Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Теплоенергетичний факультет

Кафедра автоматизації проектування енергетичних процесів і систем

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА**

**з дисципліни «Теорія ймовірностей»**

**тема «Математична статистика»**

**Варіант № 16**

**Виконав:**

**Студент 2 курсу, групи ТІ-92**

**Черноусов Денис**

**Дата здачі 24.12.2020**

Київ – 2020

**Первинна обробка статистичного матеріалу**

***Завдання 1.*** Представлено вибірку за 100 днів кількості сигналів, що поступають на АТС протягом дня. На підставі наведених вибіркових даних:

1. згрупувати дані, побудувати дискретний та інтервальний варіаційні ряди з частотами та відносними частотами;
2. побудувати полігон частот та відносних частот для дискретного статистичного розподілу;
3. побудувати гістограму частот та відносних частот, полігон частот та відносних частот для інтервального статистичного розподілу;
4. знайти емпіричну функцію розподілу для обох статистичних розподілів і побудувати їх графіки;
5. знайти числові характеристики для обох розподілів: моду  (аналітично і графічно), медіану  (аналітично і графічно), вибіркове середнє , дисперсію , середнє квадратичне відхилення , коефіцієнт варіації , виправлену дисперсію  та виправлене середнє квадратичне відхилення .

**Варіант 16**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 156 | 146 | 165 | 159 | 136 | 147 | 181 | 130 | 148 | 160 |
| 160 | 146 | 169 | 176 | 145 | 166 | 147 | 162 | 186 | 140 |
| 151 | 171 | 142 | 152 | 162 | 170 | 180 | 153 | 158 | 189 |
| 150 | 173 | 159 | 195 | 151 | 168 | 184 | 144 | 163 | 154 |
| 135 | 145 | 155 | 126 | 158 | 147 | 174 | 184 | 150 | 160 |
| 141 | 164 | 148 | 170 | 175 | 149 | 163 | 168 | 150 | 187 |
| 159 | 154 | 182 | 172 | 146 | 143 | 164 | 173 | 148 | 190 |
| 132 | 161 | 149 | 166 | 150 | 163 | 138 | 179 | 164 | 151 |
| 151 | 161 | 137 | 166 | 153 | 128 | 163 | 180 | 164 | 154 |
| 152 | 139 | 156 | 153 | 168 | 157 | 177 | 154 | 133 | 158 |

**Розв’язання**

1. згрупувати дані, побудувати дискретний та інтервальний варіаційні ряди з частотами та відносними частотами;

Об’єм вибірки n = 100 ;

Кількість інтервалів ;

Розмах вибірки 195 – 126 = 69;

