

# Categorías trianguladas

## Ejercicios 1-13'

Luis Gerardo Arruti Sebastian  
Sergio Rosado Zúñiga  
Eduardo León Rodríguez

**Ej 1.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva y  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  un funtor de traslación. Se tiene que:

- (a)  $\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)$  es una categoría.
- (b)  $\varphi = (f, g, h) : \eta \rightarrow \mu$  es un isomorfismo en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)$  si y sólo si  $f, g$  y  $h$  son isomorfismos en  $\mathcal{C}$ .

*Demostración.* (a) C1. Por definición se tiene que

$$Hom(\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)) = \bigcup_{(\eta, \mu) \in Obj(\mathcal{T}(\mathcal{C}, T))^2} Hom_{\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)}(\eta, \mu).$$

Sea  $(\eta, \mu) \in Obj(\mathcal{T}(\mathcal{C}, T))^2$ , con  $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$  y  $\mu = (X', Y', Z', u', v', w')$ . Se tiene que

$$Hom_{\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)}(\eta, \mu) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(X, X') \times Hom_{\mathcal{C}}(Y, Y') \times Hom_{\mathcal{C}}(Z, Z'),$$

donde  $Hom_{\mathcal{C}}(X, X'), Hom_{\mathcal{C}}(Y, Y'), Hom_{\mathcal{C}}(Z, Z')$  son conjuntos, por lo cual  $Hom_{\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)}(\eta, \mu)$  también lo es.

C2. Se tiene por la definición de los morfismos de triangulos.

C3 Sean

$$\begin{aligned} \eta &= X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX, \\ \mu &= A \xrightarrow{r} B \xrightarrow{s} C \xrightarrow{t} TA, \\ \nu &= L \xrightarrow{o} M \xrightarrow{p} N \xrightarrow{q} TL \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi &= (f, g, h) \in Hom_{\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)}(\eta, \mu), \\ \psi &= (i, j, k) \in Hom_{\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)}(\mu, \nu). \end{aligned}$$

- (i) Verificaremos primeramente que la composición de morfismos de triángulos está bien definida. Se tiene que

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\
 A & \xrightarrow{r} & B & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{t} & TA
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{(I)} \\
 \text{(II)} \\
 \text{(III)}
 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{r} & B & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{t} & TA \\
 \downarrow i & & \downarrow j & & \downarrow k & & \downarrow Ti \\
 L & \xrightarrow{o} & M & \xrightarrow{p} & N & \xrightarrow{q} & TL
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{(IV)} \\
 \text{(V)} \\
 \text{(VI)}
 \end{array}$$

son diagramas conmutativos en  $\mathcal{C}$ . Así

$$\begin{aligned}
 (jg)u &= j(gu) = j(rf), & \text{por (I)} \\
 &= (jr)f = (oi)f, & \text{por (IV)} \\
 &= o(if).
 \end{aligned}$$

En forma análoga, empleando (II) y (IV), y (III) y (VI) respectivamente, se verifica que

$$\begin{aligned}
 (kh)v &= p(jg) \\
 T(if)w &= (TiTf)w = q(kh).
 \end{aligned}$$

Con lo cual  $\psi \circ \varphi = (if, jg, kh) \in \text{Hom}_{\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)}(\eta, \nu)$  y así la correspondencia  $\circ$  está bien definida; más aún es asociativa, puesto que la composición en  $\mathcal{C}$  lo es.

- (ii) Dado que  $T1_A = 1_{TA}$ , se tiene que

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & TA \\
 \downarrow 1_A & & \downarrow 1_B & & \downarrow 1_C & & \downarrow T1_A \\
 A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & TA
 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$  y así

$$\chi := (1_A, 1_B, 1_C) \in \text{Hom}_{\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)}(\mu, \mu);$$

más aún, dado que  $1_A, 1_B, 1_C$  son las respectivas identidades en  $\mathcal{C}$  para los objetos  $A, B$  y  $C$ , se tiene que  $\chi\varphi = \varphi$  y  $\psi\xi = \psi$ .

(b) Continuaremos usando las descripciones dadas para los triángulos  $\eta$  y  $\mu$  dadas al comienzo de (a).

Se tiene que  $\exists \xi \in \text{Hom}_{\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)}(\mu, \eta)$ , con  $\xi = (f', g', h')$ , tal que

$$(f'f, g'g, h'h) = \xi\varphi = 1_\eta = (1_X, 1_Y, 1_Z)$$

y

$$(ff', gg', hh') = \varphi\xi = 1_\mu = (1_A, 1_B, 1_C),$$

de lo cual se sigue que  $f, g$  y  $h$  son isomorfismos en  $\mathcal{C}$  con inversa, respectivamente,  $f', g'$  y  $h'$ .

$\Leftarrow$  Notemos que bajo esta hipótesis se tiene que

$$(f^{-1}f, g^{-1}g, h^{-1}h) = (1_X, 1_Y, 1_Z), (ff^{-1}, gg^{-1}, hh^{-1}) = (1_A, 1_B, 1_C),$$

por lo cual, por la definición de la composición de morfismos de triángulos, basta con verificar que  $(f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}) \in \text{Hom}_{\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)}(\mu, \eta)$ .

Como  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)}(\mu, \eta)$ , entonces

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\ A & \xrightarrow{r} & B & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{t} & TA \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$ , con lo cual

$$\begin{aligned} gu &= rf, \\ hv &= sg, \\ Tfw &= th. \end{aligned}$$

Por lo anterior y dado que, por ser  $T$  un funtor,  $T$  manda isomorfismos en isomorfismos y más aún  $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$ , se tiene que

$$\begin{aligned} uf^{-1} &= g^{-1}r, \\ vg^{-1} &= h^{-1}s, \\ wh^{-1} &= T(f^{-1})t. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{r} & B & \xrightarrow{s} & C & \xrightarrow{t} & TA \\ \downarrow f^{-1} & & \downarrow g^{-1} & & \downarrow h^{-1} & & \downarrow Tf^{-1} \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$  y así se tiene lo deseado.  $\square$

**Ej 2.** Sean  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  una categoría pre-triangulada y  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$  en  $\Delta$ . Pruebe que  $u \in SKer(v)$ ,  $v \in SCoKer(u) \cap SKer(w)$  y  $w \in SCoKer(v)$ .

*Demostración.* Primero se probará que  $u \in SKer(v)$ .  
Por el teorema ( 1.2.a ) se tiene que  $vu = 0$ .

Sea  $r : M \rightarrow Y$  tal que  $vr = 0$ . Como  $M \in \mathcal{C}$ , entonces por el teorema ( TR1a )  $M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow TM$  está en  $\Delta$ , y por ( TR2 ) se puede rotar el triángulo de las hipótesis tal se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{1_M} & 0 & \longrightarrow & T(M) & \xrightarrow{-T(1_M)} & TM \\ \downarrow r & & \downarrow 0 & & & & \downarrow T(r) \\ Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(x) & \xrightarrow{-T(u)} & T(y). \end{array}$$

Así, por ( TR3 ) existe  $s' : T(M) \rightarrow T(X)$  tal que  $(T(r))(-T(1_M)) = (-T(u))(s')$ , y como  $T$  es autofunctor, entonces  $-T(r \circ 1_M) = -T(u \circ T^{-1}(s'))$ . Si se toma  $s = T^{-1}(s') : M \rightarrow X$  se tiene que  $r = us$ , por lo tanto  $u \in SKer(v)$ .

Veamos ahora que  $v \in SCoKer(u)$ .

Anteriormente se observó que  $vu = 0$ . Sea  $t : Y \rightarrow M$  tal que  $tu = 0$ . Como  $M \in \mathcal{C}$ , entonces por el teorema ( TR1a )  $M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow TM$  está en  $\Delta$ , así por ( TR2 )  $0 = T^{-1}(0) \xrightarrow{0} M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0$  está en  $\Delta$ .

Además, como  $tu = 0$  entonces entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow 0 & & \downarrow t & & & & \downarrow T(0)=0 \\ 0 & \xrightarrow{0} & M & \xrightarrow{1_M} & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Así, por ( TR3 ) existe  $s : Z \rightarrow M$  tal que  $1_M \circ t = sv$  y por lo tanto  $v \in SCoKer(u)$ .

Por último, rotando el triángulo de las hipótesis por ( TR1c ) se tiene que  $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(x) \xrightarrow{-T(u)} T(y)$  está en  $\Delta$ , así por lo demostrado  $v \in \text{Ker}(w)$  y  $w \in \text{CoKer}(v)$ .

□

**Ej 3.** Sean  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  una categoría pre-triangulada y  $(f, g, h) : \eta \rightarrow \mu$  en  $T(\mathcal{C}, T)$ , con  $\eta, \mu \in \Delta$ . Pruebe que si dos de los tres morfismos  $f, g$  y  $h$  son isos, entonces el tercero también lo es.

*Demostración.* a) Caso 1. Si  $f$  y  $g$  son isos en  $\mathcal{C}$ , entonces por el teorema 1.2(c) se concluye que  $h$  es iso en  $\mathcal{C}$ .

b) Suponga que  $f$  y  $h$  son isos en  $\mathcal{C}$ . Se inicia con la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\ A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & TA \end{array}$$

después de aplicar una rotación a la izquierda (por 1.3) a los triángulos  $\eta$  y  $\mu$ , se obtiene la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccccccc} T^{-1}Z & \xrightarrow{-T^{-1}w} & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z \\ T^{-1}h \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ T^{-1}C & \xrightarrow{-T^{-1}c} & A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C \end{array}$$

dato que  $-T^{-1}c \circ T^{-1}h = -(T^{-1}c \circ T^{-1}h) = -(f \circ T^{-1}w) = f \circ -T^{-1}w$  y como  $T^{-1}h$  es un iso en  $\mathcal{C}$  pues  $h$  lo es, entonces por el teorema 1,2 (c) se concluye que  $g$  es un iso en  $\mathcal{C}$ .

c) Suponga que  $g$  y  $h$  son isos en  $\mathcal{C}$ . Una vez mas se tiene la siguiente configuración inicial:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\ A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & TA \end{array}$$

después de aplicar una rotación a la derecha (por TR2) a los triángulos  $\eta$  y  $\mu$ , se obtiene la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccccccc}
Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY \\
\downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf & & \downarrow Tg \\
B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & TA & \xrightarrow{-Ta} & TB
\end{array}$$

observe que  $Tg \circ Tu = Ta \circ Tf$  por lo que  $Tg \circ -Tu = -Ta \circ Tf$ , dado que  $g$  y  $h$  son isos, se cuenta con las hipótesis necesarias para concluir que  $Tf$  es un iso en  $\mathcal{C}$  y como  $T^{-1}$  es funtor (es decir preserva isos) se sigue que  $f = T^{-1}(Tf)$  es un iso en  $\mathcal{C}$ .  $\square$

**Ej 4.** Sean  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  una categoría pretriangulada y  $\eta$  un triángulo distinguido  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ . Entonces los siguientes triángulos son distinguidos:

- (a)  $\mu = X \xrightarrow{-u} Y \xrightarrow{-v} Z \xrightarrow{w} TX$ ,
- (b)  $\nu = X \xrightarrow{-u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{-w} TX$ ,
- (c)  $\chi = X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{-v} Z \xrightarrow{-w} TX$ .

