Ejercicios 16-31

Luis Gerardo Arruti Sebastian
Sergio Rosado Zúñiga

Lema 1. Sea f un morfismo en $Sets$, entonces

a) $f : A \hookrightarrow B$ es un mono en $Sets$ si y sólo si f es inyectiva;

b) $f : A \twoheadrightarrow B$ es un epi en $Sets$ si y sólo si f es suprayectiva.

Así en partícular se tiene que los monomorfismos, respectivamente epimorfismos, categóricos en $Mod\,(R)$ son los monomorfismos, respectivamente epimorfismos, de R-módulos.

Demostración. $\boxed{a)}$ Notemos primeramente que una función vacía $\varnothing_C$, $C \in Sets$, es inyectiva por la vacuidad de su dominio. Más aún, es un mono en $Sets$, en efecto: si $g, h \in$ son tales que $\varnothing_C f = \varnothing_A g$, entonces necesariamente $D = \varnothing$ y así, dado que existe una única función de $\varnothing$ en $\varnothing$, $f = g$. Con lo cual la afirmación es válida para funciones vacía y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \neq \varnothing$ (y en consecuencia que $B \neq \varnothing$).
$\boxed{a) \implies}$ Sean $a, b \in A$ tales que $f\,(a) = f\,(b)$, entonces las funciones

$$\begin{aligned} g : A &\to A \\ x &\mapsto a, \\ h : A &\to A \\ x &\mapsto b, \end{aligned}$$

satisfacen que $fg = fh$, luego $g = h$ por ser f mono y por tanto $a = b$.
$\boxed{a) \impliedby}$ Supongamos que $g, h \in$ son tales que $fg = fh$. Si $A' = \varnothing$ entonces $g = \varnothing_A = h$; en caso contrario sea $a \in A'$, así

$$\begin{aligned} & f\,(g\,(a)) = fg\,(a) = fh\,(a) = f\,(h\,(a)) \\ \implies & g\,(a) = h\,(a)\,, && f \text{ es inyectiva} \\ \implies & g = h. \end{aligned}$$

$\boxed{b)}$ Verificaremos primero que la función $\varnothing_\varnothing$ i.e. la única función cuyo dominio y contradominio es $\varnothing$ es epi y suprayectiva. Si $g, h \in$ son tales que $g\varnothing_\varnothing = h\varnothing_\varnothing$, entonces $g = \varnothing_Z = h$; por su parte la suprayectividad de $\varnothing_\varnothing$ se sigue por la vacuidad de su contradominio. Así, en adelante podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B \neq \varnothing$.

$\boxed{b) \implies}$ Notemos que necesariamente $A \neq \varnothing$, pues en caso contrario las aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi : B &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto 0, \\ \psi : B &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto 1, \end{aligned}$$

son funciones bien definidas, pues $B \neq \varnothing$, las cuales satisfacen que $\phi \neq \psi$ y sin embargo $\phi f = \varnothing_{\{0,1\}} = \psi f$, lo cual contradeciría que f es epi. Así $1_B|_{f(A)}$ no es una función vacía y más aún satisface que

$$\begin{aligned} & 1_B|_{f(A)} f = f = 1_B f \\ & \implies 1_B = 1_B|_{f(A)}, && f \text{ es epi} \\ & \implies f(A) = B \\ & \implies f \text{ es suprayectiva.} \end{aligned}$$

$\boxed{b) \impliedby}$ Sean $g, h \in Hom_{Sets}(B, C)$ tales que $gf = hf$ y $b \in B$. Como f es suprayectiva $\exists\ a \in A\ f(a) = b$, así

$$\begin{aligned} & g(b) = gf(a) = hf(a) = h(b) \\ & \implies g = h. \end{aligned}$$

$\square$

Ej 16. La categoría $Sets$ tiene uniones.

Demostración. Sea $\{u_i : A_i \hookrightarrow A\}$ una familia de subobjetos de un conjunto A y $U := \bigcup_{i \in I} \Im(u_i)$. Si $I = \varnothing$ entonces $U = \varnothing$ y la función vacía $\varnothing_A : \varnothing \to A$ es un subobjeto de A que satisface por vacuidad que $\forall\ i \in I$ $u_i \leq \varnothing_A$. Resta verificar que $\varnothing_A$ satisface la propiedad universal de la unión, para lo cual por vacuidad basta con verificar que si $f \in Hom(Sets)$ y $\mu \in Mon_{Sets}(-, A)$, entonces $\varnothing_A$ es llevado a μ vía f. Si consideramos la función vacía $\varnothing_B : \varnothing \to B$, entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \varnothing_A \arrow[r, "\varnothing_B"] \arrow[d, "\varnothing_A"'] & B' \arrow[d, "\mu"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta en $Sets$ puesto que $f\varnothing_A, \mu\varnothing_B \in Hom_{Sets}(\varnothing, B)$ y existe una única función de $\varnothing$ en B.

