Categorías trianguladas

Ejercicios 1-13'

Luis Gerardo Arruti Sebastian
Sergio Rosado Zúñiga
Eduardo León Rodríguez

Ej 1. Sean $\mathscr{C}$ una categoría aditiva y $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ un funtor de traslación. Se tiene que:

(a) $\mathscr{T}(\mathscr{C}, T)$ es una categoría.

(b) $\varphi = (f, g, h) : \eta \to \mu$ es un isomorfismo en $\mathscr{T}(\mathscr{C}, T)$ si y sólo si f, g y h son isomorfismos en $\mathscr{C}$.

Demostración. $\boxed{(a)}$ <u>C1</u>. Por definición se tiene que

$$Hom\left(\mathscr{T}(\mathscr{C}, T)\right) = \bigcup_{(\eta,\mu) \in Obj(\mathscr{T}(\mathscr{C},T))^2} Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C},T)}(\eta, \mu).$$

Sea $(\eta, \mu) \in Obj\left(\mathscr{T}(\mathscr{C}, T)\right)^2$, con $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$ y $\mu = (X', Y', Z', u', v', w')$. Se tiene que

$$Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C},T)}(\eta, \mu) \subseteq Hom_{\mathscr{C}}(X, X') \times Hom_{\mathscr{C}}(Y, Y') \times Hom_{\mathscr{C}}(Z, Z'),$$

donde $Hom_{\mathscr{C}}(X, X'), Hom_{\mathscr{C}}(Y, Y'), Hom_{\mathscr{C}}(Z, Z')$ son conjuntos, por lo cual $Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C},T)}(\eta, \mu)$ también lo es.

<u>C2</u>. Se tiene por la definición de los morfismos de triangulos.

<u>C3</u> Sean

$$\begin{aligned} \eta &= X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \ , \\ \mu &= A \xrightarrow{r} B \xrightarrow{s} C \xrightarrow{t} TA \ , \\ \nu &= L \xrightarrow{o} M \xrightarrow{p} N \xrightarrow{q} TL \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi &= (f, g, h) \in Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C},T)}(\eta, \mu), \\ \psi &= (i, j, k) \in Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C},T)}(\mu, \nu). \end{aligned}$$

(i) Verificaremos primeramente que la composición de morfismos de triangulos está bien definida. Se tiene que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
A \arrow[r, "r"] & B \arrow[r, "s"] & C \arrow[r, "t"] & TA
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(IV)}"] & B \arrow[r, "s"] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(V)}"] & C \arrow[r, "t"] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(VI)}"] & TA \arrow[d, "Ti"] \\
L \arrow[r, "o"] & M \arrow[r, "p"] & N \arrow[r, "q"] & TL
\end{tikzcd}$$

son diagramas conmutativos en $\mathscr{C}$. Así

$$\begin{aligned}
(jg)\,u &= j\,(gu) = j\,(rf)\,, && \text{por (I)}\\
&= (jr)\,f = (oi)\,f, && \text{por (IV)}\\
&= o\,(if)\,.
\end{aligned}$$

En forma análoga, empleando (II) y (IV), y (III) y (VI) respectivamente, se verifica que

$$\begin{aligned}
(kh)\,v &= p\,(jg)\\
T\,(if)\,w &= (TiTf)\,w = q\,(kh)\,.
\end{aligned}$$

Con lo cual $\psi \circ \varphi = (if, jg, kh) \in Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C},T)}\,(\eta,\nu)$ y así la correspondencia $\circ$ está bien definida; más aún es asociativa, puesto que la composición en $\mathscr{C}$ lo es.

(ii) Dado que $T1_A = 1_{TA}$, se tiene que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_X"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_Y"] & C \arrow[r, "w"] \arrow[d, "1_Z"] & TA \arrow[d, "T1_X"] \\
A \arrow[r, "u"] & B \arrow[r, "v"] & C \arrow[r, "w"] & TA
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$ y así

$$\chi := (1_A, 1_B, 1_C) \in Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C},T)}\,(\mu,\mu)\,;$$

más aún, dado que $1_A, 1_B, 1_C$ son las respectivas identidades en $\mathscr{C}$ para los objetos A, B y C, se tiene que $\chi\varphi = \varphi$ y $\psi\xi = \psi$.

$\boxed{(b)}$ Continuaremos usando las descripciones dadas para los triangulos η y μ dadas al comienzo de (a).

Se tiene que $\exists\ \xi \in Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C},T)}(\mu,\eta)$, con $\xi = (f', g', h')$, tal que

$$(f'f, g'g, h'h) = \xi\varphi = 1_\eta = (1_X, 1_Y, 1_Z)$$

y

$$(ff', gg', hh') = \varphi\xi = 1_\mu = (1_A, 1_B, 1_C),$$

de lo cual se sigue que f, g y h son isomorfismos en $\mathscr{C}$ con inversa, respectivamente, f', g' y h'.

$\underline{\Longleftarrow}$ Notemos que bajo esta hipótesis se tiene que

$$\left(f^{-1}f, g^{-1}g, h^{-1}h\right) = (1_X, 1_Y, 1_Z), \left(ff^{-1}, gg^{-1}, hh^{-1}\right) = (1_A, 1_B, 1_C),$$

por lo cual, por la definición de la ocmposición de morfismos de triángulos, basta con verificar que $\left(f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}\right) \in Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C},T)}(\mu,\eta)$.
Como $\varphi \in Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C},T)}(\mu,\eta)$, entonces

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
A \arrow[r, "r"] & B \arrow[r, "s"] & C \arrow[r, "t"] & TA
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativmo en $\mathscr{C}$, con lo cual

$$\begin{aligned} gu &= rf, \\ hv &= sg, \\ Tfw &= th. \end{aligned}$$

Por lo anterior y dado que, por ser T un funtor, T manda isomorfismos en isomorfismos y más aún $(Tf)^{-1} = T\left(f^{-1}\right)$, se tiene que

$$\begin{aligned} uf^{-1} &= g^{-1}r, \\ vg^{-1} &= h^{-1}s, \\ wh^{-1} &= T\left(f^{-1}\right)t. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f^{-1}"'] & B \arrow[r, "s"] \arrow[d, "g^{-1}"] & C \arrow[r, "t"] \arrow[d, "h^{-1}"] & TA \arrow[d, "Tf^{-1}"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$ y así se tiene lo deseado.

$\square$

Ej 2. Sean $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ una categoría pre-triangulada y $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ en $\triangle$. Pruebe que $u \in SKer(v)$, $\quad v \in SCoKer(u) \cap SKer(w)$ y $w \in SCoKer(v)$.

Demostración. Primero se probará que $u \in SKer(v)$.
Por el teorema (1.2.a) se tiene que $vu = 0$.

Sea $r : M \to Y$ tal que $vr = 0$. Como $M \in \mathscr{C}$, entonces por el teorema (TR1a) $M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow TM$ está en $\triangle$, y por (TR2) se puede rotar el triangulo de las hipótesis tal se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, "r"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & T(M) \arrow[r, "-T(1_M)"] & TM \arrow[d, "T(r)"] \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & T(x) \arrow[r, "-T(u)"'] & T(y)\,.
\end{tikzcd}$$

Así, por (TR3) existe $s' : T(M) \to T(X)$ tal que $(T(r))(-T(1_M)) = (-T(u))(s')$, y como T es autofuntor, entonces $-T(r \circ 1_M)) = -T(u \circ T^{-1}(s'))$. Si se toma $s = T^{-1}(s') : M \to X$ se tiene que $r = us$, por lo tanto $u \in SKer(v)$.

Veamos ahora que $v \in SCoker(u)$.

Anteriormente se observó que $vu = 0$. Sea $t : Y \to M$ tal que $tu = 0$. Como $M \in \mathscr{C}$, entonces por el teorema (TR1a) $M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow TM$ está en $\triangle$, así por (TR2) $0 = T^{-1}(0) \xrightarrow[0]{} M \xrightarrow[1_M]{} M \longrightarrow 0$ está en $\triangle$.

Además, como $tu = 0$ entonces entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "0"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "t"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \arrow[d, "T(0)=0"] \\
0 \arrow[r, "0"'] & M \arrow[r, "1_M"'] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Así, por (TR3) existe $s : Z \to M$ tal que $1_M \circ t = sv$ y por lo tanto $v \in SCoKer(u)$.

Por último, rotando el triángulo de las hipótesis por (TR1c) se tiene que $Y \xrightarrow[v]{} Z \xrightarrow[w]{} T(x) \xrightarrow[-T(u)]{} T(y)$ está en $\triangle$, así por lo demostrado $v \in Ker(w)$ y $w \in CoKer(v)$.

$\square$

Ej 3. Sean $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ una categoría pre-triangulada y $(f, g, h) : \eta \to \mu$ en $T(\mathscr{C}, T)$, con $\eta, \mu \in \triangle$. Pruebe que si dos de los tres morfismos f, g y h son isos, entonces el tercero también lo es.

Demostración. *a*) Caso 1. Si f y g son isos en $\mathscr{C}$, entonces por el teorema 1.2(c) se concluye que h es iso en $\mathscr{C}$.

b) Suponga que f y h son isos en $\mathscr{C}$. Se inicia con la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
A \arrow[r, "a"] & B \arrow[r, "b"] & C \arrow[r, "c"] & TA
\end{tikzcd}$$

después de aplicar una rotación a la izquierda (por 1.3) a los triángulos η y μ, se obtiene la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}Z \arrow[r, "-T^{-1}w"] \arrow[d, "T^{-1}h"'] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[d, "h"] \\
T^{-1}C \arrow[r, "-T^{-1}c"] & A \arrow[r, "a"] & B \arrow[r, "b"] & C
\end{tikzcd}$$

dado que $-T^{-1}c \circ T^{-1}h = -(T^{-1}c \circ T^{-1}h) = -(f \circ T^{-1}w) = f \circ -T^{-1}w$ y como $T^{-1}h$ es un iso en $\mathscr{C}$ pues h lo es, entonces por el teorema 1,2 (c) se concluye que g es un iso en $\mathscr{C}$.

c) Suponga que g y h son isos en $\mathscr{C}$. Una vez mas se tiene la siguiente configuración inicial:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
A \arrow[r, "a"] & B \arrow[r, "b"] & C \arrow[r, "c"] & TA
\end{tikzcd}$$

después de aplicar una rotación a la derecha (por TR2) a los triángulos η y μ, se obtiene la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[r, "-Tu"] \arrow[d, "Tf"] & TY \arrow[d, "Tg"] \\
B \arrow[r, "b"] & C \arrow[r, "c"] & TA \arrow[r, "-Ta"] & TB
\end{tikzcd}$$

observe que $Tg \circ Tu = Ta \circ Tf$ por lo que $Tg \circ -Tu = -Ta \circ Tf$, dado que g y h son isos, se cuenta con las hipótesis necesarias para concluir que Tf es un iso en $\mathscr{C}$ y como T^{-1} es funtor (es decir preserva isos) se sigue que $f = T^{-1}(Tf)$ es un iso en $\mathscr{C}$.

