## Ejercicios 16-31

## Luis Gerardo Arruti Sebastian Sergio Rosado Zúñiga

Lema 1. Sea f un morfismo en Sets, entonces

- a)  $f: A \hookrightarrow B$  es un mono en Sets si y sólo si f es inyectiva;
- b)  $f: A \rightarrow B$  es un epi en Sets si y sólo si f es suprayectiva.

Así en partícular se tiene que los monomorfismos, respectivamente epimorfismos, categóricos en  $Mod\left(R\right)$  son los monomorfismos, respectivamente epimorfismos, de R-módulos.

Demostración. a) Notemos primeramente que una función vacía  $\varnothing_C$ ,  $C \in Sets$ , es inyectiva por la vacuidad de su dominio. Más aún, es un mono en Sets, en efecto: si  $g,h \in Sets$  son tales que  $\varnothing_C f = \varnothing_A g$ , entonces necesariamente  $D = \varnothing_A g$  y así, dado que existe una única función de  $\varnothing$  en  $\varnothing$ , f = g. Con lo cual la afirmación es válida para funciones vacía y podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $A \neq \varnothing$  (y en consecuencia que  $B \neq \varnothing$ ).

 $a) \implies$  Sean  $a, b \in A$  tales que f(a) = f(b), entonces las funciones

$$g: A \to A$$
$$x \mapsto a,$$
$$h: A \to A$$
$$x \mapsto b.$$

satisfacen que fg = fh, luego g = h por ser f mono y por tanto a = b.

 $a) \longleftarrow$  Supongamos que  $g, h \in$  son tales que fg = fh. Si  $A' = \emptyset$  entonces  $g = \emptyset_A = h$ ; en caso contrario sea  $a \in A'$ , así

$$\begin{split} f\left(g\left(a\right)\right) &= fg\left(a\right) = fh\left(a\right) = f\left(h\left(a\right)\right) \\ &\Longrightarrow g\left(a\right) = h\left(a\right), & f \text{ es inyectiva} \\ &\Longrightarrow g = h. \end{split}$$

b) Verificaremos primero que la función  $\varnothing_\varnothing$  i.e. la única función cuyo dominio y contradominio es  $\varnothing$  es epi y suprayectiva. Si  $g,h\in$  son tales que  $g\varnothing_\varnothing=h\varnothing_\varnothing$ , entonces  $g=\varnothing_Z=h$ ; por su parte la suprayectividad de  $\varnothing_\varnothing$  se sigue por la vacuidad de su contradominio. Así, en adelante podemos suponer sin pérdida

de generalidad que  $B \neq \emptyset$ .

 $b) \Longrightarrow$  Notemos que necesariamente  $A \neq \emptyset$ , pues en caso contrario las aplicaciones

$$\phi: B \to \{0, 1\}$$

$$x \mapsto 0,$$

$$\psi: B \to \{0, 1\}$$

$$x \mapsto 1,$$

son funciones bien definidas, pues  $B \neq \emptyset$ , las cuales satisfacen que  $\phi \neq \psi$  y sin embargo  $\phi f = \emptyset_{\{0,1\}} = \psi f$ , lo cual contradeciría que f es epi. Así  $1_B|_{f(A)}$  no es una función vacía y más aún satisface que

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{B}|_{f(A)} \, f &= f = \mathbf{1}_{B} f \\ &\Longrightarrow \, \mathbf{1}_{B} = \mathbf{1}_{B}|_{f(A)} \,, & f \text{ es epi} \\ &\Longrightarrow \, f \, (A) = B \\ &\Longrightarrow \, f \text{ es suprayectiva.} \end{aligned}$$

b)  $\Leftarrow$  Sean  $g, h \in Hom_{Sets}(B, C)$  tales que gf = hf y  $b \in B$ . Como f es suprayectiva  $\exists a \in A \ f(a) = b$ , así

$$g(b) = gf(a) = hf(a) = h(b)$$
  
 $\implies g = h.$ 

Ej 16. La categoría Sets tiene uniones.

 $\begin{array}{l} Demostración. \text{ Sea } \{u_i:A_i\hookrightarrow A\} \text{ una familia de subobjetos de un conjunto } A \text{ y } U:=\bigcup_{i\in I}\Im\left(u_i\right). \text{ Si } I=\varnothing \text{ entonces } U=\varnothing \text{ y la función vacía } \varnothing_A:\varnothing\to A \text{ es un subobjeto de } A \text{ que satisface por vacuidad que } \forall i\in I \\ u_i\le\varnothing_A. \text{ Resta verificar que } \varnothing_A \text{ satisface la propiedad universal de la unión, para lo cual por vacuidad basta con verificar que si } f\in Hom\left(Sets\right) \\ \text{y } \mu\in Mon_{Sets}\left(-,A\right), \text{ entonces } \varnothing_A \text{ es llevado a } \mu \text{ vía } f. \text{ Si consideramos la función vacía } \varnothing_B:\varnothing\to B, \text{ entonces el siguiente diagrama} \end{array}$ 

$$\begin{array}{ccc} \varnothing_A & \xrightarrow{\varnothing_B} & B' \\ \varnothing_A & & \downarrow^{\mu} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta en Sets puesto que  $f\varnothing_A, \mu\varnothing_B \in Hom_{Sets}(\varnothing, B)$  y existe una única función de  $\varnothing$  en B.

En adelante supondremos que  $I \neq \emptyset$ . Si  $U = \emptyset$  entonces  $\forall i \in I$   $A_i = \emptyset$  y por lo tanto cada  $u_i$  coincide con la función vacía  $\varnothing_A$ . De modo que se satisface que  $\forall i \in I$   $u_i \leq \varnothing_A$  y en forma análoga al caso  $I = \emptyset$  se verifica que si  $f: A \to B$  y  $\mu: B' \hookrightarrow B$  son tales que cada  $u_i$  es llevado a  $\mu$  vía f, entonces  $\varnothing_A$  es llevado a  $\mu$  vía f, y así  $\varnothing_A$  es una unión para la familia  $\{u_i\}_{i\in I}$ .