En adelante supondremos que $I \neq \varnothing$. Si $U = \varnothing$ entonces $\forall\ i \in I\ A_i = \varnothing$ y por lo tanto cada u_i coincide con la función vacía $\varnothing_A$. De modo que se satisface que $\forall\ i \in I\ u_i \leq \varnothing_A$ y en forma análoga al caso $I = \varnothing$ se verifica que si $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ son tales que cada u_i es llevado a μ vía f, entonces $\varnothing_A$ es llevado a μ vía f, y así $\varnothing_A$ es una unión para la familia $\{u_i\}_{i\in I}$.
Finalmente si $U \neq \varnothing$ entonces necesariamente $\exists\ i \in I$ tal que $A_i \neq \varnothing$. Así consideremos inc la inclusión de U en A, la cual es un mono en $Sets$ y para cada $i \in I$ las funciones dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_i : A_i &\to U \\ a &\mapsto u_i\left(a\right), \end{aligned}$$

en caso que $A_i \neq \varnothing$, o bien $\gamma_i := \varnothing_U$ si $A_i = \varnothing$.
Así, si $A_i = \varnothing$, como $\varnothing_A$ es la única función de $\varnothing$ en A, entonces

$$u_i = \varnothing_A = inc\varnothing_U = inc\gamma_i.$$

Si ahora $A_i \neq \varnothing$, entonces

$$\begin{aligned} & u_i\left(a\right) = inc\gamma_i\left(a\right), \qquad\qquad\qquad \forall\ a \in A_i \\ \Longrightarrow\ & u_i = inc\gamma_i. \end{aligned}$$

Con lo cual se ha verificado que $\forall\ i \in I\ u_i \leq inc$. Supongamos ahora que $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ son funciones tales que cada u_i es llevado a μ vía f, es decir para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta en $Sets$

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\exists\ g_i} & B' \\ {\scriptstyle u_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}.$$

Notemos que para cada $y \in U\ \exists\ i \in I$ y $x \in A_i$ tales que $y = u_i\left(x\right)$, así consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} h : U &\to B' \\ u_i\left(x\right) &\mapsto g_i\left(x\right). \end{aligned}$$

Sea $y \in U$ con $i, j \in I$ y $x \in A_i, z \in A_j$ tales que $u_i\left(x\right) = y = u_j\left(z\right)$, entonces de la conmutatividad de los diagramas anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} \mu\left(g_j\left(z\right)\right) &= fu_j\left(b\right) = f\left(x\right) = f\left(u_i\left(x\right)\right) \\ &= fu_i\left(x\right) = \mu\left(g_i\left(x\right)\right). \end{aligned}$$

Lo anterior, en conjunto a que μ es inyectiva por ser un mono en $Sets$, garantiza que $g_j\left(z\right) = g_i\left(x\right)$ y así h está bien definida.

Sea $y \in U$, con $i \in I$ y $x \in A_i$ tales que $y = u_i(x)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} finc(y) &= f(y) = f(u_i(x)) = \mu g_i(x) = \mu(h(y)) \\ &= \mu h(y) \\ \implies finc &= \mu h. \end{aligned}$$

Con lo cual *inc* es llevado a μ vía f y por tanto es una unión para la familia $\{u_i\}_{i\in I}$.

□

Ej 17. Pruebe que, para un anillo R, La categoría $Mod(R)$ tiene uniones.

Demostración. Sean $A \in Mod(R)$, $\{\alpha_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$ en $Mod(R)$ y la inclusión de submódulos

$$\nu \colon \sum_{i\in I} Im(\alpha_i) \longrightarrow A.$$

Recordemos que $\left(x \in \sum_{i\in I} Im(\alpha_i) \iff x = \sum_{i\in J} \alpha_j(a_j) \right)$ con J finito y $a_j \in A_j$ para cada $j \in J$.

$\boxed{U_1)}$ $(\alpha_i \leq \nu \ \forall i \in I)$

Como $\alpha_i(x) \in Im(\alpha_i)\ \forall x \in A_i$, entonces definimos $\nu_i : A_i \to Im(\alpha_i)$ como $\nu_i(x) = \alpha_i(x)$. Observemos que $\nu_i(x) \in \sum_{i\in I} Im(\alpha_i)$ pues si $J = \{i\}$ entonces $\sum_{i\in J} \alpha_i(x) = \alpha_i(x) = \nu(x)$. Por lo tanto $\alpha_i(x) = \nu \circ \nu_i(x)$ y así $\alpha_i \leq \nu \ \ \forall i \in I$.

$\boxed{U_2)}$ Supongamos $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$ es tal que cada u_i es llevado via f, a algún subobjeto $\mu : B' \hookrightarrow B$. Tal como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\sum_{i\in I} Im(\alpha_i) \arrow[ddr, bend right, "\nu"'] & & \\
& A_i \arrow[r, dotted, "f'_i"] \arrow[d, hook, "\alpha_i"'] & B' \arrow[d, hook, "\mu"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Como para todo $x \in \sum_{j\in I} Im(\alpha_j)$, $x = \alpha_{i_0}(x_0) + \ldots + \alpha_{i_n}(x_n)$ donde $x_n \in A_{i_n}$ e $i_n \in J$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, así definimos $g : \sum_{j\in I} Im(\alpha_j) \longrightarrow B'$ como $g(x) = f'_{i_0}(x_o) + \ldots + f'_{i_n}(x_n)$.
Observemos que es morfismo de módulos:

Sean $r \in R$, $a, b \in \sum_{i\in I} Im(\alpha_i)$ y supongamos que

$$\begin{aligned} a &= \alpha_{h_0}(a_0) + \ldots + \alpha_{h_n}(a_n) \\ b &= \alpha_{k_0}(b_0) + \ldots + \alpha_{k_m}(b_m) \qquad n, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} g(ra + b) &= g\left(r\alpha_{h_0}(a_0) + \ldots + r\alpha_{h_n}(a_n) + r\alpha_{k_0}(b_0) + \ldots + r\alpha_{k_m}(b_m)\right) \\ &= g\left(\alpha_{h_0}(ra_0) + \ldots + \alpha_{h_n}(ra_n) + \alpha_{k_0}(b_0) + \ldots + \alpha_{k_m}(b_m)\right) \\ &= f'_{h_0}(ra_0) + \ldots + f'_{h_n}(ra_n) + f'_{k_0}(b_0) + \ldots + f'_{k_m}(b_m) \\ &= \left(rf'_{h_0}(a_0) + \ldots + rf'_{h_n}(a_n)\right) + f'_{k_0}(b_0) + \ldots + f'_{k_m}(b_m) \\ &= r\left(f'_{h_0}(a_0) + \ldots + f'_{h_n}(a_n)\right) + f'_{k_0}(b_0) + \ldots + f'_{k_m}(b_m) \\ &= rg(a) + g(b). \end{aligned}$$

Por lo tanto es morfismo.