□

Ej 4. Sean $(\mathscr{C}, T, \Delta)$ una categoría pretriangulada y η un triangulo distinguido $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$. Entonces los siguientes triangulos son distinguidos:

(a) $\mu = X \xrightarrow{-u} Y \xrightarrow{-v} Z \xrightarrow{w} TX$,

(b) $\nu = X \xrightarrow{-u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{-w} TX$,

(c) $\chi = X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{-v} Z \xrightarrow{-w} TX$.

Demostración. Por ser T en partícular un funtor aditivo se tiene que $T(-1_X) = -1_{TX}$, con lo cual

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "-1_X"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1_Y"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "-1_Z"] & TX \arrow[d, "T-1_X"] \\
X \arrow[r, "-u"] & Y \arrow[r, "-v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$, cuyas columnas son isomorfismos. Por lo tanto por Ej. 1(b) $(-1_X, 1_Y, -1_Z) : \eta \to \mu$ es un isomorfismo en $\mathscr{T}(\mathscr{C}, T)$ y así, como $\eta \in \Delta$, por TR1(b) $\mu \in \Delta$. Análogamente, empleando que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "-1_Y"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "-1_Z"] & TX \arrow[d, "T1_X"] \\
X \arrow[r, "-u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "-w"] & TX
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "-1_X"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "-1_Y"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "1_Z"] & TX \arrow[d, "T-1_X"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "-v"] & Z \arrow[r, "-w"] & TX
\end{tikzcd}$$

son diagramas conmutativos en $\mathscr{C}$, se verifica que $\nu, \chi \in \Delta$.

$\square$

Ej 5. Sea $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ una categoría pretriangulada (respectivamente triangulada), pruebe que el triple $(\mathscr{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\triangle})$ es una categoría pretriangulada (respectivamente triangulada), donde $\tilde{T}(f^{op}) = (T^{-1}(f))^{op}$ y $\tilde{\triangle}$ se define como sigue:

$$X \xrightarrow{u^{op}} Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} \tilde{T}X \qquad \in \tilde{\triangle}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Z \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} X \xrightarrow{Tw} TZ \qquad \in \triangle\,.$$

En tal caso se define $(\mathscr{C}, T, \triangle)^{op} := (\mathscr{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\triangle})$.
Esto es, $(\mathscr{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\triangle})$ es una categoría pretriangulada (respectivamente triangulada) opuesta de $(\mathscr{C}, T, \triangle)^{op}$.

Demostración. Se puede observar que al tomar $(\mathscr{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\triangle})$ como se describe en las hipótesis, al ser $\mathscr{C}$ una categoría abeliana, entonces $\mathscr{C}^{op}$ también es una categoría abeliana, donde la operación está definida por
$f^{op} \tilde{+} g^{op} := (f+g)^{op}$ para cada $f, g \in Mor(\mathscr{C})$ y
$+ : Mor(\mathscr{C}) \times Mor(\mathscr{C}) \to Mor(\mathscr{C})$ la operación definida en $\mathscr{C}$.

Por lo anterior se tiene entonces que el funtor opuesto de una categoría aditiva cualquiera $\mathscr{A}$ es aditivo, pues si $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ entonces

$$D_{\mathscr{A}}(f+g) = (f+g)^{op} = f^{op} \tilde{+} g^{op} = D_{\mathscr{A}}(f) \tilde{+} D_{\mathscr{A}}(g).$$

Con esto en mente se demostrará que $\tilde{T}$ es un autofuntor aditivo.

Lo primero que se tiene que notar es que $\tilde{T} = D_{\mathscr{C}} T^{-1} D_{\mathscr{C}^{op}}$, por lo que $\tilde{T}$ es un funtor aditivo al ser composición de funtores aditivos. Por otra parte se tiene que $\tilde{G} = D_{\mathscr{C}} T D_{\mathscr{C}^{op}}$ es un funtor aditivo, y es tal que

$$\begin{aligned}
\tilde{G}\tilde{T} &= D_{\mathscr{C}} T D_{\mathscr{C}^{op}} D_{\mathscr{C}} T^{-1} D_{\mathscr{C}^{op}} \\
&= D_{\mathscr{C}} T T^{-1} D_{\mathscr{C}^{op}} \\
&= D_{\mathscr{C}} D_{\mathscr{C}^{op}} \\
&= 1_{\mathscr{C}^{op}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}\tilde{G} &= D_{\mathscr{C}}T^{-1}D_{\mathscr{C}^{op}}D_{\mathscr{C}}TD_{\mathscr{C}^{op}}\\ &= D_{\mathscr{C}}T^{-1}TD_{\mathscr{C}^{op}}\\ &= D_{\mathscr{C}}D_{\mathscr{C}^{op}}\\ &= 1_{\mathscr{C}^{op}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{T}$ es un autofuntor aditivo.

Vemos ahora que $(\mathscr{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\triangle})$ es una categoría pretriangulada.

$\boxed{TR1a)}$ Sea $X \in \mathscr{C}^{op}$ entonces $X \in \mathscr{C}$, como $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ es pretriangulada, entonces $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \in \triangle\cdot$
Rotando a la izquierda dos veces por (1.3) sobre $\mathscr{C}$ se tiene que
$T^{-1}X \xrightarrow{T^{-1}(0)} 0 \longrightarrow X \xrightarrow{1_X} X \in \tilde{\triangle}\cdot$
Así, por definición de $\tilde{\triangle}$ y por el hecho de que $T^{-1}X = \tilde{T}X$ se tiene que
$X \xrightarrow{(1_X)^{op}=1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{T}X \in \tilde{\triangle}\cdot$

$\boxed{TR1b)}$ Sean $\alpha:\ C \xrightarrow{w^{op}} B \xrightarrow{v^{op}} A \xrightarrow{u^{op}} \tilde{T}C$ y
$\beta:\ Z \xrightarrow{t^{op}} Y \xrightarrow{s^{op}} X \xrightarrow{r^{op}} \tilde{T}Z$
en $\mathscr{C}^{op}$, tal que $\alpha \in \tilde{\triangle}$ y $\alpha \cong \beta$. Entonces se tienen isomorfismos $\varphi^{op}, \psi^{op}, \theta^{op} \in Mor(\mathscr{C}^{op})$ tales que el siguiente diagrama conmuta en $\mathscr{C}^{op}$:

$$\begin{tikzcd} \alpha: & C \arrow[r, "w^{op}"] \arrow[d, "\varphi^{op}"] & B \arrow[r, "v^{op}"] \arrow[d, "\psi^{op}"] & A \arrow[r, "u^{op}"] \arrow[d, "\theta^{op}"] & \tilde{T}C \arrow[d, "\tilde{T}(\varphi^{op})"] \\ \beta: & Z \arrow[r, "t^{op}"'] & Y \arrow[r, "s^{op}"'] & X \arrow[r, "r^{op}"'] & \tilde{T}Z. \end{tikzcd}$$

Así el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \alpha': & T^{-1}C \arrow[r, "-u"] & A \arrow[r, "v"] & B \arrow[r, "w"] & C \\ \beta': & T^{-1}Z \arrow[r, "-r"'] \arrow[u, "T^{-1}(\varphi)"] & X \arrow[r, "s"'] \arrow[u, "\theta"] & Y \arrow[r, "t"'] \arrow[u, "\psi"] & Z, \arrow[u, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

pues

- •) $-u \circ T^{-1}(\varphi) = -[(T^{-1}(\varphi))^{op} \circ u^{op}]^{op} = -[\tilde{T}(\varphi^{op}) \circ u^{op}]^{op}$
  $= -[r^{op}\theta^{op}]^{op} = -[(\theta r)^{op}]^{op} = -[\theta r] = \theta \circ (-r).$
- •) $v\theta = [\theta^{op}v^{op}]^{op} = [s^{op}\psi^{op}]^{op} = [(\psi s)^{op}]^{op} = \psi s.$
- •) $w\psi = [\psi^{op}w^{op}]^{op} = [t^{op}\varphi^{op}]^{op} = [(\varphi t)^{op}]^{op} = \varphi t.$

Como $A \xrightarrow{v} B \xrightarrow{w} C \xrightarrow{T(u)} TA \in \triangle$ por estar $\alpha \in \tilde{\triangle}$, entonces $\alpha' \in \triangle$ por (TR2) sobre $\mathscr{C}$ al ser su rotación a izquierda. Así se tiene que $\alpha' \cong \beta'$ con $\alpha' \in \triangle$ y, por (TR1 b)), $\beta' \in \triangle$. Eso implica que (al rotar β' por (TR2)) el triangulo $X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{t} Z \xrightarrow{T(r)} TX \in \triangle$ y por definición entonces $\beta \in \tilde{\triangle}$.

$\boxed{TR1c)}$ Sea $f^{op} : B \to A$ en $\mathscr{C}^{op}$ entonces $f : A \to B$ está en $\mathscr{C}$.

Por (TR1 c)) sobre $\mathscr{C}$, existe $B \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX$ en $\mathscr{C}$ tal que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \in \triangle$, así por (TR2) sobre $\mathscr{C}$ se tiene que $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(\beta)} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha = T(T^{-1}(\alpha))} Z \in \triangle$ ·

Por lo tanto $B \xrightarrow{f^{op}} A \xrightarrow{-(T^{-1}(\beta))^{op}} T^{-1}Z \xrightarrow{(T^{-1}(\alpha))^{op}} \tilde{T}B \in \tilde{\triangle}$ y así $B \xrightarrow{f^{op}} A \xrightarrow{-(\tilde{T}(\beta)^{op})} \tilde{T}Z \xrightarrow{\tilde{T}(\alpha)^{op}} \tilde{T}B \in \tilde{\triangle}$ ·

$\boxed{TR2}$ Sea $X \xrightarrow{u^{op}} Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} TX \in \tilde{\triangle}$, entonces por definición $Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{T(w)} TZ \in \triangle$ ·

Por el ejercicio 4 se tiene que $Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{-u} X \xrightarrow{-T(w)} TZ \in \triangle$, y por (1.3) $T^{-1}X \xrightarrow{-(T^{-1}(-T(w)))} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{-u} X \in \triangle$, es decir, $T^{-1}X \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{-u} X \in \triangle$ ·

Entonces por definición de $\tilde{\triangle}$ se tiene que

$$Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} T^{-1}X \xrightarrow{-\tilde{T}(u^{op})} \tilde{T}Y \in \tilde{\triangle}$$

es decir, $Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} \tilde{T}X \xrightarrow{-\tilde{T}(u^{op})} \tilde{T}Y \in \tilde{\triangle}$ ·

$\boxed{TR3}$ Sean $\eta^{op} = (X, Y, Z, u^{op}, v^{op}, w^{op})$, $\mu^{op} = (X_0, Y_0, Z_0, u_0^{op}, v_0^{op}, w_0^{op})$ en $\tilde{\triangle}$, y $f^{op} : X \to X_0$, $g^{op} : Y \to Y_0$ tales que $g^{op}u^{op} = u_0^{op}f^{op}$. Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}^{op}$:

$$\begin{tikzcd}
\eta : & X \arrow[r, "u^{op}"] \arrow[d, "f^{op}"] & Y \arrow[r, "v^{op}"] \arrow[d, "g^{op}"] & Z \arrow[r, "w^{op}"] & \tilde{T}X \arrow[d, "\tilde{T}(f^{op})"] \\
\mu : & X_0 \arrow[r, "u_0^{op}"'] & Y_0 \arrow[r, "v_0^{op}"'] & Z_0 \arrow[r, "w_0^{op}"'] & \tilde{T}X_0 .
\end{tikzcd}$$

y en consecuencia se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
Z_0 \arrow[r, "v_0"] & Y_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "g"] & X_0 \arrow[r, "T(w_0)"] \arrow[d, "f"] & TZ_0 & \in \triangle \\
Z \arrow[r, "v"'] & Y \arrow[r, "u"'] & X \arrow[r, "T(w)"'] & TZ & \in \triangle \ldots (1)
\end{tikzcd}
$$

donde, como $g^{op}u^{op} = u_0^{op}f^{op}$ entonces $(ug)^{op} = (fu_0)^{op}$, es decir, $ug = fu_0$.