Finalmente si  $U \neq \emptyset$  entonces necesariamente  $\exists i \in I$  tal que  $A_i \neq \emptyset$ . Así consideremos inc la inclusión de U en A, la cual es un mono en Sets y para cada  $i \in I$  las funciones dadas por

$$\gamma_i: A_i \to U$$

$$a \mapsto u_i(a),$$

en caso que  $A_i \neq \emptyset$ , o bien  $\gamma_i := \emptyset_U$  si  $A_i = \emptyset$ . Así, si  $A_i = \emptyset$ , como  $\emptyset_A$  es la única función de  $\emptyset$  en A, entonces

$$u_i = \varnothing_A = inc \varnothing_U = inc \gamma_i.$$

Si ahora  $A_i \neq \emptyset$ , entonces

$$u_i(a) = inc\gamma_i(a),$$
  $\forall a \in A_i$   
 $\implies u_i = inc\gamma_i.$ 

Con lo cual se ha verificado que  $\forall i \in I \ u_i \leq inc$ . Supongamos ahora que  $f: A \to B \ y \ \mu: B' \hookrightarrow B$  son funciones tales que cada  $u_i$  es llevado a  $\mu$  vía f, es decir para cada  $i \in I$  el siguiente diagrama conmuta en Sets

$$\begin{array}{ccc}
A_i & \xrightarrow{\exists g_i} B' \\
u_i \downarrow & & \downarrow^{\mu} . \\
A & \xrightarrow{f} B
\end{array}$$

Notemos que para cada  $y \in U \exists i \in I \ y \ x \in A_i$  tales que  $y = u_i(x)$ , así consideremos la aplicación

$$h: U \to B'$$
  
 $u_i(x) \mapsto g_i(x)$ .

Sea  $y \in U$  con  $i, j \in I$  y  $x \in A_i, z \in A_j$  tales que  $u_i(x) = y = u_j(z)$ , entonces de la conmutatividad de los diagramas anteriores se tiene que

$$\mu(g_j(z)) = fu_j(b) = f(x) = f(u_i(x))$$
  
=  $fu_i(x) = \mu(g_i(x))$ .

Lo anterior, en conjunto a que  $\mu$  es inyectiva por ser un mono en Sets, garantiza que  $g_i(z) = g_i(x)$  y así h está bien definida.

Sea  $y \in U$ , con  $i \in I$  y  $x \in A_i$  tales que  $y = u_i(x)$ . Se tiene que

$$finc(y) = f(y) = f(u_i(x)) = \mu g_i(x) = \mu (h(y))$$
$$= \mu h(y)$$
$$\implies finc = \mu h.$$

Con lo cual inc es llevado a  $\mu$  vía f y por tanto es una unión para la familia  $\{u_i\}_{i\in I}$ .

**Ej 17.** Pruebe que, para un anillo R, La categoría Mod(R) tiene uniones.

Demostración. Sean  $A \in Mod(R)$ ,  $\{\alpha_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i \in I}$  en Mod(R) y la inclusión de submódulos

$$\nu \colon \sum_{i \in I} Im(\alpha_i) \longrightarrow A.$$

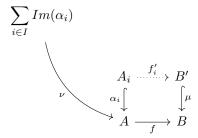
Recordemos que  $\left(x \in \sum_{i \in I} Im(\alpha_i) \iff x = \sum_{i \in J} \alpha_j(a_j)\right)$ con J finito y  $a_j \in A_j$  para cada  $j \in J$ .

$$U_1$$
  $(\alpha_i \le \nu \ \forall i \in I)$ 

Como  $\alpha_i(x) \in Im(\alpha_i) \ \forall x \in A_i$ , entonces definimos  $\nu_i : A_i \to Im(\alpha_i)$ 

como  $\nu_i(x) = \alpha_i(x)$ . Observemos que  $\nu_i(x) \in \sum_{i \in I} Im(\alpha_i)$  pues si  $J = \{i\}$  entonces  $\sum_{i \in J} \alpha_i(x) = \alpha_i(x) = \nu(x)$ . Por lo tanto  $\alpha_i(x) = \nu \circ \nu_i(x)$  y así  $\alpha_i \leq \nu \ \forall i \in I$ .

Supongamos  $f:A\to B$  en  $\mathscr C$  es tal que cada  $u_i$  es llevado via  $\overline{f}$ , a algún subobjeto  $\mu: B' \hookrightarrow B$ . Tal como se muestra en el siguiente diagrama:



Como para todo 
$$x \in \sum_{j \in I} Im(\alpha_j), \quad x = \alpha_{i_0}(x_0) + \ldots + \alpha_{i_n}(x_n)$$
 donde  $x_n \in A_{i_n}$  e  $i_n \in J \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ , así definimos  $g : \sum_{j \in I} Im(\alpha_j) \longrightarrow B'$  como  $g(x) = f'_{i_0}(x_o) + \ldots + f'_{i_n}(x_n)$ . Observemos que es morfismo de módulos:

Sean  $r \in R$ ,  $a, b \in \sum_{i \in I} Im(\alpha_i)$  y supongamos que

$$a = \alpha_{h_0}(a_0) + \ldots + \alpha_{h_n}(a_n)$$
  
$$b = \alpha_{k_0}(b_0) + \ldots + \alpha_{k_m}(b_m) \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Así

$$g(ra+b) = g(r\alpha_{h_0}(a_0) + \dots + r\alpha_{h_n}(a_n) + r\alpha_{k_0}(b_0) + \dots + r\alpha_{k_m}(b_m))$$

$$= g(\alpha_{h_0}(ra_0) + \dots + \alpha_{h_n}(ra_n) + \alpha_{k_0}(b_0) + \dots + \alpha_{k_m}(b_m))$$

$$= f'_{h_0}(ra_0) + \dots + f'_{h_n}(ra_n) + f'_{k_0}(b_0) + \dots + f'_{k_m}(b_m)$$

$$= (rf'_{h_0}(a_0) + \dots + rf'_{h_n}(a_n)) + f'_{k_0}(b_0) + \dots + f'_{k_m}(b_m)$$

$$= r(f'_{h_0}(a_0) + \dots + f'_{h_n}(a_n)) + f'_{k_0}(b_0) + \dots + f'_{k_m}(b_m)$$

$$= rg(a) + g(b).$$

Por lo tanto es morfismo.

Así 
$$\forall x \in \sum_{i \in I} Im(\alpha_i)$$
 se tiene que

$$\mu g(x) = \mu \left( \sum_{k=0}^{n} f'_{i_k}(x_k) \right) = \sum_{k=0}^{n} \mu f'_{i_k}(x_k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f \alpha_{i_k}(x_k) = f \left( \sum_{k=0}^{n} \alpha_{i_k}(x_k) \right)$$
$$= f \nu(x).$$

Por lo tanto  $\sum_{i \in I} Im(\alpha_i)$  es la unión categorica.

**Ej 18.** Sean 
$$\mathscr C$$
 una categoría con ecualizadores  $\alpha, \beta \colon A \to B$  y  $\{\mu_i : A_i \hookrightarrow A\}_{i \in I}$  tal que existe  $\mu : \bigcup_{i \in I} A_i \longrightarrow A$ . Pruebe que  $(\alpha \mu_i = \beta \mu_i \ \forall i \in I) \Rightarrow (\alpha \mu = \beta \mu)$ .

Demostración. Supongamos  $\alpha \mu_i = \beta \mu_i \ \forall i \in I$  y que  $I \neq \emptyset$  entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{c}
A_i \\
\downarrow^{\mu_i} \\
A \xrightarrow{\beta} B
\end{array}.$$

Como  $\mathscr C$  tiene ecualizadores, existe  $\eta: K \to A$  tal que  $\alpha \eta = \beta \eta$  y si  $f: X \to A$  en  $\mathscr C$  es tal que  $\beta f = \alpha f$ , entonces  $\exists ! f': X \to K$  tal que  $\eta f' = f$ .

Así como  $\alpha \mu_i = \beta \mu_i \ \forall i \in I$ , entonces para cada  $i \in I \ \exists ! \mu'_i : A_i \to K$  tal que  $\eta \mu'_i = \mu_i$ , es decir, se tiene que para cada  $i \in I$  el siguiente diagrama commuta:

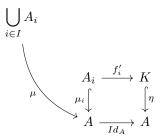
$$A_{i}$$

$$A_{i}$$

$$\mu_{i}$$

$$K \xrightarrow{\eta} A \xrightarrow{\beta} B$$

entonces,  $\eta f_i = \mu_i$ . Con esto en mente, tenemos el siguiente diagrama para cada  $i \in I$ :



Entonces por la propiedad  $(U_2)$  de la unión, existe  $f:\bigcup_{i\in I}A_i\longrightarrow K$  tal

que  $\eta f = \mu$ . Así

$$\alpha\mu = \alpha\eta f = \beta\eta f = \beta\mu.$$

En el caso en que  $I=\emptyset, \ \eta: K\to A$  el ecualizador de  $(\alpha,\beta)$  cumple que  $\forall i\in I \quad \mu_i\leq \eta$  (por vacuidad), entonces por la observación 1.3.4(2)  $\mu\leq \eta$ , es decir, existe  $\gamma:\bigcup_{i\in I}A_i\longrightarrow K$  tal que  $\mu=\eta\gamma$  así

$$\alpha\mu = \alpha\eta\gamma = \beta\eta\gamma = \beta\mu.$$

**Ej 19.** Si  $f:A\hookrightarrow B$  está en una categoría  $\mathscr C,$  entonces  $f:A\hookrightarrow B$  es una imagen de f.

Demostración. Se tiene que f es un subobjeto y que  $f = f1_A$ . Si  $g: C \hookrightarrow B$  es un subobjeto para el cual  $\exists h: A \to C$  tal que f = gh, entonces  $f \leq g$  y por tanto  $Im(f) \simeq f$  en  $Mon_{Sets}(-, B)$ .

## **Ej 20.** Mod(R) y Sets tienen imágenes epimórficas.

Demostración. Sea  $f:A\to B$  en Sets. Si f es la función vacía  $\varnothing_B$  entonces por el Lema 1 se tiene que f es mono y por tanto es una imagen para sí mismo. Así supongamos sin pérdida de generalidad que  $A\neq\varnothing$ . Luego  $B\neq\varnothing$  y se tiene que  $inc:f(A)\to B$  es una función no vacía e inyectiva, por tanto un mono en Sets, la cual satisface que, si

$$g: A \to F(A)$$
  
 $a \mapsto f(A)$ ,

f = incg.

Ahora supongamos que  $\mu: C \hookrightarrow B$  y  $h: A \to C$  son tales que  $f = \mu h$ . Notemos que para cada  $y \in f(A) \exists a \in A$  tal que y = f(a), así consideremos la aplicación

$$k: f(A) \to C$$
  
 $f(a) \mapsto h(a)$ .

