

Ejercicios 1-13'

Luis Gerardo Arruti Sebastian
Sergio Rosado Zúñiga

- 1.
2. Sean (\mathcal{C}, T, Δ) una categoría pre-triangulada y $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ en Δ . Pruebe que $u \in SKer(v)$, $v \in SCoKer(u) \cap SKer(w)$ y $w \in SCoKer(v)$.

Demostración. Primero se probará que $u \in SKer(v)$.
Por el teorema (1.2.a) se tiene que $vu = 0$.

Sea $r : M \rightarrow Y$ tal que $vr = 0$. Como $M \in \mathcal{C}$, entonces por el teorema (TR1a) $M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow TM$ está en Δ , y por (TR2) se puede rotar el triángulo de las hipótesis tal se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 M & \xrightarrow{1_M} & 0 & \longrightarrow & T(M) & \xrightarrow{-T(1_M)} & TM \\
 \downarrow r & & \downarrow 0 & & & & \downarrow T(r) \\
 Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(x) & \xrightarrow{-T(u)} & T(y) .
 \end{array}$$

Así, por (TR3) existe $s' : T(M) \rightarrow T(X)$ tal que $(T(r))(-T(1_M)) = (-T(u))(s')$, y como T es autofunctor, entonces $-T(r \circ 1_M) = -T(u \circ T^{-1}(s'))$. Si se toma $s = T^{-1}(s') : M \rightarrow X$ se tiene que $r = us$, por lo tanto $u \in SKer(v)$.

Veamos ahora que $v \in SCoKer(u)$.

Anteriormente se observó que $vu = 0$. Sea $t : Y \rightarrow M$ tal que $tu = 0$. Como $M \in \mathcal{C}$, entonces por el teorema (TR1a) $M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0 \longrightarrow TM$ está en Δ , así por (TR2) $0 = T^{-1}(0) \xrightarrow{0} M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0$ está en Δ .

Además, como $tu = 0$ entonces entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\
\downarrow 0 & & \downarrow t & & & & \downarrow T(0)=0 \\
0 & \xrightarrow{0} & M & \xrightarrow{1_M} & M & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Así, por (TR3) existe $s : Z \rightarrow M$ tal que $1_M \circ t = sv$ y por lo tanto $v \in SCoKer(u)$.

Por último, rotando el triángulo de las hipótesis por (TR1c) se tiene que $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(x) \xrightarrow{-T(u)} T(y)$ está en Δ , así por lo demostrado $v \in Ker(w)$ y $w \in CoKer(v)$.

□

- 3.
- 4.
5. Sea (\mathcal{C}, T, Δ) una categoría pretriangulada (respectivamente triangulada), pruebe que el triple $(\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$ es una categoría pretriangulada (respectivamente triangulada), donde $\tilde{T}(f^{op}) = (T^{-1}(f))^{op}$ y $\tilde{\Delta}$ se define como sigue:

$$X \xrightarrow{u^{op}} Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} \tilde{T}X \quad \in \tilde{\Delta}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Z \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} X \xrightarrow{Tw} TZ \quad \in \Delta.$$

En tal caso se define $(\mathcal{C}, T, \Delta)^{op} := (\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$.

Esto es, $(\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$ es una categoría pretriangulada (respectivamente triangulada) opuesta de $(\mathcal{C}, T, \Delta)^{op}$.

Demostración. Se puede observar que al tomar $(\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$ como se describe en las hipótesis, al ser \mathcal{C} una categoría abeliana, entonces \mathcal{C}^{op} también es una categoría abeliana, donde la operación está definida por $f^{op} \tilde{+} g^{op} := (f + g)^{op}$ para cada $f, g \in Mor(\mathcal{C})$ y $+ : Mor(\mathcal{C}) \times Mor(\mathcal{C}) \rightarrow Mor(\mathcal{C})$ la operación definida en \mathcal{C} .

Por lo anterior se tiene entonces que el funtor opuesto de una categoría aditiva cualquiera \mathcal{A} es aditivo, pues si $f, g \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$ entonces

$$D_{\mathcal{A}}(f + g) = (f + g)^{op} = f^{op} \tilde{+} g^{op} = D_{\mathcal{A}}(f) \tilde{+} D_{\mathcal{A}}(g).$$

Con esto en mente se demostrará que \tilde{T} es un autofunctor aditivo.