*Demostración.* Por ser  $T$  en particular un funtor aditivo se tiene que  $T(-1_X) = -1_{TX}$ , con lo cual

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\
\downarrow -1_X & & \downarrow 1_Y & & \downarrow -1_Z & & \downarrow T-1_X \\
X & \xrightarrow{-u} & Y & \xrightarrow{-v} & Z & \xrightarrow{w} & TX
\end{array}$$

es un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$ , cuyas columnas son isomorfismos. Por lo tanto por Ej. 1(b)  $(-1_X, 1_Y, -1_Z) : \eta \rightarrow \mu$  es un isomorfismo en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)$  y así, como  $\eta \in \Delta$ , por TR1(b)  $\mu \in \Delta$ . Análogamente, empleando que

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\
\downarrow 1_X & & \downarrow -1_Y & & \downarrow -1_Z & & \downarrow T1_X \\
X & \xrightarrow{-u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{-w} & TX
\end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\
\downarrow -1_X & & \downarrow -1_Y & & \downarrow 1_Z & & \downarrow T-1_X \\
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{-v} & Z & \xrightarrow{-w} & TX
\end{array}$$

son diagramas conmutativos en  $\mathcal{C}$ , se verifica que  $\nu, \chi \in \Delta$ . □

**Ej 5.** Sea  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  una categoría pretriangulada (respectivamente triangulada), pruebe que el triple  $(\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$  es una categoría pretriangulada (respectivamente triangulada), donde  $\tilde{T}(f^{op}) = (T^{-1}(f))^{op}$  y  $\tilde{\Delta}$  se define como sigue:

$$X \xrightarrow{u^{op}} Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} \tilde{T}X \quad \in \tilde{\Delta}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Z \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} X \xrightarrow{Tw} TZ \quad \in \Delta.$$

En tal caso se define  $(\mathcal{C}, T, \Delta)^{op} := (\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$ .

Esto es,  $(\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$  es una categoría pretriangulada (respectivamente triangulada) opuesta de  $(\mathcal{C}, T, \Delta)^{op}$ .

*Demostración.* Se puede observar que al tomar  $(\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$  como se describe en las hipótesis, al ser  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana, entonces  $\mathcal{C}^{op}$  también es una categoría abeliana, donde la operación está definida por  $f^{op} \tilde{+} g^{op} := (f + g)^{op}$  para cada  $f, g \in Mor(\mathcal{C})$  y  $+ : Mor(\mathcal{C}) \times Mor(\mathcal{C}) \rightarrow Mor(\mathcal{C})$  la operación definida en  $\mathcal{C}$ .

Por lo anterior se tiene entonces que el funtor opuesto de una categoría aditiva cualquiera  $\mathcal{A}$  es aditivo, pues si  $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$  entonces

$$D_{\mathcal{A}}(f + g) = (f + g)^{op} = f^{op} \tilde{+} g^{op} = D_{\mathcal{A}}(f) \tilde{+} D_{\mathcal{A}}(g).$$

Con esto en mente se demostrará que  $\tilde{T}$  es un autofunctor aditivo.

Lo primero que se tiene que notar es que  $\tilde{T} = D_{\mathcal{C}} T^{-1} D_{\mathcal{C}^{op}}$ , por lo que  $\tilde{T}$  es un funtor aditivo al ser composición de funtores aditivos. Por otra parte se tiene que  $\tilde{G} = D_{\mathcal{C}} T D_{\mathcal{C}^{op}}$  es un funtor aditivo, y es tal que

$$\begin{aligned} \tilde{G}\tilde{T} &= D_{\mathcal{C}} T D_{\mathcal{C}^{op}} D_{\mathcal{C}} T^{-1} D_{\mathcal{C}^{op}} \\ &= D_{\mathcal{C}} T T^{-1} D_{\mathcal{C}^{op}} \\ &= D_{\mathcal{C}} D_{\mathcal{C}^{op}} \\ &= 1_{\mathcal{C}^{op}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}\tilde{G} &= D_{\mathcal{C}}T^{-1}D_{\mathcal{C}^{op}}D_{\mathcal{C}}TD_{\mathcal{C}^{op}} \\
&= D_{\mathcal{C}}T^{-1}TD_{\mathcal{C}^{op}} \\
&= D_{\mathcal{C}}D_{\mathcal{C}^{op}} \\
&= 1_{\mathcal{C}^{op}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\tilde{T}$  es un autofunctor aditivo.

Vemos ahora que  $(\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$  es una categoría pretriangulada.

TR1a) Sea  $X \in \mathcal{C}^{op}$  entonces  $X \in \mathcal{C}$ , como  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  es pretriangulada,

entonces  $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \in \Delta$ .

Rotando a la izquierda dos veces por ( 1.3 ) sobre  $\mathcal{C}$  se tiene que

$$T^{-1}X \xrightarrow{T^{-1}(0)} 0 \longrightarrow X \xrightarrow{1_X} X \in \tilde{\Delta}.$$

Así, por definición de  $\tilde{\Delta}$  y por el hecho de que  $T^{-1}X = \tilde{T}X$  se tiene que

$$X \xrightarrow{(1_X)^{op}=1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{T}X \in \tilde{\Delta}.$$

TR1b) Sean  $\alpha : C \xrightarrow{w^{op}} B \xrightarrow{v^{op}} A \xrightarrow{u^{op}} \tilde{T}C$  y

$$\beta : Z \xrightarrow{t^{op}} Y \xrightarrow{s^{op}} X \xrightarrow{r^{op}} \tilde{T}Z$$

en  $\mathcal{C}^{op}$ , tal que  $\alpha \in \tilde{\Delta}$  y  $\alpha \cong \beta$ . Entonces se tienen isomorfismos  $\varphi^{op}, \psi^{op}, \theta^{op} \in Mor(\mathcal{C}^{op})$  tales que el siguiente diagrama conmuta en  $\mathcal{C}^{op}$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha : & C & \xrightarrow{w^{op}} & B & \xrightarrow{v^{op}} & A & \xrightarrow{u^{op}} & \tilde{T}C \\
& \downarrow \varphi^{op} & & \downarrow \psi^{op} & & \downarrow \theta^{op} & & \downarrow \tilde{T}(\varphi^{op}) \\
\beta : & Z & \xrightarrow{t^{op}} & Y & \xrightarrow{s^{op}} & X & \xrightarrow{r^{op}} & \tilde{T}Z.
\end{array}$$

Así el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha' : & T^{-1}C & \xrightarrow{-u} & A & \xrightarrow{v} & B & \xrightarrow{w} & C \\
& \uparrow T^{-1}(\varphi) & & \uparrow \theta & & \uparrow \psi & & \uparrow \varphi \\
\beta' : & T^{-1}Z & \xrightarrow{-r} & X & \xrightarrow{s} & Y & \xrightarrow{t} & Z,
\end{array}$$

pues

- $-u \circ T^{-1}(\varphi) = -[(T^{-1}(\varphi))^{op} \circ u^{op}]^{op} = -[\tilde{T}(\varphi^{op}) \circ u^{op}]^{op} = -[r^{op}\theta^{op}]^{op} = -[(\theta r)^{op}]^{op} = -[\theta r] = \theta \circ (-r).$
- $v\theta = [\theta^{op}v^{op}]^{op} = [s^{op}\psi^{op}]^{op} = [(\psi s)^{op}]^{op} = \psi s.$
- $w\psi = [\psi^{op}w^{op}]^{op} = [t^{op}\varphi^{op}]^{op} = [(\varphi t)^{op}]^{op} = \varphi t.$



Como  $A \xrightarrow{v} B \xrightarrow{w} C \xrightarrow{T(u)} TA \in \Delta$  por estar  $\alpha \in \tilde{\Delta}$ , entonces  $\alpha' \in \Delta$  por ( TR2 ) sobre  $\mathcal{C}$  al ser su rotación a izquierda. Así se tiene que  $\alpha' \cong \beta'$  con  $\alpha' \in \Delta$  y, por ( TR1 b ) ,  $\beta' \in \Delta$ . Eso implica que (al rotar  $\beta'$  por ( TR2 ) ) el triangulo  $X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{t} Z \xrightarrow{T(r)} TX \in \Delta$  y por definición entonces  $\beta \in \tilde{\Delta}$ .

TR1c) Sea  $f^{op} : B \rightarrow A$  en  $\mathcal{C}^{op}$  entonces  $f : A \rightarrow B$  está en  $\mathcal{C}$ .

Por ( TR1 c ) ) sobre  $\mathcal{C}$ , existe  $B \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \in \Delta$ , así por ( TR2 ) sobre  $\mathcal{C}$  se tiene que  $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(\beta)} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha=T(T^{-1}(\alpha))} Z \in \Delta$ .

Por lo tanto  $B \xrightarrow{f^{op}} A \xrightarrow{-(T^{-1}(\beta))^{op}} T^{-1}Z \xrightarrow{(T^{-1}(\alpha))^{op}} \tilde{T}B \in \tilde{\Delta}$  y así  $B \xrightarrow{f^{op}} A \xrightarrow{-(\tilde{T}(\beta))^{op}} \tilde{T}Z \xrightarrow{\tilde{T}(\alpha)^{op}} \tilde{T}B \in \tilde{\Delta}$ .

TR2 Sea  $X \xrightarrow{u^{op}} Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} TX \in \tilde{\Delta}$ , entonces por definición  $Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{T(w)} TZ \in \Delta$ .

Por el ejercicio 4 se tiene que  $Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{-u} X \xrightarrow{-T(w)} TZ \in \Delta$ , y por ( 1.3 )  $T^{-1}X \xrightarrow{-(T^{-1}(-T(w)))} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{-u} X \in \Delta$ , es decir,  $T^{-1}X \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{-u} X \in \Delta$ .

