Ejercicios 1-13’

Luis Gerardo Arruti Sebastian
Sergio Rosado Zúñiga

1.

2. Sean $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ una categoría pre-triangulada y $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ en $\triangle$. Pruebe que $u \in SKer(v)$, $\quad v \in SCoKer(u) \cap SKer(w)$ y $w \in SCoKer(v)$.

   Demostración. Primero se probará que $u \in SKer(v)$.
   Por el teorema (1.2.a) se tiene que $vu = 0$.

   Sea $r : M \to Y$ tal que $vr = 0$. Como $M \in \mathscr{C}$, entonces por el teorema (TR1a) $M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow TM$ está en $\triangle$, y por (TR2) se puede rotar el triangulo de las hipótesis tal se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, "r"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & T(M) \arrow[r, "-T(1_M)"] & TM \arrow[d, "T(r)"] \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & T(x) \arrow[r, "-T(u)"'] & T(y) .
\end{tikzcd}$$

   Así, por (TR3) existe $s' : T(M) \to T(X)$ tal que $(T(r))(-T(1_M)) = (-T(u))(s')$, y como T es autofuntor, entonces $-T(r \circ 1_M)) = -T(u \circ T^{-1}(s'))$. Si se toma $s = T^{-1}(s') : M \to X$ se tiene que $r = us$, por lo tanto $u \in SKer(v)$.

   Veamos ahora que $v \in SCoker(u)$.

   Anteriormente se observó que $vu = 0$. Sea $t : Y \to M$ tal que $tu = 0$. Como $M \in \mathscr{C}$, entonces por el teorema (TR1a) $M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow TM$ está en $\triangle$, así por (TR2) $0 = T^{-1}(0) \xrightarrow[0]{} M \xrightarrow[1_M]{} M \longrightarrow 0$ está en $\triangle$.

   Además, como $tu = 0$ entonces entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "0"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "t"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \arrow[d, "T(0)=0"] \\
0 \arrow[r, "0"'] & M \arrow[r, "1_M"'] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Así, por (TR3) existe $s : Z \to M$ tal que $1_M \circ t = sv$ y por lo tanto $v \in SCoKer(u)$.

Por último, rotando el triángulo de las hipótesis por (TR1c) se tiene que $Y \xrightarrow[v]{} Z \xrightarrow[w]{} T(x) \xrightarrow[-T(u)]{} T(y)$ está en $\triangle$, así por lo demostrado $v \in Ker(w)$ y $w \in CoKer(v)$.

$\square$

3.

4.

5. Sea $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ una categoría pretriangulada (respectivamente triangulada), pruebe que el triple $(\mathscr{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\triangle})$ es una categoría pretriangulada (respectivamente triangulada), donde $\tilde{T}(f^{op}) = (T^{-1}(f))^{op}$ y $\tilde{\triangle}$ se define como sigue:

$$X \xrightarrow{u^{op}} Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} \tilde{T}X \qquad \in \tilde{\triangle}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Z \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} X \xrightarrow{Tw} TZ \qquad \in \triangle\,.$$

En tal caso se define $(\mathscr{C}, T, \triangle)^{op} := (\mathscr{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\triangle})$.
Esto es, $(\mathscr{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\triangle})$ es una categoría pretriangulada (respectivamente triangulada) opuesta de $(\mathscr{C}, T, \triangle)^{op}$.

Demostración. Se puede observar que al tomar $(\mathscr{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\triangle})$ como se describe en las hipótesis, al ser $\mathscr{C}$ una categoría abeliana, entonces $\mathscr{C}^{op}$ también es una categoría abeliana, donde la operación está definida por
$f^{op} \tilde{+} g^{op} := (f+g)^{op}$ para cada $f, g \in Mor(\mathscr{C})$ y
$+ : Mor(\mathscr{C}) \times Mor(\mathscr{C}) \to Mor(\mathscr{C})$ la operación definida en $\mathscr{C}$.

Por lo anterior se tiene entonces que el funtor opuesto de una categoría aditiva cualquiera $\mathscr{A}$ es aditivo, pues si $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ entonces

$$D_{\mathscr{A}}(f+g) = (f+g)^{op} = f^{op} \tilde{+} g^{op} = D_{\mathscr{A}}(f) \tilde{+} D_{\mathscr{A}}(g).$$

Con esto en mente se demostrará que $\tilde{T}$ es un autofuntor aditivo.