Lo primero que se tiene que notar es que $\tilde{T} = D_{\mathcal{C}}T^{-1}D_{\mathcal{C}^{op}}$, por lo que \tilde{T} es un funtor aditivo al ser composición de funtores aditivos. Por otra parte se tiene que $\tilde{G} = D_{\mathcal{C}}TD_{\mathcal{C}^{op}}$ es un funtor aditivo, y es tal que

$$\begin{aligned}\tilde{G}\tilde{T} &= D_{\mathcal{C}}TD_{\mathcal{C}^{op}}D_{\mathcal{C}}T^{-1}D_{\mathcal{C}^{op}} \\ &= D_{\mathcal{C}}TT^{-1}D_{\mathcal{C}^{op}} \\ &= D_{\mathcal{C}}D_{\mathcal{C}^{op}} \\ &= 1_{\mathcal{C}^{op}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}\tilde{G} &= D_{\mathcal{C}}T^{-1}D_{\mathcal{C}^{op}}D_{\mathcal{C}}TD_{\mathcal{C}^{op}} \\ &= D_{\mathcal{C}}T^{-1}TD_{\mathcal{C}^{op}} \\ &= D_{\mathcal{C}}D_{\mathcal{C}^{op}} \\ &= 1_{\mathcal{C}^{op}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto \tilde{T} es un autofunctor aditivo.

Vemos ahora que $(\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$ es una categoría pretriangulada.

TR1a) Sea $X \in \mathcal{C}^{op}$ entonces $X \in \mathcal{C}$, como (\mathcal{C}, T, Δ) es pretriangulada,

entonces $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \in \Delta$.

Rotando a la izquierda dos veces por (1.3) sobre \mathcal{C} se tiene que

$$T^{-1}X \xrightarrow{T^{-1}(0)} 0 \longrightarrow X \xrightarrow{1_X} X \in \tilde{\Delta}.$$

Así, por definición de $\tilde{\Delta}$ y por el hecho de que $T^{-1}X = \tilde{T}X$ se tiene que

$$X \xrightarrow{(1_X)^{op}=1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow \tilde{T}X \in \tilde{\Delta}.$$

TR1b) Sean $\alpha : C \xrightarrow{w^{op}} B \xrightarrow{v^{op}} A \xrightarrow{u^{op}} \tilde{T}C$ y

$$\beta : Z \xrightarrow{t^{op}} Y \xrightarrow{s^{op}} X \xrightarrow{r^{op}} \tilde{T}Z$$

en \mathcal{C}^{op} , tal que $\alpha \in \tilde{\Delta}$ y $\alpha \cong \beta$. Entonces se tienen isomorfismos $\varphi^{op}, \psi^{op}, \theta^{op} \in Mor(\mathcal{C}^{op})$ tales que el siguiente diagrama conmuta en \mathcal{C}^{op} :

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha : & C & \xrightarrow{w^{op}} & B & \xrightarrow{v^{op}} & A & \xrightarrow{u^{op}} & \tilde{T}C \\ & \downarrow \varphi^{op} & & \downarrow \psi^{op} & & \downarrow \theta^{op} & & \downarrow \tilde{T}(\varphi^{op}) \\ \beta : & Z & \xrightarrow{t^{op}} & Y & \xrightarrow{s^{op}} & X & \xrightarrow{r^{op}} & \tilde{T}Z. \end{array}$$

Así el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha' : & & T^{-1}C & \xrightarrow{-u} & A & \xrightarrow{v} & B \xrightarrow{w} C \\ & & \uparrow T^{-1}(\varphi) & & \uparrow \theta & & \uparrow \psi \\ \beta' : & & T^{-1}Z & \xrightarrow{-r} & X & \xrightarrow{s} & Y \xrightarrow{t} Z, \end{array}$$

pues

- $-u \circ T^{-1}(\varphi) = -[(T^{-1}(\varphi))^{op} \circ u^{op}]^{op} = -[\tilde{T}(\varphi^{op}) \circ u^{op}]^{op} = -[r^{op}\theta^{op}]^{op} = -[(\theta r)^{op}]^{op} = -[\theta r] = \theta \circ (-r).$
- $v\theta = [\theta^{op}v^{op}]^{op} = [s^{op}\psi^{op}]^{op} = [(\psi s)^{op}]^{op} = \psi s.$
- $w\psi = [\psi^{op}w^{op}]^{op} = [t^{op}\varphi^{op}]^{op} = [(\varphi t)^{op}]^{op} = \varphi t.$

Como $A \xrightarrow{v} B \xrightarrow{w} C \xrightarrow{T(u)} TA \in \Delta$ por estar $\alpha \in \tilde{\Delta}$, entonces $\alpha' \in \Delta$ por (TR2) sobre \mathcal{C} al ser su rotación a izquierda. Así se tiene que $\alpha' \cong \beta'$ con $\alpha' \in \Delta$ y, por (TR1 b), $\beta' \in \Delta$. Eso implica que (al rotar β' por (TR2)) el triángulo $X \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{t} Z \xrightarrow{T(r)} TX \in \Delta$ y por definición entonces $\beta \in \tilde{\Delta}$.