Entonces por definición de  $\tilde{\Delta}$  se tiene que

$$Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} T^{-1}X \xrightarrow{-\tilde{T}(u^{op})} \tilde{T}Y \in \tilde{\Delta}$$

es decir,  $Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} \tilde{T}X \xrightarrow{-\tilde{T}(u^{op})} \tilde{T}Y \in \tilde{\Delta}$ .

TR3 Sean  $\eta^{op} = (X, Y, Z, u^{op}, v^{op}, w^{op})$ ,  $\mu^{op} = (X_0, Y_0, Z_0, u_0^{op}, v_0^{op}, w_0^{op})$  en  $\tilde{\Delta}$ , y  $f^{op} : X \rightarrow X_0$ ,  $g^{op} : Y \rightarrow Y_0$  tales que  $g^{op}u^{op} = u_0^{op}f^{op}$ . Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}^{op}$ :

$$\begin{array}{ccccc} \eta : & X & \xrightarrow{u^{op}} & Y & \xrightarrow{v^{op}} & Z & \xrightarrow{w^{op}} & \tilde{T}X \\ & \downarrow f^{op} & & \downarrow g^{op} & & & & \downarrow \tilde{T}(f^{op}) \\ \mu : & X_0 & \xrightarrow{u_0^{op}} & Y_0 & \xrightarrow{v_0^{op}} & Z_0 & \xrightarrow{w_0^{op}} & \tilde{T}X_0. \end{array}$$

y en consecuencia se tiene el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc} Z_0 & \xrightarrow{v_0} & Y_0 & \xrightarrow{u_0} & X_0 & \xrightarrow{T(w_0)} & TZ_0 & \in \Delta \\ & & \downarrow g & & \downarrow f & & & \\ Z & \xrightarrow{v} & Y & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{T(w)} & TZ & \in \Delta \dots (1) \end{array}$$

donde, como  $g^{op}u^{op} = u_0^{op}f^{op}$  entonces  $(ug)^{op} = (fu_0)^{op}$ , es decir,  $ug = fu_0$ .

Rotando a la izquierda por ( 1.3 ), se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} Y_0 & \xrightarrow{u_0} & X_0 & \xrightarrow{T(w_0)} & TZ_0 & \xrightarrow{-T(v_0)} & TY_0 \\ \downarrow g & & \downarrow f & & & & \downarrow T(f) \\ Y & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{T(w)} & TZ & \xrightarrow{-T(v)} & TY. \end{array}$$

Así por ( TR3 ) sobre  $\Delta$ , se tiene que existe  $h_1 : TZ_0 \rightarrow TZ$  tal que hace conmutar el diagrama, es decir,  $h_1T(w_0) = t(w)f$  y  $-T(v)h_1 = T(f)(-T(v_0))$ .

Tomando  $h = T^{-1}(h_1)$  se tiene que, como  $T$  es fiel y pleno,

$$\begin{aligned} -T(v)h_1 &= -T(gv_0) \\ T(vh) &= T(gv_0) \\ vh &= gv_0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h_1T(w_0) &= t(w)f \\ T(h)T(w_0) &= T(w)f. \end{aligned}$$

Es decir, (1) con el morfismo  $h$  es un diagrama conmutativo, y tomando  $h^{op}$  se tiene que  $v^{op}g^{op} = (gv)^{op} = (vh)^{op} = h^{op}v^{op}$  y  $w^{op}h^{op} = (hw_0)^{op} = (T^{-1}(T(h)T(w_0)))^{op} = (T^{-1}(T(h)f))^{op} = (wT^{-1}(f))^{op} = (T^{-1}(f))^{op}w^{op} = \tilde{T}(f^{op})w^{op}$ . Por lo que es diagrama de las hipótesis para TR3 es conmutativo con  $h^{op}$ .

TR4 Por último, en caso de ser  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  categoría triangulada supon- gamos que tenemos el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}^{op}$

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha^{op} : & X & \xrightarrow{u^{op}} & Y & \xrightarrow{i^{op}} & Z' & \xrightarrow{i'^{op}} & \tilde{T}X \\
& \parallel & & \downarrow v^{op} & & & & \parallel \\
\beta^{op} : & X & \xrightarrow{v^{op}u^{op}} & Z & \xrightarrow{k^{op}} & Y' & \xrightarrow{k'^{op}} & \tilde{T}X \\
& \downarrow u^{op} & & \parallel & & & & \downarrow \tilde{T}(u^{op}) \\
\gamma^{op} : & Y & \xrightarrow{v^{op}} & Z & \xrightarrow{r^{op}} & X' & \xrightarrow{j^{op}} & \tilde{T}Y \\
& & & & & \downarrow h^{op} & & \downarrow \tilde{T}(i^{op}) \\
& & & & & TZ' & \xlongequal{\quad} & TZ' \quad \dots (1).
\end{array}$$

Se afirma que existen  $f^{op}, g^{op}$  tales que  $\theta^{op} : Z' \xrightarrow{f^{op}} Y' \xrightarrow{g^{op}} X' \xrightarrow{h^{op}} \tilde{T}Z' \in \tilde{\Delta}$  y hacen conmutar el diagrama anterior.

Observemos el siguiente diagrama en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\gamma_0 : & T^{-1}Z & \xrightarrow{-T^{-1}(v)} & T^{-1}Y & \xrightarrow{-j} & X' & \xrightarrow{r} & Z \\
& \parallel & & \downarrow T^{-1}(u) & & & & \parallel \\
\beta_0 : & T^{-1}Z & \xrightarrow{-T^{-1}(uv)} & T^{-1}X & \xrightarrow{-k'} & Y' & \xrightarrow{k} & Z \\
& \downarrow T^{-1}(v) & & \parallel & & & & \downarrow v \\
\alpha_0 : & T^{-1}Y & \xrightarrow{-T^{-1}(u)} & T^{-1}X & \xrightarrow{-i'} & Z' & \xrightarrow{i} & Y \\
& & & & & \downarrow T(h) & & \downarrow T(j) \\
& & & & & TX' & \xlongequal{\quad} & TX' \quad \dots (2).
\end{array}$$

Observemos que  $h^{op} = \tilde{T}(i^{op})j^{op} = (T^{-1}(i))^{op}j^{op}$  entonces  $h = jT^{-1}(i)$  y así  $T(h) = T(j)i$ .

Ahora, consideremos a  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  como los triangulos distinguidos en  $\mathcal{C}$

dados por los triángulos en  $\tilde{\Delta}$  dados en el primer diagrama:

$$\begin{aligned}\alpha : Z' &\xrightarrow{i} Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{T(i')} TZ' \\ \beta : Y' &\xrightarrow{k} Z \xrightarrow{uv} X \xrightarrow{T(k')} TY' \\ \gamma : X' &\xrightarrow{r} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{T(j)} TX' ,\end{aligned}$$

y rotando dos veces a la izquierda cada uno por (TR2) sobre  $\Delta$  se obtienen  $\alpha_0, \beta_0$  y  $\gamma_0$  respectivamente, los cuales por definición serán elementos de  $\tilde{\Delta}$ .

Como  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  es categoría triangulada, por el axioma del octaedro existen  $g : X' \rightarrow Y'$  y  $f : Y' \rightarrow Z'$  tales que hacen conmutar el diagrama (2)

$$\text{y } \theta : X' \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{f} Z' \xrightarrow{T(h)} TX' \in \Delta . \text{ Así}$$

$\theta^{op} : Z' \xrightarrow{f^{op}} Y' \xrightarrow{g^{op}} X' \xrightarrow{h^{op}} TZ' \in \tilde{\Delta}$ , y  $f^{op}, g^{op}$  hacen conmutar el diagrama (1), pues:

- $f^{op}i^{op} = (if)^{op} = (vk)^{op} = k^{op}v^{op}$ .
- $-i' = f \circ (-k')$  entonces  $(-i')^{op} = (f \circ (-k'))^{op} = -(k')^{op}f^{op}$   
así  $i^{op} = k'^{op}f^{op}$ .
- $g^{op}k^{op} = (kg)^{op} = (r)^{op}$ .
- $j^{op}g^{op} = (gj)^{op} = (kT^{-1}(u))^{op} = (T^{-1}(u))^{op}k^{op} = \tilde{T}(u^{op})k^{op}$ .

□

**Ej 6.** Sean  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  una categoría pre-triangulada y  $\eta : X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$  en  $\Delta$ . Pruebe que para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , el siguiente triángulo es distinguido

$$\eta^i : T^i(X) \xrightarrow{(-1)^i T^i(u)} T^i(Y) \xrightarrow{(-1)^i T^i(v)} T^i(Z) \xrightarrow{(-1)^i T^i(w)} T^{i+1}(X).$$

*Demostración.* En el caso que  $i \in \mathbb{N}$  la demostración se sigue por inducción.

Caso base.  $i = 0$ . En este caso  $\eta^i = \eta^0 = \eta \in \Delta$ .

Hipótesis de inducción. Sea  $i > 0$  y suponga que  $\eta^i \in \Delta$ .

Paso inductivo. Después de aplicar 3 rotaciones consecutivas a la derecha (TR2) al triángulo  $\eta^i$  se obtiene el siguiente triángulo distinguido:

$$T^{i+1}(X) \xrightarrow{(-1)^{i+1} T^{i+1}u} T^{i+1}(Y) \xrightarrow{(-1)^{i+1} T^{i+1}v} T^{i+1}(Z) \xrightarrow{(-1)^{i+1} T^{i+1}w} T^{i+2}(X)$$

es decir,  $\eta^{i+1} \in \Delta$ .

Resta demostrar que se encuentran los triángulos del tipo  $\eta^{(-i)}$  para  $i \geq 0$ . Y para demostrar esto se procede también por inducción sobre  $i$ . El caso base coincide con el demostrado antes, se sigue pues con:

hipótesis de inducción. Sea  $i > 0$  y suponga que  $\eta^{(-i)} \in \Delta$ .