Así $\forall x \in \sum_{i\in I} Im(\alpha_i)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mu g(x) &= \mu\left(\sum_{k=0}^{n} f'_{i_k}(x_k)\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu f'_{i_k}(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\alpha_{i_k}(x_k) = f\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_{i_k}(x_k)\right) \\ &= f\nu(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{i\in I} Im(\alpha_i)$ es la unión categorica.

$\square$

Ej 18. Sean $\mathscr{C}$ una categoría con ecualizadores $\alpha, \beta \colon A \to B$ y $\{\mu_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i\in I}$ tal que existe $\mu : \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow A$. Pruebe que $(\alpha\mu_i = \beta\mu_i \;\; \forall i \in I) \Rightarrow (\alpha\mu = \beta\mu)$.

Demostración. Supongamos $\alpha\mu_i = \beta\mu_i$ $\forall i \in I$ y que $I \neq \emptyset$ entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[d, "\mu_i"] & \\
A \arrow[r, shift left, "\beta"] \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & B .
\end{tikzcd}$$

Como $\mathscr{C}$ tiene ecualizadores, existe $\eta : K \to A$ tal que $\alpha\eta = \beta\eta$ y si $f : X \to A$ en $\mathscr{C}$ es tal que $\beta f = \alpha f$, entonces $\exists! f' : X \to K$ tal que $\eta f' = f$.

Así como $\alpha\mu_i = \beta\mu_i$ $\forall i \in I$, entonces para cada $i \in I$ $\exists!\mu_i' : A_i \to K$ tal que $\eta\mu_i' = \mu_i$, es decir, se tiene que para cada $i \in I$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& A_i \arrow[dl, dashed, "\exists! f_i"'] \arrow[d, hook, "\mu_i"] & \\
K \arrow[r, "\eta"'] & A \arrow[r, shift left, "\beta"] \arrow[r, shift right, "\alpha"'] & B
\end{tikzcd}$$

entonces, $\eta f_i = \mu_i$. Con esto en mente, tenemos el siguiente diagrama para cada $i \in I$:

$$\begin{tikzcd}
\bigcup\limits_{i \in I} A_i \arrow[ddr, bend right, "\mu"'] & & \\
& A_i \arrow[r, "f_i'"] \arrow[d, hook, "\mu_i"'] & K \arrow[d, hook, "\eta"] \\
& A \arrow[r, "Id_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

Entonces por la propiedad (U_2) de la unión, existe $f : \bigcup\limits_{i \in I} A_i \longrightarrow K$ tal que $\eta f = \mu$. Así
$$\alpha\mu = \alpha\eta f = \beta\eta f = \beta\mu.$$

En el caso en que $I = \emptyset$, $\eta : K \to A$ el ecualizador de (α, β) cumple que $\forall i \in I \quad \mu_i \leq \eta$ (por vacuidad), entonces por la observación 1.3.4(2) $\mu \leq \eta$, es decir, existe $\gamma : \bigcup\limits_{i \in I} A_i \longrightarrow K$ tal que $\mu = \eta\gamma$ así
$$\alpha\mu = \alpha\eta\gamma = \beta\eta\gamma = \beta\mu.$$

$\square$

Ej 19. Si $f : A \hookrightarrow B$ está en una categoría $\mathscr{C}$, entonces $f : A \hookrightarrow B$ es una imagen de f.

Demostración. Se tiene que f es un subobjeto y que $f = f1_A$. Si $g : C \hookrightarrow B$ es un subobjeto para el cual $\exists\ h : A \to C$ tal que $f = gh$, entonces $f \leq g$ y por tanto $Im(f) \simeq f$ en $Mon_{Sets}(-, B)$. $\square$

Ej 20. $Mod(R)$ y $Sets$ tienen imágenes epimórficas.

Demostración. Sea $f : A \to B$ en $Sets$. Si f es la función vacía $\varnothing_B$ entonces por el Lema 1 se tiene que f es mono y por tanto es una imagen para sí mismo. Así supongamos sin pérdida de generalidad que $A \neq \varnothing$. Luego $B \neq \varnothing$ y se tiene que $inc : f(A) \to B$ es una función no vacía e inyectiva, por tanto un mono en $Sets$, la cual satisface que, si

$$\begin{aligned} g : A &\to F(A) \\ a &\mapsto f(A), \end{aligned}$$

$f = incg$.
Ahora supongamos que $\mu : C \hookrightarrow B$ y $h : A \to C$ son tales que $f = \mu h$. Notemos que para cada $y \in f(A)\ \exists\ a \in A$ tal que $y = f(a)$, así consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} k : f(A) &\to C \\ f(a) &\mapsto h(a). \end{aligned}$$

Si $a, b \in A$ son tales que $x = f(a) = f(b)$, entonces

$$\begin{aligned} &\mu h(a) = f(a) = x = f(b) = \mu h(b) \\ \implies &h(a) = h(b), \qquad\qquad\qquad\qquad \mu \text{ es mono} \end{aligned}$$

con lo cual k es una función bien definida y satisface que, dados $y \in f(A)$ y $x \in A$ tal que $y = f(x)$,

$$\begin{aligned} &\mu k(y) = \mu(h(x)) = f(x) = y = inc(y) \\ \implies &inc = \mu k. \end{aligned}$$

Con lo anterior se ha verificado que $Sets$ tiene imágenes, más aún, tiene imágenes epimórficas puesto que la función g así construida es suprayectiva y por tanto epi.
Dado que todo R-módulo es en partícular un conjunto no vacío, en forma análoga a lo anterior se verifica que $Mod(R)$ tiene imágenes epimórficas, puesto que si ahora $f : A \to B$ en $Mod(R)$ entonces la inclusión de módulos es un morfismo de R-módulos, g también lo es al serlo f, y k lo es al serlo f y h.