TR1c) Sea $f^{op} : B \rightarrow A$ en \mathcal{C}^{op} entonces $f : A \rightarrow B$ está en \mathcal{C} .

Por (TR1 c) sobre \mathcal{C} , existe $B \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX$ en \mathcal{C} tal que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \in \Delta$, así por (TR2) sobre \mathcal{C} se tiene que $T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}(\beta)} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha=T^{-1}(\alpha)} Z \in \Delta$.

Por lo tanto $B \xrightarrow{f^{op}} A \xrightarrow{-(T^{-1}(\beta))^{op}} T^{-1}Z \xrightarrow{(T^{-1}(\alpha))^{op}} \tilde{T}B \in \tilde{\Delta}$ y así $B \xrightarrow{f^{op}} A \xrightarrow{-(\tilde{T}(\beta))^{op}} \tilde{T}Z \xrightarrow{\tilde{T}(\alpha)^{op}} \tilde{T}B \in \tilde{\Delta}$.

TR2 Sea $X \xrightarrow{u^{op}} Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} TX \in \tilde{\Delta}$, entonces por definición $Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{T(w)} TZ \in \Delta$.

Por el ejercicio 4 se tiene que $Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{-u} X \xrightarrow{-T(w)} TZ \in \Delta$, y por (1.3) $T^{-1}X \xrightarrow{-(T^{-1}(-T(w)))} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{-u} X \in \Delta$, es decir, $T^{-1}X \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{-u} X \in \Delta$.

Entonces por definición de $\tilde{\Delta}$ se tiene que

$$Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} T^{-1}X \xrightarrow{-\tilde{T}(u^{op})} \tilde{T}Y \in \tilde{\Delta}$$

es decir, $Y \xrightarrow{v^{op}} Z \xrightarrow{w^{op}} \tilde{T}X \xrightarrow{-\tilde{T}(u^{op})} \tilde{T}Y \in \tilde{\Delta}$.

TR3 Sean $\eta^{op} = (X, Y, Z, u^{op}, v^{op}, w^{op})$, $\mu^{op} = (X_0, Y_0, Z_0, u_0^{op}, v_0^{op}, w_0^{op})$ en $\tilde{\Delta}$, y $f^{op} : X \rightarrow X_0$, $g^{op} : Y \rightarrow Y_0$ tales que $g^{op}u^{op} = u_0^{op}f^{op}$. Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo en \mathcal{C}^{op} :

$$\begin{array}{ccccccc} \eta : & X & \xrightarrow{u^{op}} & Y & \xrightarrow{v^{op}} & Z & \xrightarrow{w^{op}} & \tilde{T}X \\ & \downarrow f^{op} & & \downarrow g^{op} & & & & \downarrow \tilde{T}(f^{op}) \\ \mu : & X_0 & \xrightarrow{u_0^{op}} & Y_0 & \xrightarrow{v_0^{op}} & Z_0 & \xrightarrow{w_0^{op}} & \tilde{T}X_0. \end{array}$$

y en consecuencia se tiene el siguiente diagrama conmutativo en \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccccccc} Z_0 & \xrightarrow{v_0} & Y_0 & \xrightarrow{u_0} & X_0 & \xrightarrow{T(w_0)} & TZ_0 & \in \Delta \\ & & \downarrow g & & \downarrow f & & & \\ Z & \xrightarrow{v} & Y & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{T(w)} & TZ & \in \Delta \dots (1) \end{array}$$

donde, como $g^{op}u^{op} = u_0^{op}f^{op}$ entonces $(ug)^{op} = (fu_0)^{op}$, es decir, $ug = fu_0$.

Rotando a la izquierda por (1.3), se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} Y_0 & \xrightarrow{u_0} & X_0 & \xrightarrow{T(w_0)} & TZ_0 & \xrightarrow{-T(v_0)} & TY_0 \\ \downarrow g & & \downarrow f & & & & \downarrow T(f) \\ Y & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{T(w)} & TZ & \xrightarrow{-T(v)} & TY. \end{array}$$

Así por (TR3) sobre Δ , se tiene que existe $h_1 : TZ_0 \rightarrow TZ$ tal que hace conmutar el diagrama, es decir, $h_1T(w_0) = t(w)f$ y $-T(v)h_1 = T(f)(-T(v_0))$.

