets tiene uniones.

 $\begin{array}{l} \textit{Demostración.} \ \text{Sea} \ \{u_i: A_i \hookrightarrow A\} \ \text{una familia de subobjetos de un conjunto} \ A \ y \ U := \bigcup_{i \in I} \Im \left(u_i\right) . \ \text{Si} \ I = \varnothing \ \text{entonces} \ U = \varnothing \ y \ \text{la función vacía} \\ \varnothing_A : \varnothing \to A \ \text{es un subobjeto de} \ A \ \text{que satisface por vacuidad que} \ \forall \ i \in I \end{array}$ 

 $\varnothing_A:\varnothing\to A$  es un subobjeto de A que satisface por vaculdad que  $\forall\ t\in I$   $u_i\le\varnothing_A$ . Resta verificar que  $\varnothing_A$  satisface la propiedad universal de la unión, para lo cual por vaculdad basta con verificar que si  $f\in Hom\left(Sets\right)$  y  $\mu\in Mon_{Sets}\left(-,A\right)$ , entonces  $\varnothing_A$  es llevado a  $\mu$  vía f. Si consideramos la función vacía  $\varnothing_B:\varnothing\to B$ , entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \varnothing_A & \xrightarrow{\varnothing_B} & B' \\ \varnothing_A & & \downarrow^{\mu} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta en Sets puesto que  $f\varnothing_A, \mu\varnothing_B \in Hom_{Sets}(\varnothing, B)$  y existe una única función de  $\varnothing$  en B.

En adelante supondremos que  $I \neq \emptyset$ . Si  $U = \emptyset$  entonces  $\forall i \in I$   $A_i = \emptyset$  y por lo tanto cada  $u_i$  coincide con la función vacía  $\emptyset_A$ . De modo que se satisface que  $\forall i \in I$   $u_i \leq \emptyset_A$  y en forma análoga al caso  $I = \emptyset$  se verifica

que si  $f: A \to B$  y  $\mu: B' \hookrightarrow B$  son tales que cada  $u_i$  es llevado a  $\mu$  vía f, entonces  $\emptyset_A$  es llevado a  $\mu$  vía f, y así  $\emptyset_A$  es una unión para la familia  $\{u_i\}_{i\in I}$ .

Finalmente si  $U \neq \emptyset$  entonces necesariamente  $\exists i \in I$  tal que  $A_i \neq \emptyset$ . Así consideremos inc la inclusión de U en A, la cual es un mono en Sets y para cada  $i \in I$  las funciones dadas por

$$\gamma_i: A_i \to U$$

$$a \mapsto u_i(a),$$

en caso que  $A_i \neq \emptyset$ , o bien  $\gamma_i := \emptyset_U$  si  $A_i = \emptyset$ . Así, si  $A_i = \emptyset$ , como  $\emptyset_A$  es la única función de  $\emptyset$  en A, entonces

$$u_i = \varnothing_A = inc \varnothing_U = inc \gamma_i.$$

Si ahora  $A_i \neq \emptyset$ , entonces

$$u_i(a) = inc\gamma_i(a),$$
  $\forall a \in A_i$   
 $\implies u_i = inc\gamma_i.$ 

Con lo cual se ha verificado que  $\forall i \in I \ u_i \leq inc$ . Supongamos ahora que  $f: A \to B \ y \ \mu: B' \hookrightarrow B$  son funciones tales que cada  $u_i$  es llevado a  $\mu$  vía f, es decir para cada  $i \in I$  el siguiente diagrama conmuta en Sets

$$\begin{array}{ccc}
A_i & \xrightarrow{\exists g_i} B' \\
u_i & & \downarrow^{\mu} . \\
A & \xrightarrow{f} B
\end{array}$$

Notemos que para cada  $y \in U \ \exists \ i \in I \ y \ x \in A_i$  tales que  $y = u_i(x)$ , así consideremos la aplicación

$$h: U \to B'$$
  
 $u_i(x) \mapsto g_i(x)$ .