Lo primero que se tiene que notar es que $\tilde{T} = D_{\mathscr{C}}T^{-1}D_{\mathscr{C}^{op}}$, por lo que $\tilde{T}$ es un funtor aditivo al ser composición de funtores aditivos. Por otra parte se tiene que $\tilde{G} = D_{\mathscr{C}}TD_{\mathscr{C}^{op}}$ es un funtor aditivo, y es tal que

$$\begin{aligned}\tilde{G}\tilde{T} &= D_{\mathscr{C}}TD_{\mathscr{C}^{op}}D_{\mathscr{C}}T^{-1}D_{\mathscr{C}^{op}}\\ &= D_{\mathscr{C}}TT^{-1}D_{\mathscr{C}^{op}}\\ &= D_{\mathscr{C}}D_{\mathscr{C}^{op}}\\ &= 1_{\mathscr{C}^{op}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}\tilde{G} &= D_{\mathscr{C}}T^{-1}D_{\mathscr{C}^{op}}D_{\mathscr{C}}TD_{\mathscr{C}^{op}}\\ &= D_{\mathscr{C}}T^{-1}TD_{\mathscr{C}^{op}}\\ &= D_{\mathscr{C}}D_{\mathscr{C}^{op}}\\ &= 1_{\mathscr{C}^{op}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{T}$ es un autofuntor aditivo.

Vemos ahora que $(\mathscr{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\triangle})$ es una categoría pretriangulada.

$\boxed{TR1a)}$ Sea $X \in \mathscr{C}^{op}$ entonces $X \in \mathscr{C}$, como $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ es pretriangulada, entonces $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \in \triangle\cdot$
Rotando a la izquierda dos veces por (1.3) sobre $\mathscr{C}$ se tiene que
$T^{-1}X \xrightarrow{T^{-1}(0)} 0 \longrightarrow X \xrightarrow{1_X} X \in \tilde{\triangle}\cdot$
Así, por definición de $\tilde{\triangle}$ y por el hecho de que $T^{-1}X = \tilde{T}X$ se tiene que
$X \xrightarrow{(1_X)^{op}=1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{T}X \in \tilde{\triangle}\cdot$

$\boxed{TR1b)}$ Sean $\alpha:\ C \xrightarrow{w^{op}} B \xrightarrow{v^{op}} A \xrightarrow{u^{op}} \tilde{T}C$ y
$\beta:\ Z \xrightarrow{t^{op}} Y \xrightarrow{s^{op}} X \xrightarrow{r^{op}} \tilde{T}Z$
en $\mathscr{C}^{op}$, tal que $\alpha \in \tilde{\triangle}$ y $\alpha \cong \beta$. Entonces se tienen isomorfismos $\varphi^{op}, \psi^{op}, \theta^{op} \in Mor(\mathscr{C}^{op})$ tales que el siguiente diagrama conmuta en $\mathscr{C}^{op}$:

$$\begin{tikzcd}
\alpha: & C \arrow[r, "w^{op}"] \arrow[d, "\varphi^{op}"] & B \arrow[r, "v^{op}"] \arrow[d, "\psi^{op}"] & A \arrow[r, "u^{op}"] \arrow[d, "\theta^{op}"] & \tilde{T}C \arrow[d, "\tilde{T}(\varphi^{op})"] \\
\beta: & Z \arrow[r, "t^{op}"'] & Y \arrow[r, "s^{op}"'] & X \arrow[r, "r^{op}"'] & \tilde{T}Z .
\end{tikzcd}$$

Así el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\alpha' : & T^{-1}C \arrow[r, "-u"] & A \arrow[r, "v"] & B \arrow[r, "w"] & C \\
\beta' : & T^{-1}Z \arrow[r, "-r"'] \arrow[u, "T^{-1}(\varphi)"] & X \arrow[r, "s"'] \arrow[u, "\theta"] & Y \arrow[r, "t"'] \arrow[u, "\psi"] & Z \arrow[u, "\varphi"'] ,
\end{tikzcd}$$

pues

- •) $-u \circ T^{-1}(\varphi) = -[(T^{-1}(\varphi))^{op} \circ u^{op}]^{op} = -[\tilde{T}(\varphi^{op}) \circ u^{op}]^{op}$
$= -[r^{op}\theta^{op}]^{op} = -[(\theta r)^{op}]^{op} = -[\theta r] = \theta \circ (-r)$.
- •) $v\theta = [\theta^{op}v^{op}]^{op} = [s^{op}\psi^{op}]^{op} = [(\psi s)^{op}]^{op} = \psi s$.
- •) $w\psi = [\psi^{op}w^{op}]^{op} = [t^{op}\varphi^{op}]^{op} = [(\varphi t)^{op}]^{op} = \varphi t$.

Como $A \xrightarrow{v} B \xrightarrow{w} C \xrightarrow{T(u)} TA \in \triangle$ por estar $\alpha \in \tilde{\triangle}$, entonces $\alpha' \in \triangle$ por (TR2) sobre $\mathscr{C}$ al ser su rotación a izquierda. Así se tiene que $\alpha' \cong \beta'$ con $\alpha' \in \triangle$ y, por (TR1 b)), $\beta' \in \triangle$. Eso implica que (al rotar β' por (TR2)) el triangulo $X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{t} Z \xrightarrow{T(r)} TX \in \triangle$ y por definición entonces $\beta \in \tilde{\triangle}$.

