Midterm II Solution

1. True / False 三分，解釋三分。

   a. Ans : True

      a, b, c $\in$ X

      if a(R∩S)b 且 b(R∩S)c

      → aRb, aSb, bRc, bSc

      → ∵R, S is transitive

      → aRc, aSc

      → a(R∩S)c

   b. Ans : False

      （the number of different set,代表a,b,c在集合中三者不論順序，EX：a,b,c=2,5,3和a,b,c=5,2,3是一樣的.否則也不會有書上習題中的答案41，而是考慮順序的221，所以，當a,b>=1,c>1時，和a,b,c>=1答案是一樣的，因為必有一個數字>1）

      S(5,1) + S(5,2) + S(5,3) = 1+15+25 = 41 ≠ 35

   c. Ans : False

      (A*)+=A*(至少有一個A*還是A*)

   d. Ans :True

      Equivalence = reflexive + symmetric + transitive

      設 a-b 為偶數

      reflexive：a-a 為偶數

      symmetric：b-a 為偶數

      transitive：設 b-c 為偶數 → a-c 為偶數

   e. Ans :True

      $$\sum_{i=1}^{4} S(4,\ i) = 1+7+6+1 = 15$$

      abcd

      abc|d abd|c acd|b bcd|a

      ab|cd ac|bd ad|bc

      ab|c|d ac|b|d ad|b|c bc|a|d bd|a|c cd|a|b

      a|b|c|d

2.

- 思路合理即得滿分，計算錯誤每處扣 1 分，
- 第一題 (4 分)

  令 S 中非空集合 A 的 element 和為 S_a，在 subset 最多有 7 個 element 的情況下， 選擇數有 147 個 (1 <= S_a <= 18+19+20+21+22+23+24=147)， nonempty subset 有 2^7-1 = 127 個。

  因 pigeonholes 數過多，進一步假設 subset 最多只能有 6 個 element，pigeonholes=19 + ... + 24=129， pigeons=127 - 1=126。

  因 pigeonholes 數仍大於 pigeons 數，再假設 subset 最多有 5 個 element，pigeonholes=20+ ... +24=110， pigeons =126 - 7=119 ，可得 pigeons = 119 > pigeonholes = 110，根據鴿籠原理可知必定會出現重複。

- 第二題 (4 分，少寫一個情形扣兩分)

  五個人中每人可有 0 至 4 名朋友，但 0 與 4 不能共存 (不可能同時有人沒朋友且有人跟所有人皆是朋友)。若大家都有朋友的情況下，選擇數為 {1}, {2}, {3}, {4}。若有人沒朋友的情況下，選擇數為 {0}, {1}, {2}, {3}。兩種情形下的選擇數(鴿籠)皆為 4 並小於 5 (鴿子數)，根據鴿籠原理得證。

- 第三題 (送 4 分，根據完整度額外加分，至多加 4 分)

  S 為 1 至 2n 的數組成的集合，則對於奇數 $a = 2m-1$ (m=1, ... ,n) ，令 C_a 由 $x_i = 2^i \times a$ (for some i that makes x_i belong to S) 組成，則我們可將原集合 S 分成 C_1, C_3, … , C_{2n-1} 個子類。因為是從 S 中取出 N+1 個數且只有 N 個子類 C，根據鴿籠原理，我們必定會重複挑到某個 C 中的數，令其中較大者為 a ，較小者為 b ，則可滿足 $a/b = 2^k$

3.

(a) 4 pts, n=7
★ (1 pt) reflexive : 2^(n(n-1)) = 2^42
★ (1 pt) reflexive and symmetric : 2^((n(n-1))/2)
★ (1 pt) and transitive : Σ S(7,i)
★ (1 pt) 計算出 Σ S = 877
★ Ans : 2^21 - 877

(b) 4 pts, n=7
★ (2 pts) antisymmetric : (2^n)*(3^((n(n-1))/2))
★ (2 pts) antisymmetric but not reflexive : ((2^n)-1)*(3^((n(n-1))/2))
★ Ans : ((2^7)-1)*(3^21) = 127*3^21

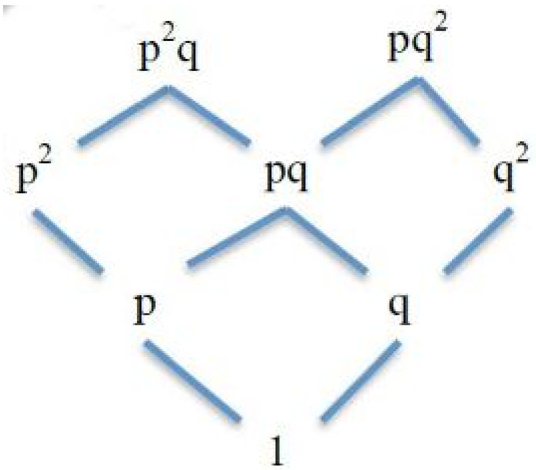
 * 如果只有寫3^21則代表所有(a,a)都沒取，這是asymmetric的情況，但這題其實只要一個(a,a)沒取到就不算是reflexive了! => 給你1分

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2							
3							
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1

877

4.

