# Ejercicios Resueltos de Estadística:
# Tema 3: Cálculo de Probabilidades

**1. Se lanzan 20 monedas en las que la probabilidad de cara es de 0,6. Calcular cual es el número mas probable de caras y qué probabilidad hay de que salga dicho número.**

<u>**SOLUCIÓN:**</u>

El número de caras obtenido al lanzar 20 monedas es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros B(20;0,6). El número mas probable de caras es $20 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \leq m \leq 20 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \Rightarrow 11{,}6 \leq m \leq 12{,}6$. Luego el número mas probable de caras es 12, y la probabilidad de 12 caras es:

$$P(X=12) = \binom{20}{12} \cdot 0{,}6^{12} \cdot 0{,}4^{8} = \frac{20!}{12! \cdot 8!} \cdot 0{,}0022 \cdot 0{,}0007 = 0{,}0202$$

**2. Sabiendo que P$\left(A \bigcap B) = 0{,}6\right)$y que la de la P(A$\bigcap \overline{B}$ =0,2), se pide calcular la probabilidad de A.**

<u>**SOLUCIÓN:**</u>

P(A)= P[(A$\bigcap B) \bigcup (A \bigcap \overline{B}$ )]= P(A$\bigcap B) + P(A \bigcap \overline{B}$ )=0,6+0,2=0,8

**3. Supongamos que las cotizaciones de las acciones de Telefónica y Sniace son variables aleatorias independientes, y que la probabilidad de que un día cualquiera suban es del 70% para ambas. ¿Cuál es la probabilidad de que un día suba sólo una de ellas?**

<u>**SOLUCIÓN:**</u>

Sea p1 la probabilidad de que suba Telefónica y p2 la de que suba Sniace. La probabilidad de que solo suba una de ellas será:

p1 (1 - p2) + (1 – p1) p2 = 0,7 0,3 + 0,3 0,7 = 0,21 + 0,21 = 0,42

**4. Sean 2 sucesos A y B de los que se sabe que la probabilidad de B es el doble que la de A; que la probabilidad de su unión es doble que la de su intersección; y que la probabilidad**

**de su intersección es de 0,1. Se pide: 1) Calcular la probabilidad de A. 2) ¿Qué suceso es más probable que ocurra sabiendo que ya ha ocurrido el otro?.**

**SOLUCIÓN:**

1) Sea P(A) = x; entonces: P(B)= 2X. Además $P[A\bigcup B]=0{,}2$ y $P[A\bigcap B]=0{,}1$

$P[A\bigcup B]=$ P(A)+P(B)- $\mathbf{P}\left(A\bigcap B)\right)$=x+2x-0,1=3x-0,1

$P[A\bigcup B]=3x-0{,}1$=0,2. despejando x=1

Por tanto P(A) = 0,1 y P(B) = 0,2.

2) Las probabilidades condicionadas serían:

P(A/B)=$\dfrac{P(A\bigcap B)}{P(B)}=\dfrac{0{,}1}{0{,}2}=0{,}5;$ P(B/A)=$\dfrac{P(A\bigcap B)}{P(A)}=\dfrac{0{,}1}{0{,}1}=1$

Por tanto es más probable que ocurra B sabiendo que ha ocurrido A, que, que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.

**5. La probabilidad de cara de dos monedas son 0,4 y 0,7. Calcular la probabilidad de que al lanzar las dos monedas salga sólo una cara. Repetir el ejercicio considerando que las monedas están bien construidas.**

**SOLUCIÓN:**

Para que salga solo una cara ha de ocurrir una de las dos cosas siguientes: que la primera moneda saque cara y la segunda cruz o viceversa:

$$P[(C\cap X)\cup(X\bigcap C)]=\ 0{,}4\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}7=0{,}12+0{,}42=0{,}54$$

Si las monedas están bien construidas las probabilidades de cara y cruz son iguales a 0,5; por tanto: $P[(C\cap X)\cup(X\bigcap C)]\ =0{,}5\cdot 0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}5$

**6. Dos maquinas A y B han producido respectivamente, 100 y 200 piezas. Se sabe que A produce un 5% de piezas defectuosas y B un 6%. Se toma una pieza y se pide:**

**1) Probabilidad de que sea defectuosa.**

**2) Sabiendo que es defectuosa, probabilidad de que proceda de la primera máquina.**

---

**SOLUCIÓN:**

Indiquemos por: $M_A$ = {la pieza procede de la maquina A}

$M_B$ = {la pieza procede de la maquina B}

Entonces $\Omega$ = {300 piezas} = $M_A + M_B$

$$\mathrm{P}(\mathrm{M}_A) = \frac{1}{3} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{M}_B) = \frac{2}{3}$$

1) Sea D = {la pieza defectuosa}

$$\mathrm{P}(D) = P(D/M_A)\cdot P(M_A) + P(D/M_B)\cdot P(M_B) = (0{,}05)\cdot\frac{1}{3} + (0{,}06)\cdot\frac{2}{3} = 0{,}0567$$

2) Es la probabilidad de $M_A$ condicionada a la presencia de D

$$P(M_A/D) = \frac{P(D/M_A)\cdot P(M_A)}{P(D/M_A)\cdot P(M_A) + P(D/M_B)\cdot P(M_B)} = \frac{(0{,}05)\cdot\frac{1}{3}}{0{,}0567} = 0{,}2941$$

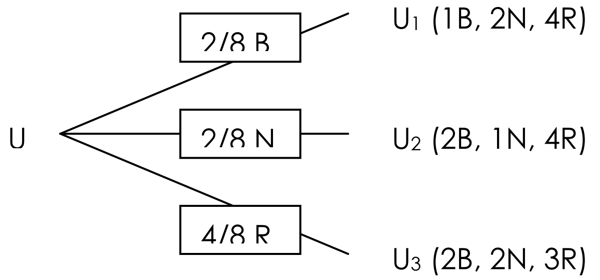
---

**7. Sea la urna U (2B, 3N, 4R). Extraemos tres bolas, una a continuación de la otra. La primera es negra, la segunda no se mira y la tercera es blanca. Hallar la probabilidad de que la segunda sea roja.**

---

**SOLUCIÓN:**

Una vez es extraída la primera bola que es negra, la urna es U(2B, 2N, 4R). Al extraer la segunda, pueden ocurrir tres casos: que sea blanca, negra o roja, obteniéndose tres urnas distintas, con probabilidad 1/4, 1/4 y 1/2 respectivamente. La tercera bola procede de una de estas tres posibles urnas.




$\Omega = U_1+U_2+U_3$

Sabiendo que la tercera bola es blanca, la probabilidad de que la segunda bola haya sido roja , equivale a la probabilidad de que la tercera bola provenga de $U_3$.

$$P(U_3/B)=\frac{P(B/U_3)\cdot P(U_3)}{\sum_{I=1}^{3}P(B/U_i)\cdot P(U_i)}=\frac{\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{4}{7}$$

---

**8. El portero titular de un equipo de fútbol para 8 de cada 10 penaltis, mientras que el suplente solo para 5. el portero suplente juega, por termino medio, 15 minutos en cada partido (90 minutos).**
**a) Si en un partido se lanzan tres penaltis contra este equipo, ¿cuál es la probabilidad de que se paren los tres?**
**b) Si se lanza un penalti y no se para ¿cuál es la probabilidad de que estuviera jugando el portero titular?**

---

**SOLUCIÓN:**

Se consideran los sucesos:

P= el portero para un penalti

T= juega el portero titular

S= juega el portero suplente ($S=T^c$)

Con probabilidades:

$$P(S)=\frac{15}{90}=\frac{1}{6},P(T)=1-P(S)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$P(P/T)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5},P(P^C/T)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$$

$$P(P/S)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},P(P^C/S)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

a) la probabilidad de que se pare un penalti cualquiera es, utilizando el teorema de la probabilidad total, con los sucesos T y S como sistema completo de sucesos:

$$P(P)=P(P/T)P(T)+P(P/S)P(S)=\frac{4}{5}\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{6}=\frac{40+5}{60}=\frac{45}{60}=\frac{3}{4}=0{,}75$$

Si se lanzan tres penaltis, se consideran los sucesos:

$P_i$= El portero para el penalti i-ésimo

Mutuamente independientes, con probabilidades $P(P_i)= 0.75$, $i=1,2,3$. La probabilidad de que se paren los tres es:

$$P(P_1\cap P_2\cap P_3)=P(P_1)P(P_2)P(P_3)=0.75^3\approx 0.4219$$

b) para calcular $P(T/P^c)$ se aplica el teorema de Bayes, con los sucesos T y S como sistema completo de sucesos:

$$P(T/P^C)=\frac{P(P^C/T)P(T)}{P(P^C/T)P(T)+P(P^C/S)P(S)}=\frac{\frac{1}{5}\frac{5}{6}}{\frac{1}{5}\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{6}}=\frac{10}{10+5}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}\approx 0.6667$$

---

**9. En un colegio hay dos grupos de 25 alumnos de quinto curso y dos grupos de 20 alumnos de sexto curso. El 50 % de los alumnos de quinto no tienen faltas de ortografía, porcentaje que sube a 70% en los alumnos de sexto. En un concurso de redacción entre alumnos de quinto y sexto se elige una redacción al azar.**

**a) ¿Qué probabilidad hay de que sea de un alumno de quinto?**

**b) Si tiene faltas de ortografía, ¿qué probabilidad hay de que sea de un alumno de quinto?**

---

**SOLUCIÓN:**

Se consideran los sucesos:

A= la redacción es de un alumno de quinto

B= la redacción es de un alumno de sexto ($B=A^c$)

F= la redacción tiene faltas de ortografía

Con probabilidades:

$$P(A)=\frac{50}{90}=\frac{5}{9}, P(B)=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$$

$$P(F^C/A)=0.5, P(F/A)=1-P(F^C/A)=1-0.5=0.5$$

$$P(F^C/B)=0.7, P(F/B)=1-P(F^C/B)=1-0.7=0.3$$

a) $P(A)=\frac{5}{9}\approx 0.5556$

b) Para calcular P(A/F) se aplica el teorema de Bayes, con los sucesos A y B como sistema completo de sucesos:

$$P(A/F)=\frac{P(F/A)P(A)}{P(F/A)P(A)+P(F/B)P(B)}=\frac{0.5\frac{5}{9}}{0.5\frac{5}{9}+0.3\frac{4}{9}}=\frac{2.5}{2.5+1.2}=\frac{2.5}{3.7}=\frac{25}{37}\approx 0.6768$$

---

**10. Dados lo sucesos A y B tales que $P(A)>0$ y $P(\frac{B}{A})>0$, demuéstrese que $P(\frac{B}{A})>1-\frac{P(\overline{B})}{P(A)}$.**

---

**<u>SOLUCIÓN:</u>**

Por definición de probabilidad condicional,

$$P(\frac{B}{A})=\frac{P(B\cap A)}{P(A)} \qquad \textbf{(1)}$$

Vamos a demostrar que $P(B\cap A)\geq 1-P(\overline{A})-P(\overline{B})$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1-P(\overline{A})+1-P(\overline{B})-P(A\cap B);$$

$$P(A\cap B)=[1-P(\overline{A})-P(B)]+[P(\overline{A\cup B})]$$

$P(\overline{A\cup B})>0$; por lo tanto, $P(B\cap A)\geq 1-P(\overline{A})-P(\overline{B})$

$$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{B}); P(A\cap B)\geq P(\overline{A})-P(\overline{B}) \qquad \textbf{(2)}$$

sustituyendo (2) en (1),

$$P(\frac{B}{A}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq \frac{P(A) - P(\overline{B})}{P(A)} = 1 - \frac{P(\overline{B})}{P(A)}$$

---

**11. En un dado bien construido consideramos los sucesos A y B, tales que A es la obtención de una puntuación mayor o igual que 4 y B la de 3 o 6. Utilizando los teoremas del cálculo de probabilidades, determínese si:**
**(a) Los sucesos de A y B son disjuntos.**

**(b) Los sucesos de A y B son independientes.**

---

**SOLUCIÓN:**

(a) Los sucesos de A y B son disjuntos.