Si  $a, b \in A$  son tales que x = f(a) = f(b), entonces

$$\mu h(a) = f(a) = x = f(b) = \mu h(b)$$
   
  $\Longrightarrow h(a) = h(b),$   $\mu$  es mono

con lo cual k es una función bien definida y satisface que, dados  $y \in f(A)$  y  $x \in A$  tal que y = f(x),

$$\mu k(y) = \mu(h(x)) = f(x) = y = inc(y)$$

$$\implies inc = \mu k.$$

Con lo anterior se ha verificado que Sets tiene imágenes, más aún, tiene imágenes epimórficas puesto que la función g así construida es suprayectiva y por tanto epi.

Dado que todo R-módulo es en partícular un conjunto no vacío, en forma análoga a lo anterior se verifica que Mod(R) tiene imágenes epimórficas, puesto que si ahora  $f:A\to B$  en Mod(R) entonces la inclusión de módulos es un morfismo de R-módulos, g también lo es al serlo f, y k lo es al serlo f y h.

Ej 21. Pruebe que Sets tiene coimagenes.

Demostración. Sea  $f: A \to B$  en Sets. Consideremos la relación  $\sim_f$  en A, donde  $x \sim_f y$  si y sólo si f(x) = f(y).

Esta relación (que denotaremos por  $\sim$  por simplicidad) es una relación de equivalencia como se muestra a continuación:

Reflexividad Sea  $x \in A$ , como f(x) = f(x) entonces  $x \sim x$ .

Simetría Sean  $a, b \in A$  tales que  $a \sim b$ , entonces f(a) = f(b), por lo que f(b) = f(a) y así  $b \sim a$ .

Transitividad Sean  $x, y, z \in A$  tales que  $x \sim y, y \sim z$ , entonces f(x) = f(y) = f(z) por lo tanto f(x) = f(z) y en consecuencia  $x \sim z$ .

Sea  $\pi: a \to A/\sim$  el epi canonico donde  $\pi(a) = [a] := \{x \in A \mid x \sim a\}$ , se afirma que es una coimagen de f.

Observemos que, si  $A, B \neq \emptyset$ , para toda  $b \in B$  tal que b = f(a) con  $a \in A$  se tiene que  $\pi(a) = [a]$  por lo que se puede definir  $f' : A / \sim B$  como f'([a]) = f(a). Así se tiene que:

(1) f' está bie definida.

Sean  $[a][b] \in [x]$  con  $[x] \in A/\sim$ , entonces  $a \sim x \sim b$ , por lo que f(a) = f(x) = f(b), es decir, f'([a]) = f'([b]).

(2)  $(f = f'\pi)$ .

Sea  $a \in A$ .  $f'\pi(a) = f'([a]) = f(a)$ .

Para ver que  $(CoIm_2)$  se cumple, supongamos que existe  $p': A \to J'$  un objeto cociente de A tal que  $\exists f'': J' \to B$  donde f = f''p'. Sea  $a \in A$ , entonces  $\pi(a) = [a]$  y  $p'(a) = a' \in J'$ . Como p' es epi en Sets entonces es supra, así para todo  $x \in J'$  existe  $a_x \in A$  tal que  $p'(a_x) = x$ , así definimos  $\nu: J' \to A/\sim \text{como } \nu(x) = \pi(a_x)$ .

Se tiene entonces que  $\forall a \in A$ ,  $\nu p'(a) = \nu(p'(a)) = \pi(a)$ .

En el caso de que B sea el conjunto vacio, entonces A tiene que ser el conjunto vacio y  $f: A \to B$  es la función vacia, así f = p tiene que ser su coimagen pues si  $f': B \to B$  es la función identidad en B, entonces

f = f'p y si  $p' : B \rightarrow B$  es un objeto cociente de A tal que  $f'' : J' \rightarrow B$  con f''p' = f entonces  $f'' : J' \rightarrow B$  es la función vacia y J' es el conjunto vacio. Así  $p' : A \rightarrow J'$  es la función vacia y por lo tanto p' = p y  $Id_{J'} \circ p' = p$ .

En caso de que A sea el conjunto vacio y B sea distinto del vacio, entonces  $(CoIm_1)$  se cumple igual que en el caso anterior, tomando a  $p: \emptyset \to \emptyset$ .

Para probar  $(CoIm_2)$  supongamos que  $p': A \to J'$  es un objeto cociente de A tal que  $existsf'': J' \to B$  tal que f = f''p', pero p' es epi, y como  $A = \emptyset$  entonces  $J' = \emptyset$ . Así, si definimos u como la identidad en el vacio se tiene que p = up'.

**Ej 22.** Pruebe que Mod(R) tiene coimagenes.

Demostración. Sea  $A \in Obj(Mod(R))$ , entonces  $A \neq \emptyset$ . Se afirma que el epi canonico  $\pi: A \to A/Ker(f)$  es una coimagen.

Sea  $a \in A$ , entonces  $f(a) \in B$ . Definimos  $f': \frac{A}{Ker(f)} \to B$  como f'([a]) = f(a).

Probemos que está bien definido. Sean  $a, b \in [x]$  entonces  $a + k_1 = b + k_2 = x$  con  $k_1, k_2 \in Ker(f)$ , asi

$$f'([a]) = f(a) = f(a) + f(K_1) = f(a + K_1)$$
  
=  $f(b + K_2) = f(b) + f(K_2) = f(b) = f'([b]).$ 

Veamos que es morfismo. Sean  $r \in R$ ,  $[a], [b] \in {}^{A}/_{Ker(f)}$  entonces

$$f'(r[a] + [b]) = f'([ra + b]) = f(ra + b) = rf(a) + f(b) = f'(r[a]) + f'([b]).$$

En consecuencia se tiene que  $\pi$  cumple ( $CoIm_1$ ).

Ahora supongamos que  $p':A \to J'$  es un objeto cociente de A tal que existe  $f'':J'\to B$  que cumple que f=f''p'. Como p' es epi, entonces es suprayectiva en Mod(R), porlo que para cada  $x\in J'$  existe  $a\in A$  tal que p'(a)=x.