Tomando $h = T^{-1}(h_1)$ se tiene que, como T es fiel y pleno,

$$\begin{aligned} -T(v)h_1 &= -T(gv_0) \\ T(vh) &= T(gv_0) \\ vh &= gv_0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h_1T(w_0) &= t(w)f \\ T(h)T(w_0) &= T(w)f. \end{aligned}$$

Es decir, (1) con el morfismo h es un diagrama conmutativo, y tomando h^{op} se tiene que $v^{op}g^{op} = (gv)^{op} = (vh)^{op} = h^{op}v^{op}$ y

$w^{op}h^{op} = (hw_0)^{op} = (T^{-1}(T(h)T(w_0)))^{op} = (T^{-1}(T(h)f))^{op} = (wT^{-1}(f))^{op} = (T^{-1}(f))^{op}w^{op} = \tilde{T}(f^{op})w^{op}$. Por lo que es diagrama de las hipótesis para TR3 es conmutativo con h^{op} .

TR4 Por último, en caso de ser (\mathcal{C}, T, Δ) categoría triangulada supon-
gamos que tenemos el siguiente diagrama en \mathcal{C}^{op}

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha^{op} : & X & \xrightarrow{u^{op}} & Y & \xrightarrow{i^{op}} & Z' & \xrightarrow{i'^{op}} & \tilde{T}X \\
& \parallel & & \downarrow v^{op} & & & & \parallel \\
\beta^{op} : & X & \xrightarrow{v^{op}u^{op}} & Z & \xrightarrow{k^{op}} & Y' & \xrightarrow{k'^{op}} & \tilde{T}X \\
& \downarrow u^{op} & & \parallel & & & & \downarrow \tilde{T}(u^{op}) \\
\gamma^{op} : & Y & \xrightarrow{v^{op}} & Z & \xrightarrow{r^{op}} & X' & \xrightarrow{j^{op}} & \tilde{T}Y \\
& & & & & \downarrow h^{op} & & \downarrow \tilde{T}(i^{op}) \\
& & & & & TZ' & \xlongequal{\quad} & TZ' \quad \dots (1).
\end{array}$$

Se afirma que existen f^{op}, g^{op} tales que $\theta^{op} : Z' \xrightarrow{f^{op}} Y' \xrightarrow{g^{op}} X' \xrightarrow{h^{op}} \tilde{T}Z' \in \tilde{\Delta}$ y hacen conmutar el diagrama anterior.

Observemos el siguiente diagrama en \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccccccc}
\gamma_0 : & T^{-1}Z & \xrightarrow{-T^{-1}(v)} & T^{-1}Y & \xrightarrow{-j} & X' & \xrightarrow{r} & Z \\
& \parallel & & \downarrow T^{-1}(u) & & & & \parallel \\
\beta_0 : & T^{-1}Z & \xrightarrow{-T^{-1}(uv)} & T^{-1}X & \xrightarrow{-k'} & Y' & \xrightarrow{k} & Z \\
& \downarrow T^{-1}(v) & & \parallel & & & & \downarrow v \\
\alpha_0 : & T^{-1}Y & \xrightarrow{-T^{-1}(u)} & T^{-1}X & \xrightarrow{-i'} & Z' & \xrightarrow{i} & Y \\
& & & & & \downarrow T(h) & & \downarrow T(j) \\
& & & & & TX' & \xlongequal{\quad} & TX' \quad \dots (2).
\end{array}$$

Observemos que $h^{op} = \tilde{T}(i^{op})j^{op} = (T^{-1}(i))^{op}j^{op}$ entonces $h = jT^{-1}(i)$ y así $T(h) = T(j)i$.

Ahora, consideremos a α, β y γ como los triangulos distinguidos en \mathcal{C} dados por los triangulos en $\tilde{\Delta}$ dados en el primer diagrama:

$$\begin{aligned}\alpha : Z' &\xrightarrow{i} Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{T(i')} TZ' \\ \beta : Y' &\xrightarrow{k} Z \xrightarrow{uv} X \xrightarrow{T(k')} TY' \\ \gamma : X' &\xrightarrow{r} Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{T(j)} TX' ,\end{aligned}$$

y rotando dos veces a la izquierda cada uno por (TR2) sobre Δ se obtienen α_0, β_0 y γ_0 respectivamente, los cuales por definici3n ser3n elementos de $\tilde{\Delta}$.