Si los sucesos de A y B son disjuntos, se verificara que; $P(A \cap B) = 0$.

Obtendremos el suceso intersección $A \cap B$:

$A \cap B = (4,5,6) \cap (3,6) = (6)$;

$P(A \cap B) = P(6) = 1/6 \neq 0.$

Por tanto, A y B no son disjuntos.

(b) Los sucesos de A y B son independientes.

Si A y B son independientes, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A) = \frac{3}{6};$

$P(B) = \frac{2}{6};$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6} = P(A \cap B).$

Luego los sucesos A y B son independientes.

**12. Consideremos una moneda truncada de tal forma que la probabilidad de cara = P(C) =0.3. Si se arroja la moneda 5 veces, calcúlense las probabilidades de los siguientes sucesos:**

(a) Cinco caras.
(b) Dos cruces.
(c) En las dos primeras tiradas han de salir cruces y en las restantes caras.
(d) Al menos tres caras.
(e) Mas de una cara y menos de cuatro.

**SOLUCIÓN:**

(a) Probabilidad de 5 caras = $P(CCCCC)$

El suceso que al arrojar la moneda cinco veces salga cinco caras es un suceso compuesto por la intersección de cinco sucesos: (C∩C∩C∩C∩C). Los sucesos son independientes , ya que el que haya salido cara en una tirada no influye en que salga cara en la siguiente. Al ser independientes, se verifica que

$$P(C \cap C \cap C \cap C \cap C) = P(C) \cdot P(C) \cdot P(C) \cdot P(C) \cdot P(C) = 0.7^5 = 0.01681$$

Probabilidad de dos cruces.

El suceso de dos cruces aparece cuando al arrojar la moneda salen dos cruces y tres caras: $ccCCC$ . Como en el caso anterior , es un suceso compuesto por la intersección de cinco sucesos independientes:

$$P(c \cap c \cap C \cap C \cap C) = P(c) \cdot P(c) \cdot P(C) \cdot P(C) \cdot P(C) = 0.3^2 \cdot 0.7^3$$

En este suceso no se fija el orden en el que han de salir los resultados, por lo cual serán equivalentes a él todas las tiradas cuyo resultado dos cruces y tres caras, sin importar el orden de salida, es decir,

(dos cruces y tres caras)=
$(ccCCC) \cup (CccCC) \cup (CCccC) \cup (CCCcc) \cup (cCcCC) \cup (cCCcC) \cup (cCCCc) \cup (cCCCc)$
$\cup (CcCCc) \cup (CcCcC)$

En general, el numero de sucesos que equivalen al del primer miembro podemos obtenerlo teniendo en cuenta que son las permutaciones con repetición de cinco elementos, C y c, de los cuales el primero se repite tres veces y el segundo dos; este numero es igual a

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

La probabilidad buscada es igual a la probabilidad de la unión de diez sucesos disjuntos, igual a la suma de las probabilidades.

Probabilidad de dos cruces $=10 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^3 = 0.3087$

(b) Probabilidad de que en las dos primeras tiradas aparezcan dos cruces y en las restantes, caras $= P(ccCCC)$.

La situación es análoga a la anterior, excepto en que se fija el orden en que han de aparecer las distintas posibilidades de la moneda; por lo tanto,

$$P(c \cap c \cap C \cap C \cap C) = P(c) \cdot P(c) \cdot P(C) \cdot P(C) \cdot P(C) = 0.3^2 \cdot 0.7^3 = 0.0309$$

(c) Probabilidad de que aparezcan al menos tres caras.

El suceso al menos tres caras se verifica si salen tres caras o cuatro o cinco, es decir,

$$(al\_menos\_tres\_caras) = (tres\_caras) \bigcup (cuatro\_caras) \bigcup (cinco\_caras)$$

Los tres sucesos del segundo miembro dos disjuntos:

$$P(tres\_caras) = P_5^{2,3} \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^2 = 10 \cdot \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^2 = 0.3087$$
$$P(cuatro\_caras) = P_5^{4,1} \cdot 0.7^4 \cdot 0.3 = 10 \cdot \cdot 0.7^4 \cdot 0.3 = 0.3602$$
$$P(cinco\_caras) = 0.7^5 = 0.1681$$
$$P(al\_menos\_tres\_caras) = 0.3087 + 0.3602 + 0.1681 = 0.8370$$

(d) Probabilidad de mas de una cara y menos de cuatro.

El suceso mas de una cara y menos de cuatro es igual al suceso dos o mas caras y tres o menos.

$$(1 < C < 4) = (2 \leq C \leq 3) = (dos\_caras) \bigcup (tres\_caras)$$

$$P(dos\_caras) = P_5^{2,3} \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^3 = 10 \cdot \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^3 = 0.1323$$
$$P(tres\_caras) = P_5^{2,3} \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^2 = 10 \cdot \cdot 0.7^3 \cdot 0.3^2 = 0.3087$$
$$P(mas\_de\_una\_cara\_y\_menos\_de\_cuatro) = 0.1323 + 0.3087 = 0.4410$$

---

**13. Calcúlense, en el juego del poker, las probabilidades siguientes:**
**(a) De póker.**

**(b) De full.**
**(c) De color: 1. Sin excluir las escaleras de color; 2. Excluyendo las escaleras de color.**

**(Se supondrá una baraja de cuarenta cartas.)**

---

**SOLUCIÓN:**

(a) Probabilidad de poker.

Para obtener poker se necesitan cuatro cartas del mismo punto. Como hay 10 puntos, se tendrán 10 pokeres básicos. La quinta carta será cualquiera de las 36 restantes; por consiguiente, habrá 10 36 pókeres. El número total de manos es igual a $\binom{40}{5}$ grupos distintos de 5 cartas.

La probabilidad de póker es

$$P(Póker) = \frac{10 \cdot 36}{\binom{40}{5}} = \frac{360}{658008} = 0.000547.$$

(b) Probabilidad de full.

El full se compone de una pareja y un trío. Cada punto esta repetido cuatro veces (uno por cada palo), por lo que se pueden formar $\binom{4}{2}$ parejas del mismo punto y , como hay 10 puntos, $\binom{4}{2}$ 10 parejas.

Cada pareja debe ir acompañada por un trío. Cada punto está repetido cuatro veces (uno por cada palo), por lo cual se deben formar $\binom{4}{3}$ 10 tríos, pero, una vez fijada una pareja una pareja, no puede haber un trío de la misma puntuación, teniendo, por tanto, $\binom{4}{3}$ 9 tríos disponibles por pareja y, en total, $\binom{4}{2}$ 10 $\binom{4}{3}$ 9 fulles.

La probabilidad de full es

$$P(full) = \frac{\binom{4}{2} \cdot 10 \cdot \binom{4}{3} \cdot 9}{\binom{40}{5}} = 0.003283$$

(c) Probabilidad de color.

1. Cada palo consta de 10 puntos, y el color se compone de 5 cartas del mismo palo, habiendo $\binom{10}{5}$ jugadas de color por palo y , en total, $\binom{10}{5}$ 4 colores.

$$P(full) = \frac{\binom{10}{5} \cdot 4}{\binom{40}{5}} = 0.000383$$

2. El numero de escalera de color de cada palo es de 6 y, como hay 4 palos, 24; por tanto, el numero de manos de color sin escaleras será

$$\binom{10}{5} \cdot 4 - 24$$

y la probabilidad,

$$P(Color) = \frac{\binom{10}{5} \cdot 4 - 24}{\binom{40}{5}} = 0.000347.$$

---

**14. En unos almacenes hay 500 clientes: 130 hombres y 370 mujeres.**

**(a) ¿Cual es la probabilidad de que salga a la calle un hombre (H) y luego una mujer (M) si no sabemos que el primero ha vuelto a entrar antes de la salida de la mujer?**
**(b) ¿y si salen dos hombres?**

---

**SOLUCIÓN:**

(a) El suceso HM puede darse de dos formas: o bien el hombre sale y no entra, o bien sale y entra. El suceso HM es la unión de dos sucesos disjuntos:

H ( sale y no entra) ∩ M(sale)

H(sale y entra) ∩ M(sale)

$$H(sale\_y\_no\_entra) \cap M(sale)$$
$$H(sale\_y\_entra) \cap M(sale)$$

Por tanto,

$$P(HM) = P[[H(s.no.e)M] \cup [H(s.e)M]] = P[H(s.no.e)M] + P[H(s.e)M]$$

En el primer caso, la probabilidad de salida de la segunda persona (M) se ve afectada por la salida de la primera, puesto que no vuelve a entrar, y el colectivo se modifica, lo que nos indica que no son independientes. En el segundo caso no sucede esto, ya que el hombre vuelve a entrar y el colectivo no sufre variación.