Довжина інтервалів

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Дискретний варіаційний ряд | | | |
| Номер | Xi | ni | ωi |
| 1 | 126 | 1 | 0,01 |
| 2 | 128 | 1 | 0,01 |
| 3 | 130 | 1 | 0,01 |
| 4 | 132 | 1 | 0,01 |
| 5 | 133 | 1 | 0,01 |
| 6 | 135 | 1 | 0,01 |
| 7 | 136 | 1 | 0,01 |
| 8 | 137 | 1 | 0,01 |
| 9 | 138 | 1 | 0,01 |
| 10 | 139 | 1 | 0,01 |
| 11 | 140 | 1 | 0,01 |
| 12 | 141 | 1 | 0,01 |
| 13 | 142 | 1 | 0,01 |
| 14 | 143 | 1 | 0,01 |
| 15 | 144 | 1 | 0,01 |
| 16 | 145 | 2 | 0,02 |
| 18 | 146 | 3 | 0,03 |
| 21 | 147 | 3 | 0,03 |
| 24 | 148 | 3 | 0,03 |
| 27 | 149 | 2 | 0,02 |
| 29 | 150 | 4 | 0,04 |
| 33 | 151 | 4 | 0,04 |
| 37 | 152 | 2 | 0,02 |
| 39 | 153 | 3 | 0,03 |
| 42 | 154 | 4 | 0,04 |
| 46 | 155 | 1 | 0,01 |
| 47 | 156 | 2 | 0,02 |
| 49 | 157 | 1 | 0,01 |
| 52 | 158 | 3 | 0,03 |
| 55 | 159 | 3 | 0,03 |
| 56 | 160 | 3 | 0,03 |
| 59 | 161 | 2 | 0,02 |
| 61 | 162 | 2 | 0,02 |
| 63 | 163 | 4 | 0,04 |
| 67 | 164 | 4 | 0,04 |
| 71 | 165 | 1 | 0,01 |
| 72 | 166 | 3 | 0,03 |
| 75 | 168 | 3 | 0,03 |
| 78 | 169 | 1 | 0,01 |
| 79 | 170 | 2 | 0,02 |
| 81 | 171 | 1 | 0,01 |
| 82 | 172 | 1 | 0,01 |
| 83 | 173 | 2 | 0,02 |
| 85 | 174 | 1 | 0,01 |
| 86 | 175 | 1 | 0,01 |
| 87 | 176 | 1 | 0,01 |
| 88 | 177 | 1 | 0,01 |
| 89 | 179 | 1 | 0,01 |
| 90 | 180 | 2 | 0,02 |
| 92 | 181 | 1 | 0,01 |
| 93 | 182 | 1 | 0,01 |
| 94 | 184 | 2 | 0,02 |
| 96 | 186 | 1 | 0,01 |
| 97 | 187 | 1 | 0,01 |
| 98 | 189 | 1 | 0,01 |
| 99 | 190 | 1 | 0,01 |
| 100 | 195 | 1 | 0,01 |

\*Кольори відповідають інтервалам.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Інтервальний варіаційний ряд | | | | | |
| x\*i | [xi ; xi+1) | n\*i | ω\*i | n\*i/h | ω\*i/h |
| 129,45 | [126;132,9) | 4 | 0,04 | 0,57971014 | 0,0057971 |
| 136,35 | [132,9;139,8) | 6 | 0,06 | 0,86956522 | 0,00869565 |
| 143,25 | [139,8;146,7) | 10 | 0,1 | 1,44927536 | 0,01449275 |
| 150,15 | [146,7;153,6) | 21 | 0,21 | 3,04347826 | 0,03043478 |
| 157,05 | [153,6;160,5) | 17 | 0,17 | 2,46376812 | 0,02463768 |
| 163,95 | [160,5;167,4) | 16 | 0,16 | 2,31884058 | 0,02318841 |
| 170,85 | [167,4;174,3) | 11 | 0,11 | 1,5942029 | 0,01594203 |
| 177,75 | [174,3;181,2) | 7 | 0,07 | 1,01449275 | 0,01014493 |
| 184,65 | [181,2;188,1) | 5 | 0,05 | 0,72463768 | 0,00724638 |
| 191,55 | [188,1;195] | 3 | 0,03 | 0,43478261 | 0,00434783 |

1. побудувати полігон частот та відносних частот для дискретного статистичного розподілу;

29-а варіанта

Ме = 158

Мо = 150 ; 151 ; 154 ; 163 ; 164

1. побудувати гістограму частот та відносних частот, полігон частот та відносних частот для інтервального статистичного розподілу;
2. знайти емпіричну функцію розподілу для обох статистичних розподілів і побудувати їх графіки;