(a)



(b) maximun element p^2q 、 pq^2 , no greatest element

(c) $glb = p$, $lub = p^2q$ $(glb:$ $greatest\ lower\ bound,\ lub:$ $lowest\ upper\ bound)$

評分標準：

(a)

1、不是 Hasse diagram (0分)

2、多畫 p^2q^2 (3分)

3、少畫 1 (4分)

(b)

1、對一個 (2分)

2、對二個 (3分)

(c)

1、對一個 (1分)

2、 對二個 (2分)

5.

(a) (3分) $6 * 7^{48}$ 除了f(a,b)有6種可能外，其他皆有7種可能。

	a	b	c	d	e	f	g
a	7	6	7	7	7	7	7
b	7	7	7	7	7	7	7
c	7	7	7	7	7	7	7
d	7	7	7	7	7	7	7
e	7	7	7	7	7	7	7
f	7	7	7	7	7	7	7
g	7	7	7	7	7	7	7

(b) (4分) $5 * 7^{35}$

a,b不可能為identity ，只有{c,d,e,f,g} 可能為identity，因此有5種。
若有存在一個identity, 則其他非identity的項皆有7種可能。
假設g為identity：

	a	b	c	d	e	f	g
a	7	c	7	7	7	7	a
b	7	7	7	7	7	7	b
c	7	7	7	7	7	7	c
d	7	7	7	7	7	7	d
e	7	7	7	7	7	7	e
f	7	7	7	7	7	7	f
g	a	b	c	d	e	f	g

(c) (3分) 5 * 7^{20}

若有存在一個identity, 則其他非在identity的項皆有7種可能。

考慮交換性, a @ b = b @ a ,因此滿足對稱的性質, 但同時滿足前一題的 f(a,b) = c and exist an identity 。假設g為identity : :

	a	b	c	d	e	f	g
a	7	c	7	7	7	7	a
b		7	7	7	7	7	b
c			7	7	7	7	c
d				7	7	7	d
e					7	7	e
f						7	f
g	a	b	c	d	e	f	g

6.

錯一小題扣3分，均要有解釋，解釋邏輯通順即可

假設R1 = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)}, R2 = {(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)}

(a) R1∪R2={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2) }: no transitive

(b) R1∩R2={(1,1), (2,2), (3,3)}: transitive, symmetric, reflexive

(c) (R1∪R2)-(R1∩R2)= {(1,2), (2,1), (2,3), (3,2)}: no transitive, symmetric, no reflexive

7. 共8分, 錯一個 state 扣1分

- (3 分) 1-equivalent :

  $\{s1, s2, s3, s4, s5\}$, $\{s6\}$, $\{s7\}$

- (3 分) 2-equivalent :

  $\{s1\}$, $\{s2, s3\}$, $\{s4\}$, $\{s5\}$, $\{s6\}$, $\{s7\}$

- (2 分) 3~k-equivalent :

  $\{s1\}$, $\{s2\}$, $\{s3\}$, $\{s4\}$, $\{s5\}$, $\{s6\}$, $\{s7\}$

State	v		w	
	0	1	0	1
s_1	s_6	s_3	0	0
s_2	s_3	s_1	0	0
s_3	s_2	s_4	0	0
s_4	s_7	s_4	0	0
s_5	s_6	s_7	0	0
s_6	s_5	s_2	1	0
s_7	s_4	s_1	1	1

		s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7
w	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	0	0	0	0	0	0	1
P1		s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7
v	0	s6	s3	s2	s7	s6		
	1	s3	s1	s4	s4	s7		
P2		s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7
v	1		s1	s4				
P3		s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7

8.

a. $(n^2+n)/2$

There are n ordered pairs of the form $(x, x), x \in A$. For each of the $(n^2-n)/2$ sets $\{(x, y), (y, x)\}$ of ordered pairs where $x, y \in A, x \neq y$, one element is chosen. This results in a maximum value of $n + (n^2-n)/2 = (n^2+n)/2$.

	1	2	3	…	n
1					
2					
3					
…					
n					

b. $12^2 \times 3$

|A1| = |A2| = |A3| $= 36/3 = 12$

Pick up any two elements for a relation in set A1 $= 12 \times 12$

$\rightarrow$ A1 A2 A3 $= 12^2 \times 3$

c. $C_4^9 \times \left(\sum_{i=1}^{5} S(5,\ i) - C_4^5 \right)$

Exactly one equivalent class of size 4 : C_4^9

Other elements are in 1~5 groups : $\sum_{i=1}^{5} S(5,\ i)$

Exception (another size 4): $C_4^5 C_1^1$