Sea  $y \in U$  con  $i, j \in I$  y  $x \in A_i, z \in A_j$  tales que  $u_i(x) = y = u_j(z)$ , entonces de la conmutatividad de los diagramas anteriores se tiene que

$$\mu(g_j(z)) = fu_j(b) = f(x) = f(u_i(x))$$
  
=  $fu_i(x) = \mu(g_i(x))$ .

Lo anterior, en conjunto a que  $\mu$  es inyectiva por ser un mono en Sets, garantiza que  $g_j(z) = g_i(x)$  y así h está bien definida. Sea  $y \in U$ , con  $i \in I$  y  $x \in A_i$  tales que  $y = u_i(x)$ . Se tiene que

$$finc(y) = f(y) = f(u_i(x)) = \mu g_i(x) = \mu(h(y))$$
$$= \mu h(y)$$
$$\implies finc = \mu h.$$

Con lo cual inc es llevado a  $\mu$  vía f y por tanto es una unión para la familia  $\{u_i\}_{i\in I}$ .

- Ej 17.
- Ej 18.
- **Ej 19.** Si  $f:A\hookrightarrow B$  está en una categoría  $\mathscr{C}$ , entonces  $f:A\hookrightarrow B$  es una imagen de f.

Demostración. Se tiene que f es un subobjeto y que  $f = f1_A$ . Si  $g: C \hookrightarrow B$  es un subobjeto para el cual  $\exists h: A \to C$  tal que f = gh, entonces  $f \leq g$  y por tanto  $Im(f) \simeq f$  en  $Mon_{Sets}(-,B)$ .

**Ej 20.** Mod(R) y Sets tienen imágenes epimórficas.

Demostración. Sea  $f:A\to B$  en Sets. Si f es la función vacía  $\varnothing_B$  entonces por el Lema 1 se tiene que f es mono y por tanto es una imagen para sí mismo. Así supongamos sin pérdida de generalidad que  $A\neq\varnothing$ . Luego  $B\neq\varnothing$  y se tiene que  $inc:f(A)\to B$  es una función no vacía e inyectiva, por tanto un mono en Sets, la cual satisface que, si

$$g: A \to F(A)$$
  
 $a \mapsto f(A)$ ,

f = incg.

Ahora supongamos que  $\mu: C \hookrightarrow B$  y  $h: A \to C$  son tales que  $f=\mu h$ . Notemos que para cada  $y \in f(A) \exists a \in A$  tal que y=f(a), así consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} k:f\left(A\right) &\to C\\ f\left(a\right) &\mapsto h\left(a\right). \end{aligned}$$

Si  $a, b \in A$  son tales que x = f(a) = f(b), entonces

$$\mu h(a) = f(a) = x = f(b) = \mu h(b)$$
  $\Rightarrow h(a) = h(b),$   $\mu$  es mono

con lo cual k es una función bien definida y satisface que, dados  $y \in f(A)$  y  $x \in A$  tal que y = f(x),

$$\mu k(y) = \mu(h(x)) = f(x) = y = inc(y)$$
$$\implies inc = \mu k.$$

Con lo anterior se ha verificado que Sets tiene imágenes, más aún, tiene imágenes epimórficas puesto que la función g así construida es suprayectiva

y por tanto epi.

Dado que todo R-módulo es en partícular un conjunto no vacío, en forma análoga a lo anterior se verifica que Mod(R) tiene imágenes epimórficas, puesto que si ahora  $f:A\to B$  en Mod(R) entonces la inclusión de módulos es un morfismo de R-módulos, g también lo es al serlo f, y k lo es al serlo f y h.

Ej 21.

Ej 22.

Ej 23. Sean  $\mathscr{C}$  una categoría balanceada, con imágenes epimórficas y

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

en  $\mathscr{C}$ . Si  $\mu: A' \hookrightarrow A$  en  $\mathscr{C}$ , entonces g(f(A')) = gf(A') en  $\overline{Mon_{\mathscr{C}}(-,C)}$ .