Por tanto.

$$P(HM) = P(H)\cdot P(\frac{M}{H}) + P(H)\cdot P(H) = \frac{130}{500}\cdot\frac{370}{499} + \frac{130}{500}\cdot\frac{130}{500} = 0.385$$

(b) Mediante un razonamiento analogo,

$$P(HM) = P(H)\cdot P(\frac{M}{H}) + P(H)\cdot P(H) = \frac{130}{500}\cdot\frac{129}{499} + \frac{130}{500}\cdot\frac{130}{500} = 0.135$$

---

**15. Tenemos cien urnas de tres tipos. El primer tipo contiene 8 bolas blancas y 2 negras; el segundo, 4 blancas y 6 negras y el tercero, 1 blanca y 9 negras.**

**Se elige una urna al azar y se extrae de ella una bola, que resulta blanca. Se devuelve la bola a la urna y se repite el proceso, siendo ahora la bola extraída negra.**

**Si sabemos que 16/39 es la posibilidad de que , siendo la bola blanca, proceda del primer tipo de urna y que 30/61 es la posibilidad de que, siendo la bola negra, proceda del segundo tipo de urna, calcúlese el numero de urnas de cada tipo.**

---

**<u>SOLUCIÓN:</u>**

Sean x, y y z el numero de urnas de cada tipo y su composición,

$x(8b,2n), y(4b,6n), z(1b,9n)$

Sabemos que $x + y + z = 100$

Aplicando l teorema de Bayes en cada extracción tenemos:

$$P(\frac{1}{b}) = \frac{P(1)\cdot P(\frac{b}{1})}{P(1)\cdot P(\frac{b}{1})\cdot P(2)\cdot P(\frac{b}{2})\cdot P(3)\cdot P(\frac{b}{3})} = \frac{\frac{x}{100}\cdot\frac{8}{10}}{\frac{x}{100}\cdot\frac{8}{10} + \frac{y}{100}\cdot\frac{4}{10} + \frac{z}{100}\cdot\frac{1}{10}} = \frac{8x}{8x+4y+z} =$$

$$\frac{8x}{8x+4y+100-x-y} = \frac{8x}{7x+3y+100} = \frac{16}{39}$$

$$P(\frac{2}{n}) = \frac{P(2)\cdot P(\frac{n}{2})}{P(1)\cdot P(\frac{n}{1})\cdot P(2)\cdot P(\frac{n}{2})\cdot P(3)\cdot P(\frac{n}{3})} =$$

$$\frac{6y}{2x+6y+9z} = \frac{6y}{-7x-3y+900} = \frac{30}{61}$$

de las ecuaciones anteriores con incógnitas, x e y:

$$\frac{8x}{7x+3y+100} = \frac{16}{39}$$

$$\frac{6y}{-7x-3y+900} = \frac{30}{61}$$

$$x = 20; y = 50.$$

Recordando que $x + y + z = 100, z = 30.$

Hay 20 urnas del primer tipo, 50 del segundo y 30 del tercero.

---

**16. Una empresa que debe decidir si adquiere un determinado paquete de acciones, solicita un informe a tres asesores financieros para que se pronuncien de forma favorable o desfavorable a la compra. Por experiencias anteriores en operaciones similares, se sabe que los tres asesores tienen actitudes ante el riesgo diferente e independiente. Esta situación se refleja en las probabilidades de aconsejar a compra de este tipo de operaciones que son respectivamente 0.8, 0.5 y 0.3**
**Con esta información a priori calcule:**

**a) La probabilidad de que al menos uno de ellos aconseje la compra.**
**b) La probabilidad de que ninguno de ellos aconseje adquirir el paquete de acciones.**

---

**<u>SOLUCIÓN:</u>**

Se definen los siguientes sucesos:

A= “El asesor A aconseja la compra”

B=”El asesor B aconseja la compra”

C=”El asesor C aconseja la compra”

Cuyas probabilidades son:

P(A)= 0.8 P(B)= 0.5 P(C)=0.3

a) Con las definiciones anteriores, $A \cup B \cup C$ representa el suceso “al menos uno de los tres aconseja la compra”, cuya probabilidad se calcula utilizando:

$P(A \cup B \cup C)= P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$

Como los sucesos son mutuamente independientes, estas probabilidades son:

$P(A \cap B)=P(A)\ P(B)=0.4$

$P(A \cap C)=P(A)\ P(C)=0.24$

$P(B \cap C)=P(B)\ P(C)=0.15$

$P(A \cap B \cap C)=P(A)\ P(B)\ P(C)=0.12$

Sustituyendo estas cantidades, tenemos:

$P(A \cup B \cup C)=0.08+0.5+0.3-0.4-0.24-0.15+0.12=0.93$

b) En este caso debemos calcular:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0{,}93 = 0{,}07$$

---

**17. Un mayorista tiene 200 clientes clasificados en la siguiente tabla según si realizan pedidos regularmente o de forma esporádica y según si efectúan el pago al contado o a través de créditos:**

| | **Forma de pago** | |
|---|---|---|
| **Tipo de pedido** | **Al contado** | **Crédito** |

| | | |
|---|---|---|
| **Regular** | **10** | **15** |
| **Esporádico** | **20** | **155** |

**En el marco de una campaña publicitaria, el mayorista decide sortear un viaje entre sus clientes eligiendo uno de ellos al azar.**

**a)¿Cuál es la probabilidad de que el cliente elegido al azar realice pedidos de forma regular o bien utilice créditos para efectuar sus pagos?**

**b)Calcule la probabilidad de que el cliente afortunando con el viaje realice pedidos regularmente si sabemos que el elegido efectúa sus pagos mediante créditos.**

**c)Calcule la probabilidad de que el cliente afortunado con el viaje realice los pagos mediante crédito si sabemos que realiza pedidos regularmente.**

**d)¿Son independientes los sucesos "comprar a crédito" y "comprar regularmente"?**

---

**<u>SOLUCIÓN:</u>**

| | Forma de Pago | | |
|---|---|---|---|
| **Tipo de pedido** | Al contado | Crédito | |
| Regular | 10 | 15 | 25 |
| Esporádico | 20 | 155 | 175 |
| | 30 | 170 | 200 |

Definimos los siguientes sucesos

R="un cliente realiza pedidos regularmente"

C="un cliente efectúa los pagos mendiante créditos"

a)$P(R \cup C)=P(R) + P(C)-P(R \cap C)$

Como todos los clients tienen las mismas posibilidades de ser elegidos en este sorteo, utilizando la definición clásica de probabilidad o regla de Laplace, tendremos:

$$P(R) = \frac{10+15}{200} = \frac{25}{200} = 0{,}125$$
$$P(C) = \frac{170}{200} = 0{,}85$$
$$P(R \cap C) = \frac{15}{200} = 0{,}075$$

Por tanto, 0.125+0.85+0.075=0.9

b)

$$P(R/C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}075}{0{,}85} = 0{,}088$$

O bién, de la tabla tenemos

$$P(R/C)=\frac{15}{170}=0{,}088$$

c)

$$P(C/R)=\frac{P(R\cap C)}{P(R)}=\frac{0{,}075}{0{,}125}=0{,}6$$

d) No son independientes estos sucesos pues P(R)=0.125$\neq$ P(R/C)=0.088

---

**18. Una empresa de trabajo temporal ha realizado un amplio estudio sore los tipos de empleo solicitados por los estudiantes de Bachiller, Formación Profesional y Universitarios. El informe clasifica estos solicitantes de empleo como cualificados o no para los trabajos que solicitan, y de los datos que contiene se desprende que sólo el 25% estaban cualificados para el trabajo que solicitaban, de los cuales, un 20% eran estudiantes universitarios, un 30% estudiaban Formación Profesional y un 50% Bachillerato. La situación entre los no cualificados es diferente: un 40% de ellos era estudiante universitario, otro 40% estudiaban Formación Profesional y sólo un 20% se encontraba en Bachillerato.**

**a) ¿Qué porcentaje de estos estudiantes se encontraban en Bachillerato y estaban cualificados para los empleos que solicitaban?**
**b) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de estos estudiantes que solicitaba empleo estudiara Formación Profesional?**
**c) Entre los estudiantes universitarios que solicitaron empleo, ¿qué porcentaje no estaba cualificado para los puestos de trabajo que solicitaban?**

---

**SOLUCIÓN:**

Definimos los siguientes sucesos:

C=”Uno de estos estudiantes está cualificado para los trabajos que solicita”

U=”Uno de estos estudiantes es universitario”

F=”Uno de estos estudiantes es de Formación Profesional”

B=”Uno de estos estudiantes es de Bachillerato”

a) $P(B\cap C)=P(C)\cdot P(B/C)=0{,}25\cdot 0{,}05=0{,}125\ \Rightarrow\ 12{,}5\%$

b) $P(F)=P(F/C)\cdot P(C)+P(F/\overline{C})\cdot P(\overline{C})=0{,}3\cdot 0{,}25+0{,}4\cdot 0{,}75=0{,}375$

c) $$P(\overline{C}/U)=\frac{P(U/\overline{C})\cdot P(\overline{C})}{P(U/C)\cdot P(C)+P(U/\overline{C})\cdot P(\overline{C})}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}75}{0{,}2\cdot 0{,}25+0{,}4\cdot 0{,}75}=0{,}857\ \Rightarrow\ 85{,}7\%$$

---

**19. En un sistema de alarma, la probabilidad de que esta funcione habiendo peligro es 0.95 y la de que funcione por error sin haber peligro es 0.03. Si la probabilidad de haber peligro es 0.1:**
**a)Calcular el porcentaje de veces que habiendo funcionado la alarma no haya peligro.**

**b)Hallar la probabilidad de que haya peligro y la alarma no funcione.**

**c)Calcular la probabilidad de que no habiendo funcionado la alarma haya peligro.**

**d)¿Cuál es la probabilidad de que la alarma funcione?**

---

**<u>SOLUCIÓN:</u>**

Definimos los sucesos:

A=”Hay situación de peligro”

F=”La alarma funciona”

Entonces,

$$P(F/A)=0{,}95\ ;\ P(F/\overline{A})=0{,}03\ ;\ P(A)=0{,}1\ \Rightarrow\ P(\overline{A})=1-0{,}1=0{,}9$$

a) $$P(\overline{A}/F)=\frac{P(F/\overline{A})\cdot P(\overline{A})}{P(F/A)\cdot P(A)+P(F/\overline{A})\cdot P(\overline{A})}=\frac{0{,}03\cdot 0{,}09}{0{,}95\cdot 0{,}1+0{,}03\cdot 0{,}09}=0{,}2213$$

luego, el porcentaje es 22,13%.

b) $P(A\cap\overline{F})=P(\overline{F}/A)\cdot P(A)=0{,}05\cdot 0{,}1=0{,}005$

c) $$P(A/\overline{F})=\frac{P(\overline{F}/A)\cdot P(A)}{P(\overline{F}/A)\cdot P(A)+P(\overline{F}/\overline{A})\cdot P(\overline{A})}=\frac{0{,}05\cdot 0{,}1}{0{,}05\cdot 0{,}1+0{,}97\cdot 0{,}9}=0{,}00569476$$

d) $P(F)=P(F/A)\cdot P(A)+P(F/\overline{A})\cdot P(\overline{A})=0{,}95\cdot 0{,}1+0{,}03\cdot 0{,}09=0{,}122$

---

**20. Una empresa multinacional desea elegir un candidato para ocupar la plaza de director técnico de la delegación que va a abrir en España. Tras las tres primeras pruebas de**

**selección de los 100 candidatos iniciales, tres han quedado para la cuarta y última prueba que consistirá en una entrevista personal. A la vista de los currículums presentados y de las puntuaciones obtenidas en las pruebas anteriores, se cuenta con probabilidades 0.3,0.5, y 0.2 de elegir para el puesto a los candidatos 1º, 2º, y 3º respectivamente. Se estima en un 80% las posibilidades de incrementar las ventas en el próximo año en la multinacional, si se elige al primer candidato. Para los otros dos: 2º y 3º, respectivamente se estiman el 10% y el 40% de posibilidades. El tercer candidato está seguro de conseguir dicho puesto en la multinacional.**

**A la vista de la información anterior, ¿es acertado el pensamiento de este candidato o por el contrario existe un porcentaje de error?. En caso de existir expresar ese error en términos de probabilidad.**

---

**SOLUCIÓN:**

$P(1°) = 0,3 \quad , \quad P(2°) = 0,5 \quad , \quad P(3°) = 0,2$

Sea el suceso A = "Incremento de venta"

$P(A / 1°) = 0,8 \quad , \quad P(A / 2°) = 0,1 \quad , \quad P(A / 3°) = 0,4$

Aplicando el teorema de Bayes

$$P(3° / A) = \frac{P(A/3°)\cdot P(3°)}{P(A/1°)\cdot P(1°) + P(A/2°)\cdot P(2°) + P(A/3°)\cdot P(3°)} = \frac{0,4\cdot 0,2}{0,8\cdot 0,3 + 0,1\cdot 0,5 + 0,4\cdot 0,2} = \frac{8}{37} = 0,2162$$

P (error) = 1-0,2162 = 0,7838; Luego no es acertado ya que

$$P(1°/A) = \frac{0,24}{0,37} = 0,6486 \quad \text{y} \quad P(2°/A) = \frac{0,05}{0,37} = 0,1351$$

el razonamiento sería correcto para el 1er candidato.