Paso inductivo. Después de aplicar 3 rotaciones consecutivas a la izquierda (por 1.3) al triángulo  $\eta^{(-i)}$  se obtiene el siguiente triángulo distinguido:

$$T^{-(i+1)}(X) \xrightarrow{(-1)^{-(i+1)}T^{-(i+1)}} T^{-(i+1)}(Y) \xrightarrow{(-1)^{-(i+1)}T^{-(i+1)}} T^{-(i+1)}(Z) \xrightarrow{(-1)^{-(i+1)}T^{-(i+1)}} T^{-i}(X)$$

es decir,  $\eta^{-(i+1)} \in \Delta$ . Se concluye el ejercicio.  $\square$

**Ej 7.** Sean  $(\mathcal{C}, T\Delta)$  una categoría pretriangulada,  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  un funtor cohomológico y, para cada  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $F^i := F \circ T^i$ . Entonces  $\forall X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \in \Delta$ , se tienen las siguientes sucesiones exactas largas en  $\mathcal{A}$  según corresponda a la varianza de  $F$ :

- (a)  $\dots \longrightarrow F^i X \xrightarrow{F^i u} F^i Y \xrightarrow{F^i v} F^i Z \xrightarrow{F^i w} F^{i+1} X \longrightarrow \dots$ ,  
si  $F$  es covariante;
- (b)  $\dots \longrightarrow F^i Z \xrightarrow{F^i w} F^i Y \xrightarrow{F^i v} F^i X \xrightarrow{F^i u} F^{i+1} Z \longrightarrow \dots$ ,  
si  $F$  es contravariante.

*Demostración.* Comenzaremos verificando lo siguiente:

**Lema.** Sean  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana y  $\alpha : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{A}$ , entonces

- (i)  $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(-\alpha)$ ,  
(ii)  $\text{Im}(\alpha) = \text{Im}(-\alpha)$ .

*Demostración.* (i) Notemos que la afirmación es equivalente a que  $\beta : C \hookrightarrow A$  es un kernel para  $\alpha$  si y sólo si lo es para  $-\alpha$ .

$\Rightarrow$  Se tiene que

$$(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta) = 0.$$

Ahora, si  $\gamma : C' \rightarrow A$  es tal que  $(-\alpha)\gamma = 0$ , entonces  $-(\alpha\gamma) = 0$  y por tanto  $\alpha\gamma = 0$ . Así, por la propiedad universal del kernel aplicada a  $\beta$  y  $\alpha$  se obtiene que  $\exists! \delta : C' \rightarrow C$  tal que  $\gamma = \beta\delta$ . Con lo cual se he verificado

que  $\beta$  es un kernel para  $-\alpha$ .

$\boxed{\Longleftarrow}$  Como  $\beta$  es un kernel para  $\alpha' := -\alpha$  entonces por lo probado en  $\boxed{\Longrightarrow}$   $\beta$  es un kernel para  $-\alpha' = -(-\alpha) = \alpha$ .

ii Primeramente notemos que lo demostrado en (i) garantiza que  $Coker(\alpha) = Coker(-\alpha)$ . En efecto, como  $\mathcal{A}^{op}$  al serlo  $\mathcal{A}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \beta \in Coker(\alpha) \text{ en } \mathcal{A} &\iff \beta^{op} \in Ker(\alpha^{op}) \text{ en } \mathcal{A}^{op}, \\ &\iff \beta^{op} \in Ker(-^{op}\alpha^{op}) \text{ en } \mathcal{A}^{op}, \quad (i) \\ &\iff \beta^{op} \in Ker(-\alpha)^{op} \text{ en } \mathcal{A}^{op}, \quad (*) \\ &\iff \beta \in Coker(-\alpha) \text{ en } \mathcal{A}. \end{aligned}$$

La equivalencia dada en (\*) se sigue de que la estructura aditiva en  $Hom_{\mathcal{A}^{op}}(B, A)$  viene dada por

$$\varphi^{op} + {}^{op}\theta^{op} := \varphi + \theta^{op}.$$

Ahora, sea  $\nu$  un subobjeto de  $B$ . Dado que  $\mathcal{A}$  es abeliana por 1.6.4 de las notas de Homología relativa en categorías abelianas se tiene que

$$\begin{aligned} \nu \in Im(-\alpha) &\iff \nu \in Ker(Coker(-\alpha)), \\ &\iff \nu \in Ker(Coker(\alpha)), \\ &\iff \nu \in Im(\alpha), \end{aligned}$$

con lo cual se tiene lo deseado. □

$\boxed{(a)}$  Sea  $i \in \mathbb{Z}$ . Por Ej. 6

$$\eta: T^i X \xrightarrow{(-1)^i T^i u} T^i Y \xrightarrow{(-1)^i T^i v} T^i Z \xrightarrow{(-1)^i T^i w} T^{i+1} X \in \Delta.$$

Así, si suponemos que  $F$  es covariante, se tiene que

$$FT^i X \xrightarrow{(-1)^i T^i u} FT^i Y \xrightarrow{(-1)^i T^i v} FT^i Z$$

es una sucesión exacta en  $\mathcal{C}$ . Por lo anterior y el Lema se sigue que

$$Ker(F^i v) = Ker((-1)^i F^i v) = Im((-1)^i F^i u) = Im(F^i u),$$

y así

$$F^i X \xrightarrow{F^i u} F^i Y \xrightarrow{F^i v} FT^i Z$$

es exacta en  $\mathcal{C}$ .

Ahora, por (TR2) aplicado a  $\eta$  y por ser  $T$  un funtor aditivo se tiene que

$$T^i Y \xrightarrow{(-1)^i T^i v} T^i Z \xrightarrow{(-1)^i T^i w} T^{i+1} X \xrightarrow{(-1)^{i+1} T^{i+1} u} T^{i+1} Y \in \Delta$$

con lo cual, valiéndose nuevamente del Lema y que  $F$  es cohomológico se obtiene la siguiente sucesión exacta en  $\mathcal{C}$

$$F^i Y \xrightarrow{F^i v} F^i Z \xrightarrow{F^i w} F^{i+1} X .$$

En forma análoga, aplicando  $F$  al triángulo distinguido, obtenido a partir de aplicar dos veces (TR2) a  $\eta$ ,

$$T^i Z \xrightarrow{(-1)^i T^i w} T^{i+1} X \xrightarrow{(-1)^{i+1} T^{i+1} u} T^{i+1} Y \xrightarrow{(-1)^{i+1} T^{i+1} v} T^{i+1} Z \in \Delta$$

se obtiene que

$$F^i Z \xrightarrow{F^i w} F^{i+1} X \xrightarrow{F^{i+1} u} F^{i+1} Y .$$

la siguiente sucesión exacta en  $\mathcal{C}$ .  
La arbitrariedad de  $i$  nos da lo deseado.

(b) Se demuestra en forma análoga a (a). □

**Ej 8.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $h : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$ . Pruebe que:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, h) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, A) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, B) \iff h : A \xrightarrow{\sim} B.$$

*Demostración.* Supongamos  $h : A \rightarrow B$  es isomorfismo y sea  $M \in \mathcal{C}$ , entonces  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, B)$ .

Sean  $g : B \rightarrow A$  tal que  $h \circ g = 1_B$ ,  $g \circ h = 1_A$  y  $r \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A)$  entonces  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h)(r) = h \circ r$ , así  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, g) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, A)$  es tal que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, g) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h)(r) = g(hr) = (gh)r = r$$

así  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, g) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h) = 1_A$ .

Análogamente si  $s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, B)$  entonces  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, g)(s) = h(gs) = (hg)s = s$ , es decir  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, g) = 1_B$  y así  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h)$  es iso.

Por otra parte, si  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, h)$  es isomorfismo, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) & \xrightarrow[\sim]{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, h)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1_A, A) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1_A, B) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) & \xrightarrow[\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, h)]{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B). \end{array}$$

mas aún, como  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, h)(1_A) = h \circ 1_A = h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  entonces  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^{-1}(A, h)h = 1_A$ .

Ahora, por el lema de Yoneda existe  $g : B \rightarrow A$  tal que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^{-1}(A, h) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, g)$  en particular  $h \circ g = \text{Hom}_{\mathcal{C}}^{-1}(A, h)(g) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, h) \text{Hom}_{\mathcal{C}}^{-1}(A, h)(1_B) = 1_B$  y  $g \circ h = \text{Hom}_{\mathcal{C}}^{-1}(A, h) \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, h)(1_A) = 1_A$  por lo que  $h$  es isomorfismo.  $\square$

**Ej 9.** Sean  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  una categoría pre-triangulada y  $\eta : X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$   
 $\eta' : A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} T(A) \in \Delta$ . Pruebe que el diagrama en  $\mathcal{C}$ ,

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(X) \\ & & \downarrow g & & & & \\ A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & T(A) \end{array}$$

las siguientes condiciones son equivalentes.

- a)  $bgu = 0$
- b) Existe  $f : X \rightarrow A$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $gu = af$
- c) Existe  $h : Z \rightarrow C$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $bg = hv$
- d) Existen  $f : X \rightarrow A$  y  $h : Z \rightarrow C$  en  $\mathcal{C}$  tales que  $(f, g, h) : \eta \rightarrow \eta'$  es un morfismo de triángulos.

Mas aún, si  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T^{-1}C) = 0$  y las condiciones anteriores se satisfacen entonces el morfismo  $f$  en b) (resp.  $h$  en c)) es único.

*Demostración.* a)  $\Rightarrow$  b). Suponga que  $b(gu) = bgu = 0$ , lo anterior implica que existe  $f : X \rightarrow A$  tal que  $af = gu$  pues  $a \in \text{sker}(b)$ .

b)  $\Rightarrow$  c). Suponga que existe  $f : X \rightarrow A$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $gu = af$ , por TR3 existe  $h : Z \rightarrow C$  tal que  $(f, g, h) : \eta \rightarrow \eta'$  es un morfismo de triángulos, en particular  $bg = hv$ .

c)  $\Rightarrow$  d). Suponga que existe  $h : Z \rightarrow C$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $bg = hv$ . Resta estudiar la existencia de algún  $f : X \rightarrow A$  tal que  $gu = af$  y que  $T(f)w = ch$ . Se inicia con la siguiente configuración:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(X) \\ & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & T(A) \end{array}$$



después de aplicar una vez TR2 a los triángulos  $\eta$  y  $\eta'$  se obtiene la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(X) & \xrightarrow{-Tu} & T(Y) \\ \downarrow g & & \downarrow h & & & & \downarrow Tg \\ B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & T(A) & \xrightarrow{-Ta} & T(B) \end{array}$$

entonces por TR3 y por que  $T$  es un automorfismo, existe  $f : X \rightarrow A$  tal que  $T(f) \circ w = c \circ h$  y  $T(g) \circ -Tu = -Ta \circ Tf$  por consiguiente  $gu = af$ . Se puede concluir que  $(f, g, h) : \eta \rightarrow \eta'$  es un morfismo de triángulos.