$\boxed{TR1c)}$ Sea $f^{op} : B \to A$ en $\mathscr{C}^{op}$ entonces $f : A \to B$ está en $\mathscr{C}$.

Por (TR1 c)) sobre $\mathscr{C}$, existe $B \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX$ en $\mathscr{C}$ tal que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \in \triangle$, así por (TR2) sobre $\mathscr{C}$ se tiene que

$T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(\beta)} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha = T(T^{-1}(\alpha))} Z \in \triangle$ ·

Por lo tanto $B \xrightarrow{f^{op}} A \xrightarrow{-(T^{-1}(\beta))^{op}} T^{-1}Z \xrightarrow{(T^{-1}(\alpha))^{op}} \tilde{T}B \in \tilde{\triangle}$ y así

$B \xrightarrow{f^{op}} A \xrightarrow{-(\tilde{T}(\beta)^{op})} \tilde{T}Z \xrightarrow{\tilde{T}(\alpha)^{op}} \tilde{T}B \in \tilde{\triangle}$ ·

$\boxed{TR2}$ Sea $X \xrightarrow{u^{op}} Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} TX \in \tilde{\triangle}$, entonces por definición $Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{T(w)} TZ \in \triangle$ ·

Por el ejercicio 4 se tiene que $Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{-u} X \xrightarrow{-T(w)} TZ \in \triangle$, y por (1.3) $T^{-1}X \xrightarrow{-(T^{-1}(-T(w)))} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{-u} X \in \triangle$,

es decir, $T^{-1}X \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{-u} X \in \triangle$ ·

Entonces por definición de $\tilde{\triangle}$ se tiene que

$$Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} T^{-1}X \xrightarrow{-\tilde{T}(u^{op})} \tilde{T}Y \in \tilde{\triangle}$$

es decir, $Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} \tilde{T}X \xrightarrow{-\tilde{T}(u^{op})} \tilde{T}Y \in \tilde{\triangle}$ ·

$\boxed{TR3}$ Sean $\eta^{op} = (X, Y, Z, u^{op}, v^{op}, w^{op})$, $\mu^{op} = (X_0, Y_0, Z_0, u_0^{op}, v_0^{op}, w_0^{op})$ en $\tilde{\triangle}$, y $f^{op} : X \to X_0$, $g^{op} : Y \to Y_0$ tales que $g^{op}u^{op} = u_0^{op} f^{op}$. Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}^{op}$:

$$\begin{tikzcd}
\eta: & X \arrow[r, "u^{op}"] \arrow[d, "f^{op}"] & Y \arrow[r, "v^{op}"] \arrow[d, "g^{op}"] & Z \arrow[r, "w^{op}"] & \tilde{T}X \arrow[d, "\tilde{T}(f^{op})"] \\
\mu: & X_0 \arrow[r, "u_0^{op}"'] & Y_0 \arrow[r, "v_0^{op}"'] & Z_0 \arrow[r, "w_0^{op}"'] & \tilde{T}X_0 .
\end{tikzcd}$$

y en consecuencia se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
Z_0 \arrow[r, "v_0"] & Y_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "g"] & X_0 \arrow[r, "T(w_0)"] \arrow[d, "f"] & TZ_0 & \in \triangle \\
Z \arrow[r, "v"'] & Y \arrow[r, "u"'] & X \arrow[r, "T(w)"'] & TZ & \in \triangle \ldots (1)
\end{tikzcd}$$

donde, como $g^{op}u^{op} = u_0^{op} f^{op}$ entonces $(ug)^{op} = (fu_0)^{op}$, es decir, $ug = fu_0$.

Rotando a la izquierda por (1.3), se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Y_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "g"] & X_0 \arrow[r, "T(w_0)"] \arrow[d, "f"] & TZ_0 \arrow[r, "-T(v_0)"] & TY_0 \arrow[d, "T(f)"] \\
Y \arrow[r, "u"'] & X \arrow[r, "T(w)"'] & TZ \arrow[r, "-T(v)"'] & TY.
\end{tikzcd}$$

Así por (TR3) sobre $\triangle$, se tiene que existe $h_1 : TZ_0 \to TZ$ tal que hace conmutar el diagrama, es decir, $h_1 T(w_0) = t(w)f$ y $-T(v)h_1 = T(f)(-T(v_0))$.