Rotando a la izquierda por (1.3), se tiene el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
Y_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "g"] & X_0 \arrow[r, "T(w_0)"] \arrow[d, "f"] & TZ_0 \arrow[r, "-T(v_0)"] & TY_0 \arrow[d, "T(f)"] \\
Y \arrow[r, "u"'] & X \arrow[r, "T(w)"'] & TZ \arrow[r, "-T(v)"'] & TY.
\end{tikzcd}
$$

Así por (TR3) sobre $\triangle$, se tiene que existe $h_1 : TZ_0 \to TZ$ tal que hace conmutar el diagrama, es decir, $h_1 T(w_0) = t(w)f$ y $-T(v)h_1 = T(f)(-T(v_0))$.

Tomando $h = T^{-1}(h_1)$ se tiene que, como T es fiel y pleno,

$$
\begin{aligned}
-T(v)h_1 &= -T(gv_0) \\
T(vh) &= T(gv_0) \\
vh &= gv_0
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
h_1 T(w_0) &= t(w)f \\
T(h)T(w_0) &= T(w)f\,.
\end{aligned}
$$

Es decir, (1) con el morfismo h es un diagrama conmutativo, y tomando h^{op} se tiene que $v^{op}g^{op} = (gv)^{op} = (vh)^{op} = h^{op}v^{op}$ y $w^{op}h^{op} = (hw_0)^{op} = (T{-}1(T(h)T(w_0)))^{op} = (T{-}1(T(h)f))^{op} = (wT^{-1}(f))^{op} = (T^{-1}(f))^{op}w^{op} = \tilde{T}(f^{op})w^{op}$. Por lo que es diagrama de las hipótesis para TR3 es conmutativo con h^{op}.

$\boxed{TR4}$ Por último, en caso de ser $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ categoría triangulada supongamos que tenemos el siguiente diagrama en $\mathscr{C}^{op}$

$$
\begin{tikzcd}
\alpha^{op}: & X \arrow[r, "u^{op}"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i^{op}"] \arrow[d, "v^{op}"] & Z' \arrow[r, "i'^{op}"] & \tilde{T}X \arrow[d, equal] \\
\beta^{op}: & X \arrow[r, "v^{op}u^{op}"] \arrow[d, "u^{op}"'] & Z \arrow[r, "k^{op}"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "k'^{op}"] & \tilde{T}X \arrow[d, "\tilde{T}(u^{op})"] \\
\gamma^{op}: & Y \arrow[r, "v^{op}"] & Z \arrow[r, "r^{op}"] & X' \arrow[r, "j^{op}"] \arrow[d, "h^{op}"] & \tilde{T}Y \arrow[d, "\tilde{T}(i^{op})"] \\
 & & & TZ' \arrow[r, equal] & TZ'
\end{tikzcd}
\qquad \ldots (1).
$$

Se afirma que existen f^{op}, g^{op} tales que $\theta^{op} : Z' \xrightarrow{f^{op}} Y' \xrightarrow{g^{op}} X' \xrightarrow{h^{op}} \tilde{T}Z' \in \tilde{\triangle}$ y hacen conmutar el diagrama anterior.

Observemos el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$
\begin{tikzcd}
\gamma_0: & T^{-1}Z \arrow[r, "-T^{-1}(v)"] \arrow[d, equal] & T^{-1}Y \arrow[r, "-j"] \arrow[d, "T^{-1}(u)"] & X' \arrow[r, "r"] & Z \arrow[d, equal] \\
\beta_0: & T^{-1}Z \arrow[r, "-T^{-1}(uv)"] \arrow[d, "T^{-1}(v)"'] & T^{-1}X \arrow[r, "-k'"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "k"] & Z \arrow[d, "v"] \\
\alpha_0: & T^{-1}Y \arrow[r, "-T^{-1}(u)"] & T^{-1}X \arrow[r, "-i'"] & Z' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "T(h)"] & Y \arrow[d, "T(j)"] \\
 & & & TX' \arrow[r, equal] & TX'
\end{tikzcd}
\qquad \ldots (2).
$$

Observemos que $h^{op} = \tilde{T}(i^{op})j^{op} = (T^{-1}(i))^{op}j^{op}$ entonces $h = jT^{-1}(i)$ y así $T(h) = T(j)i$.

Ahora, consideremos a α, β y γ como los triangulos distinguidos en $\mathscr{C}$

dados por los triangulos en $\tilde{\triangle}$ dados en el primer diagrama:

$$\alpha : Z' \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{T(i')} TZ'$$

$$\beta : Y' \xrightarrow{k} Z \xrightarrow{uv} X \xrightarrow{T(k')} TY'$$

$$\gamma : X' \xrightarrow{r} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{T(j)} TX' \ ,$$

y rotando dos veces a la izquierda cada uno por (TR2) sobre $\triangle$ se obtienen α_0, β_0 y γ_0 respectivamente, los cuales por definición serán elementos de $\tilde{\triangle}$.

Como $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ es categoría triangulada, por el axioma del octaedro existen $g : X' \to Y'$ y $f : Y' \to Z'$ tales que hacen conmutar el diagrama (2) y $\theta : X' \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{f} Z' \xrightarrow{T(h)} TX' \in \triangle$. Así

$\theta^{op} : Z' \xrightarrow{f^{op}} Y' \xrightarrow{g^{op}} X' \xrightarrow{h^{op}} TZ' \in \tilde{\triangle}$, y f^{op}, g^{op} hacen conmutar el diagrama (1), pues:

- $f^{op} i^{op} = (if)^{op} = (vk)^{op} = k^{op} v^{op}$.
- $-i' = f \circ (-k')$ entonces $(-i')^{op} = (f \circ (-k'))^{op} = -(k')^{op} f^{op}$ así $i^{op} = k'^{op} f^{op}$.
- $g^{op} k^{op} = (kg)^{op} = (r)^{op}$.
- $j^{op} g^{op} = (gj)^{op} = (kT^{-1}(u))^{op} = (T^{-1}(u))^{op} k^{op} = \tilde{T}(u^{op}) k^{op}$.

$\square$

Ej 6. Sean $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ una categoría pre-triangulada y $\eta : X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ en $\triangle$. Pruebe que para cada $i \in \mathbb{Z}$, el siguiente triangulo es distinguido

$$\eta^i : T^i(X) \xrightarrow{(-1)^i T^i(u)} T^i(Y) \xrightarrow{(-1)^i T^i(v)} T^i(Z) \xrightarrow{(-1)^i T^i(w)} T^{i+1}(X).$$

Demostración. En el caso que $i \in \mathbb{N}$ la demostración se sigue por inducción.

Caso base. $i = 0$. En este caso $\eta^i = \eta^0 = \eta \in \triangle$.

Hipótesis de inducción. Sea $i > 0$ y suponga que $\eta^i \in \triangle$.

Paso inductivo. Después de aplicar 3 rotaciones consecutivas a la derecha (TR2) al triángulo η^i se obtiene el siguiente triangulo distinguido:

$$T^{i+1}(X) \xrightarrow{(-1)^{i+1} T^{i+1} u} T^{i+1}(Y) \xrightarrow{(-1)^{i+1} T^{i+1} v} T^{i+1}(Z) \xrightarrow{(-1)^{i+1} T^{i+1} w} T^{i+2}(X)$$

es decir, $\eta^{i+1} \in \triangle$.

Resta demostrar que se encuentran los triángulos del tipo $\eta^{(-i)}$ para $i \geq 0$. Y para demostrar esto se procede también por inducción sobre i. El caso base coincide con el demostrado antes, se sigue pues con:

hipótesis de inducción. Sea $i > 0$ y suponga que $\eta^{(-i)} \in \triangle$.

Paso inductivo. Después de aplicar 3 rotaciones consecutivas a la izquierda (por 1.3) al triangulo $\eta^{(-i)}$ se obtiene el siguiente triangulo distinguido:

$$T^{-(i+1)}(X) \xrightarrow{(-1)^{-(i+1)}T^{-(i+1)}u} T^{-(i+1)}(Y) \xrightarrow{(-1)^{-(i+1)}T^{-(i+1)}v} T^{-(i+1)}(Z) \xrightarrow{(-1)^{-(i+1)}T^{-(i+1)}w} T^{-i}(X)$$

es decir, $\eta^{-(i+1)} \in \triangle$. Se concluye el ejercicio.

$\square$

Ej 7. Sean $(\mathscr{C}, T\Delta)$ una categoría pretriangulada, $\mathscr{A}$ una categoría abeliana, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ un funtor cohomológico y, para cada $i \in \mathbb{Z}$, $F^i := F \circ T^i$. Entonces $\forall \;\; X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \in \Delta$, se tienen las siguientes sucesiones exactas largas en $\mathscr{A}$ según corresponda a la varianza de F:

(a) $\ldots \longrightarrow F^iX \xrightarrow{F^iu} F^iY \xrightarrow{F^iv} F^iZ \xrightarrow{F^iw} F^{i+1}X \longrightarrow \ldots,$
si F es covariante;

(b) $\ldots \longrightarrow F^iZ \xrightarrow{F^iw} F^iY \xrightarrow{F^iv} F^iX \xrightarrow{F^iu} F^{i+1}Z \longrightarrow \ldots,$
si F es contravariante.

Demostración. Comenzaremos verificando lo siguiente:

Lema. Sean $\mathscr{A}$ una categoría abeliana y $\alpha : A \to B$ en $\mathscr{A}$, entonces

(i) $Ker\,(\alpha) = Ker\,(-\alpha)$,

(ii) $Im\,(\alpha) = Im\,(-\alpha)$.