$d) \Rightarrow a)$ . Por hipótesis se sabe que  $hv = bg$ , es así que se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} bgu &= (bg)u \\ &= (hv)u \\ &= h(vu) \\ &= h0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

A continuación se estudia la unicidad del morfismo  $f : X \rightarrow A$ . Suponga que existe otro morfismo  $f' : X \rightarrow A$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $gu = af'$ . Es así que se tiene la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(X) \\ f' \downarrow \downarrow f & & \downarrow g & & & & \\ A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & T(A) \end{array}$$

después de rotar ambos triángulos una vez a la izquierda (por 1.3) y aplicar el funtor cohomológico  $Hom_{\mathcal{C}}(X, \_) : \mathcal{C} \rightarrow ab$  se tiene el siguiente par de sucesiones exactas:

$$\begin{array}{ccccc} Hom_{\mathcal{C}}(X, T^{-1}Z) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(X, X) & \xrightarrow{Hom_{\mathcal{C}}(X, u)} & Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ \downarrow & & Hom_{\mathcal{C}}(X, f') \downarrow \downarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, f) & & \downarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, g) \\ Hom_{\mathcal{C}}(X, T^{-1}C) = 0 & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(X, A) & \xrightarrow{Hom_{\mathcal{C}}(X, a)} & Hom_{\mathcal{C}}(X, B) \end{array}$$

se puede deducir que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, a)$  es un monomorfismo, así pues se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, a) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f))(1_X) &= (\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, a) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, f'))(1_X) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, a)(f) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, a)(f') \\ f &= f' \end{aligned}$$

como se buscaba. Para finalizar se estudia la unicidad del morfismo  $h : Z \rightarrow C$ .

Suponga pues que existe  $h' : Z \rightarrow C$  tal que  $bg = h'v$ . Considere el funtor covariante  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$  y observe que

□

**Ej 10.** Sean  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  una categoría pre-triangulada,  $\eta := X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$  en  $\Delta$  tal que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T^{-1}Z) = 0$ . Las siguientes condiciones se satisfacen:

(a) si

$$\eta' = X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX \in \Delta,$$

entonces  $\exists! g : Z \rightarrow Z'$  en  $\mathcal{C}$  tal que  $(1_X, 1_Y, g) : \eta \rightarrow \eta'$  es un isomorfismo en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}, \Delta)$ ;

(b) si  $w' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, TX)$  es tal que  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w'} TX \in \Delta$ , entonces  $w = w'$ .

*Demostración.* (a) Notemos que

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX \\ \downarrow 1_X & & \downarrow 1_Y & & \downarrow \exists! h & & \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \end{array}$$

(I)

es un diagrama en el cual (I) es un cuadro conmutativo y  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T^{-1}Z) = 0$ , por lo cual aplicando Ej. 9 se sigue que  $\exists! h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z)$  tal que  $(f, g, h)$  es un morfismo de triángulos; más aún, por Ej. 3 se tiene que  $h$  es un isomorfismo puesto que  $f$  y  $g$  lo son. De modo que, por Ej. 1(b),  $(1_X, 1_Y, h) : \eta \xrightarrow{\sim} \eta'$  en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)$ , con

$$(1_X, 1_Y, h)^{-1} = \left( (1_X)^{-1}, (1_Y)^{-1}, h^{-1} \right) = (1_X, 1_Y, h^{-1}).$$

Así, tomando  $g := h^{-1}$ , se ha verificado la existencia.

Sea  $g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z')$  tal que  $(1_X, 1_Y, g')$  es un isomorfismo en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)$ . Entonces  $(1_X, 1_Y, g^{-1})(1_X, 1_Y, g')^{-1} : \eta' \xrightarrow{\sim} \eta$  en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)$ , luego por la unicidad de  $h$  se sigue que  $(g')^{-1} = h$  y por lo tanto  $g' = h^{-1}$ .

(b) Sea  $\eta' = (X, Y, Z, u, v, W')$ . Como  $\eta' \in \Delta$  por (a) se tiene que  $\exists! g : Z \rightarrow Z$  tal que  $(1_X, 1_Y, g) : \eta \xrightarrow{\sim} \eta'$  en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)$ , así que

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{\quad} & Y & \xrightarrow{\quad} & Z & \xrightarrow{\quad} & TX \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w'} & TX
 \end{array}
 \quad \begin{array}{cc}
 & (A) \\
 & (B)
 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$ . En particular, por (A)  $g$  es un morfismo tal que  $gv = v$ . Como  $1_Z v = v$  y  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T^{-1}Z) = 0$ , por Ej. 9(b), entonces  $g = 1_Z$  y así por (B) se tiene que

$$\begin{aligned}
 w &= 1_{TX} w = w' g = w' 1_Z \\
 &= w'.
 \end{aligned}$$

□

**Ej 11.** Sean  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  una categoría triangulada y  $\mathcal{D}$  una subcategoría triangulada. Pruebe que:

- a)  $\mathcal{D}$  es cerrada por isomorfismos en  $\mathcal{C}$  (en particular,  $\mathcal{D}$  contiene a todos los ceros de  $\mathcal{C}$ ).
- b)  $\mathcal{D}$  es una subcategoría aditiva de  $\mathcal{C}$ .
- c)  $\forall \eta :$

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 X & \xrightarrow{\quad} & Y
 \end{array}$$

- d) Si  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow TX \in \Delta$  y dos de los objetos  $X, Y, Z$  están en  $\mathcal{D}$ , entonces el tercero de ellos también lo está.
- e) Sea  $\Delta|_{\mathcal{D}} := \{X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow TX \in \Delta : X, Y, Z \in \mathcal{D}\}$  y la restricción  $T|_{\mathcal{D}}$  del funtor  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  en la subcategoría  $\mathcal{D}$ . Entonces el triple  $(\mathcal{D}, T|_{\mathcal{D}}, \Delta|_{\mathcal{D}})$  es una categoría triangulada.
- g)  $\mathcal{D}^{op}$  es una subcategoría triangulada de  $(\mathcal{C}, T, \Delta)^{op}$ .

*Demostración.*  $\boxed{a)}$  Sean  $X, 0 \in \text{Obj}(\mathcal{D})$  tal que  $X \cong Y$  en  $\mathcal{C}$  (por definición de subcategoría triangulada existe un  $0$  en  $\mathcal{D}$ ).

Observemos primero que

$$X \xrightarrow[\sim]{\begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix}} X \amalg 0$$

y que los siguientes son morfismos en  $\mathcal{C}$ :  $(h \ 0) : X \amalg 0 \rightarrow Y$  y  $\begin{pmatrix} h^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} : Y \rightarrow X \amalg 0$ . En particular

$$\begin{aligned} (h \ 0) \begin{pmatrix} h^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} &= hh^{-1} + 0 = 1_Y \quad \text{y} \\ \begin{pmatrix} h^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} (h \ 0) &= \begin{pmatrix} h^{-1}h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix} = 1_{X \amalg 0}. \end{aligned}$$

Mas aún, si consideramos a  $Y$  con la familia  $\{\nu_1 = h, \nu_2 = 0_{0Y}\}$  se tiene que  $(h \ 0)$  es un isomorfismo que conmuta con las inclusiones naturales del coproducto  $X \amalg 0$ :

$$\begin{aligned} (h \ 0) \begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix} &= h + 0 = h = \nu_1 \quad \text{y} \\ (h \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 + 0 = 0 = \nu_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $Y$  con la familia  $\{\nu_1, \nu_2\}$  son un coproducto de  $\{X, 0\}$  y como  $\mathcal{D}$  es una subcategoría triangulada, entonces por (ST2) se tiene que  $Y \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ .

$\boxed{b)}$  Por definición de subcategoría triangulada  $\mathcal{D}$  tiene objeto cero (SA1). Como  $\mathcal{C}$  es aditiva y  $\mathcal{D}$  es plena,  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}$  tiene estructura de grupo abeliano para todo  $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  (SA2).

Como  $\mathcal{C}$  es aditiva y  $\mathcal{D}$  es plena la composición de morfismos en  $\mathcal{D}$  es bilineal (SA3), además, por definición  $\mathcal{D}$  es cerrada bajo coproductos finitos (SA4), así  $\mathcal{D}$  es subcategoría aditiva de  $\mathcal{C}$ .

c) Sea  $\eta : X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \in \Delta$  con  $X, Y \in \mathcal{D}$ , entonces por ( TR2 )  $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \in \Delta$ , como  $T(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$ , se tiene que  $TX \in \mathcal{D}$  y por ( TR1a )

$$\begin{aligned} Y &\xrightarrow{1_Y} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow TY \quad \text{y} \\ 0 &\longrightarrow TX \xrightarrow{T(1_X)} TX \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

están en  $\Delta$ .

Pero  $\mathcal{D}$  es cerrado bajo coproductos finitos, así

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} Y \amalg TX \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \in \Delta.$$

Así se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & Y \amalg TX & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} & TX & \xrightarrow{-T(u)} & TY \\ \downarrow 1_Y & & & & \downarrow T(1_X) & & \downarrow T(1_Y) \\ Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{-T(u)} & T(Y) \end{array}$$

por el lema ( 1.1 ) existe un morfismo  $g : Y \amalg TX \longrightarrow Z$  tal que  $\varphi := (1_Y, g, T(1_X)) \in J(\mathcal{C}, \Delta)$ , además por (Ejercicio 3) se tiene que  $g$  es iso, por lo tanto  $\varphi$  es iso y por el inciso b) se tiene que  $Z \in \mathcal{D}$ .

d) Sea  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow TX \in \Delta$  tal que dos de los objetos  $X, Y, Z$  están en  $\mathcal{D}$ , si  $X, Y \in \mathcal{D}$  entonces el inciso c) implica que  $Z \in \mathcal{D}$ . Ahora (S.P.G) supongamos  $X, Z \in \mathcal{D}$  rotamos a la izquierda por el teorema ( 1.3 ) y tenemos que  $T^{-1}(Z) \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \in \Delta$ . Pero  $T^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$ , por lo que  $T^{-1}(Z) \in \mathcal{D}$ . Y así, por el inciso c) se tiene el resultado (el último caso es análogo rotando dos veces a la izquierda).

e) Sean  $\Delta|_{\mathcal{D}} := \{X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow TX \in \Delta \mid X, Y, Z \in \mathcal{D}\}$  y la restricción  $T|_{\mathcal{D}}$  del funtor  $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  en la subcategoría  $\mathcal{D}$ .