Tomando $h = T^{-1}(h_1)$ se tiene que, como T es fiel y pleno,

$$-T(v)h_1 = -T(gv_0)$$
$$T(vh) = T(gv_0)$$
$$vh = gv_0$$

y

$$h_1 T(w_0) = t(w)f$$
$$T(h)T(w_0) = T(w)f \, .$$

Es decir, (1) con el morfismo h es un diagrama conmutativo, y tomando h^{op} se tiene que $v^{op}g^{op} = (gv)^{op} = (vh)^{op} = h^{op}v^{op}$ y

$w^{op}h^{op} = (hw_0)^{op} = (T{-}1(T(h)T(w_0)))^{op} = (T{-}1(T(h)f))^{op} = (wT^{-1}(f))^{op}$ $= (T^{-1}(f))^{op}w^{op} = \tilde{T}(f^{op})w^{op}$. Por lo que es diagrama de las hipótesis para TR3 es conmutativo con h^{op}.

$\boxed{TR4}$ Por último, en caso de ser $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ categoría triangulada supongamos que tenemos el siguiente diagrama en $\mathscr{C}^{op}$

$$\begin{tikzcd}
\alpha^{op}: & X \arrow[r, "u^{op}"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i^{op}"] \arrow[d, "v^{op}"] & Z' \arrow[r, "i'^{op}"] & \tilde{T}X \arrow[d, equal] \\
\beta^{op}: & X \arrow[r, "v^{op}u^{op}"] \arrow[d, "u^{op}"'] & Z \arrow[r, "k^{op}"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "k'^{op}"] & \tilde{T}X \arrow[d, "\tilde{T}(u^{op})"] \\
\gamma^{op}: & Y \arrow[r, "v^{op}"] & Z \arrow[r, "r^{op}"] & X' \arrow[r, "j^{op}"] \arrow[d, "h^{op}"] & \tilde{T}Y \arrow[d, "\tilde{T}(i^{op})"] \\
& & & TZ' \arrow[r, equal] & TZ'
\end{tikzcd} \qquad \ldots(1).$$

Se afirma que existen f^{op}, g^{op} tales que $\theta^{op} : Z' \xrightarrow{f^{op}} Y' \xrightarrow{g^{op}} X' \xrightarrow{h^{op}} \tilde{T}Z' \in \tilde{\triangle}$ y hacen conmutar el diagrama anterior.

Observemos el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd}
\gamma_0: & T^{-1}Z \arrow[r, "-T^{-1}(v)"] \arrow[d, equal] & T^{-1}Y \arrow[r, "-j"] \arrow[d, "T^{-1}(u)"] & X' \arrow[r, "r"] & Z \arrow[d, equal] \\
\beta_0: & T^{-1}Z \arrow[r, "-T^{-1}(uv)"] \arrow[d, "T^{-1}(v)"'] & T^{-1}X \arrow[r, "-k'"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "k"] & Z \arrow[d, "v"] \\
\alpha_0: & T^{-1}Y \arrow[r, "-T^{-1}(u)"] & T^{-1}X \arrow[r, "-i'"] & Z' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "T(h)"] & Y \arrow[d, "T(j)"] \\
& & & TX' \arrow[r, equal] & TX'
\end{tikzcd} \qquad \ldots(2).$$

Observemos que $h^{op} = \tilde{T}(i^{op})j^{op} = (T^{-1}(i))^{op}j^{op}$ entonces $h = jT^{-1}(i)$ y así $T(h) = T(j)i$.

Ahora, consideremos a α, β y γ como los triangulos distinguidos en $\mathscr{C}$ dados por los triangulos en $\tilde{\triangle}$ dados en el primer diagrama:

$$\alpha : Z' \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{T(i')} TZ'$$

$$\beta : Y' \xrightarrow{k} Z \xrightarrow{uv} X \xrightarrow{T(k')} TY'$$

$$\gamma : X' \xrightarrow{r} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{T(j)} TX' \ ,$$

y rotando dos veces a la izquierda cada uno por (TR2) sobre $\triangle$ se obtienen α_0, β_0 y γ_0 respectivamente, los cuales por definición serán elementos de $\tilde{\triangle}$.

Como $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ es categoría triangulada, por el axioma del octaedro existen $g : X' \to Y'$ y $f : Y' \to Z'$ tales que hacen conmutar el diagrama (2) y $\theta : X' \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{f} Z' \xrightarrow{T(h)} TX' \in \triangle$. Así

$\theta^{op} : Z' \xrightarrow{f^{op}} Y' \xrightarrow{g^{op}} X' \xrightarrow{h^{op}} TZ' \in \tilde{\triangle}$, y f^{op}, g^{op} hacen conmutar el diagrama (1), pues:

- $f^{op} i^{op} = (if)^{op} = (vk)^{op} = k^{op} v^{op}$.
- $-i' = f \circ (-k')$ entonces $(-i')^{op} = (f \circ (-k'))^{op} = -(k')^{op} f^{op}$ así $i^{op} = k'^{op} f^{op}$.
- $g^{op} k^{op} = (kg)^{op} = (r)^{op}$.
- $j^{op} g^{op} = (gj)^{op} = (kT^{-1}(u))^{op} = (T^{-1}(u))^{op} k^{op} = \tilde{T}(u^{op}) k^{op}$.