---

**21. Describe el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:**

1. **Lanzar tres monedas.**
2. **Lanzar tres dados y anotar la suma de los puntos obtenidos.**
3. **Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.**
4. **El tiempo, con relación a la lluvia, que hará durante tres días consecutivos**.

---

**SOLUCIÓN:**

1. Llamando C a obtener cara y X a la obtención de cruz, obtenemos el siguiente espacio

muestral:

E={(CCC),(CCX),(CXC),(XCC),(CXX),(XCX),(XXC),(XXX)}

2. E={3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18}

3. Llamando B a sacar bola blanca y N a sacar bola negra, tenemos:

E={BB,BN,NN}

4. Si llamamos L al día lluvioso y N al día sin lluvia, para tres días consecutivos se obtiene el siguiente espacio muestral:

E={(LLL),(LLN),(LNL),(NLL),(LNN),(NLN),(NNL),(NNN)}

---

**22. Se considera el sexo de los hijos de las familias de tres hijos. Sea A el suceso el hijo mayor es una hembra, y B el suceso los dos hijos pequeños son varones. ¿Cuáles son los elementos de A y B?**

---

**SOLUCIÓN:**

Llamando V a ser varón y H a ser hembra, el espacio muestral está formado por los sucesos elementales:

E={(VVV),(VVH),(VHV),(HVV),(VHH),(HVH),(HHV),(HHH)}

Y los sucesos A y B son compuestos y están formados por los siguientes sucesos elementales:

A={(HHH),(HHV),(HVH),(HVV)}

B={(VVV),(HVV)}

---

**23. En una bolsa hay cinco bolas, blancas o negras. Se extrae una bola y es blanca. H´allese la probabilidad de que en la bolsa haya dos blancas y tres negras si para formar la urna se tiraron cinco monedas y se metieron tantas blancas como caras resultaron y tantas negras como cruces.**

---

**SOLUCIÓN:**

Representemos un suceso elemental como:

$w = (w1;w2;w3;w4;w5;w6)\ ;$

donde $w1;w2;w3;w4$ y $w5$ representan los resultados de los lanzamientos de la moneda, y por tanto tambi´en la composici´on de la urna. Adicionalmente, $w6$ representa el color de la bola extra´ıda de la urna. Denotemos por $Ci$ ($i = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$) el suceso de obtener $i$ caras en los 5 lanzamientos de la moneda, es decir, que la urna contenga $i$ bolas blancas y 5 ¡ $i$ bolas negras, y sea $B$ el suceso “extraer una bola blanca de la urna”.

Entonces el problema se resuelve mediante los siguientes calculos:

$$P(C_2 | B) = \frac{P(C_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B | C_2) \cdot P(C_2)}{\sum_{i=0}^{5} P(B | C_i) \cdot P(C_i)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \cdot \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5}{\sum_{i=0}^{5} \frac{i}{5} \cdot \binom{5}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{\binom{4}{1}}{0 + \sum_{i=0}^{5} \binom{4}{i-1}} =$$

$$= \frac{4}{\sum_{i=0}^{5} \binom{4}{i}} = \frac{4}{(1+1)^4} = \frac{1}{4}$$

---

**24. En una clase de 10 alumnos van a distribuirse 3 premios. Averiguar de cuántos modos puede hacerse si:**
**1. los premios son diferentes;**

**2. los premios son iguales.**

---

**<u>SOLUCIÓN:</u>**

Hay dos supuestos posibles:

-si una misma persona no puede recibir más de un premio:

1. hay $V_{10,3} = 10 \bullet 9 \bullet 8 = 720$ maneras de distribuir los premios si éstos son diferentes;

2. en el caso de que los premios sean iguales, pueden distribuirse de

$C_{10,3} = 10 \bullet 9 \bullet \frac{8}{6} = 120$ maneras.

-si una misma persona puede recibir más de un premio:

1. se pueden distribuir los premios, si éstos son diferentes, de $VR_{10,3} = 10^3 = 1000$ maneras;

2. hay $CR_{10,3} = 220$ maneras de distribuir los premios si éstos son iguales.

---

**25. Una urna contiene 8 bolas blancas y 4 bolas negras. Se sacan dos bolas una a una con reemplazamiento. Sea *A* el suceso: "la primera bola extraída es blanca"; y *B* el suceso: "al menos una de las dos bolas extraídas es blanca".**
**Calcular** $P(A \cap B), P(A \cap \overline{B}), P(\overline{A} \cap B), P(\overline{A} \cap \overline{B})$ **y las probabilidades condicionadas** $P(A|B), P(A|\overline{B}), P(B|A)$ y $P(B|\overline{A})$.

---

**SOLUCIÓN:**

Un espacio muestral para este problema es $\Omega = \{w = (w_1; w_2) : w_i \in \{b, n\}, i = 1, 2\}$, donde cada $w_i$ representa el color de la bola extraída en *i*- ésimo lugar, con *i* = 1, 2, siendo igual a *b* si la bola es blanca y *n* si es negra. Este espacio no es equiprobable, ya que, por ejemplo: $P(\{(b,b)\}) = (8/12)^2$; pero $P(\{(b,n)\}) = 8/12 \bullet 4/12$. Se tiene que:

$$A \cap B = A = \{(b,b), (b,n)\},$$
$$A \cap \overline{B} = \varnothing, \ \overline{A} \cap B = \{(n,b)\},$$
$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{B} = \{(n,n)\}.$$

Por lo tanto, se calculan las probabilidades correspondientes, y resulta:

$$P(A \cap B) = P(\{(b,b)\}) + P(\{(b,n)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \bullet \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$
$$P(A \cap \overline{B}) = 0,$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(\{(n,b)\}) = \frac{2}{9},$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{9}.$$

Una vez visto esto, las probabilidades condicionadas son:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\setminus B)}{1\text{-}P(\overline{B})}=\frac{3}{4},$$

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=0,$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=1,$$

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{2}{3}.$$

---

**26. Cuatro tiradores disparan independientemente sobre cuatro objetivos, cada uno sobre uno. Cada tirador dispone de seis balas. La probabilidad de acertar en el objetivo con cada tiro es de 0.8. Un tirador deja de disparar al alcanzar el blanco.**
**1. Probabilidad de que alguno de los tiradores consuma toda su munición.**

**2. Si todos los tiradores consumen la munición, ¿cuál es la probabilidad de que todos los objetivos hayan sido alcanzados?**

**3. Calcular la probabilidad de que sobren dos balas en total.**

---

**SOLUCIÓN:**

Un espacio muestral es: $\Omega=\{w=(w_1;w_2;w_3;w_4):w_i=(w_{i1};w_{i2});$ donde cada *wi*1 representa el número de balas que le sobran al tirador *i* tras acertar en el objetivo, y *wi*2 es el resultado que ha obtenido, que será *a* si acierta y *f* si falla, para todo *i* = 1*;* 2*;* 3*;* 4. Nótese que si a un tirador le sobra alguna bala, significa que ha acertado. Sin embargo, si no le sobra ninguna, puede que haya acertado al disparar la última bala o bien que éste tiro también lo haya fallado. Nótese también que desde que un jugador falle los 5 primeros tiros, ya no le sobrará ninguna bala, sea cual sea el resultado para esta última.

1. Sea *A* el suceso "Alguno de los tiradores consume toda su munición". Definamos también los sucesos $A_{ij}$ = "Al tirador *i* le sobran *j* balas", para *i* = 1*;* 2*;* 3*;* 4 y *j* = 0*;* 1*;* 2*;* 3*;* 4*;* 5. Por lo tanto:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{4}A_{i0}^{c}\right),$$

Y ya que los tiradores disparan independientemente y su probabilidad de acierto es 0.8, se tiene que:

$$P(A)=1-\prod_{i=1}^{4}P\left(A_{i0}^{c}\right)=1-\prod_{i=1}^{4}\left[1-P\left(A_{i0}\right)\right]$$

$$=1-\prod_{i=1}^{4}\left[1-\left(0,2^{5}\bullet 0,8+0,2^{5}\bullet 0,2\right)\right]=$$

$$=1-\prod_{i=1}^{4}\left[1-0,2^{5}\right]=1,2794\bullet 10^{-3}$$

2. Definamos los sucesos $B_i$ = "El tirador $i$ acierta", para $i$ = 1; 2; 3; 4. Los tiradores disparan de manera independiente, por lo que la probabilidad pedida es:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{4}B_i\middle|\bigcap_{i=1}^{4}A_{i0}\right)=\prod_{i=1}^{4}P\left(B_i\middle|A_{i0}\right)=\left[P\left(B_1\middle|A_{10}\right)\right]^{4}$$

$$=\left[\frac{P\left(B_1\cap A_{10}\right)}{P\left(A_{10}\right)}\right]^{4}=\left(\frac{0,2^{5}\bullet 0,8}{0,2^{5}}\right)^{4}=0,8^{4}=0,4096.$$

3. Nótese que para que entre los cuatro tiradores sobren dos balas tiene que suceder que, o bien ambas le sobran al mismo tirador o bien a dos tiradores diferentes. Todos los tiradores tienen la misma probabilidad de acertar, por lo que si vemos estos dos casos para dos tiradores concretos, podemos luego extenderlo a todos. Por lo tanto, y teniendo en cuenta, como siempre, que disparan de forma independiente, se tiene que:

$$P\left(A_{12}\cap\left(\bigcap_{i=2}^{4}A_{i0}\right)\right)=\left(0,2\right)^{3}\bullet 0,8\bullet\left[\left(0,2\right)^{5}\right]^{3}=\left(0,2\right)^{18}\bullet 0,8,$$

y por otra parte

$$P\left(A_{11}\cap A_{21}\cap\left(\bigcap_{i=3}^{4}A_{i0}\right)\right)=\left[\left(0,2\right)^{4}\bullet 0,8\right]^{2}\bullet\left[\left(0,2\right)^{5}\right]^{2}=\left(0,2\right)^{18}\bullet\left(0,8\right)^{2}.$$

Si denotamos por $C$ al suceso "Sobran dos balas en total", entonces, teniendo en cuenta todos los casos posibles, resulta:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{C}\right)=C_{4,1}\bullet\left(0,2\right)^{18}\bullet 0,8+C_{4,2}\bullet\left(0,2\right)^{18}\bullet\left(0,8\right)^{2}=$$

$$=4\bullet\left(0,2\right)^{18}\bullet 0,8+6\bullet\left(0,2\right)^{18}\bullet\left(0,8\right)^{2}=1,8455\bullet 10^{-12}$$

---

**27. A partir de 5 matemáticos y 7 físicos hay que constituir una comisión de 2 matemáticos y 3 físicos. ¿De cuántas formas podrá hacerse si:**
**1. todos son elegibles;**

**2. un físico particular ha de estar en esa comisión;**

**3. dos matemáticos concretos no pueden estar juntos?**

---

**SOLUCIÓN:**

1. Puesto que todos son elegibles, existen $C_{5,2} = 10$ grupos de 2 matemáticos, y $C_{7,3} = 35$ grupos de 3 físicos. Luego hay un total de $10 \bullet 35 = 350$ comisiones posibles.