Demostración. (i) Notemos que la afirmación es equivalente a que $\beta : C \hookrightarrow A$ es un kernel para α si y sólo si lo es para $-\alpha$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Se tiene que

$$(-\alpha)\,\beta = -\,(\alpha\beta) = 0.$$

Ahora, si $\gamma : C' \to A$ es tal que $(-\alpha)\,\gamma = 0$, entonces $-\,(\alpha\gamma) = 0$ y por tanto $\alpha\gamma = 0$. Así, por la propiedad universal del kernel aplicada a β y α se obtiene que $\exists!\ \delta : C' \to C$ tal que $\gamma = \beta\delta$. Con lo cual se he verificado

que β es un kernel para $-\alpha$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Como β es un kernel para $\alpha' := -\alpha$ entonces por lo probado en $\boxed{\Longrightarrow}$ β es un kernel para $-\alpha' = -(-\alpha) = \alpha$.

ii Primeramente notemos que lo demostrado en (i) garantiza que $Coker\,(\alpha) = Coker\,(-\alpha)$. En efecto, como $\mathscr{A}^{op}$ al serlo $\mathscr{A}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \beta \in Coker\,(\alpha) \text{ en } \mathscr{A} &\iff \beta^{op} \in Ker\,(\alpha^{op}) \text{ en } \mathscr{A}^{op}, \\ &\iff \beta^{op} \in Ker\,(-^{op}\alpha^{op}) \text{ en } \mathscr{A}^{op}, && \text{(i)} \\ &\iff \beta^{op} \in Ker(-\alpha)^{op} \text{ en } \mathscr{A}^{op}, && (*) \\ &\iff \beta \in Coker\,(-\alpha) \text{ en } \mathscr{A}. \end{aligned}$$

La equivalencia dada en (*) se sigue de que la estructura aditiva en $Hom_{\mathscr{A}^{op}}(B, A)$ viene dada por

$$\varphi^{op} +^{op} \theta^{op} := \varphi + \theta^{op}.$$

Ahora, sea ν un subobjeto de B. Dado que $\mathscr{A}$ es abeliana por por 1.6.4 de las notas de Homología relativa en categorías abelianas se tiene que

$$\begin{aligned} \nu \in Im\,(-\alpha) &\iff \nu \in Ker\,(Coker\,(-\alpha))\,, \\ &\iff \nu \in Ker\,(Coker\,(\alpha))\,, \\ &\iff \nu \in Im\,(\alpha)\,, \end{aligned}$$

con lo cual se tiene lo deseado.

$\square$

$\boxed{(a)}$ Sea $i \in \mathbb{Z}$. Por Ej. 6

$$\eta:\ T^iX \xrightarrow{(-1)^iT^iu} T^iY \xrightarrow{(-1)^iT^iv} T^iZ \xrightarrow{(-1)^iT^iw} T^{i+1}X \ \in \Delta.$$

Así, si suponemos que F es covariante, se tiene que

$$FT^iX \xrightarrow{(-1)^iT^iu} FT^iY \xrightarrow{(-1)^iT^iv} FT^iZ$$

es una sucesión exacta en $\mathscr{C}$. Por lo anterior y el Lema se sigue que

$$Ker\left(F^iv\right) = Ker\left(\left(-1\right)^i F^iv\right) = Im\left(\left(-1\right)^i F^iu\right) = Im\left(F^iu\right),$$

y así

$$F^iX \xrightarrow{F^iu} F^iY \xrightarrow{F^iv} FT^iZ$$

es exacta en $\mathscr{C}$.
Ahora, por (TR2) aplicado a η y por ser T un funtor aditivo se tiene que

$$T^iY \xrightarrow{(-1)^iT^iv} T^iZ \xrightarrow{(-1)^iT^iw} T^{i+1}X \xrightarrow{(-1)^{i+1}T^{i+1}u} T^{i+1}Y \ \in \Delta$$

con lo cual, valiéndose nuevamente del Lema y que F es cohomológico se obtiene la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{C}$

$$F^iY \xrightarrow{F^iv} F^iZ \xrightarrow{F^iw} F^{i+1}X \ .$$

En forma análoga, aplicando F al triángulo distinguido, obtenido a partir de aplicar dos veces (TR2) a η,

$$T^iZ \xrightarrow{(-1)^iT^iw} T^{i+1}X \xrightarrow{(-1)^{i+1}T^{i+1}u} T^{i+1}Y \xrightarrow{(-1)^{i+1}T^{i+1}v} T^{i+1}Z \ \in \Delta$$

se obtiene que

$$F^iZ \xrightarrow{F^iw} F^{i+1}X \xrightarrow{F^{i+1}u} F^{i+1}Y \ .$$

la siguiente sucesión exacta en $\mathscr{C}$.
La arbitrareidad de i nos da lo deseado.

$\boxed{(b)}$ Se demuestra en forma análoga a (a).

$\square$

Ej 8. Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $h : A \to B$ en $\mathscr{C}$. Pruebe que:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, h) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, B) \iff h : A \xrightarrow{\sim} B.$$

Demostración. Supongamos $h : A \to B$ es isomorfismo y sea $M \in \mathscr{C}$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, h) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, B) \cdot$
Sean $g : B \to A$ tal que $h \circ g = 1_B, g \circ h = 1_A$ y $r \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, A)$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, h)(r) = h \circ r$, así $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, g) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, A)$ es tal que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, g) \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, h)(r) = g(hr) = (gh)r = r$$

así $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, g) \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, h) = 1_A$.

Análogamente si $s \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, B)$ entonces
$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, h) \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, g)(s) = h(gs) = (hg)s = s$, es decir
$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, h) \circ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, g) = 1_B$ y así $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M, h)$ es iso.

Por otra parte, si $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\bullet, h)$ es isomorfismo, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,h)", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(1_A,A)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(1_A,B)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A) \arrow[r, "\sim", "\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,h)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B).
\end{tikzcd}$$

mas aún, como $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,h)(1_A) = h \circ 1_A = h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ entonces $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}^{-1}(A,h)h = 1_A$.

Ahora, por el lema de Yoneda existe $g : B \to A$ tal que
$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}^{-1}(A,h) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,g)$ en particular
$h \circ g = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}^{-1}(A,h)(g) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,h)\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}^{-1}(A,h)(1_B) = 1_B$ y
$g \circ h = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}^{-1}(A,h)\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,h)(1_A) = 1_A$ por lo que h es isomorfismo.

□

Ej 9. Sean $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ una categoría pre-triangulada y $\eta : X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$

$\eta' : A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} TA \in \triangle$. Pruebe que el diagrama en $\mathscr{C}$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] & T(X) \\ A \arrow[r, "a"] & B \arrow[r, "b"] & C \arrow[r, "c"] & T(A) \end{tikzcd}$$

las siguientes condiciones son equivalentes.

a) $bgu = 0$
b) Existe $f : X \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $gu = af$
c) Existe $h : Z \to C$ en $\mathscr{C}$ tal que $bg = hv$
d) Existen $f : X \to A$ y $h : Z \to C$ en $\mathscr{C}$ tales que $(f, g, h) : \eta \to \eta'$ es un morfismo de triángulos.

Mas aún, si $Hom_{\mathscr{C}}(X, T^{-1}C) = 0$ y las condiciones anteriores se satisfacen entonces el morfismo f en b) (resp. h en c)) es único.

Demostración. $a) \Rightarrow b)$. Suponga que $b(gu) = bgu = 0$, lo anterior implica que existe $f : X \to A$ tal que $af = gu$ pues $a \in sker(b)$.

$b) \Rightarrow c)$. Suponga que existe $f : X \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $gu = af$, por TR3 existe $h : Z \to C$ tal que $(f, g, h) : \eta \to \eta'$ es un morfismo de triángulos, en particular $bg = hv$.

$c) \Rightarrow d)$. Suponga que existe $h : Z \to C$ en $\mathscr{C}$ tal que $bg = hv$. Resta estudiar la existencia de algún $f : X \to A$ tal que $gu = af$ y que $T(f)w = ch$. Se inicia con la siguiente configuración:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & T(X) \\ A \arrow[r, "a"] & B \arrow[r, "b"] & C \arrow[r, "c"] & T(A) \end{tikzcd}$$

después de aplicar una vez TR2 a los triángulos η y $\eta^{'}$ se obtiene la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & T(X) \arrow[r, "-Tu"] & T(Y) \arrow[d, "Tg"] \\ B \arrow[r, "b"] & C \arrow[r, "c"] & T(A) \arrow[r, "-Ta"] & T(B) \end{tikzcd}$$

entonces por TR3 y por que T es un automorfismo, existe $f : X \to A$ tal que $T(f) \circ w = c \circ h$ y $T(g) \circ -Tu = -Ta \circ Tf$ por consiguiente $gu = af$. Se puede concluir que $(f, g, h) : \eta \to \eta^{'}$ es un morfismo de triángulos.

$d) \Rightarrow a)$. Por hipótesis se sabe que $hv = bg$, es así que se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} bgu =&(bg)u \\ =&(hv)u \\ =&h(vu) \\ =&h0 \\ =&0 \end{aligned}$$

A continuación se estudia la unicidad del morfismo $f : X \to A$. Suponga que existe otro morfismo $f' : X \to A$ en $\mathscr{C}$ tal que $gu = af'$. Es así que se tiene la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed, "f'"'] \arrow[d, shift left, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] & T(X) \\ A \arrow[r, "a"] & B \arrow[r, "b"] & C \arrow[r, "c"] & T(A) \end{tikzcd}$$

después de rotar ambos triángulos una vez a la izquierda (por 1.3) y aplicar el funtor cohomológico $Hom_{\mathscr{C}}(X, \_) : \mathscr{C} \to ab$ se tiene el siguiente par de sucesiones exactas:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(X, T^{-1}Z) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_{\mathscr{C}}(X, X) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{C}}(X,u)"] \arrow[d, dashed, "Hom_{\mathscr{C}}(X,f')"'] \arrow[d, shift left, "Hom_{\mathscr{C}}(X,f)"] & Hom_{\mathscr{C}}(X, Y) \arrow[d, "Hom_{\mathscr{C}}(X,g)"] \\ Hom_{\mathscr{C}}(X, T^{-1}C) = 0 \arrow[r] & Hom_{\mathscr{C}}(X, A) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{C}}(X,a)"'] & Hom_{\mathscr{C}}(X, B) \end{tikzcd}$$

se puede deducir que $Hom_{\mathscr{C}}(X,a)$ es un monomorfismo, así pues se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}(Hom_{\mathscr{C}}(X,a)\circ Hom_{\mathscr{C}}(X,f))(1_X) =&(Hom_{\mathscr{C}}(X,a)\circ Hom_{\mathscr{C}}(X,f'))(1_X)\\ Hom_{\mathscr{C}}(X,f)(1_X) =&Hom_{\mathscr{C}}(X,f')(1_X)\\ f =&f'\end{aligned}$$

como se buscaba.