$\square$

6.

7.

8. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $h : A \to B$ en $\mathscr{C}$. Pruebe que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, h) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, B) \iff h : A \xrightarrow{\sim} B.$$

Demostración. Supongamos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, h)$ es isomorfismo natural, llamemos $\{h_K\}$ a la familia que conforma la transformación h, donde $K \in Obj(\mathscr{C})$. Como h es isomorfismo natural, entonces $h_B : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, B)$ es un ismorfismo, en particular es suprayectivo, así, existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ tal que $h_B(g) = h \circ g = 1_B \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, B)$.

Se afirma que $g \circ h = 1_A$.
Tenemos que $h_A : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ es un ismorfismo, en

particular es inyectivo. Por un lado $h_A(1_A) = h \circ 1_A = h$, por el otro lado $h_A(g \circ h) = h \circ (g \circ h) = (h \circ g) \circ h = 1_B \circ h = h$. Entonces $1_A = g \circ h$ y en consecuencia h es iso.

Supongamos $h : A \to B$ es isomorfismo y sea $M \in \mathscr{C}$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,h) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}($
Sean $g : B \to A$ tal que $h \circ g = 1_B, g \circ h = 1_A$ y $r \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,A)$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,h)(r) = h \circ r$, así $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, g) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, A)$ es tal que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,g) \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,h)(r) = g(hr) = (gh)r = r$$

así $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,g) \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,h) = 1_A$.

Análogamente si $s \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,B)$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,h) \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,g)(s) = h(gs) = (hg)s = s$, es decir $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,h) \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,g) = 1_B$ y así $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,h)$ es iso.

Por otra parte, si $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, h)$ es isomorfismo, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,h)", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(1_A,A)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(1_A,B)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A) \arrow[r, "\sim", "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,h)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B).
\end{tikzcd}$$

mas aún, como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,h)(1_A) = h \circ 1_A = h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}^{-1}(A,h)h = 1_A$.

$\square$

9.

10.

11. Sean $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ una categoría triangulada y $\mathscr{D}$ una subcategoría triangulada. Pruebe que:

   a) $\mathscr{D}$ es cerrada por isomorfismos en $\mathscr{C}$ (en particular, $\mathscr{D}$ contiene a todos los ceros de $\mathscr{C}$).

   b) $\mathscr{D}$ es una subcategoría aditiva de $\mathscr{C}$.

   c) $\forall \eta :$ $\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$ $\in \triangle$, con X, Y en $\mathscr{D}$, se tiene que $Z \in \mathscr{D}$.

d) Si $X \to Y \to Z \to TX \in \triangle$ y dos de los objetos X, Y, Z están en $\mathscr{D}$, entonces el tercero de ellos también lo está.

e) Sea $\triangle|_{\mathscr{D}} := \{X \to Y \to Z \to TX \in \triangle : X, Y, Z \in \mathscr{D}\}$ y la restricción $T|_{\mathscr{D}}$ del funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ en la subcategoría $\mathscr{D}$.
Entonces el triple $(\mathscr{D}, T|_{\mathscr{D}}, \triangle|_{\mathscr{D}})$ es una categoría triangulada.

g) $\mathscr{D}^{op}$ es una subcategoría triangulada de $(\mathscr{C}, T, \triangle)^{op}$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Sean $X, 0 \in Obj(\mathscr{D})$ tal que $X \cong Y$ en $\mathscr{C}$ (por definición de subcategoría triangulada existe un 0 en $\mathscr{D}$).

Observemos primero que

$$X \xrightarrow[\sim]{\binom{1_X}{0}} X \coprod 0$$

y que los siguientes son morfismos en $\mathscr{C}$: $(h\ 0) : X \coprod 0 \to Y$ y $\begin{pmatrix} h^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$: $Y \to X \coprod 0$. En particular

$$(h\ 0)\begin{pmatrix} h^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = hh^{-1} + 0 = 1_Y \qquad \text{y}$$

$$\begin{pmatrix} h^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}(h\ 0) = \begin{pmatrix} h^{-1}h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix} = 1_{x \coprod 0}\,.$$

Mas aún, si consideramos a Y con la familia $\{\nu_1 = h, \nu_2 = 0_{0Y}\}$ se tiene que $(h\ 0)$ es un isomorfismo que conmuta con las inclusiones naturales del coproducto $X \coprod 0$:

$$(h\ 0)\begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix} = h + 0 = h = \nu_1 \quad \text{y}$$

$$(h\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0 = \nu_2.$$

Por lo tanto Y con la familia $\{\nu_1\,,\,\nu_2\}$ son un coproducto de $\{X, 0\}$ y como $\mathscr{D}$ es una subcategoría triangulada, entonces por $(ST2)$ se tiene que $Y \in Obj(\mathscr{D})$.