2. Se fija uno de los físicos, luego existen $C_{5,2} = 10$ grupos de 2 matemáticos, y $C_{6,2} = 15$ grupos de 3 físicos. Así, se pueden formar $10 \bullet 15 = 150$ comisiones.

3. Se excluye la única posibilidad de que el subgrupo de dos matemáticos lo constituyan los dos que no pueden estar juntos, por lo que hay $C_{5,2} - 1 = 9$ grupos de 2 matemáticos cumpliendo la condición. Además hay $C_{7,3} = \dfrac{7 \bullet 6 \bullet 5}{(3 \bullet 2)} = 35$ grupos de 3 físicos, por lo que el total de comisiones que pueden formarse es $9 \bullet 35 = 315$.

---

**28. Sea (Ω, Ã, P) un ejercicio de probabilidad. Se pide:**
**a) Demostrar que si A, B, C ∈ Ã son sucesos mutuamente independientes, entonces los sucesos A ∪ B y C son también independientes.**

**b) Calcular la probabilidad condicionada $P [ (A \cup B)^c \ / \ (A \cap B)^c ]$ en función de P ( A ), P ( B ) y P (A ∩ B) con P ( A ) ≠ 0 y P ( B ) ≠ 0.**

---

**SOLUCIÓN:**

a) Por la definición de probabilidad condicionada:

$P [(A \cup B / C ] = P [(A \cup B) \cap C ] / P ( C ) = P [(A \cap C) \cup (B \cap C )] / P ( C ) =$

$= P (A \cap C) + P (B \cap C ) – P ( A \cap B \cap C ) / P ( C ) =$

$= P ( A ) P ( C ) / P ( C ) + P ( B ) P ( C ) / P ( C ) + P ( A ) P ( B ) P ( C ) / P ( C )=$

$= P ( A ) + P ( B ) - P ( A ) P ( B ) =$

$= P ( A ) + P ( B ) - P ( A \cap B) = P ( A \cup B)$ c.q.d.

b) De igual modo que en el caso anterior, y aplicando las leyes de Morgan y la definición de probabilidad condicionada, tenemos:

$P[(A \cup B)^c / A \cap B)^c] = P[(A \cap B)^c \cap (A \cap B)^c] / P[(A \cup B)^c] =$

$= P[\{(A \cup B) \cup (A \cap B)\}^c] / P[(A \cap B)^c] =$

$= P[(A \cup B)^c] / P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cup B) / P[(A \cap B)^c] =$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) / 1 - P(A \cap B)$ que es la relación pedida.

---

**29. Se dan tres sucesos aleatorios A, B y C, independientes dos a dos, los cuales, sin embargo, no pueden ocurrir simultáneamente. Suponiendo que todos ellos tienen igual probabilidad p, calcular el valor de p que hace máxima la probabilidad de ocurrencia de al menos uno de los sucesos.**

---

**SOLUCIÓN:**

Por la hipótesis de partida, sabemos que:

( i ) $P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = p^2$

( ii) $P(A \cap C) = P(A)\,P(C) = p^2$

(iii) $P(B \cap C) = P(B)\,P(C) = p^2$

(iv) $P(A \cap B \cap C) = 0$

En consecuencia utilizando la fórmula de la suma generalizada:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 3p - 3p^2 = 3p(1-p)$

Si denotamos por $f(p) = 3p(1-p) \Rightarrow f'(p) = 0 \Rightarrow p = ½$ (máximo)

Luego: $p = 1/2$ y $P(A \cup B \cup C) = 3/4$

---

**30. Se tienen n+1 cajas idénticas con n bolas cada caja. En la primera caja hay n bolas negras; en la segunda n–1 negras y 1 blanca, en la tercera n–2 negras y 2 blancas, y así sucesivamente, de manera que en la última caja hay n bolas blancas. Se toma una caja al azar y de ella se extraen tres bolas de una vez.**
**a) Calcular la probabilidad de que las tres bolas sean blancas.**

**b) Supuesto la extracción de que las tres bolas sean blancas, calcular el número de cajas que tiene que haber para que la probabilidad de que provengan las tres bolas blancas de las dos últimas cajas sea 2/3.**

---

**SOLUCIÓN:**

a) Sean los sucesos:

$\Rightarrow$ n – k + 1 negras

*$C_k$ : caja k* ( k = 1, 2, 3, ..., n + 1 )

$\Rightarrow$ k - 1 blancas

*$B_3$* : 3 bolas blancas

Al no especificar ninguna ley a priori, tomemos $P ( C_k ) = ( n + 1 )^{-1} \ \forall k$ ( ignorancia a priori ). Comencemos por calcular las verosimilitudes asociadas. Para ello, es fácil observar, aplicando la teoría elemental de combinatoria, que:

$P ( B_3 / C_k ) = \binom{k-1}{3} \binom{n-k+1}{0} / \binom{n}{3} = \binom{k-1}{3} / \binom{n}{3}$

Luego la probabilidad pedida es:

$P ( B_3 ) = \sum_{(k=1,\text{ hasta } n+1)} P ( B_3 / C_k )\ P (C_k ) = 1 / n+1 \ \sum_{(k=4,\text{ hasta } n+1)} P ( B_3 / C_k ) =$

$= (1 / n+1) * [\binom{n+1}{4} / \binom{n}{3}] = 1 / 4$

b) De igual modo, aplicando la fórmula de Bayes:

$P (C_k / B_3 ) = P ( B_3 / C_k ) P ( C_k ) / P ( B_3 ) = 4 P (B_3 / C_k ) P ( C_k ) =$

$= (1 / n+1) * [4\binom{K-1}{3} / \binom{n}{3}] = p_k$

Sustituyendo tenemos:

Si $k = n+1 \Rightarrow p_{n+1} = 4 / n+1$

Si $k = n \Rightarrow p_n = 4 ( n-3 ) / n (n+1)$

Pero como $p_n + p_{n+1} = 2 / 3 \Rightarrow n^2 – 11n + 18 = 0$, ecuación con raíces $n_1= 9$ y $n_2 = 2$ (solución no válida). En consecuencia, la solución es que deben existir 10 cajas.

---

**31. Un test rápido realizado por la Guardia Civil en la carretera sobre el contenido alcohólico de la sangre de un conductor da correcto sólo en un 100 α % de las veces ( es decir, da respuesta positiva cuando el contenido es alto y negativa cuando es bajo ). Los sospechosos de conducir embriagados son sometidos por un médico a un segundo test más preciso y detallado. El nuevo test evidentemente, nunca falla con un conductor sobrio, pero posee un porcentaje β % de error en los embriagados debido al tiempo transcurrido entre los dos test. Ambos test se suponen independientes. Por último se conoce que de los detenidos en carretera, un 100 γ % están embriagados. Se pide:**
**a) ¿Qué proporción de conductores detenidos por la G.C no serán sometidos a un segundo test ?**

**b) ¿ Qué proporción de conductores detenidos por la G.C serán sometidos por el médico a un segundo test que no detecte el alcohol ?**

**c) ¿ Cuál es la probabilidad de que tal conductor tuviese en realidad un contenido en alcohol en la sangre mayor que el legal en el momento de ser detenido?**

---

**<u>SOLUCIÓN:</u>**

a) Definamos los siguientes sucesos:

* D ( conductor detenido), E (conductor embriagado) y $E^c$ (conductor sobrio)

* Ci (el test i ( i = 1, 2) da correcto) y Ti (someterse al test i ( i = 1, 2))

Con esto:

$P(C_1) = \alpha$ ; $P(C_2 / E^c) = 1$; $P(C_2^c / E) = \beta$ y $P(E/D) = \gamma$

son los datos del problema. Definamos los nuevos sucesos:

$E_1 = \{ E \cap C_1 \}$; $E_2 = \{ E \cap C_1^c \}$; $E_1^c = \{ E^c \cap C_1 \}$ y $E_2^c = \{ E^c \cap C_1^c \}$

Entonces:

a) $P(T_2^c) = P(E_2 \cup E_1^c) = P(E_2) + P(E_1^c) = P(E \cap C_1^C) + P(E^c \cap C_1) =$

$= P(C_1^c) P(E/D) + P(C_1) P(E^c / D) = (1-\alpha)\gamma + \alpha(1-\gamma) = \alpha + \gamma - 2\alpha\gamma$

b) Denotemos por H el suceso cuya probabilidad se desea calcular. Entonces si A es el suceso "el test $T_2$ no detecta el alcohol", tendremos:

$P(H) = P[(E_1 \cap A) \cup E_2^c \cap A)] = P(E_1 \cap A) + P(E_2^c \cap A) =$

$= P(E \cap C_1 \cap A) + P(E^C \cap C_1^C \cap A) =$

$= P(E \cap C_1) P(A / E \cap C_1) + P(E^c \cap C_1^C) P(A / E^c \cap C_1^C) =$

$= P(E \cap C_1) P(Cc^2 / E) + P(E^c \cap C_1^C) P(C_2 / E^c \cap C_1^C) =$

$= \alpha \beta \gamma + ( 1- \alpha ) (1- \gamma)$

c) La probabilidad será:

$P ( E_1 \cap A / H ) = P ( E_1 \cap A \cap H ) / P ( H ) = P ( E_1 \cap A) / P ( H ) =$

$= \alpha \beta \gamma / \alpha \beta \gamma + ( 1- \alpha ) (1- \gamma)$

---

**32. Si tiran 4 monedas no perfectas, con probabilidad p de salir cara, y según el número de caras que salgan se tiran igual número de dados perfectos, sumándose a continuación la puntuación obtenida. Se realiza un experimento y se obtiene tres puntos.**
**a) Estudiar, para los distintos valores de p, qué número de caras es más probable que hubiese salido.**

**b) Calcular el número esperado de caras a priori y posteriori.**

**c) ¿ Qué sucede si las monedas son perfectas?**

---

**SOLUCIÓN:**

a) Sean los sucesos : C (salir cara); F (salir cruz); $C_i$ ( obtener i caras : i = 0, 1, 2, 3, 4 ) y B ( se ha obtenido tres puntos ). La probabilidades a priori vienen dadas por un modelo binomial:

$P ( C_i ) = ( ^4{}_i ) p^i q^{4-i}$ (p + q = 1 ; i = 0, 1, 2, 3, 4)

y las verosimilitudes asociadas por :

$P ( B / C0 ) = P ( B / C4 ) = 0$; $P ( B / C1 ) = 1/6$; $P ( B / C2 ) = 2/6^2$; $P ( B / C3 ) = 1/6^3$

En consecuencia:

$P ( B ) = \sum_{(i=0, \text{ hasta } 4)} P ( B / Ci ) P ( Ci ) = p*q / 54 \ [ 18 (1-p) (2-p) + p2$

después de sustituir y operar convenientemente.