Para finalizar se estudia la unicidad del morfismo $h : Z \to C$. Suponga que existe otro morfismo $h' : Z \to C$ en $\mathcal{C}$ tal que $bg = h'v$. Así pues se tiene la siguiente situación

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h'"', shift right] \arrow[d, "h", shift left] & T(X) \\ A \arrow[r, "a"] & B \arrow[r, "b"] & C \arrow[r, "c"] & T(A) \end{tikzcd}$$

después de rotar ambos triangulos a las izquierda dos veces (por 1.3) y aplicar el funtor contravariante $Hom_{\mathcal{C}}(\_, T^{-1}C) : \mathcal{C} \to Ab$ se tiene el siguiente par de sucesiones exactas:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(X,T^{-1}C)=0 \arrow[r] & Hom_{\mathscr{C}}(T^{-1}Z,T^{-1}C) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{C}}(-T^{-1}v,T^{-1}C)"] & Hom_{\mathscr{C}}(T^{-1}Y,T^{-1}C) \\ Hom_{\mathscr{C}}(A,T^{-1}C) \arrow[r] \arrow[u] & Hom_{\mathscr{C}}(T^{-1}C,T^{-1}C) \arrow[r, "Hom_{\mathscr{C}}(-T^{-1}b,T^{-1}C)"'] \arrow[u, shift left, "Hom_{\mathscr{C}}(T^{-1}h,T^{-1}C)"] \arrow[u, shift right, dashed, "Hom_{\mathscr{C}}(T^{-1}h',T^{-1}C)"'] & Hom_{\mathscr{C}}(T^{-1}B,T^{-1}C) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

se puede deducir que $Hom_{\mathscr{C}}(-T^{-1}v, T^{-1}C)$ es un monomorfismo, así pues se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned}([-T^{-1}v,T^{-1}C]\circ Hom_{\mathscr{C}}(T^{-1}h,T^{-1}C))(1_{T^{-1}C}) =&([-T^{-1}v,T^{-1}C]\circ Hom_{\mathscr{C}}(T^{-1}h',T^{-1}C))(1_{T^{-1}C})\\ Hom_{\mathscr{C}}(T^{-1}h,T^{-1}C))(1_{T^{-1}C})(1_{T^{-1}C}) =&Hom_{\mathscr{C}}(T^{-1}h',T^{-1}C))(1_{T^{-1}C})(1_{T^{-1}C})\\ T^{-1}h =&T^{-1}h'\\ h =&h'\end{aligned}$$

donde $[-T^{-1}v, T^{-1}C] = Hom_{\mathscr{C}}(-T^{-1}v, T^{-1}C)$.

$\square$

Ej 10. Sean $(\mathscr{C}, T, \Delta)$ una categoría pre-triangulada, $\eta := \; X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ en Δ tal que $Hom_{\mathscr{C}}\left(X, T^{-1}Z\right) = 0$. Las siguientes condiciones se satisfacen:

(a) si

$$\eta' = \; X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX \; \in \Delta,$$

entonces $\exists!\ g : Z \to Z'$ en $\mathscr{C}$ tal que $(1_X, 1_Y, g) : \eta \to \eta'$ es un isomorfismo en $\mathscr{T}(\mathscr{C}, \Delta)$;

(b) si $w' \in Hom_{\mathscr{C}}(Z, TX)$ es tal que $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w'} TX \in \Delta$, entonces $w = w'$.

Demostración. $\boxed{(a)}$ Notemos que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1_X"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & Y \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "1_Y"] & Z' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, dashed, "\exists!\ h"] & TX \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX
\end{tikzcd}$$

es un diagrama en el cual (I) es un cuadro conmutativo y $Hom_{\mathscr{C}}\left(X, T^{-1}Z\right) = 0$, por lo cual aplicando Ej. 9 se sigue que $\exists\ !\ h \in Hom_{\mathscr{C}}(Z', Z)$ tal que (f, g, h) es un morfismo de triangulos; más aún, por Ej. 3 se tiene que h es un isomorfismo puesto que f y g lo son. De modo que, por Ej. 1(b), $(1_X, 1_Y, h) : \eta \tilde{\to} \eta'$ en $\mathscr{T}(\mathscr{C}, T)$, con

$$(1_X, 1_Y, h)^{-1} = \left((1_X)^{-1}, (1_Y)^{-1}, h^{-1}\right) = \left(1_x, 1_Y, h^{-1}\right).$$

Así, tomando $g := h^{-1}$, se ha verificado la existencia.

Sea $g' \in Hom_{\mathscr{C}}(Z, Z')$ tal que $(1_X, 1_Y, g')$ es un isomorfismo en $\mathscr{T}(\mathscr{C}, T)$. Entonces $\left(1_X, 1_Y, g^{-1}\right)(1_X, 1_Y, g')^{-1} : \eta' \tilde{\to} \eta$ en $\mathscr{T}(\mathscr{C}, T)$, luego por la unicidad de h se sigue que $(g')^{-1} = h$ y por lo tanto $g' = h^{-1}$.

$\boxed{(b)}$ Sea $\eta' = (X, Y, Z, u, v, W')$. Como $\eta' \in \Delta$ por (a) se tiene que $\exists!\ g : Z \to Z$ tal que $(1_x, 1_Y, g) : \eta \tilde{\to} \eta'$ en $\mathscr{T}(\mathscr{C}, T)$, así que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(A)}"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(B)}"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w'"] & TX
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$. En partícular, por (A) g es un morfismo tal que $gv = v$. Como $1_Z v = v$ y $Hom_{\mathscr{C}}\big(X, T^{-1}Z\big) = 0$, por Ej. 9($b$), entonces $g = 1_Z$ y así por (B) se tiene que

$$\begin{aligned} w &= 1_{TX} w = w'g = w'1_Z \\ &= w'. \end{aligned}$$

□

Ej 11. Sean $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ una categoría triangulada y $\mathscr{D}$ una subcategoría triangulada. Pruebe que:

a) $\mathscr{D}$ es cerrada por isomorfismos en $\mathscr{C}$ (en particular, $\mathscr{D}$ contiene a todos los ceros de $\mathscr{C}$).

b) $\mathscr{D}$ es una subcategoría aditiva de $\mathscr{C}$.

c) $\forall \eta :$
$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] & \\ X \arrow[rr] & & Y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$
$\in \triangle$, con X, Y en $\mathscr{D}$, se tiene que $Z \in \mathscr{D}$.

d) Si $X \to Y \to Z \to TX \in \triangle$ y dos de los objetos X, Y, Z están en $\mathscr{D}$, entonces el tercero de ellos también lo está.

e) Sea $\triangle|_{\mathscr{D}} := \{X \to Y \to Z \to TX \in \triangle : X, Y, Z \in \mathscr{D}\}$ y la restricción $T|_{\mathscr{D}}$ del funtor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ en la subcategoría $\mathscr{D}$. Entonces el triple $(\mathscr{D}, T|_{\mathscr{D}}, \triangle|_{\mathscr{D}})$ es una categoría triangulada.

g) $\mathscr{D}^{op}$ es una subcategoría triangulada de $(\mathscr{C}, T, \triangle)^{op}$.

Demostración. $\boxed{a)}$ Sean $X, 0 \in Obj(\mathscr{D})$ tal que $X \cong Y$ en $\mathscr{C}$ (por definición de subcategoría triangulada existe un 0 en $\mathscr{D}$).

Observemos primero que

$$X \xrightarrow[\sim]{\binom{1_X}{0}} X \coprod 0$$

y que los siguientes son morfismos en $\mathscr{C}$: $(h\ 0) : X \coprod 0 \to Y$ y $\begin{pmatrix} h^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} :$ $Y \to X \coprod 0$. En particular

$$(h\ 0)\begin{pmatrix} h^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = hh^{-1} + 0 = 1_Y \qquad \text{y}$$

$$\begin{pmatrix} h^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}(h\ 0) = \begin{pmatrix} h^{-1}h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix} = 1_{x \coprod 0}.$$

Mas aún, si consideramos a Y con la familia $\{\nu_1 = h, \nu_2 = 0_{0Y}\}$ se tiene que $(h\ 0)$ es un isomorfismo que conmuta con las inclusiones naturales del coproducto $X \coprod 0$:

$$(h\ 0)\begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix} = h + 0 = h = \nu_1 \quad \text{y}$$

$$(h\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0 = \nu_2.$$

Por lo tanto Y con la familia $\{\nu_1\,,\,\nu_2\}$ son un coproducto de $\{X, 0\}$ y como $\mathscr{D}$ es una subcategoría triangulada, entonces por $(ST2)$ se tiene que $Y \in Obj(\mathscr{D})$.

$\boxed{b)}$ Por definición de subcategoría triangulada $\mathscr{D}$ tiene objeto cero (SA1). Como $\mathscr{C}$ es aditiva y $\mathscr{D}$ es plena, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}$ tiene estructura de grupo abeliano para todo $A, B \in Obj(\mathscr{C})$ (SA2).

Como $\mathscr{C}$ es aditiva y $\mathscr{D}$ es plena la composición de morfismos en $\mathscr{D}$ es bilineal (SA3), además, por definición $\mathscr{D}$ es cerrada bajo coproductos finitos (SA4), asi $\mathscr{D}$ es subcategoría aditiva de $\mathscr{C}$.

$\boxed{c)}$ Sea $\eta :\ X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX\ \in \triangle$ con $X, Y \in \mathscr{D}$, entonces por (TR2) $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T(u)} TY\ \in \triangle$, como $T(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$, se tiene que $TX \in \mathscr{D}$ y por (TR1a)

$$Y \xrightarrow{1_Y} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow TY \quad \text{y}$$

$$0 \longrightarrow TX \xrightarrow{T(1_X)} TX \longrightarrow 0$$

están en $\triangle$.

Pero $\mathscr{D}$ es cerrado bajo coproductos finitos, así

$$Y \xrightarrow{\binom{1}{0}} Y \coprod TX \xrightarrow{(0\ 1)} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \quad \in \triangle.$$

Así se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "1_Y"] & Y \coprod TX \arrow[r, "(0\ 1)"] & TX \arrow[r, "-T(u)"] \arrow[d, "T(1_X)"] & TY \arrow[d, "T(1_Y)"] \\
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \arrow[r, "-T(u)"] & T(Y)
\end{tikzcd}
$$

por el lema (1.1) existe un morfismo $g : Y \coprod TX \longrightarrow Z$ tal que $\varphi := (1_Y, g, T(1_X)) \in J(\mathscr{C}, \triangle)$, además por (Ejercicio 3) se tiene que g es iso, por lo tanto φ es iso y por el inciso b) se tiene que $Z \in \mathscr{D}$.