Demostración. Dado que  $\mathscr{C}$  tiene imágenes epimórficas existen subobjetos

$$u: Im(f\mu) \hookrightarrow B,$$
 $\eta: Im(g\nu) \hookrightarrow B,$ 
 $\psi: Im((gf)\mu) \hookrightarrow B,$ 

que son imágenes respectivamente de  $f\mu, g\nu$  y  $(gf)\mu$ , y existen epimorfismos  $\alpha_1: A' \twoheadrightarrow Im(f\mu)$  y  $\alpha_2: Im(f\mu) \twoheadrightarrow Im(g\nu)$  tales que

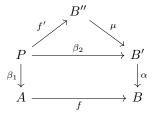
$$f\mu = \nu\alpha_1, g\nu = \eta\alpha_2.$$
 (\*)

Notemos que por ser  $\nu$  imagen de  $f\mu$  y subobjeto de B se tiene que  $g\left(f\left(A'\right)\right)=g\left(Im\left(f\mu\right)\right)=Im\left(g\nu\right)$ , mientras que  $gf\left(A'\right)=Im\left((gf)\mu\right)$ . Así pues basta con verificar que  $\eta$  es una imagen para  $(gf)\mu$ , ya que en tal caso  $Im\left(g\nu\right)\simeq Im\left((gf)\mu\right)$  en  $Mon_{\mathscr{C}}\left(-,C\right)$ . De (\*) se tiene que

$$gf(\mu) = g(f\mu) = g(\nu\alpha_1) = (\eta\alpha_2)\alpha_1 = \eta(\alpha_2\alpha_1).$$

En la última igualdad  $\eta$  es un mono, mientras que  $\alpha_2\alpha_1$  es un epi al serlo  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , de modo que al ser  $\mathscr C$  balanceada (ver Proposición 1.4.3) se tiene que  $\eta$  es una imagen para  $(gf)\mu$ .

Ej 24. Sea el siguiente diagrama



conmutativo en una categoría  $\mathscr{C}$ , con  $\mu$  y  $\alpha$  subobjetos. Si  $\beta_1$  es una imagen inversa por f de  $\alpha_1$ , entonces también lo es de  $\alpha\mu$ .

Demostración. Notemos que de la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que

$$(\alpha \mu) f' = \alpha (\mu f') = \alpha \beta_2$$
  
=  $f \beta_1$ ,

i.e. el siguiente cuadrado conmuta

$$P \xrightarrow{f'} B''$$

$$\beta_1 \downarrow \qquad \qquad \downarrow \alpha \mu .$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$(*)$$

Sean  $\gamma_1:P'\to A$  y  $\gamma_2:P'\to B''$  tales que  $f\gamma_1=(\alpha\mu)\,\gamma_2=\alpha\,(\mu\gamma_2).$  Como

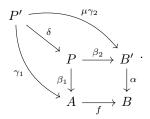
$$P \xrightarrow{\beta_2} B'$$

$$\beta_1 \downarrow \qquad \qquad \downarrow \alpha$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$(**)$$

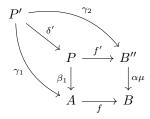
es un pull-back por ser  $\beta_1$  imagen inversa por f de  $\alpha$ , de la propiedad universal del pull-back se sigue que  $\exists !\ \delta:P'\to P$  tal que el siguiente diagrama conmuta



De modo que  $\delta$  es tal que  $\gamma_1=\beta_1\delta$  y además

$$(\alpha\mu)(f'\delta) = \alpha(\beta_2)\delta = \alpha(\mu\gamma_2) = (\alpha\mu)\gamma_2$$
  
 $\implies \gamma_2 = f'\delta.$   $\alpha\mu$  es mono

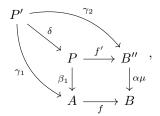
Sea  $\delta':P'\to P$ en  ${\mathscr C}$ tal que el diagrama



conmuta, luego  $\delta'$  es tal que  $\gamma_1 = \beta_1 \delta'$  y

$$\mu \gamma_2 = (\mu f') \, \delta' = \beta_2 \delta'.$$

Por lo tantto, aplicando la propiedad universal del pull-back a (\*\*) se tiene que  $\delta'=\delta$ , con lo cual se tien que existe un único morfismo  $\delta$  tal que el siguiente diagrama conmuta



i.e. (\*) es un pull-back y así se tiene lo deseado.