Por tanto, aplicando la fórmula de Bayes $P ( Ci / B) = P ( B / C_i ) P ( C_i ) / P ( B)$ ( i = 0, 1, 2, 3, 4 ) y denotando por $f ( p ) = 18 (1-p) (2-p) + p^2$ tenemos que:

$P ( Ci / B) = 36 q^2 / f(p)$ si i = 1 (1)

$= 18 p*q / f(p)$ si i = 2 (2)

$= p^2 / f(p)$ si i = 3 (3)

$= 0$ si $i = 0, 4$

Representando gráficamente las tres curvas (1), (2) y (3) u operando analíticamente, ya que los denominadores son iguales, es fácil observar que los puntos de corte son:

* (1) y (2) en $p = 2/3 \approx 0,66 \Rightarrow 0 \leq p \leq 2/3 \rightarrow C_1$ ( 1 cara)

* (1) y (3) en $p = 6/7 \approx 0,85 \Rightarrow 2/3 < p \leq 18/19 \rightarrow C_2$ ( 2 caras)

* (2) y (3) en $p = 18/19 \approx 0,95 \Rightarrow 18/19 < p \leq 1 \rightarrow C_3$ ( 3 caras)

y esto es el número de caras más probable según el valor del parámetro p.

b) Si X es la v.a. "número de caras", tendremos:

* A priori: $X \rightarrow \text{Bin.}(4, p) \Rightarrow E(X) = 4p$

* A posteriori:

$E(X / B) = \sum_{(i=0,\text{ hasta } 4)} i\ P(Ci / B) = 3\,[(p-6)^2 - 24] / \ 18\,(1-p)\,(2-p) + p2$

c) Si las monedas son perfectas, p=1/2. Sustituyendo de manera directa e inmediata obtenemos que $P(C_1 / B) = 36/55$, $P(C_2 / B) = 18/55$ y $P(C_3 / B) = 1/55$.

En consecuencia, el número de caras más probable es $C_1$ ( 1 cara), y además $E(X) = 2$

y $E(X / B) = 15/11 < E(X)$

---

**33. En una ciudad existen dos fábricas de bolas de tenis. En la fábrica F1 el porcentaje de bolas que se fabrican de calidad A es del 80 %, de calidad B es del 5 % y de calidad C es del 15 %. En la F2 los porcentajes son a, b y c respectivamente.**

**a) Dar una expresión general, lo más simplificada posible, de la proporción de bolas de calidad A para toda la ciudad.**

**b) Sabiendo que a = 92 % y que el porcentaje de bolas de calidad A en toda la ciudad es del 89 %, comentar y comparar las producciones de las dos fábricas. ¿Cuál de las dos fábricas produce más bolas?**

**c) Si el porcentaje de bolas B en toda la ciudad es del 5 % ¿Qué valores toman b y c?, y entonces, ¿Cuál es la proporción de bolas fabricadas por F2 entre bolas de la calidad tipo C?**

---

**SOLUCIÓN:**

a) Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$P(A) = \Sigma(i=1, \text{hasta } 2)\ P(A/Fi)\ P(Fi) = 4/5\ P(F1) + a\ P(F2) =$

$= 4/5\ P(F1) + a\,(1 - P(F1)) = a + (4/5 - a)\ P(F1)$

b) En este caso, despejando en la expresión anterior y sustituyendo:

$P(F1) = (P(A) - 1) / (4/5 - a) = 1/4$

$P(F2) = 3/4$

En consecuencia, P (F2) = 3 P (F1). Es decir, la fábrica F1 produce el 25 % de las bolas de la ciudad y la fábrica F2 produce tres veces más que la fábrica F1.

c) Como en este caso P (B) = 1/20, entonces:

$P(B) = P(B/F1)\ P(F1) + P(B/F2)\ P(F2) = (1/20)(1/4) + b\,(3/4) = 1/20$

Y despejando obtenemos que b = 0,05. En consecuencia: a = 0,92; b = 0,05 y c = 0,03. Con todo esto:

$P(F2 / C) = (P(C/F2)\ P(F2)) / (P(C)) = P(C/F2)\ P(F2)) / (\Sigma(i=1, \text{hasta } 2)\ P(C/Fi)\ P(Fi)) = 3/8$

Después de sustituir y operar convenientemente. En consecuencia, el porcentaje de las bolas fabricadas por F2 entre las de calidad C es del 37,5 %.

---

**34. Un dado (A) posee cuatro caras rojas y dos blancas; otro dado (B), dos caras rojas y cuatro blancas. Se lanza una moneda sesgada, con probabilidad p de salir cara: si sale cara el juego continua únicamente con el dado A, y si sale cruz se utiliza solamente el dado B.**

**a) Calcular la probabilidad de obtener "rojo" en cualquier lanzamiento del dado.**

**b) Si se obtiene "rojo" en los n primeros lanzamientos, ¿Cuál es la probabilidad de que se esté usando el dado A? ¿Y el B? Buscar una relación de indiferencia para ambas probabilidades.**

---

**SOLUCIÓN:**

a) Sean los sucesos: A (se está utilizando el dado A), B (se está utilizando el dado B) y R (sale cara roja):

Por el Teorema de la Probabilidad Total:

P (R) = P (R / A) P (A) + P (R / B) P (B) = 4 p / 6 + 2 (1 - p) / 6 = (p + 1) / 3

b) Evidentemente, por la formula de Bayes:

P (A / nR) = [P (nR / A) p (A)] / [P (nR / A) p (A) + P (nR / B) p (B)] =

= (4/6)np / [(4/6)np + (2/6)n (1 - p)] = 1 / [1 + (q / p) 2-n] +

P (B / nR) = 1 - P (A / nR) = 1 / [1 + (q / p) 2n]     (p + q = 1)

La relación de indiferencia pedida es, evidentemente, la que se obtiene al imponer la condición P (A / nR) = P (B / nR) = 1/2. Operando es fácil ver que esta condición viene dada por: q/p = 2n ó p = (1 + 2n)-1 para cualquier n dado, pero fijo.

---

**35. Sea (Ω, A, P) un espacio de probabilidad. Sean A, B ∈ A sucesos independientes tales que P (A) = α y P (B) = β.**
**a) Calcular la probabilidad de que ocurra uno y sólo uno de los sucesos.**
**b) Calcular la probabilidad de que ninguno de los sucesos se verifique. En este último caso, suponiendo que α + β = ½, dar una cota para esta probabilidad.**

---

**SOLUCIÓN:**

a) P (A Δ B) = P [(A – B) ∪ (B - A)] = P (A - B) + P (B - A) =

= P (A) + P (B) – 2 P (A ∩ B) = P (A) + P (B) – 2 P (A) P (B) = α + β – 2 α β =

= α (1 – β) + β (1 - α)

b) P (Ac ∩ Bc) = P (Ac) P (Bc) = (1 – β) (1 - α) = 1 – (α + β) + α β

Sea P (Ac ∩ Bc) = p. Entonces p = 1 – ½ + α β = ½ + α β ≥ ½.

Como por otro lado β = ½ - α → p = f (α) = ½ + α (1/2 - α) → f’ (α) = 0 →

→ α = ¼ (máximo) con f (1/4) = 9/16 ≈ 0,56.

Luego la cota pedida es: 0,5 ≤ p ≤ 0,56

---

**36. A un puesto aduanero llega periódicamente misiones diplomáticas procedentes de un determinado país y que están constituidas por 10 miembros. El citado país es un gran productor de marihuana, circunstancias, que de vez en cuando, es aprovechada por sus misiones diplomáticas para introducir algún que otro cargamento en el país que visitan, siendo la forma de hacerlo el que dos de cada diez miembros lleven en sus maletas la hierba.**
**Los aduaneros tienen ya información del truco, pero, para no producir incidentes diplomáticos, se limitan a inspeccionar dos de cada diez maletas dejando pasar a la misión si en las maletas inspeccionadas no encuentran droga. Su experiencia les dice además que el 10% de las misiones portan drogas.**

**Si una misión inspeccionada no arroja resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que realmente dicha misión no lleve droga alguna?**

---

**SOLUCIÓN:**

Denominaremos:

$A_1$= la delegación porta droga

$A_2$= la delegación no porta droga

B= una misión inspeccionada arroja resultado negativo

Conocemos

$P(A_1)= 0.1$ $P(A_2)=0.9$

$$P(B/A_1)=\frac{\binom{8}{2}\binom{2}{0}}{\binom{10}{2}}=\frac{28}{45}\text{ , } P(B/A_2)=1$$

Y se nos pide $P(A_2/B)$. Esta probabilidad podemos, dados los datos que poseemos, calcularla con ayuda del teorema de Bayes:

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)}=0.9353$$

---

**37. Altube y Vitoria son dos estaciones metereológicas. Representaremos por A y V el que llueva respectivamente en Altube y Vitoria durante cualquier periodo de 24 horas en el mes de Junio; se observa que P(A) = P(V) = 0, 40 y que $P(A\cap V)$ = 0,28. Determínense las dos probabilidades condicionales P(A/V) y P(V/A), así como la probabilidad total $P(A\cup V)$. ¿Son independientes A y V?**

**SOLUCIÓN:**

Para obtener las probabilidades condicionadas aplicamos la expresión

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$

que en nuestro caso será

$$P(A/V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{0,28}{0,40} = 0,70 \quad ; \quad P(V/A) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{0,28}{0,40} = 0,70$$

Para obtener la probabilidad total consideramos

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

con lo que resultará

$P(A \cup V) = P(A) + P(V) – P(A \cap V)= 0, 40 + 0, 40 - 0, 28 = 0, 52$

Se dice que dos sucesos son independientes si su probabilidad compuesta es igual al producto de sus probabilidades incondicionales respectivas. La definición formal de independencia de dos sucesos es que se cumpla