Como (\mathcal{C}, T, Δ) es categor3a triangulada, por el axioma del octaedro existen $g : X' \rightarrow Y'$ y $f : Y' \rightarrow Z'$ tales que hacen conmutar el diagrama (2)

$$\text{y } \theta : X' \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{f} Z' \xrightarrow{T(h)} TX' \in \Delta . \text{ As3 } \theta^{op} : Z' \xrightarrow{f^{op}} Y' \xrightarrow{g^{op}} X' \xrightarrow{h^{op}} TZ' \in \tilde{\Delta} , \text{ y } f^{op}, g^{op} \text{ hacen conmutar el diagrama (1), pues:}$$

- $f^{op}i^{op} = (if)^{op} = (vk)^{op} = k^{op}v^{op} .$
- $-i' = f \circ (-k')$ entonces $(-i')^{op} = (f \circ (-k'))^{op} = -(k')^{op}f^{op}$
as3 $i^{op} = k'^{op}f^{op} .$
- $g^{op}k^{op} = (kg)^{op} = (r)^{op} .$
- $j^{op}g^{op} = (gj)^{op} = (kT^{-1}(u))^{op} = (T^{-1}(u))^{op}k^{op} = \tilde{T}(u^{op})k^{op} .$

□

6.

7.

8. Sean \mathcal{C} una categor3a y $h : A \rightarrow B$ en \mathcal{C} . Pruebe que:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, h) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, A) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, B) \iff h : A \xrightarrow{\sim} B .$$

Demostraci3n. Supongamos $h : A \rightarrow B$ es isomorfismo y sea $M \in \mathcal{C}$, entonces $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, B) .$

Sean $g : B \rightarrow A$ tal que $h \circ g = 1_B, g \circ h = 1_A$ y $r \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, A)$ entonces $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h)(r) = h \circ r$, as3 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, g) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, A)$ es tal que

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, g) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h)(r) = g(hr) = (gh)r = r$$

as3 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, g) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h) = 1_A .$

Análogamente si $s \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, B)$ entonces
 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, g)(s) = h(gs) = (hg)s = s$, es decir
 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h) \circ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, g) = 1_B$ y así $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(M, h)$ es iso.

Por otra parte, si $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\bullet, h)$ es isomorfismo, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) & \xrightarrow[\sim]{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, h)} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1_A, A) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(1_A, B) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) & \xrightarrow[\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, h)]{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B). \end{array}$$

mas aún, como $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, h)(1_A) = h \circ 1_A = h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ entonces $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^{-1}(A, h)h = 1_A$.

Ahora, por el lema de Yoneda existe $g : B \rightarrow A$ tal que
 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^{-1}(A, h) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, g)$ en particular
 $h \circ g = \text{Hom}_{\mathcal{C}}^{-1}(A, h)(g) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, h) \text{Hom}_{\mathcal{C}}^{-1}(A, h)(1_B) = 1_B$ y
 $g \circ h = \text{Hom}_{\mathcal{C}}^{-1}(A, h) \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, h)(1_A) = 1_A$ por lo que h es isomorfismo.

□

9.

10.

11. Sean (\mathcal{C}, T, Δ) una categoría triangulada y \mathcal{D} una subcategoría triangulada. Pruebe que:

- a) \mathcal{D} es cerrada por isomorfismos en \mathcal{C} (en particular, \mathcal{D} contiene a todos los ceros de \mathcal{C}).
- b) \mathcal{D} es una subcategoría aditiva de \mathcal{C} .
- c) $\forall \eta :$

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow & & \searrow \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y \end{array}$$

- d) Si $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow TX \in \Delta$ y dos de los objetos X, Y, Z están en \mathcal{D} , entonces el tercero de ellos también lo está.
- e) Sea $\Delta|_{\mathcal{D}} := \{X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow TX \in \Delta : X, Y, Z \in \mathcal{D}\}$ y la restricción $T|_{\mathcal{D}}$ del funtor $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ en la subcategoría \mathcal{D} .
Entonces el triple $(\mathcal{D}, T|_{\mathcal{D}}, \Delta|_{\mathcal{D}})$ es una categoría triangulada.
- g) \mathcal{D}^{op} es una subcategoría triangulada de $(\mathcal{C}, T, \Delta)^{op}$.

Demostración. a) Sean $X, 0 \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ tal que $X \cong Y$ en \mathcal{C} (por definición de subcategoría triangulada existe un 0 en \mathcal{D}).