$\boxed{d)}$ Sea $X \to Y \to Z \to TX \in \triangle$ tal que dos de los objetos X, Y, Z están en $\mathscr{D}$, si $X, Y \in \mathscr{D}$ entonces el inciso c) implica que $Z \in \mathscr{D}$. Ahora (S.P.G) supongamos $X, Z \in \mathscr{D}$ rotamos a la izquierda por el teorema (1.3) y tenemos que $T^{-1}(Z) \to X \to Y \to Z \in \triangle$. Pero $T^{-1}(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$, por lo que $T^{-1}(Z) \in \mathscr{D}$. Y así, por el inciso c) se tiene el resultado (el último caso es análogo rotando dos veces a la izquierda).

$\boxed{e)}$ Sean $\triangle|_{\mathscr{D}} := \{X \to Y \to Z \to TX \in \triangle \mid X, Y, Z \in \mathscr{D}\}$ y la restricción $T|_{\mathscr{D}}$ del funtor $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ en la subcategoría $\mathscr{D}$.

Se probará que $(\mathscr{D}, T|_{\mathscr{D}}, \triangle|_{\mathscr{D}})$ es una categoría triangulada (probando cada uno de los axiomas).

$\boxed{TR1(a)}$

Sea $X \in \mathscr{D}$, en particular $X \in \mathscr{C}$ por lo que, por (TR1.a) sobre $\mathscr{C}$ $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \quad \in \triangle$. Pero por el inciso a) sabemos que todos los ceros de $\mathscr{C}$ están en $\mathscr{D}$, y como $TX \in \mathscr{D}$ entonces

$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \quad \in \triangle|_{\mathscr{D}}$

$\boxed{TR1(b)}$

Por el inciso a) se tiene el resultado.

$\boxed{TR1(c)}$

Sea $f : X \to Y$ en $\mathscr{D}$, entonces $f : X \to Y \in \mathscr{C}$ y por (TR1.c) en $\mathscr{C}$ existe $Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \ \in \mathscr{C}$ tal que

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \ \in \triangle$. Por el inciso c), como $X, Y \in \mathscr{D}$ entonces $Z \in \mathscr{D}$ y como $\mathscr{D}$ es plena se tiene que

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \ \in \triangle|_{\mathscr{D}}$.

$\boxed{TR2}$

Supongamos $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \ \in \triangle|_{\mathscr{D}} \subseteq \triangle$ entonces $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \ \in \triangle$ pero $T(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}$ y T es pleno por lo que $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \ \in \triangle|_{\mathscr{D}}$.

$\boxed{TR3}$

Sean $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$, $\mu = (X', Y', Z', u', v', w')$ en $\triangle|_{\mathscr{D}}$ y $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ en $\mathscr{D}$ tales que $gu = u'f$.
Por (TR3) sobre $\mathscr{C}$ existe $h : Z \to Z'$ tal que $\varphi := (f, g, h) : \eta \to \mu$ es morfismo en $\mathscr{T}(\mathscr{C}, T)$ en particular como $Z, Z' \in \mathscr{D}$ y $\mathscr{D}$ es plena, entonces $h \in \hom_{\mathscr{D}}(Z, Z')$, por lo tanto $\varphi \in \mathscr{T}(\mathscr{D}, T)$.

$\boxed{TR4}$ (Axioma del octaedro)

Supongamos que tenemos el siguiente diagrama en $\mathscr{D}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"] & Z' \arrow[r, "i'"] & TX \arrow[d, equal] & \in \triangle|_{\mathscr{D}} \\
X \arrow[r, "vu"] \arrow[d, "u"] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "k'"] & TX \arrow[d, "T(u)"] & \in \triangle|_{\mathscr{D}} \\
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "r"] & X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "T(i)j"] & TY \arrow[d, "T(i)"] & \in \triangle|_{\mathscr{D}} \\
 & & TZ' \arrow[r, equal] & TZ' . &
\end{tikzcd}$$

El axioma del octaedro en $\mathscr{C}$ nos indica que existe $f : Z' \to Y'$ y $g : Y' \to X'$ tales que hacen conmutar el diagrama anterior, y que $\theta : Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Z' \xrightarrow{h} TZ' \ \in \triangle$. Como $\mathscr{D}$ es pleno y cada objeto (vertice) del diagrama está en $\mathscr{D}$ entonces $f, g \in Mor(\mathscr{D})$ por lo que $\theta \in \triangle|_{\mathscr{D}}$ y se cumple el axioma del octaedro.

$\boxed{f)}$ Por alguna extraña razón no hay f en este ejercicio.

$\boxed{g)}$ Para comenzar se observa que, como $\mathscr{D}$ es una categoría triangulada, entonces por el (Ej. 5) $\mathscr{D}^{op}$ será una categoría triangulada. También se tiene que $Obj(\mathscr{D}) = Obj(\mathscr{D}^{op})$ y como $\mathscr{D}$ es subcategoría plena de $\mathscr{C}$ entonces $\mathscr{D}^{op}$ es subcategoría plena de $\mathscr{C}^{op}$. Esto último es facil de ver, pues cada morfismo en $\mathscr{C}^{op}$ entre objetos de $\mathscr{D}^{op}$ es el morfismo opuesto f^{op} de un morfismo f en $\mathscr{C}$ entre objetos de $\mathscr{D}$, y como $\mathscr{D}$ es plena, entonces f está en $\mathscr{D}$ y así f^{op} está en $\mathscr{D}^{op}$.

Se probarán los axiomas de subcategoría triangulada para $(\mathscr{D}, T|_{\mathscr{D}}, \triangle|_{\mathscr{D}})$.

$\boxed{ST1}$ Como $\mathscr{D}$ contiene un objeto cero, entonces $\mathscr{D}^{op}$ contiene un objeto cero.

$\boxed{ST2}$ Sean $X, Y \in \mathscr{D}^{op}$, entonces $X, Y \in \mathscr{D}$ y por ser $\mathscr{D}$ subcategoría triangulada, entonces $X \coprod Y$ está en $\mathscr{D}$. Pero $\mathscr{C}$ es una categoría aditiva, entonces $\mathscr{D}$ es aditiva también y todo coproducto finito es un producto finito, así $X \prod Y \in \mathscr{D}$ y por lo tanto $(X \coprod^{op} Y) = (X \prod Y)^{op} \in \mathscr{D}^{op}$ donde $\coprod^{op}$ denota al coproducto en $\mathscr{D}$.

$\boxed{ST3}$ Observemos que $A \in Obj(\mathscr{D}^{op}) \iff A \in Obj(\mathscr{D})$, entonces para cada $A \in \mathscr{D},\ T(A) \in \mathscr{D}$ y $\tilde{T}(A) \in \mathscr{D}^{op}$. Análogamente $T^{-1}(A) \in \mathscr{D}^{op}$.

Sea $f : A \to B$ en $\mathscr{D}^{op}$ entonces $\tilde{T}(f) = (T^{-1}(f^{op}))^{op}$ pero $f^{op} : B \to A$ está en $\mathscr{D}$ por lo que $T^{-1}(f^{op}) \in \mathscr{D}$, es decir, $\tilde{T}(f) \in (\mathscr{D})^{op}$. Análogamente $\tilde{T}^{-1}(f) \in (\mathscr{D})^{op}$.

$\boxed{ST4}$ Sea $f : X \to Y$ en $\mathscr{D}^{op}$, ntonces $f^{op} : Y \to X$ en $\mathscr{D}$, por (ST4) sobre $\mathscr{D}$, se tiene que existe $\eta :\ Y \xrightarrow{f^{op}} X \longrightarrow Z \longrightarrow TY\ \in \triangle|_{\mathscr{D}}$ con Z en $\mathscr{D}$. Así por el teorema (1.3) $\eta_0 :\ T^{-1}Z \longrightarrow Y \xrightarrow{f^{op}} X \longrightarrow Z\ \in \triangle|_{\mathscr{D}}$, y por definición de categoría triangulada opuesta

$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \tilde{T}^{-1}Z \longrightarrow \tilde{T}X\ \in \triangle|_{\mathscr{D}^{op}}$.

Por lo que $(\mathscr{D}, T|_{\mathscr{D}}, \triangle|_{\mathscr{D}})^{op}$ es subcategoría triangulada de $(\mathscr{C}, T, \triangle)^{op}$.

□

Ej 12. Sea $(F, \eta) : (\mathscr{C}_1, T_1, \triangle_1) \to (\mathscr{C}_2, T_2, \triangle_2)$ un funtor graduado entre categorías trianguladas. Para cada $\theta :\ X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX\ \in T(\mathscr{C}_1, T_1)$ defina $\bar{F}(\theta) :\ FXu \xrightarrow{F} FYv \xrightarrow{F} FZw \xrightarrow{F} T_2FX\ \in T(\mathscr{C}_2, T_2)$.

Pruebe que la correspondencia que extiende al funtor F a la categoría de triángulos $\bar{F} : \mathcal{T}(\mathscr{C}_1, T_1) \to \mathcal{T}(\mathscr{C}_2, T_2)$

$$((f, g, h) : \theta \to \mu) \longmapsto (\bar{F}(f, g, h) : \bar{F}(\theta) \to \bar{F}(\mu))$$

donde $\bar{F}(f, g, h) = (Ff, Fg, Fh)$, es funtorial.

Demostración. a) Sea $\varphi = (f, g, h) : \theta \to \mu$ un morfismo en $\mathcal{T}(\mathscr{C}_1, T_1)$, se demuestra que en efecto $\bar{F}(\varphi) : \bar{F}(\theta) \to \bar{F}(\mu)$ es un morfismo en $\mathcal{T}(\mathscr{C}_2, T_2)$. A continuación se ilustra al morfismo $\varphi : \theta \to \mu$:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T_1X \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle T_1f} \\ A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & T_1A \end{array}$$

se busca demostrar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} FX & \xrightarrow{Fu} & FY & \xrightarrow{Fv} & FZ & \xrightarrow{\eta_X \circ Fw} & T_2FX \\ \downarrow{\scriptstyle Ff} & & \downarrow{\scriptstyle Fg} & & \downarrow{\scriptstyle Fh} & & \downarrow{\scriptstyle T_1f} \\ FA & \xrightarrow{Fa} & FB & \xrightarrow{Fb} & FC & \xrightarrow{\eta_A \circ Fc} & T_2FA \end{array}$$

observe que debido a la funtorialidad de F se tiene la conmutatividad de los primeros dos cuadros, resta verificar la del último.

Como $\eta : FT_1 \to T_2F$ es un isomorfismo natural, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} FZ & \xrightarrow{Fw} & FT_1X & \xrightarrow{\eta_X} & T_2FX \\ \downarrow{\scriptstyle Fh} & & \downarrow{\scriptstyle FT_1f} & & \downarrow{\scriptstyle T_2Ff} \\ FC & \xrightarrow{Fc} & FT_1A & \xrightarrow{\eta_A} & T_2FA \end{array}$$

así pues se puede concluir que $\bar{F}(\varphi) : \bar{F}(\theta) \to \bar{F}(\mu)$ es un morfismo en $\mathcal{T}(\mathscr{C}_2, T_2)$.