$\boxed{b)}$ Por definición de subcategoría triangulada $\mathscr{D}$ tiene objeto cero (SA1). Como $\mathscr{C}$ es aditiva y $\mathscr{D}$ es plena, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}$ tiene estructura de grupo abeliano para todo $A, B \in Obj(\mathscr{C})$ (SA2).

Como $\mathscr{C}$ es aditiva y $\mathscr{D}$ es plena la composición de morfismos en $\mathscr{D}$ es bilineal (SA3), además, por definición $\mathscr{D}$ es cerrada bajo coproductos finitos (SA4), asi $\mathscr{D}$ es subcategoría aditiva de $\mathscr{C}$.

$\boxed{c)}$ Sea $\eta: \ X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \ \in \triangle$ con $X, Y \in \mathscr{D}$, entonces por (TR2) $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \ \in \triangle$, como $T(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$, se tiene que $TX \in \mathscr{D}$ y por (TR1a)

$$Y \xrightarrow{1_Y} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow TY \quad \text{y}$$
$$0 \longrightarrow TX \xrightarrow{T(1_X)} TX \longrightarrow 0$$

están en $\triangle$.

Pero $\mathscr{D}$ es cerrado bajo coproductos finitos, así

$$Y \xrightarrow{\binom{1}{0}} Y \coprod TX \xrightarrow{(0\ 1)} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \quad \in \triangle.$$

Así se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "1_Y"] & Y \coprod TX \arrow[r, "(0\ 1)"] & TX \arrow[r, "-T(u)"] \arrow[d, "T(1_X)"] & TY \arrow[d, "T(1_Y)"] \\
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \arrow[r, "-T(u)"] & T(Y)
\end{tikzcd}$$

por el lema (1.1) existe un morfismo $g : Y \coprod TX \longrightarrow Z$ tal que $\varphi := (1_Y, g, T(1_X)) \in J(\mathscr{C}, \triangle)$, además por (Ejercicio 3) se tiene que g es iso, por lo tanto φ es iso y por el inciso b) se tiene que $Z \in \mathscr{D}$.

$\boxed{d)}$ Sea $X \to Y \to Z \to TX \in \triangle$ tal que dos de los objetos X, Y, Z están en $\mathscr{D}$, si $X, Y \in \mathscr{D}$ entonces el inciso c) implica que $Z \in \mathscr{D}$. Ahora (S.P.G) supongamos $X, Z \in \mathscr{D}$ rotamos a la izquierda por el teorema (1.3) y tenemos que $T^{-1}(Z) \to X \to Y \to Z \in \triangle$. Pero $T^{-1}(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$, por lo que $T^{-1}(Z) \in \mathscr{D}$. Y así, por el inciso c) se tiene el resultado (el último caso es análogo rotando dos veces a la izquierda).

$\boxed{e)}$ Sean $\triangle|_{\mathscr{D}} := \{X \to Y \to Z \to TX \in \triangle \,|\, X, Y, Z \in \mathscr{D}\}$ y la restricción $T|_{\mathscr{D}}$ del funtor $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ en la subcategoría $\mathscr{D}$.

Se probará que $(\mathscr{D}, T|_{\mathscr{D}}, \triangle|_{\mathscr{D}})$ es una categoría triangulada (probando cada uno de los axiomas).

$\boxed{TR1.a}$
Sea $X \in \mathscr{D}$, en particular $X \in \mathscr{C}$ por lo que, por (TR1.a) sobre $\mathscr{C}$
$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \quad \in \triangle$. Pero por el inciso a) sabemos que todos los ceros de $\mathscr{C}$ están en $\mathscr{D}$, y como $TX \in \mathscr{D}$ entonces
$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \quad \in \triangle|_{\mathscr{D}}$

$\boxed{TR1.b}$
Por el inciso a) se tiene el resultado.

$\boxed{TR1.c}$
Sea $f : X \to Y$ en $\mathscr{D}$, entonces $f : X \to Y \in \mathscr{C}$ y por (TR1.c) en $\mathscr{C}$ existe $Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \ \in \mathscr{C}$ tal que
$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \ \in \triangle$. Por el inciso c), como $X, Y \in \mathscr{D}$ entonces $Z \in \mathscr{D}$ y como $\mathscr{D}$ es plena se tiene que
$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \ \in \triangle|_{\mathscr{D}}$.

$\boxed{TR2}$
Supongamos $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \ \in \triangle|_{\mathscr{D}} \subseteq \triangle$ entonces
$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \ \in \triangle$ pero $T(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}$ y T es pleno por lo que $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \ \in \triangle|_{\mathscr{D}}$.

