Mid Exam 2 Solution

1

(a) **Ans :** True

Equivalence 需包含 reflexive, symmetric, transitive 三個

因此依照題意，我們還需要證明 reflexive 也就是 (X, X)

1. 因為 symmetric 所以有(X, Y)則有(Y, X)
2. 又因為 transitive 且(X, Y)以及(Y, X) ➔ 所以(X, X)一定存在 #

(b) **Ans :** True

R^n 表示 n 次的合成，因為 R 是 transitive，所以$R^2 = R$

$R^3 = R^2 * R = R * R = R^2 = R$

…以此循環…

用數學歸納法證明 R<=R^n，因此答案為 True #

(c) **Ans :** True

R ➔ partition $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, $|A_i| = n_i$, $\sum n_i = n$

$R = A_1 \times A_1 + A_2 \times A_2 + \cdots + A_k \times A_k$

$R = r = {n_1}^2 + {n_2}^2 + \cdots + {n_k}^2$ ➔ $r - n = ({n_1}^2 + {n_2}^2 + \cdots + {n_k}^2) -$

$(n_1 + n_1 + n_2 + \cdots + n_k) = \sum n_i(n_i - 1)$，其中$n_i(n_i - 1)$為偶數

(d) **Ans :** True

$\sum_{i=1}^{4} S(4, i) = S(4,1) + S(4,2) + S(4,3) + S(4,4) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$ #

(e) **Ans :** True

若要符合 partial 則需包含 reflexive, antisymmetric 還有 transitive.

而第一個與第二個皆不是transitive，因此只有一個為partial符合題意 #

(f) **Ans :** True

只有$(Z, =)$還有$(Z, \leq)$是 posets #

(g) **Ans :** True

$(A^*)^+ = A^*$ ➔ $A^*(A^*)^* = A^*$ #

(h) **Ans :** False

$S(6,1) + S(6,2) + S(6,3) = 122 \neq 121$ #

扣分：

1. 全對分數全給
2. 沒有解釋說明 -3 分
3. True/False 正確但過程錯誤 -2~-3 分
4. 第(e)題本來正確答案為一個，但寫出了兩個而其中包含正確答案 -3 分
5. 第(h)題小錯誤 -2 分

2

(a)

一張考卷的答題可能性為 4^4 = 256 種可能，也就是說有 257 張考卷的話就

	會 2 張考卷的答案一樣。同理，當有 256*3 = 768 張考卷時相同答案的考卷就都會有 3 張，所以在加上一張考卷就會有 4 張考卷的答案是相同的。 **Ans :** 768+1 = 769 (b) 先取出質數 {3,5,7,11,13,17,19,23,29,31} 共 10 個數字，在加上 1 (1 非質數，但與其他數互質) ；因題目數列皆為奇數，所以在加上任意一數就可保證任兩數 gcd 大於等於 2。**Ans :** 10+1+1 = 12 (c) 在一顆公正的骰子骰 4*(n-1) 次，在機率上每一次面都會出現 (n-1) 次，這時在多骰一次就會有一面出現 n 次。**Ans :** 4(n-1) + 1
3	(a) Symmetric (b) Antisymmetric (c) Transitive, reflexive
4	(a) $f(a)$有 2~6，5 種選擇，剩下的 b,c,d 各有 1~6，6 種選擇。**Ans :** $5*6^3$ (b) a~d 分別對應到不同的結果。**Ans :** 6*5*4*3 = 360 (c) 前一個≧下一個，6 個可重複選 4 個，每種選擇只有一種排列符合 nondecreasing。**Ans :** $\mathrm{H}\binom{6}{4}$ = 126 (d) 兩種情況: (1)只有 1 對應到 a，剩下 2~6 分三堆給 b~d : $3!*S(5,3)$ = 150 (2)不只有 1 對應到 a，2~6 分四堆給 a~d : $4!*S(5,4)$ = 240 **Ans :** 150+240 = 390
5	(a) *f(a,b)*有 5 種選擇，剩下的 35 個對應各有 6 種選擇。 **Ans :** $5*6^3$ (b) 有一個 identity 且 *f(a,b)=c* 時 : 6^{25-1}，且因 a,b 無法成為 identity，剩 4 個選擇可當 identity。 **Ans :** $4*6^{24}$ (c) 4 選 1 當 identity。上三角 10 個減去 *f(a,b)*固定 1 個，再加對角線 5 個。 **Ans :** $4*6^{10-1+5}$ = $4*6^{14}$ (d) a,b 已分在同一堆，{(a,b),c,d,e,f}，再將他們分別分成 3 堆、4 堆、5 堆 **Ans :** S(5,3)+S(5,4)+S(5,5) = 25+10+1=36

6

參考如下，正確地將 FSM 化簡，且狀態少 2 個即算全對。畫圖也可以。

扣分：

1.化簡後的狀態數量不是少 2 個（扣 7 分）

2.某一個狀態寫錯（扣 5 分）

3.狀態寫不完整（扣 3 分）

4.無法化簡、條件不夠以至於無法做、化簡嚴重錯誤……（不給分）

	V		W	
	0	1	0	1
S1	S6	S3	0	0
S2	S3	S1	0	0
S3	S2	S4	0	0
S4	S7	S4	0	0
S5	S6	S7	0	0
S6	S5	S2	1	0
S7	S4	S1	0	0

S2 and S7 are equivalent;
S3 and S4 are equivalent;

	V		W	
	0	1	0	1
S1	S6	S3	0	0
S2	S3	S1	0	0
S3	S2	S3	0	0
S5	S6	S2	0	0
S6	S5	S2	1	0

State number change from 7 to 5. The different is 2.