Se probará que  $(\mathcal{D}, T|_{\mathcal{D}}, \Delta|_{\mathcal{D}})$  es una categoría triangulada (probando cada uno de los axiomas).

$\boxed{TR1(a)}$

Sea  $X \in \mathcal{D}$ , en particular  $X \in \mathcal{C}$  por lo que, por ( TR1.a ) sobre  $\mathcal{C}$

$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \in \Delta$  . Pero por el inciso a) sabemos que todos los ceros de  $\mathcal{C}$  están en  $\mathcal{D}$ , y como  $TX \in \mathcal{D}$  entonces

$$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \in \Delta|_{\mathcal{D}}$$

$\boxed{TR1(b)}$

Por el inciso a) se tiene el resultado.

$\boxed{TR1(c)}$

Sea  $f : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{D}$ , entonces  $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{C}$  y por ( TR1.c ) en  $\mathcal{C}$

existe  $Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \in \mathcal{C}$  tal que

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \in \Delta$ . Por el inciso c), como  $X, Y \in \mathcal{D}$  entonces  $Z \in \mathcal{D}$  y como  $\mathcal{D}$  es plena se tiene que

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \in \Delta|_{\mathcal{D}}.$$

$\boxed{TR2}$

Supongamos  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \in \Delta|_{\mathcal{D}} \subseteq \Delta$  entonces

$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \in \Delta$  pero  $T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$  y  $T$  es pleno por lo que  $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \in \Delta|_{\mathcal{D}}$ .

$\boxed{TR3}$

Sean  $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$ ,  $\mu = (X', Y', Z', u', v', w')$  en  $\Delta|_{\mathcal{D}}$  y

$f : X \rightarrow X'$ ,  $g : Y \rightarrow Y'$  en  $\mathcal{D}$  tales que  $gu = u'f$ .

Por ( TR3 ) sobre  $\mathcal{C}$  existe  $h : Z \rightarrow Z'$  tal que  $\varphi := (f, g, h) : \eta \rightarrow \mu$  es morfismo en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)$  en particular como  $Z, Z' \in \mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}$  es plena, entonces  $h \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(Z, Z')$ , por lo tanto  $\varphi \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, T)$ .

$\boxed{TR4}$  (Axioma del octaedro)

Supongamos que tenemos el siguiente diagrama en  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{i} & Z' & \xrightarrow{i'} & TX & \in \Delta|_{\mathcal{D}} \\
\parallel & & \downarrow v & & & & \parallel & \\
X & \xrightarrow{vu} & Z & \xrightarrow{k} & Y' & \xrightarrow{k'} & TX & \in \Delta|_{\mathcal{D}} \\
\downarrow u & & \parallel & & & & \downarrow T(u) & \\
Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{r} & X' & \xrightarrow{j} & TY & \in \Delta|_{\mathcal{D}} \\
& & & & \downarrow T(i)j & & \downarrow T(i) & \\
& & & & TZ' & = & TZ' &
\end{array}$$

El axioma del octaedro en  $\mathcal{C}$  nos indica que existe  $f : Z' \rightarrow Y'$  y  $g : Y' \rightarrow X'$  tales que hacen conmutar el diagrama anterior, y que

$\theta : Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{h} TZ' \in \Delta$ . Como  $\mathcal{D}$  es pleno y cada objeto (vertice) del diagrama está en  $\mathcal{D}$  entonces  $f, g \in Mor(\mathcal{D})$  por lo que  $\theta \in \Delta|_{\mathcal{D}}$  y se cumple el axioma del octaedro.

f) Por alguna extraña razón no hay f en este ejercicio.

g) Para comenzar se observa que, como  $\mathcal{D}$  es una categoría triangulada, entonces por el (Ej. 5)  $\mathcal{D}^{op}$  será una categoría triangulada. También se tiene que  $Obj(\mathcal{D}) = Obj(\mathcal{D}^{op})$  y como  $\mathcal{D}$  es subcategoría plena de  $\mathcal{C}$  entonces  $\mathcal{D}^{op}$  es subcategoría plena de  $\mathcal{C}^{op}$ . Esto último es fácil de ver, pues cada morfismo en  $\mathcal{C}^{op}$  entre objetos de  $\mathcal{D}^{op}$  es el morfismo opuesto  $f^{op}$  de un morfismo  $f$  en  $\mathcal{C}$  entre objetos de  $\mathcal{D}$ , y como  $\mathcal{D}$  es plena, entonces  $f$  está en  $\mathcal{D}$  y así  $f^{op}$  está en  $\mathcal{D}^{op}$ .

Se probarán los axiomas de subcategoría triangulada para  $(\mathcal{D}, T|_{\mathcal{D}}, \Delta|_{\mathcal{D}})$ .

ST1 Como  $\mathcal{D}$  contiene un objeto cero, entonces  $\mathcal{D}^{op}$  contiene un objeto cero.

ST2 Sean  $X, Y \in \mathcal{D}^{op}$ , entonces  $X, Y \in \mathcal{D}$  y por ser  $\mathcal{D}$  subcategoría triangulada, entonces  $X \amalg Y$  está en  $\mathcal{D}$ . Pero  $\mathcal{C}$  es una categoría aditiva, entonces  $\mathcal{D}$  es aditiva también y todo coproducto finito es un producto finito, así  $X \amalg Y \in \mathcal{D}$  y por lo tanto  $(X \amalg^{op} Y) = (X \amalg Y)^{op} \in \mathcal{D}^{op}$  donde  $\amalg^{op}$  denota al coproducto en  $\mathcal{D}$ .

ST3 Observemos que  $A \in Obj(\mathcal{D}^{op}) \iff A \in Obj(\mathcal{D})$ , entonces para cada  $A \in \mathcal{D}$ ,  $T(A) \in \mathcal{D}$  y  $\tilde{T}(A) \in \mathcal{D}^{op}$ . Análogamente  $T^{-1}(A) \in \mathcal{D}^{op}$ .

Sea  $f : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{D}^{op}$  entonces  $\tilde{T}(f) = (T^{-1}(f^{op}))^{op}$  pero  $f^{op} : B \rightarrow A$  está en  $\mathcal{D}$  por lo que  $T^{-1}(f^{op}) \in \mathcal{D}$ , es decir,  $\tilde{T}(f) \in (\mathcal{D})^{op}$ . Análogamente

$$\tilde{T}^{-1}(f) \in (\mathcal{D})^{op}.$$

**ST4** Sea  $f : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{D}^{op}$ , entonces  $f^{op} : Y \rightarrow X$  en  $\mathcal{D}$ , por (ST4) sobre  $\mathcal{D}$ , se tiene que existe  $\eta : Y \xrightarrow{f^{op}} X \longrightarrow Z \longrightarrow TY \in \Delta|_{\mathcal{D}}$  con  $Z$  en  $\mathcal{D}$ . Así por el teorema (1.3)  $\eta_0 : T^{-1}Z \longrightarrow Y \xrightarrow{f^{op}} X \longrightarrow Z \in \Delta|_{\mathcal{D}}$ , y por definición de categoría triangulada opuesta

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \tilde{T}^{-1}Z \longrightarrow \tilde{T}X \in \Delta|_{\mathcal{D}^{op}}.$$

Por lo que  $(\mathcal{D}, T|_{\mathcal{D}}, \Delta|_{\mathcal{D}})^{op}$  es subcategoría triangulada de  $(\mathcal{C}, T, \Delta)^{op}$ .  $\square$

**Ej 12.** Sea  $(F, \eta) : (\mathcal{C}_1, T_1, \Delta_1) \rightarrow (\mathcal{C}_2, T_2, \Delta_2)$  un funtor graduado entre categorías trianguladas. Para cada  $\theta : X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \in T(\mathcal{C}_1, T_1)$  define  $\bar{F}(\theta) : FXu \xrightarrow{F} Fyv \xrightarrow{F} FZw \xrightarrow{F} T_2FX \in T(\mathcal{C}_2, T_2)$ .

Pruebe que la correspondencia que extiende al funtor  $F$  a la categoría de triángulos  $\bar{F} : \mathcal{T}(\mathcal{C}_1, T_1) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{C}_2, T_2)$

$$((f, g, h) : \theta \rightarrow \mu) \mapsto (\bar{F}(f, g, h) : \bar{F}(\theta) \rightarrow \bar{F}(\mu))$$

donde  $\bar{F}(f, g, h) = (Ff, Fg, Fh)$ , es funtorial.

*Demostración.* a) Sea  $\varphi = (f, g, h) : \theta \rightarrow \mu$  un morfismo en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}_1, T_1)$ , se demuestra que en efecto  $\bar{F}(\varphi) : \bar{F}(\theta) \rightarrow \bar{F}(\mu)$  es un morfismo en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}_2, T_2)$ . A continuación se ilustra al morfismo  $\varphi : \theta \rightarrow \mu$ :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T_1X \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow T_1f \\ A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & T_1A \end{array}$$

se busca demostrar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} FX & \xrightarrow{Fu} & FY & \xrightarrow{Fv} & FZ & \xrightarrow{\eta_X \circ Fw} & T_2FX \\ \downarrow Ff & & \downarrow Fg & & \downarrow Fh & & \downarrow T_1f \\ FA & \xrightarrow{Fa} & FB & \xrightarrow{Fb} & FC & \xrightarrow{\eta_A \circ Fc} & T_2FA \end{array}$$

observe que debido a la funtorialidad de  $F$  se tiene la conmutatividad de los primeros dos cuadros, resta verificar la del último.

Como  $\eta : FT_1 \rightarrow T_2F$  es un isomorfismo natural, se tiene que el siguiente diagrama conmuta:



$$\begin{array}{ccccc}
FZ & \xrightarrow{Fw} & FT_1X & \xrightarrow{\eta_X} & T_2FX \\
\downarrow Fh & & \downarrow FT_1f & & \downarrow T_2Ff \\
FC & \xrightarrow{Fc} & FT_1A & \xrightarrow{\eta_A} & T_2FA
\end{array}$$

así pues se puede concluir que  $\bar{F}(\varphi) : \bar{F}(\theta) \rightarrow \bar{F}(\mu)$  es un morfismo en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}_2, T_2)$ .