$\square$

Ej 21. Pruebe que Sets tiene coimagenes.

Demostración. Sea $f : A \to B$ en Sets. Consideremos la relación $\sim_f$ en A, donde $x \sim_f y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$.

Esta relación (que denotaremos por $\sim$ por simplicidad) es una relación de equivalencia como se muestra a continuación:

$\boxed{\text{Reflexividad}}$ Sea $x \in A$, como $f(x) = f(x)$ entonces $x \sim x$.

$\boxed{\text{Simetría}}$ Sean $a, b \in A$ tales que $a \sim b$, entonces $f(a) = f(b)$, por lo que $f(b) = f(a)$ y así $b \sim a$.

$\boxed{\text{Transitividad}}$ Sean $x, y, z \in A$ tales que $x \sim y$, $y \sim z$, entonces $f(x) = f(y) = f(z)$ por lo tanto $f(x) = f(z)$ y en consecuencia $x \sim z$.

Sea $\pi : a \to {}^{A}\!/\!_{\sim}$ el epi canonico donde $\pi(a) = [a] := \{x \in A \,|\, x \sim a\}$, se afirma que es una coimagen de f.

Observemos que, si $A, B \neq \emptyset$, para toda $b \in B$ tal que $b = f(a)$ con $a \in A$ se tiene que $\pi(a) = [a]$ por lo que se puede definir $f' : {}^{A}\!/\!_{\sim} \to B$ como $f'([a]) = f(a)$. Así se tiene que:

(1) f' está bie definida.

Sean $[a][b] \in [x]$ con $[x] \in {}^{A}\!/\!_{\sim}$, entonces $a \sim x \sim b$, por lo que
$f(a) = f(x) = f(b)$, es decir, $f'([a]) = f'([x]) = f'([b])$.

(2) $(f = f'\pi)$.

Sea $a \in A$. $f'\pi(a) = f'([a]) = f(a)$.

Para ver que $(CoIm_2)$ se cumple, supongamos que existe $p' : A \twoheadrightarrow J'$ un objeto cociente de A tal que $\exists f'' : J' \to B$ donde $f = f''p'$.
Sea $a \in A$, entonces $\pi(a) = [a]$ y $p'(a) = a' \in J'$. Como p' es epi en Sets entonces es supra, así para todo $x \in J'$ existe $a_x \in A$ tal que $p'(a_x) = x$, así definimos $\nu : J' \to {}^{A}\!/\!_{\sim}$ como $\nu(x) = \pi(a_x)$.

Se tiene entonces que $\forall a \in A, \quad \nu p'(a) = \nu(p'(a)) = \pi(a)$.

En el caso de que B sea el conjunto vacio, entonces A tiene que ser el conjunto vacio y $f : A \to B$ es la función vacia, así $f = p$ tiene que ser su coimagen pues si $f' : B \to B$ es la función identidad en B, entonces

$f = f'p$ y si $p' : B \twoheadrightarrow B$ es un objeto cociente de A tal que $f'' : J' \to B$ con $f''p' = f$ entonces $f'' : J' \to B$ es la función vacia y J' es el conjunto vacio. Así $p' : A \to J'$ es la función vacia y por lo tanto $p' = p$ y $Id_{J'} \circ p' = p$.

En caso de que A sea el conjunto vacio y B sea distinto del vacio, entonces $(CoIm_1)$ se cumple igual que en el caso anterior, tomando a $p : \emptyset \to \emptyset$.

Para probar $(CoIm_2)$ supongamos que $p' : A \twoheadrightarrow J'$ es un objeto cociente de A tal que $exists f'' : J' \to B$ tal que $f = f''p'$, pero p' es epi, y como $A = \emptyset$ entonces $J' = \emptyset$. Así, si definimos u como la identidad en el vacio se tiene que $p = up'$.

$\square$

Ej 22. Pruebe que $Mod(R)$ tiene coimagenes.

Demostración. Sea $A \in Obj(Mod(R))$, entonces $A \neq \emptyset$. Se afirma que el epi canonico $\pi : A \to {}^{A}\!/_{Ker(f)}$ es una coimagen.

Sea $a \in A$, entonces $f(a) \in B$. Definimos $f' : {}^{A}\!/_{Ker(f)} \to B$ como $f'([a]) = f(a)$.

Probemos que está bien definido. Sean $a, b \in [x]$ entonces
$a + k_1 = b + k_2 = x$ con $k_1, k_2 \in Ker(f)$, asi

$$\begin{aligned} f'([a]) &= f(a) = f(a) + f(K_1) = f(a + K_1) \\ &= f(b + K_2) = f(b) + f(K_2) = f(b) = f'([b]). \end{aligned}$$

Veamos que es morfismo. Sean $r \in R,\ [a], [b] \in {}^{A}\!/_{Ker(f)}$ entonces

$$f'(r[a] + [b]) = f'([ra + b]) = f(ra + b) = rf(a) + f(b) = f'(r[a]) + f'([b]).$$

En consecuencia se tiene que π cumple $(CoIm_1)$.

Ahora supongamos que $p' : A \twoheadrightarrow J'$ es un objeto cociente de A tal que existe $f'' : J' \to B$ que cumple que $f = f''p'$. Como p' es epi, entonces es suprayectiva en $Mod(R)$, porlo que para cada $x \in J'$ existe $a \in A$ tal que $p'(a) = x$.