En lo que respecta a la composición se cumple lo siguiente. Sean $\varphi = (f, g, h) : \theta \to \mu$, $\psi = (r, s, t) : \mu \to \sigma$ morfismos en $\mathcal{T}(\mathscr{C}_1, T_1)$. Así

$$\begin{aligned} \bar{F}(\psi \circ \varphi) =& \bar{F}((r, s, t) \circ (f, g, h)) \\ =& \bar{F}(rf, sg, th) \\ =& (F(rf), F(sg), F(th)) \\ =& (Fr \circ Ff, Fs \circ Fg, Ft \circ Fh) \\ =& (Fr, Fs, Ft) \circ (Ff, Fg, Fh) \\ =& \bar{F}(r, s, t) \circ \bar{F}(f, g, h) \end{aligned}$$

Además para cualquier $\theta : \ X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \ \in \mathcal{T}(\mathscr{C}_1, T_1)$ se cumple que:

$$\begin{aligned} \bar{F}(1_\theta) =& \bar{F}(1_X, 1_Y, 1_Z) \\ =& (F(1_X), F(1_Y), F(1_Z)) \\ =& (1_{FX}, 1_{FY}, 1_{FZ}) \\ =& 1_{\bar{F}(\theta)}. \end{aligned}$$

Se puede concluir que $\bar{F} : \mathcal{T}(\mathscr{C}_1, T_1) \to \mathcal{T}(\mathscr{C}_2, T_2)$ es un funtor.

$\square$

Ej 13. Sea $\eta : (F, \alpha) \to (G, \beta)$ una transformación de funtores graduados con $F, G \in [\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_1]$, $\overline{F}$ y $\overline{G}$ los funtores introducidos en el Ej. 12 y, para cada

$$\epsilon : \; X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T_1 X \;\; \in \mathscr{T}(\mathscr{C}_1, T_1),$$

$\overline{\eta}_\epsilon := (\eta_X, \eta_Y, \eta_Z)$. Entonces $\overline{\eta} := \{\overline{\eta}_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathscr{T}(\mathscr{C}_1, T_1)} \in Nat_{[\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2]}\left(\overline{F}, \overline{G}\right)$.

Demostración. Afirmamos que $\forall\ \epsilon$

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "Fu"] \arrow[d, "\eta_X"'] \arrow[dr, phantom, "\text{(III)}"] & FY \arrow[r, "Fv"] \arrow[d, "\eta_Y"] & FZ \arrow[r, "\alpha_X Fw"] \arrow[d, "\eta_Z"] & T_2 FX \arrow[d, "T_2 \eta_X"] \\
GX \arrow[r, "Gu"] & GY \arrow[r, "Gv"] & GZ \arrow[r, "\beta_X Gw"] & T_2 GX
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$. En efecto, la conmutatividad de (I) y (II) se siguen de que $\eta : F \to G$ es una transformación natural.
Ahora, dado que η es una transformación natural, para el morfismo $w : Z \to T_1 X$ se tiene que

$$\begin{tikzcd}
FZ \arrow[r, "\eta_Z"] \arrow[d, "Fw"'] & GZ \arrow[d, "Gw"] \\
FT_1X \arrow[r, "\eta_{T_1 X}"'] & GT_1X
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$, al igual que lo es el siguiente dado que η es una transformación natural de funtores graduados

$$\begin{tikzcd}
FT_1X \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "\eta_{T_1 X}"'] & T_2FX \arrow[d, "T_2\eta_X"] \\
GT_1X \arrow[r, "\beta_X"'] & T_2GX
\end{tikzcd},$$

de lo cual se sigue que

$$\begin{aligned}
(T_2\eta_X)\,\alpha_X Fw &= ((T_2\eta_X)\,\alpha_X)\,Fw = (\beta_X \eta_{T_1X})\,Fw \\
&= \beta_X\,(\eta_{T_1X} Fw) = \beta_X\,(Gw\eta_Z)\,, \\
&= (\beta_X Gw)\,\eta_Z.
\end{aligned}$$

Lo anterior garantiza la conmutatividad de (III), con lo cual se ha verificado la afirmación. Por lo tanto $\forall\ \epsilon \in \mathscr{T}(\mathscr{C}_1, T_1)$ se tiene que $\overline{\eta}_\epsilon =$

$(\eta_X, \eta_Y, \eta_Z) \in Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C}_2,T_2)}\left(\overline{F}, \overline{G}\right)$.

Ahora, sea $\varphi = (f, g, h) : \delta \to \delta'$ en $\mathscr{T}(\mathscr{C}_1, T_1)$, con

$$\delta :\ A \xrightarrow{\quad r \quad} B \xrightarrow{\quad s \quad} C \xrightarrow{\quad t \quad} T_1 A\ ,$$

$$\delta' :\ A' \xrightarrow{\quad r' \quad} B' \xrightarrow{\quad s' \quad} C' \xrightarrow{\quad t' \quad} T_1 A'\ .$$

Luego, por ser $\eta : F \to G$ una transformación natural de los morfismos f, g y h se obtienen los siguientes diagramas conmutativos en $\mathscr{C}$

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\eta_A} & GA \\ {\scriptstyle Ff}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gf} \\ FA' & \xrightarrow[\eta_{A'}]{} & GA' \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} FB & \xrightarrow{\eta_B} & GB \\ {\scriptstyle Fg}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gg} \\ FB' & \xrightarrow[\eta_{B'}]{} & GB' \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} FC & \xrightarrow{\eta_C} & GC \\ {\scriptstyle Fh}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Gh} \\ FC' & \xrightarrow[\eta_{B'}]{} & GC' \end{array},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \overline{G}\varphi\eta_\delta &= (Gf, Gg, Gh) \circ (\eta_A, \eta_B, \eta_C) = (Gf\eta_A, Gg\eta_B, Gh\eta_C) \\ &= (\eta_{A'}Ff, \eta_{B'}Fg, \eta_{C'}Fh) = (\eta_{A'}, \eta_{B'}, \eta_{C'}) \circ (Ff, Fg, Fh) \\ &= \eta_{\delta'}\overline{F}\varphi. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{array}{ccc} \overline{F}\delta & \xrightarrow{\eta_\delta} & \overline{G}\delta \\ {\scriptstyle \overline{F}\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{G}\varphi} \\ \overline{F}\delta' & \xrightarrow[\eta_{\delta'}]{} & \overline{G}\delta' \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$.

Por todo lo anterior $\overline{\eta}$ es una transformación natural de $\overline{F}$ en $\overline{G}$.

□

Ejercicios no numerados

Proposición (Lema 1.1(b)). Sean $(\mathscr{C}, T, \Delta)$ una categoría pre-triangulada y $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$, $\eta' = (X', Y', Z', u', v', w') \in \Delta$. Si $\exists\ g : Y \to Y'$ y

$\exists\ h : Z \to Z'$ tales que $hv = v'g$, entonces $\exists\ f : X \to X'$ tal que (f, g, h) es un morfismo de η en η'.

Demostración. Como $\eta, \eta' \in \Delta$, entonces por TR2 los siguientes son triángulos dustinguidos

$$\mu :\ Y \xrightarrow{\quad v \quad} Z \xrightarrow{\quad w \quad} TX \xrightarrow{\quad -Tu \quad} TY\ ,$$
$$\mu' :\ Y' \xrightarrow{\quad v' \quad} Z' \xrightarrow{\quad w' \quad} TX' \xrightarrow{\quad -Tu' \quad} TY'$$

para los cuales, por hipótesis, $\exists\ g \in Hom_{\mathscr{C}}(Y, Y')$ y $\exists\ h \in Hom_{\mathscr{C}}(Z, Z')$ tales que

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & TX \arrow[r, "-Tu"] \arrow[d, dashed, "\exists\ \Psi"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(III)}"] & TY \arrow[d, "Tg"] \\
Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX' \arrow[r, "-Tu'"] & TY
\end{tikzcd}$$

(I) y (II) son diagramas conmutativos en $\mathscr{C}$. Luego por $TR3$ $\exists \Psi \in Hom_{\mathscr{C}}(TX, TX')$ tal que $(g, h, \psi) \in Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C},T)}(\mu, \mu')$. Dado que T es en partícular pleno, $\exists\ f \in Hom_{\mathscr{C}}(X, X')$ tal que $Tf = \Psi$.
Como se tiene ahora que (III) es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned} -T(gu) &= (Tg)(-Tu) = (-Tu')\,\Psi \\ &= (-Tu')\,Tf = -T(u'f)\,, \end{aligned}$$

y así $gu = u'f$, pues T es, en partícular, fiel. Por su parte, de (II) se sigue que $(Tf)\,w = w'h$, de modo que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & TX'
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$ y por lo tanto $(f, g, h) \in Hom_{\mathscr{T}(\mathscr{C},T)}(\eta, \eta')$.
□

Proposición (Lema 1.12)**.** Sean $(\mathscr{C}, T, \Delta)$ una categoría triangulada y $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$, entonces:

(i) $\mathscr{D}$ es una subcategoría triangulada de $(\mathscr{C}, T, \Delta)$ si y sólo si $T(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$ y $\mathscr{D}$ es cerrada por co-conos;

(ii) $\mathscr{D}$ es una subcategoría triangulada de $(\mathscr{C}, T, \Delta)$ si y sólo si $T(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$, $T^{-1}(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$ y $\mathscr{D}$ es cerrada por extensiones.

Demostración. $\boxed{(\mathrm{i}) \implies}$ De $ST3$ se sigue que $T^{-1}(D) \subseteq D$.
Ahora, sea

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \ \in \Delta.$$

Por Prop. 1.3

$$T^{-1}Z \xrightarrow{-Tw} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \ \in \Delta,$$

con $X, Y \in \mathscr{D}$, luego por Ej. 11(d) $T^{-1}Z \in \mathscr{D}$. Por lo tanto $\mathscr{D}$ es cerrado por co-conos.