Observemos primero que

$$X \xrightarrow[\sim]{\begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix}} X \amalg 0$$

y que los siguientes son morfismos en \mathcal{C} : $(h \ 0) : X \amalg 0 \rightarrow Y$ y $\begin{pmatrix} h^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} : Y \rightarrow X \amalg 0$. En particular

$$(h \ 0) \begin{pmatrix} h^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = hh^{-1} + 0 = 1_Y \quad \text{y}$$

$$\begin{pmatrix} h^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} (h \ 0) = \begin{pmatrix} h^{-1}h \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix} = 1_{X \amalg 0}.$$

Mas aún, si consideramos a Y con la familia $\{\nu_1 = h, \nu_2 = 0_{0Y}\}$ se tiene que $(h \ 0)$ es un isomorfismo que conmuta con las inclusiones naturales del coproducto $X \amalg 0$:

$$(h \ 0) \begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix} = h + 0 = h = \nu_1 \quad \text{y}$$

$$(h \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0 = \nu_2.$$

Por lo tanto Y con la familia $\{\nu_1, \nu_2\}$ son un coproducto de $\{X, 0\}$ y como \mathcal{D} es una subcategoría triangulada, entonces por (ST2) se tiene que $Y \in \text{Obj}(\mathcal{D})$.

b) Por definición de subcategoría triangulada \mathcal{D} tiene objeto cero (SA1). Como \mathcal{C} es aditiva y \mathcal{D} es plena, $\text{Hom}_{\mathcal{D}}$ tiene estructura de grupo abeliano para todo $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ (SA2).

Como \mathcal{C} es aditiva y \mathcal{D} es plena la composición de morfismos en \mathcal{D} es bilineal (SA3), además, por definición \mathcal{D} es cerrada bajo coproductos finitos (SA4), así \mathcal{D} es subcategoría aditiva de \mathcal{C} .

c) Sea $\eta : X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \in \Delta$ con $X, Y \in \mathcal{D}$, entonces por (TR2) $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \in \Delta$, como $T(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$, se tiene que $TX \in \mathcal{D}$ y por (TR1a)

$$\begin{array}{ccccccc}
Y & \xrightarrow{1_Y} & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & TY \\
0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{T(1_X)} & TX & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

están en Δ .

Pero \mathcal{D} es cerrado bajo coproductos finitos, así

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} Y \amalg TX \xrightarrow{(0 \ 1)} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \in \Delta.$$

Así se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & Y \amalg TX & \xrightarrow{(0 \ 1)} & TX & \xrightarrow{-T(u)} & TY \\
\downarrow 1_Y & & & & \downarrow T(1_X) & & \downarrow T(1_Y) \\
Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX & \xrightarrow{-T(u)} & T(Y)
\end{array}$$

por el lema (1.1) existe un morfismo $g : Y \amalg TX \rightarrow Z$ tal que $\varphi := (1_Y, g, T(1_X)) \in J(\mathcal{C}, \Delta)$, además por (Ejercicio 3) se tiene que g es iso, por lo tanto φ es iso y por el inciso b) se tiene que $Z \in \mathcal{D}$.

d) Sea $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow TX \in \Delta$ tal que dos de los objetos X, Y, Z están en \mathcal{D} , si $X, Y \in \mathcal{D}$ entonces el inciso c) implica que $Z \in \mathcal{D}$. Ahora (S.P.G) supongamos $X, Z \in \mathcal{D}$ rotamos a la izquierda por el teorema (1.3) y tenemos que $T^{-1}(Z) \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \in \Delta$. Pero $T^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$, por lo que $T^{-1}(Z) \in \mathcal{D}$. Y así, por el inciso c) se tiene el resultado (el último caso es análogo rotando dos veces a la izquierda).

e) Sean $\Delta|_{\mathcal{D}} := \{X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow TX \in \Delta \mid X, Y, Z \in \mathcal{D}\}$ y la restricción $T|_{\mathcal{D}}$ del funtor $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ en la subcategoría \mathcal{D} .

Se probará que $(\mathcal{D}, T|_{\mathcal{D}}, \Delta|_{\mathcal{D}})$ es una categoría triangulada (probando cada uno de los axiomas).

TR1.a

Sea $X \in \mathcal{D}$, en particular $X \in \mathcal{C}$ por lo que, por (TR1.a) sobre \mathcal{C}

$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \in \Delta$. Pero por el inciso a) sabemos que todos los ceros de \mathcal{C} están en \mathcal{D} , y como $TX \in \mathcal{D}$ entonces

$$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX \in \Delta|_{\mathcal{D}}$$

TR1.b

Por el inciso a) se tiene el resultado.

TR1.c

Sea $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{D} , entonces $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{C}$ y por (TR1.c) en \mathcal{C}

existe $Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \in \mathcal{C}$ tal que

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \in \Delta$. Por el inciso c), como $X, Y \in \mathcal{D}$ entonces $Z \in \mathcal{D}$ y como \mathcal{D} es plena se tiene que

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} TX \in \Delta|_{\mathcal{D}}.$$

TR2

Supongamos $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \in \Delta|_{\mathcal{D}} \subseteq \Delta$ entonces

$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \in \Delta$ pero $T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ y T es pleno por lo que $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T(u)} TY \in \Delta|_{\mathcal{D}}$.