Definimos $\nu : J' \to {}^{A}\!/_{Ker(f)}$ como $\nu(x) = [a]$ donde $p'(a) = x$. Esta función está bien definida pues si $a, b \in A$ son tales que $p'(a) = p'(b)$ entonces

$f''p'(a) = f''p'(b)$ y así $f(a) = f(b)$, entonces $f(a-b) = 0$, por lo que $a - b \in Ker(f)$ y en consecuencia $[a] = [b]$.

Veamos que ν es morfismo. Si $r \in R$ $a, b \in J'$ donde $\nu(a) = [x]$, $\nu(b) = [y]$, $a = p'(x)$ y $b = p'(y)$, entonces

$$\begin{aligned} \nu(ra+b) &= \nu(rp'(x) + p'(y)) = \nu(p'(rx+y)) \\ &= [rx+y] = r[x] + [y] = r\nu(a) + \nu(b). \end{aligned}$$

Así se tiene que $\forall a \in A$ $\nu p'(a) = \nu(p'(a)) = [a] = \pi(a)$ por lo que $(CoIm_2)$ se cumple y $Mod(R)$ tiene coimagenes.

□

Ej 23. Sean $\mathscr{C}$ una categoría balanceada, con imágenes epimórficas y

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

en $\mathscr{C}$. Si $\mu : A' \hookrightarrow A$ en $\mathscr{C}$, entonces $g(f(A')) = gf(A')$ en $\overline{Mon_{\mathscr{C}}(-, C)}$.

Demostración. Dado que $\mathscr{C}$ tiene imágenes epimórficas existen subobjetos

$$\begin{aligned} \nu &: Im(f\mu) \hookrightarrow B, \\ \eta &: Im(g\nu) \hookrightarrow B, \\ \psi &: Im((gf)\mu) \hookrightarrow B, \end{aligned}$$

que son imágenes respectivamente de $f\mu, g\nu$ y $(gf)\mu$, y existen epimorfismos $\alpha_1 : A' \twoheadrightarrow Im(f\mu)$ y $\alpha_2 : Im(f\mu) \twoheadrightarrow Im(g\nu)$ tales que

$$\begin{aligned} f\mu &= \nu\alpha_1, \\ g\nu &= \eta\alpha_2. \end{aligned} \qquad (*)$$

Notemos que por ser ν imagen de $f\mu$ y subobjeto de B se tiene que $g(f(A')) = g(Im(f\mu)) = Im(g\nu)$, mientras que $gf(A') = Im((gf)\mu)$. Así pues basta con verificar que η es una imagen para $(gf)\mu$, ya que en tal caso $Im(g\nu) \simeq Im((gf)\mu)$ en $Mon_{\mathscr{C}}(-, C)$.
De (*) se tiene que

$$gf(\mu) = g(f\mu) = g(\nu\alpha_1) = (\eta\alpha_2)\alpha_1 = \eta(\alpha_2\alpha_1).$$

En la última igualdad η es un mono, mientras que $\alpha_2\alpha_1$ es un epi al serlo α_1 y α_2, de modo que al ser $\mathscr{C}$ balanceada (ver Proposición 1.4.3) se tiene que η es una imagen para $(gf)\mu$.

□

Ej 24. Sea el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& B'' \arrow[dr, "\mu"] & \\
P \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & & B' \arrow[d, "\alpha"] \\
A \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}$$

conmutativo en una categoría $\mathscr{C}$, con μ y α subobjetos. Si β_1 es una imagen inversa por f de α_1, entonces también lo es de $\alpha\mu$.

Demostración. Notemos que de la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que

$$\begin{aligned}(\alpha\mu)\, f' &= \alpha\,(\mu f') = \alpha\beta_2 \\ &= f\beta_1,\end{aligned}$$

i.e. el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B'' \arrow[d, "\alpha\mu"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd} . \tag{*}$$

Sean $\gamma_1 : P' \to A$ y $\gamma_2 : P' \to B''$ tales que $f\gamma_1 = (\alpha\mu)\,\gamma_2 = \alpha\,(\mu\gamma_2)$. Como

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\alpha"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd} \tag{**}$$

es un pull-back por ser β_1 imagen inversa por f de α, de la propiedad universal del pull-back se sigue que $\exists!\ \delta : P' \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "\mu\gamma_2"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, "\alpha"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd} .$$

De modo que δ es tal que $\gamma_1 = \beta_1\delta$ y además

$$\begin{aligned}&(\alpha\mu)\,(f'\delta) = \alpha\,(\beta_2)\,\delta = \alpha\,(\mu\gamma_2) = (\alpha\mu)\,\gamma_2 \\ &\implies \gamma_2 = f'\delta. \qquad\qquad \alpha\mu \text{ es mono}\end{aligned}$$

Sea $\delta' : P' \to P$ en $\mathscr{C}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "\delta'"] \arrow[drr, bend left, "\gamma_2"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B'' \arrow[d, "\alpha\mu"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta, luego δ' es tal que $\gamma_1 = \beta_1\delta'$ y

$$\mu\gamma_2 = (\mu f')\,\delta' = \beta_2\delta'.$$

Por lo tantto, aplicando la propiedad universal del pull-back a (**) se tiene que $\delta' = \delta$, con lo cual se tien que existe un único morfismo δ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "\gamma_2"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\beta_1"'] & B'' \arrow[d, "\alpha\mu"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd},$$

i.e. (*) es un pull-back y así se tiene lo deseado.