$P(B/A) = P(B)$ ; $P(A/B) = P(A)$

Por consiguiente, teniendo en cuenta que la ley general de probabilidad compuesta se expresa :

$P(A \cap B \cap C \cap \ldots \cap M \cap N) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B) \ldots P(N/A \cap B \cap C \cap \ldots \cap M)$

podemos ver que en el caso de sucesos independientes la probabilidad compuesta toma la forma simétrica

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

En nuestro caso resulta fácil comprobar que los dos sucesos no son independientes ya que se tiene :

$P(A/V) \neq P(A)$ ; $P(V/A) \neq P(V) \rightarrow P(A \cap V) \neq P(A) \bullet P(V)$

**38. Una urna se ha llenado tirando una moneda al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada cruz. Se extrae una bola que es blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola también lo sea.**

**SOLUCIÓN:**

Aunque al extraer la bola lo hagamos de una sola urna, ésta puede adoptar tres formas distintas:

$U_1(2B)$ $U_2(B, N)$ $U_3(2N)$siendo $\Omega = U_1 + U_2 + U_3$

$P(U_1)$ = probabilidad de obtener dos caras = 1 / 4

$P(U_2)$ = probabilidad de obtener una cara y una cruz = 1/2

$P(U_3)$ = probabilidad de obtener dos cruces = ¼

Decir que la otra bola sea blanca, sabiendo que la primera lo es, equivale a decir que provenimos de la primera urna:

$$P(U_1 / B) = \frac{P(B / U_1) \cdot P(U_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B / U_i) \cdot P(U_i)} = \frac{1 \cdot (1/4)}{(1) \cdot (1/4) + (1/2) \cdot (1/2) + (0) \cdot (1/4)} = 1/2$$

---

**39. Una rata es colocada en una caja con tres pulsadores rojo, azul y blanco. Si pulsa dos veces las palancas al azar:**

**a) ¿cual es la probabilidad de que las dos veces pulse roja?**
**b) ¿cual es la probabilidad de que pulse la primera vez o la segunda o ambas la tecla azul?**

---

**SOLUCIÓN:**

a) Para que las dos veces pulse la roja tiene que ocurrir que la primera vez pulse roja y la segunda también pulse roja, es decir que se verifique el suceso $(R1 \cap R2)$. Ahora bien, como ambos son independientes, la probabilidad de la intersección es igual al producto de las probabilidades de ambos sucesos. La probabilidad de estos sucesos se determina mediante la regla de Laplace de casos favorables (uno), partido por casos posibles (tres)

$$P(R1 \cap R2) = P(R1) \times P(R2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

b) En este apartado, claramente, nos piden la probabilidad de la unión de los sucesos pulsar azul la primera vez y pulsar azul la segunda. Ahora bien, estos dos sucesos no son incompatibles, luego la probabilidad de la unión será igual a la suma de las probabilidades menos la probabilidad de la intersección. La probabilidad de la intersección , al igual que en el apartado anterior, se calcula basándonos en el hecho de que son independientes.

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) - P(A1 \cap A2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

---

**40. En una zona determinada, el negocio de telefonía móvil se reparte entre dos únicas compañías (A y B) y dos únicas marcas de teléfonos (M1 y M2). Sean los sucesos y sus probabilidades:**

**A= Un usuario utiliza la compañía A, P(A)=0'6**

**B= Un usuario utiliza la compañía B, P(B)=0'4**

**M1= Un usuario dispone de un teléfono de la marca M1, P(M1)=0'7**

**M2= Un usuario dispone de un teléfono de la marca M2**

**C= Se produce un corte de un teléfono durante una llamada**

**Se sabe que la probabilidad de que un usuario cualquiera disponga de teléfonos de ambas marcas es de 0'3. La probabilidad de un corte en la comunicación es de 0'1 para los usuarios de la compañía A, 0'15 para la compañía B y de 0'05 para los de la marca M1.**

**a) Forman los sucesos A y B una partición del espacio muestral formado por el conjunto de usuarios?**

**b) Calcular P(C)**

**c) Cual es la probabilidad de que un usuario disponga única y exclusivamente de un teléfono de la marca M2?**

**d) Se sabe que a un usuario se le ha cortado la comunicación, ¿Cuál es la probabilidad de que disponga de un teléfono de la marca M1?**

**e) Se sabe que un usuario no tiene un teléfono de la marca M1 ¿Cuál es la probabilidad de que se le corte la comunicación?**

---

**SOLUCIÓN:**

El enunciado nos da las siguientes probabilidades:

$P(M1 \cap M2) = 0'3$ , $P(C / A) = 0'1$ , $P(C / B) = 0'15$ , $P(C / M1) = 0'05$

a) Si ya que su unión es el suceso seguro y son incompatibles.

b) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(C) = P(C/A) \cdot P(A) + P(C/B) \cdot P(B) =$$

$$P(C) = 0'1 \cdot 0'6 + 0'15 \cdot 0'4$$

$$P(C) = 0'12$$

c) $P(M2 \cap \overline{M1}) = P(\overline{M1}/M2) \cdot P(M2) = (1 - P(M1/M2)) \cdot P(M2)$
$= P(M2) - P(M2 \cap M1)$

$$P(M2 \cap M1) = 1 = P(M1) + P(M2) - P(M1 \cap M2)$$

$P(M1 \cup M2) = P(M1) + P(M2) - 1$, sustituyendo arriba

$$P(M2 \cap \overline{M1}) = P(M2) + 1 - P(M1) - P(M2) = 1 - P(M1) = 0'3$$

d) $P(M1/C) = \dfrac{P(C/M1) \cdot P(M1)}{P(C)} = \dfrac{0'05 \cdot 0'7}{0'12} = 0'2917$

e) $P(C/\overline{M1}) = \dfrac{P(\overline{M1}/C) \cdot P(C)}{P(\overline{M1})} = \dfrac{(1 - 0'29) \cdot 0'12}{0'3} = 0'2833$

---

**41. Supongamos que la probabilidad de que un jurado, seleccionado para un juicio de un caso criminal, llegue al veredicto correcto es del 95%. La policía estima que el 99% de los individuos que llegan a un juicio son realmente culpables. Calcular la probabilidad de que un individuo sea realmente inocente dado que el jurado ha dictaminado que es inocente.**

---

**SOLUCIÓN:**

Siendo $A_1$ =”inocente” $\qquad P(A_1) = 1 - P(A_2) = 1 - 0'99 = 0'1$

$A_2$ = ”culpable” $\qquad P(A_2) = 0'99$

B =”veredicto jurado correcto”

Como el jurado determina que es inocente:

$$P(B/A_1) = 0'95$$

$$P(B/A_2) = 1 - P(B/A_1) = 1 - 0'95 = 0'05$$

Así aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum P(B/A_K)\cdot P(A_K)}$$

obtenemos:

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1)\cdot P(A_1)}{P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2)}$$

$$P(A_1/B) = \frac{0'95\cdot 0'01}{0'95\cdot 0'01 + 0'05\cdot 0'99} = \frac{0'0095}{0'059}$$

$P(A_1/B) = 0'1610$, probabilidad de que sea realmente inocente.

---

**42. Una fábrica utiliza tres máquinas X, Y, Z para producir cierto artículos. Supongamos que:**

**(1) La máquina X produce el 50% de todos los artículos, de los cuales el 3% son defectuosos.**

**(2) La máquina Y produce el 30% de todos los artículos, de los cuales el 4% son defectuosos.**

**(3) La máquina Z produce el 20% de todos los artículos, de los cuales el 5% son defectuosos.**

**Encuentre la probabilidad *p* de que el artículo seleccionado aleatoriamente sea defectuoso.**

---

**<u>SOLUCIÓN:</u>**

P(D)= P(X)P(D|X)+P(Y)P(D|Y)+P(Z)P(D|Z)=
(0.50)(0.03)+(0.30)(0.04)+(0.20)(0.05)=0.037=3.7%

Ahora suponga que se ha encontrado un artículo defectuoso entre la producción. Encuentre la probabilidad de que este provenga de cada una de las máquinas, es decir, encuentre P(X|D), P(Y|D), P(Z|D).

Por la fórmula de Bayes:

P(D)=P(X)P(D|X)+P(Y)P(D|Y)+P(Z)P(D|Z)= 0.037

P(X|D)=$\dfrac{P(X)P(D \mid X)}{P(D)} = \dfrac{(0.50)(0.03)}{0.037} = \dfrac{15}{37} = 40.5\%$

P(Y|D)=$\dfrac{P(Y)P(D \mid Y)}{P(D)} = \dfrac{(0.30)(0.04)}{0.037} = \dfrac{12}{37} = 32.5\%$

P(Z|D)=$\dfrac{P(Z)P(D \mid Z)}{P(D)} = \dfrac{(0.20)(0.05)}{0.037} = \dfrac{10}{37} = 27.0\%$

---

**43. Supongamos que un dormitorio estudiantil en una universidad está conformado por:**

**30% de estudiantes de primer año, de los cuales el 10% poseen un auto.**

**40% de estudiantes de segundo año, de los cuales el 20% poseen un auto.**

**20% de estudiantes de tercer año, de los cuales el 40% poseen un auto.**

**10% de estudiantes de cuarto año, de los cuales el 60% poseen un auto.**

**(a) Encuentre la probabilidad de que un estudiante en el dormitorio posea un auto.**

**(b) Si un estudiante posee un auto, encuentre la probabilidad de que el estudiante sea de tercer año.**

**Sea A, B, C, D el conjunto de estudiantes de primero, segundo, tercero y cuarto años y sea E el conjunto de estudiantes que poseen un auto.**

---

**SOLUCIÓN:**

(a) se busca P(E). Por la ley de probabilidad total:
P(E)=(0.30)(0.10)+(0.40)(0.20)+(0.20)(0.40)+(0.10)(0.60)=0.03+0.08+0.08+0.06=0.25=25%

(b) se busca P(C|E). Por la fórmula de Bayes:

P(C|E)=$\dfrac{P(C)P(E \mid C)}{P(E)} = \dfrac{(0.20)(0.40)}{0.25} = \dfrac{8}{25}$ =32%

**44. Una caja contiene 10 monedas, donde hay 5 monedas de dos caras, 3 monedas tienen dos sellos y 2 monedas son corrientes. Se selecciona una moneda al azar y se lanza.**

**(1) encuentre la probabilidad de que aparezca una cara**

**(2) se aparece una cara, encuentre la probabilidad de que la moneda sea corriente.**

**Sean X, Y, Z las monedas de dos caras respectivamente, las monedad de dos sellos y las monedas corrientes. Entonces P(X)=0.5, P(Y)=0.3, P(Z)=0.2. Observe que P(H|X)=1, es decir, una moneda de dos caras debe producir una cara. En forma similar P(H|Z)=0.5**

---

**SOLUCIÓN:**

(1) por la regla de probabilidad total se obtiene:

P(H)=(0.5)(1)+(0.3)(0)+(0.2)(0.5)=0.6

(2) por la regla de Bayes:

$$P(Z \mid H) = \frac{P(Z)P(H \mid Z)}{P(H)} = \frac{(0.2)(0.5)}{0.6} = \frac{1}{6} = 16.7\%$$

---

**45. Tenemos tres urnas con la composición:**

**U1 (1B, 2N, 3R)**

**U2 (2B, 3N, 4R)**

**U3 (4B, 7N, 5R)**

**Se elige una al azar y se toma una bola, se pide:**

**(1) Probabilidad de que sea roja**

**(2) Ha resultado ser blanca. Probabilidad de que proceda de la tercera urna.**

---

**SOLUCIÓN:**

1) Ω consta de 6 + 9 + 16 = 31 bolas y Ω = U1 + U2 + U3

P(Ui )= $\frac{1}{3}$ i= 1, 2, 3

$$P(R) == \frac{3}{6} * \frac{1}{3} + \frac{4}{9} * \frac{1}{3} + \frac{5}{16} * \frac{1}{3} = 0.419$$

2)

$$P(U3/B) = \frac{P(B/U_3) * P(U_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B/U_i) * P(U_i)} = \frac{\frac{4}{16} * \frac{1}{3}}{\frac{1}{6} * \frac{1}{3} + \frac{2}{9} * \frac{1}{3} + \frac{4}{16} * \frac{1}{3}} = 0{,}3913$$

---

**46. Un jugador o es tramposo o no lo es. El conjunto de los jugadores se descomponen en: Ω = T + J, siendo T el jugador tramposo**

---

**<u>SOLUCIÓN:</u>**

La probabilidad de que un jugador tramposo saque un 6 es 1, si no es tramposo la probabilidad es 1/6, entonces si P(T)= 0.5

$$P(T / <<6>>) = \frac{P(<<6>>/T) * P(T)}{P(<<6>>/T) * P(T) + P(<<6>>/J) * P(J)} =$$

$$= \frac{1 * (0.5)}{1 * (0.5) + \frac{1}{6}(0.5)} = \frac{6}{7}$$

Si P(T)= p donde p es un parámetro 0<p<1, entonces:

$$P(T/<<6>>) = \frac{1 * p}{1 * p + \frac{1}{6} * (1 - p)} = \frac{6p}{1 + 5p}$$

---

**47. el número de fallos de un sistema deja de funcionar con probabilidad 1-(1/2)n. Calcular la probabilidad de que el sistema haya tenido n fallos si ha dejado de funcionar.**

---

**<u>SOLUCIÓN:</u>**

Sea D= el sistema deja de funcionar

Aplicando el teorema de Bayes en el caso de infinitas causas.

P(n/D)=

$$\frac{P(D/n)*P(n)}{\sum_{i=0}^{\infty}P(D/i)*P(i)} = \frac{(1-(1/2)^{n}*e^{-1}*1/(n!)}{e^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}(1-(1/2)^{i})/(i!)} = \frac{(1-(1/2)^{n})/n!}{e-1,649} = (1-(1/2)^{n})/(1.0694)*n!$$

---

**48. En una celda hay tres presos, A, B, C, y uno de ellos ha de ser condenado; la probabilidad de ser condenado es 1/3 para cada preso. El preso A sabe que uno de los presos B y C no será condenado. No obstante lo pregunta al guardián. Calcular la probabilidad de que A sea condenado si el guardián responde: <<B no será condenado>> en los casos:**

**(1) Que A haya preguntado ¿será B condenado?**

**(2) Que A haya preguntado ¿quién de B o C no será condenado?**

---

**<u>SOLUCIÓN:</u>**

Aunque la respuesta del guardián es la misma, la solución es distinta. Indiquemos por A el suceso( el preso A es condenado). Análogamente para B y C.

(1) Es la probabilidad de A condicionada al contrario de B

P(A/B) = $$\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)}{P(\overline{B})} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

La probabilidad de A ha aumentado de un tercio a un medio.

(2) si A es el condenado y B con probabilidad 1 si C es condenado. Aplicando el teorema de Bayes, indicando por R la respuesta del guardián.

P(A/R) =

$$\frac{P(R/A)*P(A)}{P(R/A)*P(A)+p(R/B)*P(B)+P(R/C)*P(C)} = \frac{\frac{1}{2}*\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}*\frac{1}{3}+0*\frac{1}{3}+1*\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

La información del guardián no altera la probabilidad de que A sea condenado.

**49. Si en un examen de respuesta múltiple con K respuestas posibles un alumno conoce la respuesta correcta con probabilidad p y marca una respuesta al azar con probabilidad 1-p, determinar la probabilidad de que haya contestado al azar si su respuesta es correcta.**

**SOLUCIÓN:**

Examen con K respuestas posibles.

El alumno conoce la respuesta correcta con probabilidad p

Contesta una respuesta al azar con probabilidad 1-p

A=contesta al azar

B= contesta correctamente

$$P(A/C)=\frac{P(C/A)\cdot P(A)}{P(C)}=\frac{1/K\cdot(1-p)}{(1-p+K\cdot p)/K}=\frac{1/K\cdot(1-p)}{1-p+K\cdot p}$$

P(C)= P(C/A) ·P(A)+P (C/C) ·P(C)=1/K· (1-p)+1·p= (1-p+K·p)/K será la probabilidad de

haya contestado al azar si su

**50. En una universidad en la que solo hay estudiantes de arquitectura, Ciencias y Letras, terminan la carrera el 5% de arquitectura, el 10% de Ciencias y el 20% de Letras. Se sabe que el 20% estudian arquitectura, el 30% Ciencias y el 50% Letras. Eligiendo un estudiante al azar, se pide:**

**a) Probabilidad de que sea de arquitectura y que haya terminado la carrera.**

**b) Nos dice que ha terminado la carrera. Probabilidad de que sea de Arquitectura.**

**SOLUCIÓN:**

Omega ={estudiantes de la universidad}= A + C + L siendo:

P(A)=0,2        P(C)=0,3     P(L)=0,5

a) Sea T es suceso “el estudiante ha terminado la carrera”. Entonces:

P(T.A)=P(A).P(T/A)= (0,2).(0.05)= 0,01

b) P(A/T)= {P(A).P(T/A)}/ {P(A).P(T/A) + P(C).P(T/C) + P(L).P(T/L)}= {(0,2).(0.05)}/{ (0,2).(0.05) + (0,3).(0,1) + (0,5).(0,2)}= 1/14

---

**51. Las probabilidades de acertar en el blanco de 3 submarinos que estan de maniobras son, respectivamente ½, ½, ⅓. Cada submarino tira un torpedo a una diana movil:**

**a. ¿ Cual es la probabilidad de que exactamente uno de ellos acierte el blanco?**
**b. ¿ Cual es la probabilidad de que al observar la diana tenga algun impacto?**

---

**SOLUCIÓN:**

a)

A: Dar a la diana 1 $\overline{A}$ : No dar a la diana 1

B: Dar a la diana 2 $\overline{B}$ : No dar a la diana 2

C: Dar a la diana 3 $\overline{C}$ : No dar a la diana 3

P(exactamente uno de ellos da a la diana)= $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) =$

Intersección de sucesos independientes y unión de sucesos incompatibles

$$P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C) =$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

b)

0 dianas 1 diana 2 dianas 3 dianas

$$P(0 Dianas) = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) =$$

Interseccion de sucesos independientes

Aplicamos regla de Laplace → $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

P( Al menos 1 diana)= 1- P(0 dianas)= $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

---

**52. Tiramos 4 dados ¿Cuál es la probabilidad de que obtenemos al menos un cinco?**

---

**SOLUCIÓN:**

0 cincos 1 cinco 2cincos 3 cincos 4 cincos

P(0 cincos)= 1- P(0 cincos)

P(0 cincos)=

Intersección de sucesos independientes

$$P(1^o \overline{5}) \cdot P(2^o \overline{5}) \cdot P(3^o \overline{5}) \cdot P(4^o \overline{5})$$

**A**plicamos Laplace→ $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{625}{1296}$

P(Al menos un cinco)= $1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$

---

**53. Se extraen 4 cartas de una baraja de 40 cartas ¿Cuál es la probabilidad de que si la primera fue un as, la segunda y la tercera también lo sean?**

---

**SOLUCIÓN:**

S≡ Suceso sacer un as

Sobre la cuarta carta no nos pregunta nada

P(2º as ∩ 3º as)

$P\left[(2^o\, as/1^o\, as)\cap(3^o\, as/(1^o\, as\cap 2^o\, as)\right]$

Aplicamos Laplace

$\frac{3}{39}\cdot\frac{2}{38}=\frac{1}{247}$

$P(2^o\, as\cap 3^o\, as)=\frac{1}{247}$

---

**54. Un estuche contiene 17 lapices de color rojo y 8 azules**

a) **Si elegimos al azar ¿Cuál es la probabilidad de que sea rojo?**
b) **Si extraemos dos ¿ Cual es la probabilidad de que ambos sean azules?**
c) **Si elegimos dos, calcular la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo rojo**

---

**SOLUCIÓN:**

Resolución a)

P(rojo)= Aplicamos Laplace → $\frac{17}{25}$

Resolución b)

P(2 azules)=

Intersección de sucesos dependientes

$P(1^o\, azul)\cdot P(2^o\, azul/1^o\, azul)=$

Aplicamos Laplace → $\frac{8}{25}\cdot\frac{7}{24}=\frac{7}{75}$

Resolucion c)

$P(1^{o}\, azul \cap 2^{o}\, rojo)$

Intersección de sucesos dependientes

$P(1^{o}\, azul) \cdot P(2^{o}\, rojo / 1^{o}\, azul)$

Aplicamos Laplace → $\dfrac{8}{25} \cdot \dfrac{17}{24} = \dfrac{17}{75}$

---

**55. Un temario de oposiciones consta de 80 temas del que el opositor se sabe perfectamente 50; el resto ni se los ha mirado. Si una prueba consiste en sacar 3 temas al azar y escoger uno de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que se lo sepa?**

---

**<u>SOLUCIÓN:</u>**

S ≡ Suceso saber un tema

Numero de temas que se puede saber al sacar los tres:

0 sabe 1 sabe 2 sabe 3 sabe

Con saberse al menos uno, ya verifica lo que se pide

P(al menos uno sabe)= 1- P(0 sabe)

$P(0 sabe) = P(1^{o}\, nosabe \cap 2^{o}\, nosabe \cap 3^{o}\, nosabe) =$

Intersección de sucesos independientes

$P(1^{o}\, nosabe) \cdot P(2^{o}\, nosabe / 1^{o}\, nosabe) \cdot P\left[3^{o}\, nosabe (1^{o}\, nosabe 2^{o}\, nosabe)\right]$

Aplicamos Laplace → $\dfrac{30}{80} \cdot \dfrac{29}{79} \cdot \dfrac{28}{78} = \dfrac{203}{4108}$

P(al menos sabe 1)= $1 - \dfrac{203}{4108} = \dfrac{3905}{4108}$