TR3

Sean $\eta = (X, Y, Z, u, v, w)$, $\mu = (X', Y', Z', u', v', w')$ en $\Delta|_{\mathcal{D}}$

$f : X \rightarrow X'$, $g : Y \rightarrow Y'$ en \mathcal{D} tales que $gu = u'f$.

Por (TR3) sobre \mathcal{C} existe $h : Z \rightarrow Z'$ tal que $\varphi := (f, g, h) : \eta \rightarrow \mu$ es morfismo en $\mathcal{T}(\mathcal{C}, T)$ en particular como $Z, Z' \in \mathcal{D}$ y \mathcal{D} es plena, entonces $h \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(Z, Z')$, por lo tanto $\varphi \in \mathcal{T}(\mathcal{D}, T)$.

TR4 (Axioma del octaedro)

Supongamos que tenemos el siguiente diagrama en \mathcal{D} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{i} & Z' & \xrightarrow{i'} & TX & \in \Delta|_{\mathcal{D}} \\
 \parallel & & \downarrow v & & & & \parallel & \\
 X & \xrightarrow{vu} & Z & \xrightarrow{k} & Y' & \xrightarrow{k'} & TX & \in \Delta|_{\mathcal{D}} \\
 \downarrow u & & \parallel & & & & \downarrow T(u) & \\
 Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{r} & X' & \xrightarrow{j} & TY & \in \Delta|_{\mathcal{D}} \\
 & & & & \downarrow T(i)j & & \downarrow T(i) & \\
 & & & & TZ' & = & TZ' &
 \end{array}$$

El axioma del octaedro en \mathcal{C} nos indica que existe $f : Z' \rightarrow Y'$ y $g : Y' \rightarrow X'$ tales que hacen conmutar el diagrama anterior, y que

$\theta : Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{h} TZ' \in \Delta$. Como \mathcal{D} es pleno y cada ob-

jeto (vertice) del diagrama está en \mathcal{D} entonces $f, g \in Mor(\mathcal{D})$ por lo que $\theta \in \Delta|_{\mathcal{D}}$ y se cumple el axioma del octaedro.

$f)$ Por alguna extraña razón no hay f en este ejercicio.

$g)$ Para comenzar se observa que, como \mathcal{D} es una categoría triangulada, entonces por el (Ej. 5) \mathcal{D}^{op} será una categoría triangulada. También se tiene que $Obj(\mathcal{D}) = Obj(\mathcal{D}^{op})$ y como \mathcal{D} es subcategoría plena de \mathcal{C} entonces \mathcal{D}^{op} es subcategoría plena de \mathcal{C}^{op} . Esto último es fácil de ver, pues cada morfismo en \mathcal{C}^{op} entre objetos de \mathcal{D}^{op} es el morfismo opuesto f^{op} de un morfismo f en \mathcal{C} entre objetos de \mathcal{D} , y como \mathcal{D} es plena, entonces f está en \mathcal{D} y así f^{op} está en \mathcal{D}^{op} .

Se probarán los axiomas de subcategoría triangulada para $(\mathcal{D}, T|_{\mathcal{D}}, \Delta|_{\mathcal{D}})$.

$ST1$ Como \mathcal{D} contiene un objeto cero, entonces \mathcal{D}^{op} contiene un objeto cero.

$ST2$ Sean $X, Y \in \mathcal{D}^{op}$, entonces $X, Y \in \mathcal{D}$ y por ser \mathcal{D} subcategoría triangulada, entonces $X \amalg Y$ está en \mathcal{D} . Pero \mathcal{C} es una categoría aditiva, entonces \mathcal{D} es aditiva también y todo coproducto finito es un producto finito, así $X \amalg Y \in \mathcal{D}$ y por lo tanto $(X \amalg^{op} Y) = (X \amalg Y)^{op} \in \mathcal{D}^{op}$ donde \amalg^{op} denota al coproducto en \mathcal{D} .

$ST3$ Observemos que $A \in Obj(\mathcal{D}^{op}) \iff A \in Obj(\mathcal{D})$, entonces para cada $A \in \mathcal{D}$, $T(A) \in \mathcal{D}$ y $\tilde{T}(A) \in \mathcal{D}^{op}$. Análogamente $T^{-1}(A) \in \mathcal{D}^{op}$.

Sea $f : A \rightarrow B$ en \mathcal{D}^{op} entonces $\tilde{T}(f) = (T^{-1}(f^{op}))^{op}$ pero $f^{op} : B \rightarrow A$ está en \mathcal{D} por lo que $T^{-1}(f^{op}) \in \mathcal{D}$, es decir, $\tilde{T}(f) \in (\mathcal{D})^{op}$. Análogamente $\tilde{T}^{-1}(f) \in (\mathcal{D})^{op}$.