∎

Ej 25. Considere el siguiente diagrama conmutativo en una categoría $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
& B' \arrow[d, hook, "h"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & B \\
& I \arrow[u, hook, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

<u>Pruebe que:</u> si $\exists f^{-1}(B')$ y $B' \cap Y$, entonces $f^{-1}(I \cap B') = f^{-1}(B')$ en $Mon_{\mathscr{C}}(-, A)$.

Demostración. Como $f^{-1}(B')$ y $B' \cap I$ existen, entonces se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(B') \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & B' \arrow[d, hook, "h"] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & B \\
& I \arrow[u, hook, "\mu"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
I \cap B' \arrow[r, "\nu_1"] \arrow[d, "\nu_2"'] \arrow[dr, hook, "i"] & I \arrow[d, hook, "\mu"] \\
B' \arrow[r, hook, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

Así se tiene que este diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(B') \arrow[r, "f'\beta_1"] \arrow[d, "\beta_2"'] \arrow[dr, "f\beta_1"] & I \arrow[d, "\mu"] \\
B' \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por lo tanto, como $I \cap B'$ es pull-back existe un único $\gamma : f^{-1}(B') \to I \cap B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(B') \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & I \cap B' \arrow[r, "\nu_2"] \arrow[d, hook, "i"'] & B' \arrow[dl, hook', "h"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B &
\end{tikzcd} \quad \ldots (1)$$

Sean $\eta : X \to I \cap B'$, $\eta_2 : X \to A$ tales que $i\eta_1 = f\eta_2$.

Observamos que, entonces, $\nu_2\eta_1 : X \to B'$ y es tal que $h(\nu_2\eta_1) = i\eta_1 = f\eta_2$.

Así, como $f^{-1}(B')$ es pull-back de $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{\mu} B'$, existe una única $\gamma' : X \to f^{-1}(B')$ tal que $\nu_2\gamma\gamma' = \nu_2\eta_1$ y $\beta_1\gamma' = \eta_2$ pero ν_2 es mono por ser i mono. Entonces $\gamma\gamma' = \eta_1$ y $\beta_1\gamma' = \eta_2$.

Ahora, si existiera $\alpha : X \to f^{-1}(B')$ tal que $\beta_1\alpha = \eta_2$ y $\gamma\alpha = \eta_1$, entonces $\nu_2\gamma\alpha = \gamma_2\eta_1$ y por lo anterior $\alpha = \gamma'$ pues es el único con esas propiedades. Por lo tanto $f^{-1}(B')$ es un pull-back, del diagrama (1), e implica que $f^{-1}(I \cap B')$ existe y sea igual a $f^{-1}(B)$ con los morfismos γ y β_1.

$\square$

Ej 26. Sea $f : A \to B$ en una categoría $\mathscr{C}$. Consideremos subobjetos $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B$. Pruebe que se satisfacen las siguientes relaciones cada vez que ambos lados estén definidos.

a) $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

b) $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

c) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$

d) $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$

Demostración. Comenzaremos por nombrar monomorfismos correspondientes como subobjetos de A y de B

$$A_1 \overset{\mu_1}{\hookrightarrow} A_2 \overset{\mu_2}{\hookrightarrow} A$$

$$B_1 \overset{\gamma_1}{\hookrightarrow} B_2 \overset{\gamma_2}{\hookrightarrow} B$$

$\boxed{a)}$ Sabemos que $f(A_1) = Im(f\mu_2\mu_1)$ y $f(A_2) = Im(f\mu_2)$. Llamaremos

$$\mu_1' : Im(f\mu_2\mu_1) \to B\,, \qquad \alpha_1 : A_2 \to Im(f\mu_2\mu_1)\,,$$
$$\mu_2' : Im(f\mu_2) \to B \quad \text{y} \quad \alpha_2 : A_2 \to Im(f\mu_2)$$

a los morfismos tales que $f\mu_2 = \mu_2'\alpha_2$ y $f\mu_2\mu_1 = \mu_1'\alpha_1$.
Entonces $f\mu_2\mu_1 = (\mu_2'\alpha_2)\mu_1$. Por la propiedad universal de la imagen en $Im(f\mu_2\mu_1)$ existe $\gamma : Im(f\mu_2\mu_1) \to Im(f\mu_2)$ tal que $\mu_2'\gamma = \mu_1$.
En particular γ es mono, entonces $Im(f\mu_2\mu_1) \subseteq Im(f\mu_2)$ y así $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

$\boxed{b)}$ Como se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B_1) \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & B_1 \arrow[d, hook, "\nu_2\nu_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^{-1}(B_2) \arrow[r, "\beta_2'"] \arrow[d, hook, "\beta_1'"'] & B_2 \arrow[d, hook, "\nu_2"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

en particular se tiene que $f\beta_1 = \nu_2(\nu_1\beta_2)$ y este diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B_1) \arrow[r, "\nu_1\beta_2"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[d, hook, "\nu_2"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Entonces $\exists \eta : f^{-1}(B_1) \to f^{-1}(B_2)$ tal que $\beta_2'\eta = \nu\beta_2$ y $\beta_1'\eta = \beta_1$

Como $f^{-1}(B_2)$ es pull-back, y ν_2 es mono, entonces β_1' es mono y por lo tanto η es mono. Así $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

$\boxed{c)}$ Puesto que $f^{-1}(f(A_1))$ es un pull back, tenemos un diagrama conmutativo de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(f(A_1)) \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & f(A_1) \arrow[d, "\mu_1'"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Además (apoyandonos con la notación del inciso a)) tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\mu_2\mu_1"'] & f(A_1) \arrow[d, "\mu_1'"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Entonces, por ser $f^{-1}(f(A_1))$ un pull-back, $\exists! g : A_1 \to f^{-1}(f(A_1))$ tal que $f_2 g = \alpha_1$ y $f_1 g = \mu_2\mu_1$.