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Емпірична функція розподілу для дискретного статистичного розподілу** | | | | |
|
|  | F\*(x) | Умова | | |
| F\*(x) = | 0 |  | x <= | 126 |
| 0,01 | 126 | < x <= | 128 |
| 0,02 | 128 | < x <= | 130 |
| 0,03 | 130 | < x <= | 132 |
| 0,04 | 132 | < x <= | 133 |
| 0,05 | 133 | < x <= | 135 |
| 0,06 | 135 | < x <= | 136 |
| 0,07 | 136 | < x <= | 137 |
| 0,08 | 137 | < x <= | 138 |
| 0,09 | 138 | < x <= | 139 |
| 0,1 | 139 | < x <= | 140 |
| 0,11 | 140 | < x <= | 141 |
| 0,12 | 141 | < x <= | 142 |
| 0,13 | 142 | < x <= | 143 |
| 0,14 | 143 | < x <= | 144 |
| 0,15 | 144 | < x <= | 145 |
| 0,17 | 145 | < x <= | 146 |
| 0,2 | 146 | < x <= | 147 |
| 0,23 | 147 | < x <= | 148 |
| 0,26 | 148 | < x <= | 149 |
| 0,28 | 149 | < x <= | 150 |
| 0,32 | 150 | < x <= | 151 |
| 0,36 | 151 | < x <= | 152 |
| 0,38 | 152 | < x <= | 153 |
| 0,41 | 153 | < x <= | 154 |
| 0,45 | 154 | < x <= | 155 |
| 0,46 | 155 | < x <= | 156 |
| 0,48 | 156 | < x <= | 157 |
| 0,49 | 157 | < x <= | 158 |
| 0,52 | 158 | < x <= | 159 |
| 0,55 | 159 | < x <= | 160 |
| 0,58 | 160 | < x <= | 161 |
| 0,6 | 161 | < x <= | 162 |
| 0,62 | 162 | < x <= | 163 |
| 0,66 | 163 | < x <= | 164 |
| 0,7 | 164 | < x <= | 165 |
| 0,71 | 165 | < x <= | 166 |
| 0,74 | 166 | < x <= | 168 |
| 0,77 | 168 | < x <= | 169 |
| 0,78 | 169 | < x <= | 170 |
| 0,8 | 170 | < x <= | 171 |
| 0,81 | 171 | < x <= | 172 |
| 0,82 | 172 | < x <= | 173 |
| 0,84 | 173 | < x <= | 174 |
| 0,85 | 174 | < x <= | 175 |
| 0,86 | 175 | < x <= | 176 |
| 0,87 | 176 | < x <= | 177 |
| 0,88 | 177 | < x <= | 179 |
| 0,89 | 179 | < x <= | 180 |
| 0,91 | 180 | < x <= | 181 |
| 0,92 | 181 | < x <= | 182 |
| 0,93 | 182 | < x <= | 184 |
| 0,95 | 184 | < x <= | 186 |
| 0,96 | 186 | < x <= | 187 |
| 0,97 | 187 | < x <= | 189 |
| 0,98 | 189 | < x <= | 190 |
| 0,99 | 190 | < x <= | 195 |
| 1 | 195 | < x <= | 0 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Емпірична функція розподілу для інтервального статистичного розподілу** | | | |
|
|  | F\*(x) | Умова | |
| F\*(x) = | 0 | x <= | 126 |
| 0,04 | x = | 132,9 |
| 0,1 | х = | 139,8 |
| 0,2 | х = | 146,7 |
| 0,41 | х = | 153,6 |
| 0,58 | х = | 160,5 |
| 0,74 | х = | 167,4 |
| 0,85 | х = | 174,3 |
| 0,92 | х = | 181,2 |
| 0,97 | х = | 188,1 |
| 1 | х >= | 195 |

1. знайти числові характеристики для обох розподілів: моду  (аналітично і графічно), медіану  (аналітично і графічно), вибіркове середнє , дисперсію , середнє квадратичне відхилення , коефіцієнт варіації , виправлену дисперсію  та виправлене середнє квадратичне відхилення .

|  |  |
| --- | --- |
| **Дані, отриманні з дискретного розподілу** | |
|
| Мода Мо | 150;151;154;163;164 |
|
| Медіана Ме | 158 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Дані, отриманні з інтервального розподілу** | | |
|
| **Аргументи для рахування Моди** | **Значення** | **Мода** |
| Xi-1 - початок модального інтервалу | 146,7 | 151,76 |
| h - довжина часткового інтервалу | 6,9 |
| nМо - частота модального інтервалу | 21 |
| nМо-1-частота домодального інтервалу | 10 |
| nМо+1-частота післямодального інтервалу | 17 |
| **Аргументи для рахування Медіани** | **Значення** | **Медіана** |
| xi-1 - початок інтервалу | 153,6 | 157,259412 |
| F\*(xi-1) - відносна частота попереднього інтервалу | 0,41 |
| F\*(xi) -відносна частота наступного інтервалу | 0,58 |
| h - довжина часткового інтервалу | 6,9 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Числові характеристики для дискретного розподілу** | |
|
| Вибіркова середня величина | 158,31 |
| Дисперсія | 219,2939 |
| Середнє квадратичне відхилення | 14,80858 |
| Коефіцієнт варіації % | 9,354163 |
| Виправлена дисперсія | 221,509 |
| Виправлене середнє квадратичне відхилення | 14,88318 |
|