$ST4$ Sea $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{D}^{op} , entonces $f^{op} : Y \rightarrow X$ en \mathcal{D} , por (ST4) sobre \mathcal{D} , se tiene que existe $\eta : Y \xrightarrow{f^{op}} X \longrightarrow Z \longrightarrow TY \in \Delta|_{\mathcal{D}}$ con Z en \mathcal{D} . Así por el teorema (1.3) $\eta_0 : T^{-1}Z \longrightarrow Y \xrightarrow{f^{op}} X \longrightarrow Z \in \Delta|_{\mathcal{D}}$, y por definición de categoría triangulada opuesta

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \tilde{T}^{-1}Z \longrightarrow \tilde{T}X \in \Delta|_{\mathcal{D}^{op}}.$$

Por lo que $(\mathcal{D}, T|_{\mathcal{D}}, \Delta|_{\mathcal{D}})^{op}$ es subcategoría triangulada de $(\mathcal{C}, T, \Delta)^{op}$.

□

13.

Sección extra

13' Sean \mathcal{C} una categoría y $\Sigma \subset Mor(\mathcal{C})$. Pruebe que la categoría $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ y el funtor de localización $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ son únicos salvo isomorfismos. Mas precisamente, sea $q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtor tal que

- a) $\forall \sigma \in \Sigma \quad q(\sigma)$ es iso.
- b) $\forall f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $F(\sigma)$ es iso $\forall \sigma \in \Sigma$, $\exists! \bar{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\bar{F} \circ q = F$.

Pruebe que existe un isomorfismo de categorías $\epsilon : \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $\epsilon \circ Q = q$ i.e.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \\ & \searrow q & \downarrow \epsilon \\ & & \mathcal{B} \end{array} .$$

Demostración. Supongamos $q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ es un funtor tal que

- a) $\forall \sigma \in \Sigma \quad q(\sigma)$ es iso.
- b) $\forall f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $F(\sigma)$ es iso $\forall \sigma \in \Sigma$, $\exists! \bar{F} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\bar{F} \circ q = F$.

Como $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ es tal que $Q(\sigma)$ es iso $\forall \sigma \in \Sigma$, entonces por hipótesis $\exists! \epsilon_0 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$ tal que $\epsilon_0 \circ q = Q$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{q} & \mathcal{B} \\ & \searrow Q & \downarrow \epsilon_0 \\ & & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \end{array} .$$

Ahora, como Q es funtor de localización y $q(\sigma)$ es iso $\forall \sigma \in \Sigma$, entonces por definición $\exists! \epsilon : \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $\epsilon \circ Q = q$. Así se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \\ & \nearrow Q & \downarrow \epsilon \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{q} & \mathcal{B} \\ & \searrow Q & \downarrow \epsilon_0 \\ & & \mathcal{C}[\Sigma^{-1}] \end{array} .$$

En particular $\epsilon_0\epsilon$ es un funtor, t es tal que $\forall \sigma \in \Sigma$ $\epsilon_0\epsilon(\sigma)$ es un isomorfismo. Así por (L2) sobre el funtor de localización Q , se tiene que $\epsilon_0\epsilon$ es único, pero $1_{\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]}$ es un funtor con la misma propiedad (pues σ es iso para cada $\sigma \in \Sigma$) por lo tanto $\epsilon_0\epsilon = 1_{\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]}$ y análogamente $\epsilon\epsilon_0 = 1_{\mathcal{B}}$. \square

Corolario 1.9 Para una categoría pretriangulada (\mathcal{C}, T, Δ) , las siguientes condiciones se satisfacen:

- a) Tomo mono (respectivamente epi) es \mathcal{C} es split-mono (respectivamente split-epi).
- b) Si \mathcal{C} es abeliano, entonces \mathcal{C} es semisimple (i.e. $Ext_{\mathcal{C}}^1(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}$).

Demostración. Se mostrará que todo epi en \mathcal{C} es un split-epi.

Sea $f : X \rightarrow Y$ epi en \mathcal{C} , entonces $f^{op} : Y \rightarrow X$ es un mono en \mathcal{C}^{op} . Por el (ej. 5) sabemos que $(\mathcal{C}^{op}, \tilde{T}, \tilde{\Delta})$ es una categoría pretriangulada, y por el inciso a), como f^{op} es mono, entonces f^{op} es split-mono. Así f es split-epi en \mathcal{C}^{op} . \square