Como $\mu_2\mu_1$ es mono por ser μ_2 y μ_1 monos, entonces g es mono y así $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$.

$\boxed{d)}$ Observemos que, como $f^{-1}(B_1)$ es pull-back, el diagrama

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B_1) \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, hook, "\beta_1"'] & B_1 \arrow[d, hook, "\nu_2\nu_1"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces por propiedades de las imagenes, existen
$\mu :: Im(f\beta_1) \hookrightarrow B$ y $f' : f^{-1}(B_1) \to Im(f\beta_1)$ tales que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B_1) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, hook, "\beta_2"'] \arrow[dr, "f\beta_1"] & Im(f\beta_1) \arrow[d, hook, "\mu"] \\ B_1 \arrow[r, "\nu_2\nu_1"'] & B \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, por lo que existe un único
$g' : Im(f\beta_1) \to B_1$, tal que $\nu_2\nu_1 g' = \mu$ y $gf' = \beta_2$ dado por la propiedad universal de las imagenes. Mas aún, notemos que g' es mono, pues μ es mono y $\mu = \nu_2\nu_1 g'$. Así $f\beta_1 = \nu_2\nu_1\beta_2$.
Por lo que $Im(f\beta_1) = f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$.

$\square$

Ej 27. Sea $\mathscr{C}$ una categoría con objeto cero. Entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \simeq 0$, si $I = \varnothing$.

Demostración. Afirmamos que en este caso el morfismo $0_{0,A}$ en $\mathscr{C}$ (el cual existe y es único por ser 0 un objeto cero de la categoría $\mathscr{C}$) es una unión para la familia de subobjetos $\mu_i : A_i \to A$. En efecto:
Notemos que $0_{A,0}0_{0,A}, 0_{0,A}0_{A,0}, Id_0 \in Hom_{\mathscr{C}}(0,0)$ y que $|Hom_{\mathscr{C}}(0,0)|$, luego $0_{A,0}0_{0,A} = Id_0 = 0_{0,A}0_{A,0}$ y por tanto μ es un iso en $\mathscr{C}$, así que en

partícular es un subobjeto de A.
Sean $f : A \to B$ y $\mu : B' \hookrightarrow B$ en $\mathscr{C}$, por ser $I = \varnothing$ basta con verificar que $0_{0,A}$ es llevado a μ vía f. Se tiene que

$$f0_{0,A} = 0_{0,B} = \mu 0_{0,B'},$$

con lo cual el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_{0,B'}"] \arrow[d, "0_{0,A}"'] & B' \arrow[d, "\mu"] \\ a \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta y así se tiene lo deseado.

□

Ej 28. $Mod(R)$ es una categoría con objeto cero, en tanto que $Sets$ no lo es.

Demostración. $\boxed{Mod(R)}$ Sea R un anillo. Consideremos un conjunto de la forma $A = \{*\}$, i.e. un conjunto de un sólo elemento. Notemos que por medio de las operaciones

$$\begin{aligned} + : A \times A &\to A \\ (*, *) &\mapsto *, \\ \cdot : R \times A &\to R \\ (r, *) &\mapsto *, \end{aligned}$$

se tiene que $(A, +, \cdot) \in Mod(R)$.
Sea $M \in Mod(R)$. Como $\forall\ B \in Sets\ |Hom_{Sets}(B, A)| = 1$, y todo morfismo de $R-$módulos en partícular es una función, se tiene que $\left|Hom_{Mod(R)}(M, A)\right| \leq 1$. Así pues para verificar que A es objeto inicial en $Mod(R)$ resta verificar que existe un morfismo de $R-$módulos de M en A. Sean $r \in R$, $m, n \in M$ y

$$\begin{aligned} f_M : M &\to A \\ m &\mapsto *, \end{aligned}$$

entonces $f(rm + n) = * = * + * = r \cdot * + * = rf(m) + f(n)$, y así $f_M \in Hom_{Mod(R)}(M, A)$.
Por otro lado, si 0_M es el neutro aditivo de M, entonces la función

$$\begin{aligned} g_M : A &\to M \\ * &\mapsto 0_M \end{aligned}$$

satisface $g_M \in Hom_{Mod(R)}(A, M)$. Más aún, si $h \in Hom_{Mod(R)}(A, M)$, entonces necesariamente h es un morfismo de grupos y así

$$\begin{aligned} & h(0_A) = h(*) = 0_M = g_M(*) \\ \Longrightarrow\ & h = g_M. \qquad\qquad\qquad\qquad A = \{*\} \end{aligned}$$

Por lo tanto A también es un objeto final y así es un objeto cero para $Mod(R)$.
$\boxed{Sets}$ Supongamos que existe un conjunto A tal qu A es objeto cero de $Sets$. Luego $\exists!\ f \in Hom_{Sets}(A, \varnothing)$, y así necesariamente $A = \varnothing$, lo cual es absurdo ya que $\varnothing$ no es un objeto final en $Sets$, puesto que si $B \neq \varnothing$ no existen funciones cuyo dominio sea B y contradominio sea $\varnothing$.

□

Ej 29. Pruebe que $Mod(R)$ tiene kerneles.

Demostración. Sea $f : A \to B$ morfismo en $Mod(R)$,
$K = \{x \in A \,|\, f(x) = 0\}$ y $\mu : K \to A$ la función inclusión.

Primero demostraremos que $K \leq A$.

Sean $r \in R$ $a, b \in K$, entonces $f(ra + b) = rf(a) + f(b) = r \cdot 0 + 0 = 0$, por lo tanto $ra + b \in K$, entonces $K \in Mod(R)$ y μ es morfismo.

$\boxed{Ker_1}$ Como $f\mu : K \to B$ y para toda $x \in K$ se tiene que $f\mu(x) = f(\mu(x)) = f(x) = 0$ entonces $f\mu = 0$.