|  |  |
| --- | --- |
| **Числові характеристики для інтервального розподілу** | |
|
| Вибіркова середня величина | 158,361 |
| Дисперсія | 215,859 |
| Середнє квадратичне відхилення | 14,6921 |
| Коефіцієнт варіації , % | 9,27763 |
| Виправлена дисперсія | 218,039 |
| Виправлене середнє квадратичне відхилення | 14,7662 |
|

**Статистичні оцінки параметрів розподілу**

***Завдання 2.*** За заданим інтервальним статистичним розподілом ***завдання 1*** побудувати з надійністю  довірчий інтервал для математичного сподівання випадкової величини  — кількості сигналів.

**Розв’язання**

|  |  |
| --- | --- |
| Вибіркова середня величина xв | 158,361 |
| Об'єм вибірки n | 100 |
| Середнє квадратичне відхилення | 14,6921 |
| Надійність y | 0,99 |
| Функція Лапласа | 0,495 |
| Розв’язок рівняння t | 2,575 |
| Нижня межа довірчого інтервалу | 154,5777843 |
| Верхня межа довірчого інтервалу | 162,1442158 |

Отже, з імовірністю, не менше 0,99 , можна стверджувати, що математичне сподівання кількості сигналів, що поступають на АТС міститься в інтервалі (154,58; 162,14).

**Перевірка статистичних гіпотез**

***Завдання 3.*** За заданим інтервальним статистичним розподілом випадкової величини *Х* — кількість сигналів ***завдання 1*** при рівні значущості  перевірити правильність гіпотези про нормальний закон розподілу ознаки *Х*.

**Розв’язання**

Висуваємо нульову гіпотезу H0 – ознака Х генеральної сукупності має нормальний закон розподілу ймовірностей

Перевіримо цю гіпотезу за критерієм узгодженості Пірсона. За необхідною умовою застосування критерію Пірсона n\*i >= 5, об`єднаємо перші два й останні два інтервали.

|  |  |
| --- | --- |
| [xi ; xi+1) | ni |
| [126;139,8) | 10 |
| [139,8;146,7) | 10 |
| [146,7;153,6) | 21 |
| [153,6;160,5) | 17 |
| [160,5;167,4) | 16 |
| [167,4;174,3) | 11 |
| [174,3;181,2) | 7 |
| [181,2;195] | 8 |

Вибіркова середня величина xв = 158,361

Об'єм вибірки n = 100

Середнє квадратичне відхилення σв = 14,6921

Кількість інтервалів k = 8 , об’єм вибірки n = 100 .