$\boxed{TR3}$
Sean $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$, $\mu = (X', Y', Z', u', v', w')$ en $\triangle|_{\mathscr{D}}$ y
$f : X \to X',\ g : Y \to Y'$ en $\mathscr{D}$ tales que $gu = u'f$.
Por (TR3) sobre $\mathscr{C}$ existe $h : Z \to Z'$ tal que $\varphi := (f, g, h) : \eta \to \mu$ es morfismo en $\mathscr{T}(\mathscr{C}, T)$ en particular como $Z, Z' \in \mathscr{D}$ y $\mathscr{D}$ es plena, entonces $h \in \hom_{\mathscr{D}}(Z, Z')$, por lo tanto $\varphi \in \mathscr{T}(\mathscr{D}, T)$.

$\boxed{TR4}$ (Axioma del octaedro)
Supongamos que tenemos el siguiente diagrama en $\mathscr{D}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"] & Z' \arrow[r, "i'"] & TX \arrow[d, equal] & \in \triangle|_{\mathscr{D}} \\
X \arrow[r, "vu"] \arrow[d, "u"] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "k'"] & TX \arrow[d, "T(u)"] & \in \triangle|_{\mathscr{D}} \\
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "r"] & X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "T(i)j"] & TY \arrow[d, "T(i)"] & \in \triangle|_{\mathscr{D}} \\
 & & TZ' \arrow[r, equal] & TZ'\,. &
\end{tikzcd}$$

El axioma del octaedro en $\mathscr{C}$ nos indica que existe $f : Z' \to Y'$ y $g : Y' \to X'$ tales que hacen conmutar el diagrama anterior, y que $\theta : Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Z' \xrightarrow{h} TZ' \;\in \triangle$. Como $\mathscr{D}$ es pleno y cada objeto (vertice) del diagrama está en $\mathscr{D}$ entonces $f, g \in Mor(\mathscr{D})$ por lo que $\theta \in \triangle|_{\mathscr{D}}$ y se cumple el axioma del octaedro.

$\boxed{f)}$ Por alguna extraña razón no hay f en este ejercicio.

$\boxed{g)}$ Para comenzar se observa que, como $\mathscr{D}$ es una categoría triangulada, entonces por el (Ej. 5) $\mathscr{D}^{op}$ será una categoría triangulada. También se tiene que $Obj(\mathscr{D}) = Obj(\mathscr{D}^{op})$ y como $\mathscr{D}$ es subcategoría plena de $\mathscr{C}$ entonces $\mathscr{D}^{op}$ es subcategoría plena de $\mathscr{C}^{op}$. Esto último es facil de ver, pues cada morfismo en $\mathscr{C}^{op}$ entre objetos de $\mathscr{D}^{op}$ es el morfismo opuesto f^{op} de un morfismo f en $\mathscr{C}$ entre objetos de $\mathscr{D}$, y como $\mathscr{D}$ es plena, entonces f está en $\mathscr{D}$ y así f^{op} está en $\mathscr{D}^{op}$.

Se probarán los axiomas de subcategoría triangulada para $(\mathscr{D}, T|_{\mathscr{D}}, \triangle|_{\mathscr{D}})$.

$\boxed{ST1}$ Como $\mathscr{D}$ contiene un objeto cero, entonces $\mathscr{D}^{op}$ contiene un objeto cero.

$\boxed{ST2}$ Sean $X, Y \in \mathscr{D}^{op}$, entonces $X, Y \in \mathscr{D}$ y por ser $\mathscr{D}$ subcategoría triangulada, entonces $X \coprod Y$ está en $\mathscr{D}$. Pero $\mathscr{C}$ es una categoría aditiva, entonces $\mathscr{D}$ es aditiva también y todo coproducto finito es un producto finito, así $X \prod Y \in \mathscr{D}$ y por lo tanto $(X \coprod^{op} Y) = (X \prod Y)^{op} \in \mathscr{D}^{op}$ donde $\coprod^{op}$ denota al coproducto en $\mathscr{D}$.

$\boxed{ST3}$ Observemos que $A \in Obj(\mathscr{D}^{op}) \iff A \in Obj(\mathscr{D})$, entonces para cada $A \in \mathscr{D},\; T(A) \in \mathscr{D}$ y $\tilde{T}(A) \in \mathscr{D}^{op}$. Análogamente $T^{-1}(A) \in \mathscr{D}^{op}$.

Sea $f : A \to B$ en $\mathscr{D}^{op}$ entonces $\tilde{T}(f) = (T^{-1}(f^{op}))^{op}$ pero $f^{op} : B \to A$ está en $\mathscr{D}$ por lo que $T^{-1}(f^{op}) \in \mathscr{D}$, es decir, $\tilde{T}(f) \in (\mathscr{D})^{op}$. Análogamente

$\tilde{T}^{-1}(f) \in (\mathscr{D})^{op}$.

