Final Exam Solution

1. 每小題 5 分， T or F 寫錯全扣, 寫對 3 分，解釋寫對 2 分

   (1) **False**

   a,b,c>1 s(5,3)=25

   c=1 s(5,2)=15

   25+15 != 41 正確公式和答案 2 分

   (2) **False**

   Each equivalent relation on a set yields a partition of that set in disjoint equivalence classes, for a finite set, the number of equivalence relations is the number of partitions, i.e. the n-th Bell number for a set of size n. : if B_n is the number of partitions on a set of size n, notice $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n} C_k^n B_k$, and $B_0=1$. It is then easy to check that $B_5=52$ 正確公式和答案 2 分

   (3) **True**

   令 S 為 1 至 2n 的數組成的集合，則對於奇數 $a = 2m-1$ (m=1, ... ,n) ，令 C_a 由 $x_i = 2^i \times a$ *(for some i that makes x_i belong to S)* 組成，則我們可將原集合 S 分成 $C_1, C_3, \ldots, C_{2n-1}$ 個子類。因為是從 S 中取出 N+1 個數且只有 N 個子類 C，根據鴿籠原理，我們必定會重複挑到某個 C 中的數，令其中較大者為 a ，較小者為 b ，則可滿足 $a/b = 2^k$

   (4) **True**

   We need to find the number of ways, if we can select seven nonconsecutive integers from $\{1,2,3,\ldots 50\}$.

   Consider one subset $\{1,7,15,19,21,25,30\}$ of seven nonconsecutive numbers, then the in equality for this becomes,

   $1 \le 1 < 7 < 15 < 19 < 21 < 25 < 30 < 50.$

   From this set of inequality, we get differences as $1-1=0, 7-1=6, 15-7=8, 19-15=4, 21-19=2, 25-21=4, 30-25=5$ and $50-30=20$ and these differences sum to 49.

   Thus, there is one to one correspondence between seven elements subsets to be counted and the integer solution of $c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6+c_7+c_8=49$ where $0<c_1, c_8$ and $2<c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7$.

   The answer is the coefficient of x^{49} in the generating function

   $$\begin{aligned} f(x) &= (1+x+x^2+\ldots)(x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots)^6(1+x+x^2+\ldots) \\ &= \frac{1}{1-x}.\frac{x^{12}}{(1-x)^6}.\frac{1}{1-x} \\ &= x^{12}(1-x)^{-8}. \end{aligned}$$

2. p→q ⇔ ¬pvq ⇔ ¬(p∧¬q) ⇔ p ↑ (¬q) ⇔ p ↑ (¬(q∧q)) ⇔ p ↑ (q ↑ q)

3.

(a) x1 + x2 + x3 < 9, x1 > 0, x2 > 0, x3 > 2

⇔ x1 + x2 + x3 + x4 = 3, x1 ≥ 0, x2 ≥ 0, x3 ≥ 0, x4 ≥ 0

⇔ C(6,3) = 20

(b) x1 + x2 + x3 = 18, 1 ≤ x1 ≤ 5, 3 ≤ x2 ≤ 6, x3 ≥ 0

⇔ ($x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$)($x^3 + x^4 + x^5 + x^6$)($1 + x + x^2 + \dots$) of coefficient of x^{18}

⇔ x^4 ($1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$)($1 + x^1 + x^2 + x^3$)($1 + x + x^2 + \dots$) of coefficient of x^{18}

⇔ $x^4 (1 - x^5)(1 - x^4)(1 - x)^{-3}$ of coefficient of x^{18}

⇔ $(x^4 - x^8 - x^9 + x^{13})(1 - x)^{-3}$ of coefficient of x^{18}

⇔ C(-3, 14) - C(-3, 10) - C(-3, 9) + C(-3, 5)

⇔ C(16, 14) - C(12, 10) - C(11, 9) + C(7, 5)

⇔ 141

4. 不用計算出最後答案，列式正確就給分

(a) **(5 pts)** the coefficient of x^2yz^{-2} in $(2x^2 - y + 3z^{-1} + 4)^6$

$$C(6,1) * C(5,1) * C(4,2) * C(2,2) * 2^1 * (-1)^1 * 3^2 * 4^2 = -51840$$

(b) **(10 pts)** the coefficient of x^{83} in $(x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14} + x^{17})^{10}$ 分段給分

1. ***(5 pts)*** *提出* x^{50} *得二分，拆解出* $(1-x^{15})^{10}(1-x^3)^{-10}$ *得三分*

$$(x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14} + x^{17})^{10} = x^{50}(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12})^{10} = x^{50}((1-x^{15})/(1-x^3))^{10}$$