$\boxed{(\mathrm{i}) \impliedby}$ <u>ST1</u>. Sea $X \in \mathscr{D}$ y 0 un objeto cero en $\mathscr{C}$. Por TR1(a)

$$X \xrightarrow{1} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \ \in \Delta,$$

luego $T^0 \in \mathscr{D}$, con $T^{-1}0$ un objeto cero de $\mathscr{C}$ puesto que 0 lo es y T es un automorfismo.
<u>ST2</u>. Sean $X, Y \in \mathscr{D}$. Por Coro 1.6 se tiene que

$$TX \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{TX} \\ 0 \end{pmatrix}} TX \coprod TY \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1_{TY} \end{pmatrix}} TY \xrightarrow{0} T^2X \ \in \Delta,$$

$$\implies Y \xrightarrow{-T^{-1}0} TX \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{TX} \\ 0 \end{pmatrix}} TX \coprod TY \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1_{TY} \end{pmatrix}} TY \ \in \Delta, \qquad TR2$$

$$\implies Y \xrightarrow{0} TX \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{TX} \\ 0 \end{pmatrix}} T\left(X \coprod Y\right) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1_{TY} \end{pmatrix}} TY \ \in \Delta, \qquad TR2$$

esto último puesto que T es un automorfismo. Dado que $\mathscr{D}$ es cerrado por co-conos se sigue que

$$X \coprod Y = T^{-1}\left(T\left(X \coprod Y\right)\right) \in \mathscr{D}.$$

<u>ST3</u>. Resta probar que $T^{-1}(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$. Sea $X \in \mathscr{D}$. Por TR1(a) se tiene que

$$T^{-1}X \xrightarrow{1} T^{-1}X \longrightarrow 0 \longrightarrow X \ \in \mathscr{D},$$

así que por TR2

$$T^{-1}X \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{1} X \ \in \mathscr{D},$$

de modo que, por ser $\mathscr{D}$ cerrada por co-conos, $T^{-1}X \in \mathscr{D}$. Por lo tanto $T^{-1}(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$.

ST4. Sea $f : X \to Y$ en $\mathscr{C}$ con $X, Y \in \mathscr{D}$. Así

$$\begin{array}{lll} \exists\ X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \ \in \Delta, & TR1(c) \\ \Longrightarrow T^{-1}Z \in \mathscr{D}, & \mathscr{D} \text{ es cerrada por co-conos} \\ \Longrightarrow Z = T\left(T^{-1}Z\right) \in \mathscr{D}, & T(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D} \end{array}$$

con lo cual se verifica el axioma ST4.
Por todo lo anterior se sigue que $\mathscr{D}$ es una subcategoría triangulada de $\mathscr{C}$.

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow}$ Se sigue de ST3 y Ej. 11(d).
$\boxed{\text{(ii)} \Longleftarrow}$ ST1 Sea $X \in \mathscr{D}$. Así

$$\begin{array}{lll} X \xrightarrow{1} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \ \in \Delta, & TR1(a) \\ \Longrightarrow \ X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \xrightarrow{1} TX \ \in \Delta, & TR2 \\ \Longrightarrow \ 0 \in \mathscr{D}. & \mathscr{D} \text{ es cerrada por extensiones} \end{array}$$

ST2 Se tiene por ser $\mathscr{D}$ cerrado por extensiones y Coro 1.6.
ST3 Se tiene por hipótesis.
ST4 Sea $f : X \to Y$ en $\mathscr{C}$ con $X, Y \in \mathscr{D}$. Así

$$\begin{array}{lll} \exists\ X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \ \in \Delta, & TR1(c) \\ \Longrightarrow \ Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \xrightarrow{-Tf} TY \ \in \Delta, & TR2 \\ \Longrightarrow Z \in \mathscr{D}. & \mathscr{D} \text{ es cerrada por co-conos} \end{array}$$

□

Proposición (Corolario 1.9). Para una categoría pretriangulada $(\mathscr{C}, T, \triangle)$, las siguientes condiciones se satisfacen:

a) Tomo mono (respectivamente epi) es $\mathscr{C}$ es split-mono (respectivamente split-epi).

b) Si $\mathscr{C}$ es abeliano, entonces $\mathscr{C}$ es semisimple (i.e. $Ext^1_{\mathscr{C}}(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathscr{C}$).

Demostración. Se mostrará que todo epi en $\mathscr{C}$ es un split-epi.

Sea $f : X \to Y$ epi en $\mathscr{C}$, entonces $f^{op} : Y \to X$ es un mono en $\mathscr{C}^{op}$. Por el (ej. 5) sabemos que $(\mathscr{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\triangle})$ es una categoría pretriangulada, y por el inciso a), como f^{op}es mono, entonces f^{op} es split-mono. Así f es split-epi en $\mathscr{C}^{op}$.

□

Proposición (Prop. 1.11(b)). Sea $(\mathscr{C}, T, \triangle)$ una categoría triangulada. Para cualquier $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} TA \ \in \triangle$ y $\beta : C \to C$ en $\mathscr{C}$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & W \arrow[r, "1_W"] \arrow[d] & W \arrow[d] & \\
A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & E \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & TA \arrow[d, "1_{TA}"] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d] & TA \\
 & TW \arrow[r, "1_{TW}"] & TW &
\end{tikzcd}
$$

donde las filas y columnas, de dicho diagrama, son triángulos distinguidos.

Demostración. Por hipótesis se tiene la siguiente configuración inicial:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, "h"] & TA \in \triangle \\
 & & D \arrow[u, "\beta"] &
\end{tikzcd}
$$

pasando a la categoría opuesta se tiene la siguiente situación:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g^{op}"] \arrow[d, "\beta^{op}"] & B \arrow[r, "f^{op}"] & A \arrow[r, "\bar{T}(h^{op})"] & \bar{T}C \in \overline{\triangle} \\
D & & &
\end{tikzcd}
$$

ahora, aplicando el *cambio de cobase* se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}^{op}$ donde filas y columnas son triángulos en $\overline{\triangle}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{T}^{-1}W \arrow[r, "1_{\overline{T}^{-1}W}"] \arrow[d, "p^{op}"] & \overline{T}^{-1}W \arrow[d, "r^{op}"] & \\
\overline{T}^{-1}A \arrow[r, "\overline{T}^{-1}(\overline{T}(h^{op}))"] \arrow[d, "1_A"] & C \arrow[r, "g^{op}"] \arrow[d, "\beta^{op}"] & B \arrow[r, "f^{op}"] \arrow[d, "s^{op}"] & A \arrow[d, "1_A"] \\
\overline{T}^{-1}A \arrow[r, "a^{op}"] & D \arrow[r, "b^{op}"] \arrow[d, "q^{op}"] & E \arrow[r, "c^{op}"] \arrow[d, "t^{op}"] & A \\
 & W \arrow[r, "1_W"] & W &
\end{tikzcd}
$$

si rotamos a una vez a la derecha (por TR2) a los triángulos distinguidos que ocupan las filas centrales se obtiene la siguiente situación:

$$
\begin{tikzcd}
\overline{T}^{-1}W \arrow[r, "1_{\overline{T}^{-1}W}"] \arrow[d, "p^{op}"] & \overline{T}^{-1}W \arrow[d, "r^{op}"] & & \\
C \arrow[r, "g^{op}"] \arrow[d, "\beta^{op}"] & B \arrow[r, "f^{op}"] \arrow[d, "s^{op}"] & A \arrow[r, "-\overline{T}(-h^{op})"] \arrow[d, "1_A"] & \overline{T}C \arrow[d, "\overline{T}(\beta^{op})"] \\
D \arrow[r, "b^{op}"] \arrow[d, "q^{op}"] & E \arrow[r, "c^{op}"] \arrow[d, "t^{op}"] & A \arrow[r, "-\overline{T}(a^{op})"] & \overline{T}D \\
W \arrow[r, "1_W"] & W & &
\end{tikzcd}
$$

dado que $b^{op} \circ -h^{op} = a^{op}$ se deduce que $\overline{T}(\beta^{op}) \circ -\overline{T}(-h^{op}) = -\overline{T}(a^{op})$. Así pues el diagrama anterior es conmutativo.

De modo que pasando a la categoría opuesta los triángulos que ocupan las filas centrales y reescribiendo algunos morfismos se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathscr{C}$:

$$
\begin{tikzcd}
& TW \arrow[r, "1_{TW}"] & TW & \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[u, "r"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[u, "p"'] & TA \\
A \arrow[r, "c"] \arrow[u, "1_A"] & E \arrow[r, "b"] \arrow[u, "s"'] & D \arrow[r, "a"] \arrow[u, "\beta"'] & TA \arrow[u, "1_A"] \\
& W \arrow[r, "1_W"] \arrow[u] & W \arrow[u, "q"'] &
\end{tikzcd}
$$

observe que cada fila y columna es un triangulo en $\triangle$ como se buscaba. Se concluye el ejercicio.

$\square$

Proposición (Ej. 13'). Sean $\mathscr{C}$ una categoría y $\Sigma \subset Mor(\mathscr{C})$. Pruebe que la categoría $\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ y el funtor de localización $Q : \mathscr{C} \to \mathscr{C}(\Sigma^{-1}]$ son únicos salvo isomorfismos. Mas precisamente, sea $q : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ un funtor tal que

a) $\forall \sigma \in \Sigma \quad q(\sigma)$ es iso.

b) $\forall f : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ tal que $F(\sigma)$ es iso $\forall \sigma \in \Sigma$, $\exists! \bar{F} : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ tal que $\bar{F} \circ q = F$.

Pruebe que existe un isomorfismo de categorías $\epsilon : \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \to \mathscr{B}$ tal que
$\epsilon \circ Q = q \quad$ i.e.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "q"'] & \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \arrow[d, dashed, "\epsilon"] \\ & \mathscr{B} \end{tikzcd}.$$

Demostración. Supongamos $q : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ es un funtor tal que

a) $\forall \sigma \in \Sigma \quad q(\sigma)$ es iso.

b) $\forall f : \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ tal que $F(\sigma)$ es iso $\forall \sigma \in \Sigma$, $\exists! \bar{F} : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ tal que $\bar{F} \circ q = F$.

Como $Q : \mathscr{C} \to \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ es tal que $Q(\sigma)$ es iso $\forall \sigma \in \Sigma$, entonces por hipótesis $\exists!\, \epsilon_0 : \mathscr{B} \to \mathscr{C}[\Sigma^{-1}]$ tal que $\epsilon_0 \circ q = Q$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "Q"'] & \mathscr{B} \arrow[d, dashed, "\epsilon_0"] \\ & \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \end{tikzcd}.$$

Ahora, como Q es funtor de localización y $q(\sigma)$ es iso $\forall \sigma \in \Sigma$, entonces por definición $\exists!\, \epsilon : \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \to \mathscr{B}$ tal que $\epsilon \circ Q = q$. Así se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \arrow[d, "\epsilon"] \\ \mathscr{C} \arrow[ur, "Q"] \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "Q"'] & \mathscr{B} \arrow[d, dashed, "\epsilon_0"] \\ & \mathscr{C}[\Sigma^{-1}] \end{tikzcd}.$$

En particular $\epsilon_0\epsilon$ es un funtor, y es tal que $\forall \sigma \in \Sigma, \quad \epsilon_0\epsilon(\sigma)$ es un isomorfismo. Así por (L2) sobre el funtor de localización Q, se tiene que $\epsilon_0\epsilon$ es único, pero $1_{\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]}$ es un funtor con la misma propiedad (pues σ es iso para cada $\sigma \in \Sigma$) por lo tanto $\epsilon_0\epsilon = 1_{\mathscr{C}[\Sigma^{-1}]}$ y analogamente $\epsilon\epsilon_0 = 1_{\mathscr{B}}$.

$\square$