$\boxed{Ker_2}$ Supongamos $g : X \to A$ es un morfismo tal que $fg = 0$, entonces $g(x) \in K$ pues $f(g(x)) = 0$. Así definimos el morfismo $h : X \to K$ tal que $h(x) = g(x)$, entonces $\mu h(x) = \mu(g(x)) = g(x)\ \ \forall x \in X$, por lo tanto $\mu h = g$ y así K es kernel de f.

Por lo tanto $Mod(R)$ tiene kernels.

□

Ej 30. Pruebe que $Mod(R)$ tiene cokernels.

Demostración. Sea $f : M \to N$ en $Mod(R)$. Como f es morfismo de $R-$ módulos, entonces $im(f) \leq N$.

Consideremos $\pi : N \to {}^{N}\!/_{Im(f)}$, donde $\pi(k) = k + Im(f)$ es la proyección canónica. Se afirma que π es un cokernel de f.

$\boxed{CoKer_1}$ Para toda $x \in M$ se tiene que $\pi f(x) = \pi(f(x)) = 0$ pues $f(x) \in Im(f)$.

$\boxed{CoKer_2}$ Propiedad universal. Supongamos existe $g : N \to X$ un morfismo de modulos tal que $gf = 0$, entonces definimos $g' : N/_{Im(f)} \to X$ de tal forma tal que $\forall [x] \in N/_{Im(f)}$, $\quad g'([x]) = g(x)$, donde $[x]$ es el representante de la clase de equivalenia de x.

Sean $[x], [y] \in N/_{Im(f)}$ y $r \in R$, entonces

$$g'(r[x] + [y]) = g'([rx + y]) = g(rx + y) = rg(x) + g(y) = rg'(x) + g'(y).$$

Observamos que g' está bien definida, pues si $a, b \in [x]$, etonces existen $k_1, k_2 \in Im(f)$ tales que $a + k_1 = b + k_2 = x$ y $g(k_1) = g(k_2) = 0$, entonces

$$g'([a]) = g(a) = g(a) + g(k_1) = g(a + k_1) = g(b + k_2) = g(b) + g(k_2) = g(b) = g([b]).$$

Por lo tanto g' es un morfismo de R-módulos y $g'\pi(x) = g'([x]) = g(x)$ por lo que $g'\pi = g$ y así π es Cokernel.

□

Ej 31. *Sets* y $Mod(R)$ son categorías localmente pequeñas.

Demostración. Sea $A \in Sets$. Afirmamos que si $\varphi : B \hookrightarrow A$, $\psi : C \hookrightarrow A \in Mon_{Sets}(-, A)$ entonces

$$\varphi \simeq \psi \text{ en } Mon_{Sets}(-, A) \iff Im(\varphi) = Im(\psi). \tag{A}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Se tiene que $\psi \leq \varphi$ y $\varphi \leq \psi$, luego $\exists\, g : C \to B$ y $h : B \to C$ tales que

$$\psi = \varphi g, \tag{*}$$
$$\varphi = \psi g \tag{**}$$

De (*) se sigue que

$$\psi(C) = \varphi(g(C)) \subseteq \varphi(B)$$
$$\Longrightarrow Im(\psi) \subseteq Im(\varphi).$$

Análogamente, de (**) se obtiene que $Im(\varphi) \subseteq Im(\psi)$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Notemos que si $B = \varnothing$, entonces $Im(\psi) = Im(\varphi) = \varnothing$, y por lo tanto $C = \varnothing$, con lo cual $\varphi = \varnothing_A = \psi$; similarmente en caso que $C = \varnothing$. Por lo tanto en adelante supondremos que $B \neq \varnothing \neq C$.
Afirmamos que $\forall\ c \in C\ \exists!\ b_c \in B$ tal que $\psi(c) = \varphi(b)$. En efecto la existencia se sigue de que en partícular $Im(\psi) \subseteq Im(\varphi)$, mientras que la

unicidad se sigue del hecho que φ es un mono y por tanto inyectiva (ver Lema 1). Lo previamente demostrado garantiza que la aplicación

$$\begin{aligned} g : C &\to B \\ c &\mapsto b_C \end{aligned}$$

está bien definida y satisface que $\psi = \varphi g$. En forma análoga, empleando ahora que $Im\,(\psi) \supseteq Im\,(\varphi)$ y el que ψ es un mono en $Sets$, se verifica que $\exists\ h : B \to C$ tal que $\varphi = \psi h$ y así $\psi \simeq \varphi$ en $Mon_{Sets}\,(-, A)$.

La caracterización dada por (A) garantiza que la aplicación dada por

$$\begin{aligned} f : \overline{Mon_{Sets}\,(-, A)} &\to \mathscr{P}\,(A) \\ [\varphi] &\mapsto Im\,(\phi)\,. \end{aligned}$$

está bien definida y es inyectiva. Más aún, f es biyectiva puesto que si $D \subseteq A$ e i es la inclusión conjuntista de B en A, entonces $i \in \overline{Mon_{Sets}\,(-, A)}$. La inyectividad de f garantiza que la clase $\overline{Mon_{Sets}\,(-, A)}$ es un conjunto, puesto que $\mathscr{P}\,(A)$ lo es. Por tanto $Sets$ es localmente pequeña.

Por su parte, el que $Mod\,(R)$ sea localmente pequeña se sigue de que si $M \in Mod\,(R)$, entonces

$$\begin{aligned} k_M : \overline{Mon_{Mod(R)}\,(-, M)} &\to \overline{Mon_{Mod(R)}\,(-, M)} \\ [\varphi] &\mapsto [\varphi] \end{aligned}$$

está bien definida y es inyectiva.

$\square$