Definimos  $\nu: J' \to {}^A\!/_{Ker(f)}$  como  $\nu(x) = [a]$  donde p'(a) = x. Esta función está bien definida pues si  $a, b \in A$  son tales que p'(a) = p'(b) entonces

f''p'(a) = f''p'(b) y así f(a) = f(b), entonces f(a - b) = 0, por lo que  $a - b \in Ker(f)$  y en consecuencia [a] = [b].

Veamos que  $\nu$  es morfismo. Si  $r \in R$   $a, b \in J'$  donde  $\nu(a) = [x], \nu(b) = [y], a = p'(x)$  y b = p'(y), entonces

$$\nu(ra+b) = \nu(rp'(x) + p'(y)) = \nu(p'(rx+y))$$
  
=  $[rx+y] = r[x] + [y] = r\nu(a) + \nu(b).$ 

Así se tiene que  $\forall a \in A \ \nu p'(a) = \nu(p'(a)) = [a] = \pi(a)$  por lo que  $(CoIm_2)$  se cumple y Mod(R) tiene coimagenes.

Ej 23. Sean  $\mathscr{C}$  una categoría balanceada, con imágenes epimórficas y

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

en  $\mathscr{C}$ . Si  $\mu: A' \hookrightarrow A$  en  $\mathscr{C}$ , entonces g(f(A')) = gf(A') en  $\overline{Mon_{\mathscr{C}}(-,C)}$ .

Demostración. Dado que  $\mathscr C$  tiene imágenes epimórficas existen subobjetos

$$\nu: Im(f\mu) \hookrightarrow B,$$
 $\eta: Im(g\nu) \hookrightarrow B,$ 
 $\psi: Im((gf)\mu) \hookrightarrow B,$ 

que son imágenes respectivamente de  $f\mu, g\nu$  y  $(gf)\mu$ , y existen epimorfismos  $\alpha_1: A' \twoheadrightarrow Im(f\mu)$  y  $\alpha_2: Im(f\mu) \twoheadrightarrow Im(g\nu)$  tales que

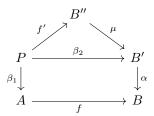
$$f\mu = \nu\alpha_1, g\nu = \eta\alpha_2.$$
 (\*)

Notemos que por ser  $\nu$  imagen de  $f\mu$  y subobjeto de B se tiene que  $g\left(f\left(A'\right)\right)=g\left(Im\left(f\mu\right)\right)=Im\left(g\nu\right)$ , mientras que  $gf\left(A'\right)=Im\left((gf)\mu\right)$ . Así pues basta con verificar que  $\eta$  es una imagen para  $(gf)\mu$ , ya que en tal caso  $Im\left(g\nu\right)\simeq Im\left((gf)\mu\right)$  en  $Mon_{\mathscr{C}}\left(-,C\right)$ . De (\*) se tiene que

$$qf(\mu) = q(f\mu) = q(\nu\alpha_1) = (\eta\alpha_2)\alpha_1 = \eta(\alpha_2\alpha_1).$$

En la última igualdad  $\eta$  es un mono, mientras que  $\alpha_2\alpha_1$  es un epi al serlo  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , de modo que al ser  $\mathscr C$  balanceada (ver Proposición 1.4.3) se tiene que  $\eta$  es una imagen para  $(gf) \mu$ .

Ej 24. Sea el siguiente diagrama



conmutativo en una categoría  $\mathscr{C}$ , con  $\mu$  y  $\alpha$  subobjetos. Si  $\beta_1$  es una imagen inversa por f de  $\alpha_1$ , entonces también lo es de  $\alpha\mu$ .

Demostración. Notemos que de la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que

$$(\alpha \mu) f' = \alpha (\mu f') = \alpha \beta_2$$
  
=  $f \beta_1$ ,

i.e. el siguiente cuadrado conmuta

$$P \xrightarrow{f'} B''$$

$$\beta_1 \downarrow \qquad \qquad \downarrow \alpha \mu .$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$(*)$$

Sean  $\gamma_1:P'\to A$  y  $\gamma_2:P'\to B''$  tales que  $f\gamma_1=(\alpha\mu)\,\gamma_2=\alpha\,(\mu\gamma_2).$  Como

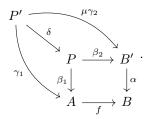
$$P \xrightarrow{\beta_2} B'$$

$$\beta_1 \downarrow \qquad \qquad \downarrow \alpha$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$(**)$$

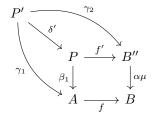
es un pull-back por ser  $\beta_1$  imagen inversa por f de  $\alpha$ , de la propiedad universal del pull-back se sigue que  $\exists !\ \delta:P'\to P$  tal que el siguiente diagrama conmuta



De modo que  $\delta$  es tal que  $\gamma_1=\beta_1\delta$  y además

$$(\alpha\mu)(f'\delta) = \alpha(\beta_2)\delta = \alpha(\mu\gamma_2) = (\alpha\mu)\gamma_2$$
  
 $\implies \gamma_2 = f'\delta.$   $\alpha\mu$  es mono

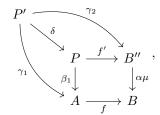
Sea  $\delta':P'\to P$ en  ${\mathscr C}$ tal que el diagrama



conmuta, luego  $\delta'$  es tal que  $\gamma_1 = \beta_1 \delta'$  y

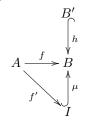
$$\mu \gamma_2 = (\mu f') \, \delta' = \beta_2 \delta'.$$

Por lo tantto, aplicando la propiedad universal del pull-back a (\*\*) se tiene que  $\delta'=\delta$ , con lo cual se tien que existe un único morfismo  $\delta$  tal que el siguiente diagrama conmuta



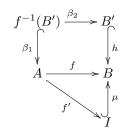
i.e. (\*) es un pull-back y así se tiene lo deseado.