En lo que respecta a la composición se cumple lo siguiente. Sean  $\varphi = (f, g, h) : \theta \rightarrow \mu$ ,  $\psi = (r, s, t) : \mu \rightarrow \sigma$  morfismos en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}_1, T_1)$ . Así

$$\begin{aligned}
\bar{F}(\psi \circ \varphi) &= \bar{F}((r, s, t) \circ (f, g, h)) \\
&= \bar{F}(rf, sg, th) \\
&= (F(rf), F(sg), F(th)) \\
&= (Fr \circ Ff, Fs \circ Fg, Ft \circ Fh) \\
&= (Fr, Fs, Ft) \circ (Ff, Fg, Fh) \\
&= \bar{F}(r, s, t) \circ \bar{F}(f, g, h)
\end{aligned}$$

Además para cualquier  $\theta : X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \in \mathcal{T}(\mathcal{C}_1, T_1)$  se cumple que:

$$\begin{aligned}
\bar{F}(1_\theta) &= \bar{F}(1_X, 1_Y, 1_Z) \\
&= (F(1_X), F(1_Y), F(1_Z)) \\
&= (1_{FX}, 1_{FY}, 1_{FZ}) \\
&= 1_{\bar{F}(\theta)}.
\end{aligned}$$

Se puede concluir que  $\bar{F} : \mathcal{T}(\mathcal{C}_1, T_1) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{C}_2, T_2)$  es un funtor.  $\square$

**Ej 13.** Sea  $\eta : (F, \alpha) \rightarrow (G, \beta)$  una transformación de funtores graduados con  $F, G \in [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1]$ ,  $\bar{F}$  y  $\bar{G}$  los funtores introducidos en el Ej. 12 y, para cada

$$\epsilon : X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T_1X \in \mathcal{T}(\mathcal{C}_1, T_1),$$

$$\bar{\eta}_\epsilon := (\eta_X, \eta_Y, \eta_Z). \text{ Entonces } \bar{\eta} := \{\bar{\eta}_\epsilon\}_{\epsilon \in \mathcal{T}(\mathcal{C}_1, T_1)} \in \text{Nat}_{[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]}(\bar{F}, \bar{G}).$$

*Demostración.* Afirmamos que  $\forall \epsilon$

$$\begin{array}{ccccccc}
 FX & \xrightarrow{Fu} & FY & \xrightarrow{Fv} & FZ & \xrightarrow{\alpha_X Fw} & T_2 FX \\
 \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y & & \downarrow \eta_Z & & \downarrow T_2 \eta_X \\
 (III) & & & & & & \\
 GX & \xrightarrow{Gu} & GY & \xrightarrow{Gv} & GZ & \xrightarrow{\beta_X Gw} & T_2 GX
 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$ . En efecto, la conmutatividad de (I) y (II) se siguen de que  $\eta : F \rightarrow G$  es una transformación natural.

Ahora, dado que  $\eta$  es una transformación natural, para el morfismo  $w : Z \rightarrow T_1 X$  se tiene que

$$\begin{array}{ccc}
 FZ & \xrightarrow{\eta_Z} & GZ \\
 Fw \downarrow & & \downarrow Gw \\
 FT_1 X & \xrightarrow{\eta_{T_1 X}} & GT_1 X
 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$ , al igual que lo es el siguiente dado que  $\eta$  es una transformación natural de funtores graduados

$$\begin{array}{ccc}
 FT_1 X & \xrightarrow{\alpha_X} & T_2 FX \\
 \eta_{T_1 X} \downarrow & & \downarrow T_2 \eta_X \\
 GT_1 X & \xrightarrow{\beta_X} & T_2 GX
 \end{array}$$

de lo cual se sigue que

$$\begin{aligned}
 (T_2 \eta_X) \alpha_X Fw &= ((T_2 \eta_X) \alpha_X) Fw = (\beta_X \eta_{T_1 X}) Fw \\
 &= \beta_X (\eta_{T_1 X} Fw) = \beta_X (Gw \eta_Z), \\
 &= (\beta_X Gw) \eta_Z.
 \end{aligned}$$

Lo anterior garantiza la conmutatividad de (III), con lo cual se ha verificado la afirmación. Por lo tanto  $\forall \epsilon \in \mathcal{T}(\mathcal{C}_1, T_1)$  se tiene que  $\bar{\eta}_\epsilon = (\eta_X, \eta_Y, \eta_Z) \in \text{Hom}_{\mathcal{T}(\mathcal{C}_2, T_2)}(\bar{F}, \bar{G})$ .

Ahora, sea  $\varphi = (f, g, h) : \delta \rightarrow \delta'$  en  $\mathcal{T}(\mathcal{C}_1, T_1)$ , con

$$\begin{aligned}
 \delta : A &\xrightarrow{r} B \xrightarrow{s} C \xrightarrow{t} T_1 A, \\
 \delta' : A' &\xrightarrow{r'} B' \xrightarrow{s'} C' \xrightarrow{t'} T_1 A'.
 \end{aligned}$$

Luego, por ser  $\eta : F \rightarrow G$  una transformación natural de los morfismos

$f, g$  y  $h$  se obtienen los siguientes diagramas conmutativos en  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc}
FA & \xrightarrow{\eta_A} & GA \\
Ff \downarrow & & \downarrow Gf, \\
FA' & \xrightarrow{\eta_{A'}} & GA' \\
\\ 
FB & \xrightarrow{\eta_B} & GB \\
Fg \downarrow & & \downarrow Gg, \\
FB' & \xrightarrow{\eta_{B'}} & GB' \\
\\ 
FC & \xrightarrow{\eta_C} & GC \\
Fh \downarrow & & \downarrow Gh, \\
FC' & \xrightarrow{\eta_{C'}} & GC'
\end{array}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\overline{G}\varphi\eta_\delta &= (Gf, Gg, Gh) \circ (\eta_A, \eta_B, \eta_C) = (Gf\eta_A, Gg\eta_B, Gh\eta_C) \\
&= (\eta_{A'}Ff, \eta_{B'}Fg, \eta_{C'}Fh) = (\eta_{A'}, \eta_{B'}, \eta_{C'}) \circ (Ff, Fg, Fh) \\
&= \eta_{\delta'}\overline{F}\varphi.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{array}{ccc}
\overline{F}\delta & \xrightarrow{\eta_\delta} & \overline{G}\delta \\
\overline{F}\varphi \downarrow & & \downarrow \overline{G}\varphi \\
\overline{F}\delta' & \xrightarrow{\eta_{\delta'}} & \overline{G}\delta'
\end{array}$$

es un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$ .

Por todo lo anterior  $\overline{\eta}$  es una transformación natural de  $\overline{F}$  en  $\overline{G}$ .

□

## Ejercicios no numerados

**Proposición (Lema 1.1(b)).** Sean  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  una categoría pre-triangulada y  $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$ ,  $\eta' = (X', Y', Z', u', v', w') \in \Delta$ . Si  $\exists g : Y \rightarrow Y'$  y  $\exists h : Z \rightarrow Z'$  tales que  $hv = v'g$ , entonces  $\exists f : X \rightarrow X'$  tal que  $(f, g, h)$  es un morfismo de  $\eta$  en  $\eta'$ .

*Demostración.* Como  $\eta, \eta' \in \Delta$ , entonces por TR2 los siguientes son triángulos distinguidos

$$\begin{aligned}
\mu : Y &\xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY, \\
\mu' : Y' &\xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX' \xrightarrow{-Tu'} TY'
\end{aligned}$$

para los cuales, por hipótesis,  $\exists g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y')$  y  $\exists h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z')$  tales que

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{-Tu} & TY \\
 \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow \exists \Psi & & \downarrow Tg \\
 Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX' & \xrightarrow{-Tu'} & TY'
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \text{(I)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{(II)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{(III)}$$

(I) y (II) son diagramas conmutativos en  $\mathcal{C}$ . Luego por  $TR3$   $\exists \Psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(TX, TX')$  tal que  $(g, h, \psi) \in \text{Hom}_{\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)}(\mu, \mu')$ . Dado que  $T$  es en particular pleno,  $\exists f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$  tal que  $Tf = \Psi$ .

Como se tiene ahora que (III) es un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 -T(gu) &= (Tg)(-Tu) = (-Tu')\Psi \\
 &= (-Tu')Tf = -T(u'f),
 \end{aligned}$$

y así  $gu = u'f$ , pues  $T$  es, en particular, fiel. Por su parte, de (II) se sigue que  $(Tf)w = w'h$ , de modo que

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u'} & Y & \xrightarrow{v'} & Z & \xrightarrow{w'} & TX \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow Tf \\
 X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX'
 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$  y por lo tanto  $(f, g, h) \in \text{Hom}_{\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)}(\eta, \eta')$ .  $\square$

**Proposición** (Lema 1.12). Sean  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  una categoría triangulada y  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ , entonces:

- (i)  $\mathcal{D}$  es una subcategoría triangulada de  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  si y sólo si  $T(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}$  es cerrada por co-conos;
- (ii)  $\mathcal{D}$  es una subcategoría triangulada de  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  si y sólo si  $T(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$ ,  $T^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}$  es cerrada por extensiones.

*Demostración.* (i)  $\implies$  De  $ST3$  se sigue que  $T^{-1}(D) \subseteq D$ .

Ahora, sea

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \in \Delta.$$

Por Prop. 1.3

$$T^{-1}Z \xrightarrow{-Tw} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \in \Delta,$$

con  $X, Y \in \mathcal{D}$ , luego por Ej. 11(d)  $T^{-1}Z \in \mathcal{D}$ . Por lo tanto  $\mathcal{D}$  es cerrado por co-conos.

(i)  $\Leftarrow$  ST1. Sea  $X \in \mathcal{D}$  y  $0$  un objeto cero en  $\mathcal{C}$ . Por TR1(a)

$$X \xrightarrow{1} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \in \Delta,$$

luego  $T^0 \in \mathcal{D}$ , con  $T^{-1}0$  un objeto cero de  $\mathcal{C}$  puesto que  $0$  lo es y  $T$  es un automorfismo.