$\boxed{ST4}$ Sea $f : X \to Y$ en $\mathscr{D}^{op}$, ntonces $f^{op} : Y \to X$ en $\mathscr{D}$, por (ST4) sobre $\mathscr{D}$, se tiene que existe $\eta :\ Y \xrightarrow{f^{op}} X \longrightarrow Z \longrightarrow TY \ \in \triangle|_{\mathscr{D}}$ con Z en $\mathscr{D}$. Así por el teorema (1.3) $\eta_0 :\ T^{-1}Z \longrightarrow Y \xrightarrow{f^{op}} X \longrightarrow Z \ \in \triangle|_{\mathscr{D}}$, y por definición de categoría triangulada opuesta
$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \tilde{T}^{-1}Z \longrightarrow \tilde{T}X \ \in \triangle|_{\mathscr{D}^{op}}$.

Por lo que $(\mathscr{D}, T|_{\mathscr{D}}, \triangle|_{\mathscr{D}})^{op}$ es subcategoría triangulada de $(\mathscr{C}, T, \triangle)^{op}$.

□

12.

13.

Sección extra

13' Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\Sigma \subset Mor(\mathscr{C})$. Pruebe que la categoría $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ y el funtor de localización $Q : \mathscr{C} \to \mathscr{C}(\Sigma^{-1}]$ son únicos salvo isomorfismos. Mas precisamente, sea $q : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ un funtor tal que

a) $\forall \sigma \in \Sigma \quad q(\sigma)$ es iso.
b) $\forall f : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ tal que $F(\sigma)$ es iso $\forall \sigma \in \Sigma$, $\exists! \bar{F} : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ tal que $\bar{F} \circ q = F$.

Pruebe que existe un isomorfismo de categorías $\epsilon : \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \to \mathscr{B}$ tal que $\epsilon \circ Q = q \quad$ i.e.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "q"'] & \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \arrow[d, dashed, "\epsilon"] \\ & \mathscr{B} \end{tikzcd} .$$

Demostración. Supongamos $q : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ es un funtor tal que

a) $\forall \sigma \in \Sigma \quad q(\sigma)$ es iso.
b) $\forall f : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ tal que $F(\sigma)$ es iso $\forall \sigma \in \Sigma$, $\exists! \bar{F} : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ tal que $\bar{F} \circ q = F$.

Como $Q : \mathscr{C} \to \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ es tal que $Q(\sigma)$ es iso $\forall \sigma \in \Sigma$, entonces por hipótesis $\exists!\, \epsilon_0 : \mathscr{B} \to \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ tal que $\epsilon_0 \circ q = Q$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "Q"'] & \mathscr{B} \arrow[d, dashed, "\epsilon_0"] \\
& \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]
\end{tikzcd} .$$

Ahora, como Q es funtor de localización y $q(\sigma)$ es iso $\forall \sigma \in \Sigma$, entonces por definición $\exists!\, \epsilon : \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \to \mathscr{B}$ tal que $\epsilon \circ Q = q$. Así se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \arrow[d, "\epsilon"] \\
\mathscr{C} \arrow[ur, "Q"] \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "Q"'] & \mathscr{B} \arrow[d, dashed, "\epsilon_0"] \\
& \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]
\end{tikzcd} .$$

En particular $\epsilon_0\epsilon$ es un funtor, t es tal que $\forall \sigma \in \Sigma\ \epsilon_0\epsilon(\sigma)$ es un isomorfismo. Así por (L2) sobre el funtor de localización Q, se tiene que $\epsilon_0\epsilon$ es único, pero $1_{\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]}$ es un funtor con la misma propiedad (pues σ es iso para cada $\sigma \in \Sigma$) por lo tanto $\epsilon_0\epsilon = 1_{\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]}$ y analogamente $\epsilon\epsilon_0 = 1_{\mathscr{B}}$. $\square$

Corolario 1.9 Para una categoría pretriangulada $(\mathscr{C}, T, \triangle)$, las siguientes condiciones se satisfacen:

a) Tomo mono (respectivamente epi) es $\mathscr{C}$ es split-mono (respectivamente split-epi).

b) Si $\mathscr{C}$ es abeliano, entonces $\mathscr{C}$ es semisimple (i.e. $Ext^1_{\mathscr{C}}(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathscr{C}$).

Demostración. Se mostrará que todo epi en $\mathscr{C}$ es un split-epi.

Sea $f : X \to Y$ epi en $\mathscr{C}$, entonces $f^{op} : Y \to X$ es un mono en $\mathscr{C}^{op}$. Por el (ej. 5) sabemos que $(\mathscr{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\triangle})$ es una categoría pretriangulada, y por el inciso a), como f^{op}es mono, entonces f^{op} es split-mono. Así f es split-epi en $\mathscr{C}^{op}$. $\square$