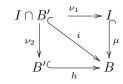
Ej 25. Considere el siguiente diagrama conmutativo en una categoría  $\mathscr C$ 



Pruebe que: si  $\exists f^{-1}(B')$  y  $B' \cap Y$ , entonces  $f^{-1}(I \cap B') = f^{-1}(B')$  en  $Mon_{\mathscr{C}}(-,A)$ .

Demostración. Como  $f^{-1}(B')$  y  $B'\cap I$  existen, entonces se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

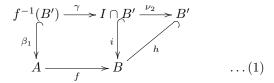




Así se tiene que este diagrama

$$\begin{array}{c|c}
f^{-1}(B') \xrightarrow{f'\beta_1} I \\
\beta_2 \downarrow & f\beta_1 \downarrow \mu \\
B' \xrightarrow{h} B
\end{array}$$

es conmutativo. Por lo tanto, como  $I\cap B'$  es pull-back existe un único  $\gamma:f^{-1}(B')\to I\cap B'$  tal que el siguiente diagrama conmuta:



Sean  $\eta: X \to I \cap B'$ ,  $\eta_2: X \to A$  tales que  $i\eta_1 = f\eta_2$ .

Observamos que, entonces,  $\nu_2\eta_1:X\to B'$  y es tal que  $h(\nu_2\eta_1)=i\eta_1=f\eta_2.$ 

Así, como  $f^{-1}(B')$  es pull-back de  $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{\mu} B'$ , existe una única  $\gamma': X \to f^{-1}(B')$  tal que  $\nu_2 \gamma \gamma' = \nu_2 \eta_1$  y  $\beta_1 \gamma' = \eta_2$  pero  $\nu_2$  es mono por ser i mono. Entonces  $\gamma \gamma' = \eta_1$  y  $\beta_1 \gamma' = \eta_2$ .

Ahora, si existiera  $\alpha: X \to f^{-1}(B')$  tal que  $\beta_1 \alpha = \eta_2$  y  $\gamma \alpha = \eta_1$ , entonces  $\nu_2 \gamma \alpha = \gamma_2 \eta_1$  y por lo anterior  $\alpha = \gamma'$  pues es el único con esas propiedades. Por lo tanto  $f^{-1}(B')$  es un pull-back, del diagrama (1), e implica que  $f^{-1}(I \cap B')$  existe y sea igual a  $f^{-1}(B)$  con los morfismos  $\gamma$  y  $\beta_1$ .

 $f^{-1}(I \cap B')$  existe y sea igual a  $f^{-1}(B)$  con los mornsmos  $\gamma$  y  $\beta_1$ .

**Ej 26.** Sea  $f:A\to B$  en una categoría  $\mathscr C$ . Consideremos subobjetos  $A_1\subseteq A_2\subseteq A$  y  $B_1\subseteq B_2\subseteq B$ . Pruebe que se satisfacen las siguientes relaciones cada vez que ambos lados estén definidos.

$$a)$$
  $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ 

b) 
$$f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$$

c) 
$$A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$$

$$d) \quad f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$$

Demostraci'on. Comenzaremos por nombrar monomorfismos correspondientes como subobjetos de Ay de B

$$A_1 \xrightarrow{\mu_1} A_2 \xrightarrow{\mu_2} A$$

$$B_1 \xrightarrow{\gamma_1} B_2 \xrightarrow{\gamma_2} B$$

a) Sabemos que  $f(A_1) = Im(f\mu_2\mu_1)$  y  $f(A_2) = Im(f\mu_2)$ . Llamaremos

$$\mu'_1: Im(f\mu_2\mu_1) \to B$$
,  $\alpha_1: A_2 \to Im(f\mu_2\mu_1)$ ,  $\mu'_2: Im(f\mu_2) \to B$  y  $\alpha_2: A_2 \to Im(f\mu_2)$ 

a los morfismos tales que  $f\mu_2 = \mu_2'\alpha_2$  y  $f\mu_2\mu_1 = \mu_1'\alpha_1$ . Entonces  $f\mu_2\mu_1 = (\mu_2'\alpha_2)\mu_1$ . Por la propiedad universal de la imagen en  $Im(f\mu_2\mu_1)$  existe  $\gamma: Im(f\mu_2\mu_1) \to Im(f\mu_2)$  tal que  $\mu_2'\gamma = \mu_1$ . En particular  $\gamma$  es mono, entonces  $Im(f\mu_2\mu_1) \subseteq Im(f\mu_2)$  y así  $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ .

b) Como se tienen los siguientes diagramas conmutativos



en particular se tiene que  $f\beta_1 = \nu_2(\nu_1\beta_2)$  y este diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}(B_1) & \xrightarrow{\nu_1 \beta_2} & B_2 \\
& & \downarrow & \downarrow \\
& & A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

Entonces  $\exists \eta: f^{-1}(B_1) \to f^{-1}(B_2)$  tal que  $\beta_2' \eta = \nu \beta_2$  y  $\beta_1' \eta = \beta_1$ 

Como  $f^{-1}(B_2)$  es pull-back, y  $\nu_2$  es mono, entonces  $\beta_1'$  es mono y por lo tanto  $\eta$  es mono. Así  $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ .

c) Puesto que  $f^{-1}(f(A_1))$  es un pull back, tenemos un diagrama conmutativo de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}(f(A_1)) & \xrightarrow{f_2} & f(A_1) \\
\downarrow^{f_1} & & \downarrow^{\mu'_1} \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

Además (apoyandonos con la notación del inciso a) ) tenemos que el siguiente diagrama conmuta  $\,$ 

$$A_{1} \xrightarrow{\alpha_{1}} f(A_{1})$$

$$\downarrow^{\mu_{2}\mu_{1}} \downarrow^{\mu'_{1}}$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

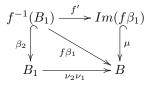
Entonces, por ser  $f^{-1}(f(A_1))$  un pull-back,  $\exists ! g: A_1 \to f^{-1}(f(A_1))$  tal que  $f_2g = \alpha_1$  y  $f_1g = \mu_2\mu_1$ .