Ej 25.

Ej 26.

**Ej 27.** Sea  $\mathscr C$  una categoría con objeto cero. Entonces  $\bigcup_{i\in I}A_i\simeq 0,$  si  $I=\varnothing.$ 

Demostración. Afirmamos que en este caso el morfismo  $0_{0,A}$  en  $\mathscr{C}$  (el cual existe y es único por ser 0 un objeto cero de la categoría  $\mathscr{C}$ ) es una unión para la familia de subobjetos  $\mu_i:A_i\to A$ . En efecto:

Notemos que  $0_{A,0}0_{0,A}, 0_{0,A}0_{A,0}, Id_0 \in Hom_{\mathscr{C}}(0,0)$  y que  $|Hom_{\mathscr{C}}(0,0)|$ , luego  $0_{A,0}0_{0,A} = Id_0 = 0_{0,A}0_{A,0}$  y por tanto  $\mu$  es un iso en  $\mathscr{C}$ , así que en partícular es un subobjeto de A.

Sean  $f:A\to B$  y  $\mu:B'\hookrightarrow B$  en  $\mathscr C$ , por ser  $I=\varnothing$  basta con verificar que  $0_{0,A}$  es llevado a  $\mu$  vía f. Se tiene que

$$f0_{0,A} = 0_{0,B} = \mu 0_{0,B'},$$

con lo cual el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
0 & \xrightarrow{0_{0,B'}} B' \\
\downarrow^{0_{0,A}} & & \downarrow^{\mu} \\
a & \xrightarrow{f} B
\end{array}$$

conmuta y así se tiene lo deseado.

Ej 28. Mod(R) es una categoría con objeto cero, en tanto que Sets no lo es.

Demostración. Mod(R) Sea R un anillo. Consideremos un conjunto de la forma  $A=\{*\}$ , i.e. un conjunto de un sólo elemento. Notemos que por medio de las operaciones

$$+: A \times A \rightarrow A$$
 $(*,*) \mapsto *,$ 
 $\cdot: R \times A \rightarrow R$ 
 $(r,*) \mapsto *,$ 

se tiene que  $(A, +, \cdot) \in Mod(R)$ .

Sea  $M \in Mod(R)$ . Como  $\forall B \in Sets | Hom_{Sets}(B,A)| = 1$ , y todo morfismo de R-módulos en partícular es una función, se tiene que  $|Hom_{Mod(R)}(M,A)| \leq 1$ . Así pues para verificar que A es objeto inicial en Mod(R) resta verificar que existe un morfismo de R-módulos de M en A. Sean  $r \in R$ ,  $m, n \in M$  y

$$f_M: M \to A$$
  
 $m \mapsto *,$ 

entonces  $f(rm+n)=*=*+*=r\cdot *+*=rf(m)+f(n),$  y así  $f_{M}\in Hom_{Mod(R)}\left(M,A\right).$ 

Por otro lado, si  $0_M$  es el neutro aditivo de M, entonces la función

$$g_M: A \to M$$
  
 $* \mapsto 0_M$ 

satisface  $g_M \in Hom_{Mod(R)}(A, M)$ . Más aún, si  $h \in Hom_{Mod(R)}(A, M)$ , entonces necesariamente h es un morfismo de grupos y así

$$h(0_A) = h(*) = 0_M = g_M(*)$$

$$\implies h = g_M.$$

$$A = \{*\}$$

Por lo tanto A también es un objeto final y así es un objeto cero para  $Mod\left(R\right).$ 

Sets Supongamos que existe un conjunto A tal qu A es objeto cero de Sets. Luego  $\exists ! \ f \in Hom_{Sets} (A, \emptyset)$ , y así necesariamente  $A = \emptyset$ , lo cual es absurdo ya que  $\emptyset$  no es un objeto final en Sets, puesto que si  $B \neq \emptyset$  no existen funciones cuyo dominio sea B y contradominio sea  $\emptyset$ .