Find the coefficient of x^{83}

⇒Find the coefficient of $x^{83-50} = x^{33}$ in $((1-x^{15})/(1-x^3))^{10} = (1-x^{15})^{10}(1-x^3)^{-10}$

2. ***(5 pts)*** *正負號錯一項扣一分，缺(錯)一項扣兩分*

$$C_0^{10}(-x^{15})^0 * C_{11}^{-10}(-x^3)^{11} + C_1^{10}(-x^{15})^1 * C_6^{-10}(-x^3)^6 + C_2^{10}(-x^{15})^2 * C_1^{-10}(-x^3)^1$$

$$= (-1)^{11}C_{11}^{10+11-1}(-x^{33}) + 10 * (-1)^6 C_6^{10+6-1}(-x^{33}) + 45 * (-1)^1 C_1^{10+1-1}(-x^{33})$$

$$= (C_{11}^{20} - 10 * C_6^{15} + 45 * C_1^{10}) * x^{33} = (C_9^{20} - 10 * C_9^{15} + 45 * C_9^{10}) * x^{33} = 118360\, x^{33}$$

5. 評分標準：

1、不是 Hasse diagram (0分)

2、少畫 p^3q^2 (3分)

3、少畫 1（4分）

6. (a) ***(3 pts)***

5^{15} * 3(only c,d,e could be identity)

(b) ***(7 pts)***

- correct answer is 1 pt.
- every factor with x is 2 pts. but 0 pt. if more than 3($\geq$3) ones wrong.
- both step.1 and step.2 are needed, otherwise you'll get 0 pt score.

(step.1) **f(x) = (1+x)(1+4x+2x²)(1+2x)**

$= 1 + 7x + 16x^2 + 14x^3 + 4x^4$

(step.2) By **rook polynomial** s.t. the result is -

<u>5! - 7*4! + 16*3! -14*2! + 4*1! = 24</u>

7.

(a) $a_0 = 1$、$a_1 = 1$、$a_2 = 3$

$a_n = a_{n-1} + 2*a_{n-2}$ (2分)

$a_n = \frac{2}{3} * 2^n + \frac{1}{3} * (-1)^n$ (6分)

(b) $a_1 = 1$、$a_2 = 2$、$a_3 = 3$、$a_4 = 5$、$a_5 = 8$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (6 分)

(c) a_n : n bit內不含k個連續1

a_{n-1} : n-1 bit內不含k個連續1

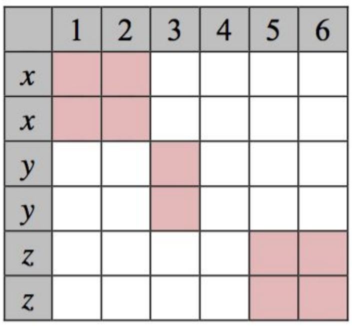
a_{n-2} : n-2 bit內不含k個連續1

$a_n = a_{n-1}$ 配第n位為0 + a_{n-2} 配第n-1位與第n位為 01，

所以，an = $a_{n-1} + a_{n-2}$ (4分)

8. **(7 pts)**

- 畫出棋盤 (1 pt)
- 列出算式 (4 pts)
- (兩個相同物*3) : /2!2!2! (1 pt)
- 代入算式or答案正確 (1 pt)



$$(1+4x+2x^2)(1+4x+2x^2)(1+2x) = 1+10x+36x^2+56x^3+36x^4+8x^5$$

Ans = [6! - 10(5!) + 36(4!) - 56(3!) + 36(2!) - 8(1!)] / (2*2*2) = 112 / 8 = 14

9. **(5 pts)** 計算等式兩邊相等並不符合題目要求，不予給分

- 有 n 個人 P1, P2, P3, P4, …… , Pn 不能排在第 1, 2, 3, 4, …… , n 的位置上。
- 若把 P2 放在第 1 個位置，則要考慮兩種情形
  - P1 放在第二個位置，即 P1 與 P2 互換了位置。此情況下是剩下的 n - 2 個數行錯位排列，共有 D_{n-2} 種排法。
  - P1 不排在第二個位置，此情況相當於對剩下的 n - 1 個數行錯位排列，共有 D_{n-1} 種排法。
- 同理，我們也能選擇把 P3 放第一位、把 P4 放第一位 ......，只要不要是 P1 放第一位即可，故我們有 (n-1) 種選擇，綜合以上可得 $D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$
- 滿分 5 分。有解釋 (n-1) 得 1 分，D_{n-2} 得 2 分，D_{n-1} 得 2 分。

10. (5 pts) 有寫即得 5 分