Como  $\mu_2\mu_1$  es mono por ser  $\mu_2$  y  $\mu_1$  monos, entonces g es mono y así  $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$ .

d) Observemos que, como  $f^{-1}(B_1)$  es pull-back, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}(B_1) & \xrightarrow{\beta_2} & B_1 \\
& & \downarrow \\
\beta_1 & & \downarrow \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

conmuta, entonces por propiedades de las imagenes, existen  $\mu::Im(f\beta_1)\hookrightarrow B$  y  $f':f^{-1}(B_1)\to Im(f\beta_1)$  tales que el siguiente diagrama



es un diagrama conmutativo, por lo que existe un único  $g': Im(f\beta_1) \to B_1$ , tal que  $\nu_2\nu_1g' = \mu$  y  $gf' = \beta_2$  dado por la propiedad universal de las imagenes. Mas aún, notemos que g' es mono, pues  $\mu$  es mono y  $\mu = \nu_2\nu_1g'$ . Así  $f\beta_1 = \nu_2\nu_1\beta_2$ . Por lo que  $Im(f\beta_1) = f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$ .

**Ej 27.** Sea  $\mathscr C$  una categoría con objeto cero. Entonces  $\bigcup_{i\in I}A_i\simeq 0,$  si  $I=\varnothing.$ 

Demostración. Afirmamos que en este caso el morfismo  $0_{0,A}$  en  $\mathscr C$  (el cual existe y es único por ser 0 un objeto cero de la categoría  $\mathscr C$ ) es una unión para la familia de subobjetos  $\mu_i:A_i\to A$ . En efecto: Notemos que  $0_{A,0}0_{0,A},0_{0,A}0_{A,0},Id_0\in Hom_{\mathscr C}(0,0)$  y que  $|Hom_{\mathscr C}(0,0)|$ , luego  $0_{A,0}0_{0,A}=Id_0=0_{0,A}0_{A,0}$  y por tanto  $\mu$  es un iso en  $\mathscr C$ , así que en

partícular es un subobjeto de A.

Sean  $f:A\to B$  y  $\mu:B'\hookrightarrow B$  en  $\mathscr C$ , por ser  $I=\varnothing$  basta con verificar que  $0_{0,A}$  es llevado a  $\mu$  vía f. Se tiene que

$$f0_{0,A} = 0_{0,B} = \mu 0_{0,B'},$$

con lo cual el diagrama

$$\begin{array}{c}
0 \xrightarrow{0_{0,B'}} B' \\
\downarrow^{\mu} \\
a \xrightarrow{f} B
\end{array}$$

conmuta y así se tiene lo deseado.

Ej 28. Mod(R) es una categoría con objeto cero, en tanto que Sets no lo es.

Demostración.  $\boxed{Mod(R)}$  Sea R un anillo. Consideremos un conjunto de la forma  $A = \{*\}$ , i.e. un conjunto de un sólo elemento. Notemos que por medio de las operaciones

$$\begin{aligned} +: A \times A &\rightarrow A \\ (*,*) &\mapsto *, \\ \cdot: R \times A &\rightarrow R \\ (r,*) &\mapsto *, \end{aligned}$$

se tiene que  $(A, +, \cdot) \in Mod(R)$ .

Sea  $M \in Mod(R)$ . Como  $\forall B \in Sets | Hom_{Sets}(B,A)| = 1$ , y todo morfismo de R-módulos en partícular es una función, se tiene que  $|Hom_{Mod(R)}(M,A)| \leq 1$ . Así pues para verificar que A es objeto inicial en Mod(R) resta verificar que existe un morfismo de R-módulos de M en A. Sean  $r \in R$ ,  $m, n \in M$  y

$$f_M: M \to A$$
  
 $m \mapsto *,$ 

entonces  $f(rm+n)=*=*+*=r\cdot *+*=rf(m)+f(n)$ , y así  $f_M\in Hom_{Mod(R)}(M,A)$ .

Por otro lado, si  $0_M$  es el neutro aditivo de M, entonces la función

$$g_M: A \to M$$
  
 $* \mapsto 0_M$ 

satisface  $g_M \in Hom_{Mod(R)}(A, M)$ . Más aún, si  $h \in Hom_{Mod(R)}(A, M)$ , entonces necesariamente h es un morfismo de grupos y así

$$h(0_A) = h(*) = 0_M = g_M(*)$$

$$\implies h = g_M.$$

$$A = \{*\}$$

Por lo tanto A también es un objeto final y así es un objeto cero para  $Mod\left(R\right).$ 

Sets Supongamos que existe un conjunto A tal qu A es objeto cero de Sets. Luego  $\exists ! \ f \in Hom_{Sets}(A,\varnothing)$ , y así necesariamente  $A=\varnothing$ , lo cual es absurdo ya que  $\varnothing$  no es un objeto final en Sets, puesto que si  $B \neq \varnothing$  no existen funciones cuyo dominio sea B y contradominio sea  $\varnothing$ .

**Ej 29.** Pruebe que Mod(R) tiene kerneles.

Demostración. Sea  $f: A \to B$  morfismo en Mod(R),  $K = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$  y  $\mu: K \to A$  la función inclusión.

Primero demostraremos que  $K \leq A$ .