Ej 29.

Ej 30.

**Ej 31.** Sets y Mod(R) son categorías localmente pequeñas.

Demostración. Sea  $A \in Sets$ . Afirmamos que si  $\varphi : B \hookrightarrow A$ ,  $\psi : C \hookrightarrow A \in Mon_{Sets}(-, A)$  entonces

$$\varphi \simeq \psi \text{ en } Mon_{Sets}\left(-,A\right) \iff Im\left(\varphi\right) = Im\left(\psi\right).$$
 (A)

 $\implies$  Se tiene que  $\psi \leq \varphi$  y  $\varphi \leq \psi,$  luego  $\exists~g:C \to B$  y  $h:B \to C$  tales que

$$\psi = \varphi g, \tag{*}$$

$$\varphi = \psi g \tag{**}$$

De (\*) se sigue que

$$\psi\left(C\right) = \varphi\left(g\left(C\right)\right) \subseteq \varphi\left(B\right)$$
 
$$\implies Im\left(\psi\right) \subseteq Im\left(\varphi\right).$$

Análogamente, de (\*\*) se obtiene que  $Im(\varphi) \subseteq Im(\psi)$ .

Keeping Notemos que si  $B = \emptyset$ , entonces  $Im(\psi) = Im(\varphi) = \emptyset$ , y por lo tanto  $C = \emptyset$ , con lo cual  $\varphi = \emptyset_A = \psi$ ; similarmente en caso que  $C = \emptyset$ . Por lo tanto en adelante supondremos que  $B \neq \emptyset \neq C$ .

Afirmamos que  $\forall c \in C \exists ! b_c \in B$  tal que  $\psi(c) = \varphi(b)$ . En efecto la existencia se sigue de que en partícular  $Im(\psi) \subseteq Im(\varphi)$ , mientras que la unicidad se sigue del hecho que  $\varphi$  es un mono y por tanto inyectiva (ver Lema 1). Lo previamente demostrado garantiza que la aplicación

$$g: C \to B$$
  
 $c \mapsto b_C$ 

está bien definida y satisface que  $\psi=\varphi g$ . En forma análoga, empleando ahora que  $Im\left(\psi\right)\supseteq Im\left(\varphi\right)$  y el que  $\psi$  es un mono en Sets, se verifica que  $\exists\ h:B\to C$  tal que  $\varphi=\psi h$  y así  $\psi\simeq\varphi$  en  $Mon_{Sets}\left(-,A\right)$ .

La caracterización dada por (A) garantiza que la aplicación dada por

$$f: \overline{Mon_{Sets}(-, A)} \to \mathscr{P}(A)$$
  
 $[\varphi] \mapsto Im(\phi)$ .

está bien definida y es inyectiva. Más aún, f es biyectiva puesto que si  $D \subseteq A$  e i es la inclusión conjuntista de B en A, entonces  $i \in Mon_{Sets}(-,A)$ . La inyectividad de f garantiza que la clase  $\overline{Mon_{Sets}(-,A)}$  es un conjunto, puesto que  $\mathscr{P}(A)$  lo es. Por tanto Sets es localmente pequeña.

Por su parte, el que Mod(R) sea localmente pequeña se sigue de que si  $M \in Mod(R)$ , entonces

$$k_{M}: \overline{Mon_{Mod(R)}\left(-,M\right)} \to \overline{Mon_{Mod(R)}\left(-,M\right)}$$

$$\left[\varphi\right] \mapsto \left[\varphi\right]$$

está bien definida y es inyectiva.

10