ST2. Sean  $X, Y \in \mathcal{D}$ . Por Coro 1.6 se tiene que

$$\begin{aligned} TX &\xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{TX} \\ 0 \end{pmatrix}} TX \amalg TY \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1_{TY} \end{pmatrix}} TY \xrightarrow{0} T^2X \in \Delta, \\ \Rightarrow Y &\xrightarrow{-T^{-1}0} TX \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{TX} \\ 0 \end{pmatrix}} TX \amalg TY \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1_{TY} \end{pmatrix}} TY \in \Delta, \quad TR2 \\ \Rightarrow Y &\xrightarrow{0} TX \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_{TX} \\ 0 \end{pmatrix}} T(X \amalg Y) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1_{TY} \end{pmatrix}} TY \in \Delta, \quad TR2 \end{aligned}$$

esto último puesto que  $T$  es un automorfismo. Dado que  $\mathcal{D}$  es cerrado por co-conos se sigue que

$$X \amalg Y = T^{-1} \left( T(X \amalg Y) \right) \in \mathcal{D}.$$

ST3. Resta probar que  $T^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$ . Sea  $X \in \mathcal{D}$ . Por TR1(a) se tiene que

$$T^{-1}X \xrightarrow{1} T^{-1}X \longrightarrow 0 \longrightarrow X \in \mathcal{D},$$

así que por TR2

$$T^{-1}X \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{1} X \in \mathcal{D},$$

de modo que, por ser  $\mathcal{D}$  cerrada por co-conos,  $T^{-1}X \in \mathcal{D}$ . Por lo tanto  $T^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$ .

ST4. Sea  $f : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{C}$  con  $X, Y \in \mathcal{D}$ . Así

$$\begin{aligned} \exists X &\xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \in \Delta, \quad TR1(c) \\ \Rightarrow T^{-1}Z &\in \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \text{ es cerrada por co-conos} \\ \Rightarrow Z &= T(T^{-1}Z) \in \mathcal{D}, \quad T(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D} \end{aligned}$$

con lo cual se verifica el axioma ST4.

Por todo lo anterior se sigue que  $\mathcal{D}$  es una subcategoría triangulada de  $\mathcal{C}$ .

(ii)  $\implies$  Se sigue de ST3 y Ej. 11(d).

(ii)  $\longleftarrow$  ST1 Sea  $X \in \mathcal{D}$ . Así

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{1} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \in \Delta, & TR1(a) \\ \implies X &\longrightarrow 0 \longrightarrow TX \xrightarrow{1} TX \in \Delta, & TR2 \\ \implies 0 &\in \mathcal{D}. & \mathcal{D} \text{ es cerrada} \\ & & \text{por extensiones} \end{aligned}$$

ST2 Se tiene por ser  $\mathcal{D}$  cerrado por extensiones y Coro 1.6.

ST3 Se tiene por hipótesis.

ST4 Sea  $f : X \rightarrow Y$  en  $\mathcal{C}$  con  $X, Y \in \mathcal{D}$ . Así

$$\begin{aligned} \exists X &\xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \in \Delta, & TR1(c) \\ \implies Y &\xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} TX \xrightarrow{-Tf} TY \in \Delta, & TR2 \\ \implies Z &\in \mathcal{D}. & \mathcal{D} \text{ es cerrada por co-conos} \end{aligned}$$

□

**Proposición (Corolario 1.9).** Para una categoría pretriangulada  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$ , las siguientes condiciones se satisfacen:

- a) Tomo mono (respectivamente epi) en  $\mathcal{C}$  es split-mono (respectivamente split-epi).
- b) Si  $\mathcal{C}$  es abeliano, entonces  $\mathcal{C}$  es semisimple ( i.e.  $Ext_{\mathcal{C}}^1(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}$ ).

*Demostración.* Se mostrará que todo epi en  $\mathcal{C}$  es un split-epi.

Sea  $f : X \rightarrow Y$  epi en  $\mathcal{C}$ , entonces  $f^{op} : Y \rightarrow X$  es un mono en  $\mathcal{C}^{op}$ . Por el (ej. 5) sabemos que  $(\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$  es una categoría pretriangulada, y por el inciso a), como  $f^{op}$  es mono, entonces  $f^{op}$  es split-mono. Así  $f$  es split-epi en  $\mathcal{C}^{op}$ .

□

**Proposición (Prop. 1.11(b)).** Sea  $(\mathcal{C}, T, \Delta)$  una categoría triangulada. Para cualquier  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} TA \in \Delta$  y  $\beta : C \rightarrow C$  en  $\mathcal{C}$ , se tiene el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & W & \xrightarrow{1_W} & W & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & D & \longrightarrow & TA \\
\downarrow 1_A & & \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow 1_{TA} \\
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & TA \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & TW & \xrightarrow{1_{TW}} & TW & & 
\end{array}$$

donde las filas y columnas, de dicho diagrama, son triángulos distinguidos.

*Demostración.* Por hipótesis se tiene la siguiente configuración inicial:

$$\begin{array}{ccccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & TA \in \triangle \\
& & & & \uparrow \beta & & \\
& & & & D & & 
\end{array}$$

pasando a la categoría opuesta se tiene la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccccccc}
C & \xrightarrow{g^{op}} & B & \xrightarrow{f^{op}} & A & \xrightarrow{\bar{T}(h^{op})} & \bar{T}C \in \bar{\triangle} \\
\downarrow \beta^{op} & & & & & & \\
D & & & & & & 
\end{array}$$

ahora, aplicando el *cambio de cobase* se tiene el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}^{op}$  donde filas y columnas son triángulos en  $\bar{\triangle}$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \bar{T}^{-1}W & \xrightarrow{1_{\bar{T}^{-1}W}} & \bar{T}^{-1}W & & \\
& & \downarrow p^{op} & & \downarrow r^{op} & & \\
\bar{T}^{-1}A & \xrightarrow{\bar{T}^{-1}(\bar{T}(h^{op}))} & C & \xrightarrow{g^{op}} & B & \xrightarrow{f^{op}} & A \\
\downarrow 1_A & & \downarrow \beta^{op} & & \downarrow s^{op} & & \downarrow 1_A \\
\bar{T}^{-1}A & \xrightarrow{a^{op}} & D & \xrightarrow{b^{op}} & E & \xrightarrow{c^{op}} & A \\
& & \downarrow q^{op} & & \downarrow t^{op} & & \\
& & W & \xrightarrow{1_W} & W & & 
\end{array}$$

si rotamos a una vez a la derecha (por TR2) a los triángulos distinguidos que ocupan las filas centrales se obtiene la siguiente situación:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \overline{T}^{-1}W & \xrightarrow{1_{\overline{T}^{-1}W}} & \overline{T}^{-1}W & & & \\
& \downarrow p^{op} & & \downarrow r^{op} & & & \\
C & \xrightarrow{g^{op}} & B & \xrightarrow{f^{op}} & A & \xrightarrow{\overline{T}(-h^{op})} & \overline{T}C \\
& \downarrow \beta^{op} & & \downarrow s^{op} & & \downarrow 1_A & \downarrow \overline{T}(\beta^{op}) \\
D & \xrightarrow{b^{op}} & E & \xrightarrow{c^{op}} & A & \xrightarrow{\overline{T}(a^{op})} & \overline{T}D \\
& \downarrow q^{op} & & \downarrow t^{op} & & & \\
W & \xrightarrow{1_W} & W & & & & 
\end{array}$$

dato que  $b^{op} \circ -h^{op} = a^{op}$  se deduce que  $\overline{T}(\beta^{op}) \circ -\overline{T}(-h^{op}) = -\overline{T}(a^{op})$ . Así pues el diagrama anterior es conmutativo.

De modo que pasando a la categoría opuesta los triángulos que ocupan las filas centrales y reescribiendo algunos morfismos se tiene el siguiente diagrama conmutativo en  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & TW & \xrightarrow{1_{TW}} & TW & & \\
& & \uparrow r & & \uparrow p & & \\
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & TA \\
\uparrow 1_A & & \uparrow s & & \uparrow \beta & & \uparrow 1_A \\
A & \xrightarrow{c} & E & \xrightarrow{b} & D & \xrightarrow{a} & TA \\
& & \uparrow & & \uparrow q & & \\
& & W & \xrightarrow{1_W} & W & & 
\end{array}$$

observe que cada fila y columna es un triángulo en  $\triangle$  como se buscaba. Se concluye el ejercicio.  $\square$

**Proposición (Ej. 13').** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $\Sigma \subset Mor(\mathcal{C})$ . Pruebe que la categoría  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  y el funtor de localización  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  son únicos salvo isomorfismos. Mas precisamente, sea  $q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  un funtor tal que

- a)  $\forall \sigma \in \Sigma \quad q(\sigma)$  es iso.
- b)  $\forall f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $F(\sigma)$  es iso  $\forall \sigma \in \Sigma$ ,  $\exists ! \bar{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $\bar{F} \circ q = F$ .

Pruebe que existe un isomorfismo de categorías  $\epsilon : \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}$  tal que  $\epsilon \circ Q = q$  i.e.



$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \\
& \searrow q & \downarrow \epsilon \\
& & \mathcal{B}
\end{array}
.$$

*Demostración.* Supongamos  $q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  es un funtor tal que

- a)  $\forall \sigma \in \Sigma \quad q(\sigma)$  es iso.
- b)  $\forall f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $F(\sigma)$  es iso  $\forall \sigma \in \Sigma$ ,  $\exists! \bar{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $\bar{F} \circ q = F$ .

Como  $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  es tal que  $Q(\sigma)$  es iso  $\forall \sigma \in \Sigma$ , entonces por hipótesis  $\exists! \epsilon_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  tal que  $\epsilon_0 \circ q = Q$ , es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} & \xrightarrow{q} & \mathcal{B} \\
& \searrow Q & \downarrow \epsilon_0 \\
& & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]
\end{array}
.$$

Ahora, como  $Q$  es funtor de localización y  $q(\sigma)$  es iso  $\forall \sigma \in \Sigma$ , entonces por definición  $\exists! \epsilon : \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}$  tal que  $\epsilon \circ Q = q$ . Así se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
& & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \\
& \nearrow Q & \downarrow \epsilon \\
\mathcal{C} & \xrightarrow{q} & \mathcal{B} \\
& \searrow Q & \downarrow \epsilon_0 \\
& & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]
\end{array}
.$$

En particular  $\epsilon_0 \epsilon$  es un funtor, t es tal que  $\forall \sigma \in \Sigma \quad \epsilon_0 \epsilon(\sigma)$  es un isomorfismo. Así por ( L2 ) sobre el funtor de localización  $Q$ , se tiene que  $\epsilon_0 \epsilon$  es único, pero  $1_{\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]}$  es un funtor con la misma propiedad ( pues  $\sigma$  es iso para cada  $\sigma \in \Sigma$  ) por lo tanto  $\epsilon_0 \epsilon = 1_{\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]}$  y análogamente  $\epsilon \epsilon_0 = 1_{\mathcal{B}}$ .

□