Sean  $r \in R$   $a, b \in K$ , entonces  $f(ra + b) = rf(a) + f(b) = r \cdot 0 + 0 = 0$ , por lo tanto  $ra + b \in K$ , entonces  $K \in Mod(R)$  y  $\mu$  es morfismo.

 $Ker_1$  Como  $f\mu: K \to B$  y para toda  $x \in K$  se tiene que  $f\mu(x) = f(\mu(x)) = f(x) = 0$  entonces  $f\mu = 0$ .

 $Ker_2$  Supongamos  $g: X \to A$  es un morfismo tal que fg = 0, entonces  $g(x) \in K$  pues f(g(x)) = 0. Así definimos el morfismo  $h: X \to K$  tal que h(x) = g(x), entonces  $\mu h(x) = \mu(g(x)) = g(x) \ \forall x \in X$ , por lo tanto  $\mu h = g$  y así K es kernel de f.

Por lo tanto Mod(R) tiene kernels.

**Ej 30.** Pruebe que Mod(R) tiene cokernels.

Demostración. Sea  $f: M \to N$  en Mod(R). Como f es morfismo de R- módulos, entonces  $im(f) \leq N$ .

Consideremos  $\pi: N \to N/_{Im(f)}$ , donde  $\pi(k) = k + Im(f)$  es la proyección canónica. Se afirma que  $\pi$  es un cokernel de f.

CoKer<sub>1</sub> Para toda  $x \in M$  se tiene que  $\pi f(x) = \pi(f(x)) = 0$  pues  $f(x) \in Im(f)$ .

Sean  $[x], [y] \in N/Im(f)$  y  $r \in R$ , entonces

$$g'(r[x] + [y]) = g'([rx + y]) = g(rx + y) = rg(x) + g(y) = rg'(x) + g'(y).$$

Observamos que g' está bien definida, pues si  $a, b \in [x]$ , etonces existen  $k_1, k_2 \in Im(f)$  tales que  $a + k_1 = b + k_2 = x$  y  $g(k_1) = g(k_2) = 0$ , entonces

$$g'([a]) = g(a) = g(a) + g(k_1) = g(a+k_1) = g(b+k_2) = g(b) + g(k_2) = g(b) = g([b]).$$

Por lo tanto g' es un morfismo de R-módulos y  $g'\pi(x)=g'([x])=g(x)$  por lo que  $g'\pi=g$  y así  $\pi$  es Cokernel.

**Ej 31.** Sets y Mod(R) son categorías localmente pequeñas.

Demostraci'on. Sea  $A\in Sets.$  Afirmamos que si  $\varphi:B\hookrightarrow A,\,\psi:C\hookrightarrow A\in Mon_{Sets}\,(-,A)$  entonces

$$\varphi \simeq \psi \text{ en } Mon_{Sets}\left(-,A\right) \iff Im\left(\varphi\right) = Im\left(\psi\right).$$
 (A)

 $\Longrightarrow$  Se tiene que  $\psi \leq \varphi$  y  $\varphi \leq \psi$ , luego  $\exists g : C \to B$  y  $h : B \to C$  tales que

$$\psi = \varphi g, \tag{*}$$

$$\varphi = \psi g \tag{**}$$

De (\*) se sigue que

$$\begin{split} \psi\left(C\right) &= \varphi\left(g\left(C\right)\right) \subseteq \varphi\left(B\right) \\ \Longrightarrow & \operatorname{Im}\left(\psi\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\varphi\right). \end{split}$$

Análogamente, de (\*\*) se obtiene que  $Im(\varphi) \subseteq Im(\psi)$ .

Notemos que si  $B = \emptyset$ , entonces  $Im(\psi) = Im(\varphi) = \emptyset$ , y por lo tanto  $C = \emptyset$ , con lo cual  $\varphi = \emptyset_A = \psi$ ; similarmente en caso que  $C = \emptyset$ . Por lo tanto en adelante supondremos que  $B \neq \emptyset \neq C$ .

Afirmamos que  $\forall c \in C \exists ! b_c \in B \text{ tal que } \psi(c) = \varphi(b)$ . En efecto la existencia se sigue de que en partícular  $Im(\psi) \subseteq Im(\varphi)$ , mientras que la

unicidad se sigue del hecho que  $\varphi$  es un mono y por tanto inyectiva (ver Lema 1). Lo previamente demostrado garantiza que la aplicación

$$g: C \to B$$
  
 $c \mapsto b_C$ 

está bien definida y satisface que  $\psi = \varphi g$ . En forma análoga, empleando ahora que  $Im(\psi) \supseteq Im(\varphi)$  y el que  $\psi$  es un mono en Sets, se verifica que  $\exists \ h: B \to C$  tal que  $\varphi = \psi h$  y así  $\psi \simeq \varphi$  en  $Mon_{Sets}(-, A)$ .

La caracterización dada por (A) garantiza que la aplicación dada por

$$f: \overline{Mon_{Sets}(-, A)} \to \mathscr{P}(A)$$
  
 $[\varphi] \mapsto Im(\phi).$ 

está bien definida y es inyectiva. Más aún, f es biyectiva puesto que si  $D \subseteq A$  e i es la inclusión conjuntista de B en A, entonces  $i \in Mon_{Sets}(-,A)$ . La inyectividad de f garantiza que la clase  $\overline{Mon_{Sets}(-,A)}$  es un conjunto, puesto que  $\mathscr{P}(A)$  lo es. Por tanto Sets es localmente pequeña.

Por su parte, el que  $Mod\left(R\right)$  sea localmente pequeña se sigue de que si  $M\in Mod\left(R\right)$ , entonces

$$k_M: \overline{Mon_{Mod(R)}(-, M)} \to \overline{Mon_{Mod(R)}(-, M)}$$
  
 $[\varphi] \mapsto [\varphi]$ 

está bien definida y es inyectiva.