Нормально розподілена величина визначена на інтервалі ( -∞; +∞ ). То поставимо відповідні крайні інтеграли.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Інтервали | | ni |  |  |  |  |  |
| xi | xi+1 |
| -∞ | 139,8 | 10 | -∞ | -1,263331995 | -0,5 | -0,396765054 | 10,32349463 |
| 139,8 | 146,7 | 10 | -1,26333199 | -0,793691848 | -0,39676505 | -0,286312576 | 11,04524773 |
| 146,7 | 153,6 | 21 | -0,79369185 | -0,324051701 | -0,28631258 | -0,127050554 | 15,92620226 |
| 153,6 | 160,5 | 17 | -0,3240517 | 0,145588445 | -0,12705055 | 0,057876855 | 18,49274089 |
| 160,5 | 167,4 | 16 | 0,145588445 | 0,615228592 | 0,057876855 | 0,230798116 | 17,2921261 |
| 167,4 | 174,3 | 11 | 0,615228592 | 1,084868739 | 0,230798116 | 0,361010102 | 13,02119863 |
| 174,3 | 181,2 | 7 | 1,084868739 | 1,554508886 | 0,361010102 | 0,439968461 | 7,895835828 |
| 181,2 | +∞ | 8 | 1,554508886 | ∞ | 0,439968461 | 0,5 | 6,003153939 |
| Сума | | 100 |  |  |  |  | 100 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Інтервали | | ni |  |  |  |  |
| xi | xi+1 |
| -∞ | 139,8 | 10 | 10,32349463 | -0,323494628 | 0,104648774 | 0,010136952 |
| 139,8 | 146,7 | 10 | 11,04524773 | -1,04524773 | 1,092542818 | 0,098915194 |
| 146,7 | 153,6 | 21 | 15,92620226 | 5,073797744 | 25,74342354 | 1,616419478 |
| 153,6 | 160,5 | 17 | 18,49274089 | -1,492740887 | 2,228275357 | 0,120494597 |
| 160,5 | 167,4 | 16 | 17,2921261 | -1,292126105 | 1,66958987 | 0,09655203 |
| 167,4 | 174,3 | 11 | 13,02119863 | -2,021198626 | 4,085243885 | 0,313737929 |
| 174,3 | 181,2 | 7 | 7,895835828 | -0,895835828 | 0,80252183 | 0,101638617 |
| 181,2 | +∞ | 8 | 6,003153939 | 1,996846061 | 3,987394189 | 0,664216548 |
| Сума | | 100 | 100 |  |  | 3,022111344 |

Критична область правостороння : .

**Висновок** : оскільки не належить проміжку , то немає підстав для відхилення нульової гіпотези H0 про нормальний закон розподілу випадкової величини X.

**Елементи кореляційного і регресійного аналізу**

***Завдання 4***. Задані результати незалежних спостережень над системою випадкових величин (,). Завдання:

1) обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції  ;

2) побудувати кореляційне поле залежності ознаки  від ;

3) припускаючи, що залежність між  та  близька до лінійної, знайти вибіркові рівняння лінійної регресії  на  та  на 

4) нанести на кореляційне поле прямі регресії  на  та  на .

**Варіант 16.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1,18 | 1,12 | 1,1 | 0,98 | 0,92 | 0,9 | 0,89 | 0,508 |
|  | 10,5 | 11 | 11,5 | 12 | 12,5 | 13 | 13,4 | 14 |

**Розв’язання**

1) обчислити вибірковий коефіцієнт кореляції  ;

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Розрахункова таблиця | | | | | |
| № з/п | xi | yi | x2i | y2i | xi \* yi |
| 1 | 10,5 | 1,18 | 110,25 | 1,3924 | 12,39 |
| 2 | 11 | 1,12 | 121 | 1,2544 | 12,32 |
| 3 | 11,5 | 1,1 | 132,25 | 1,21 | 12,65 |
| 4 | 12 | 0,98 | 144 | 0,9604 | 11,76 |
| 5 | 12,5 | 0,92 | 156,25 | 0,8464 | 11,5 |
| 6 | 13 | 0,9 | 169 | 0,81 | 11,7 |
| 7 | 13,4 | 0,89 | 179,56 | 0,7921 | 11,926 |
| 8 | 14 | 0,508 | 196 | 0,25806 | 7,112 |
| **Сума** | **97,9** | **7,598** | **1208,31** | **7,52376** | **91,358** |

Обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції за формулою

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Вибірковий коефіцієнт кореляції rxy | | |
| ∑ xi | 97,9 | -0,913433167 |
| ∑ yi | 7,598 |
| ∑ x2i | 1208,31 |
| ∑ y2i | 7,52376 |
| ∑ xi \* yi | 91,358 |
| обсяг n | 8 |

, то між X та Y існує сильна залежність.

2) побудувати кореляційне поле залежності ознаки  від ;

З малюнка можна помітити, що зі збільшенням значень ознаки X = xi залежна змінна Y = yi має тенденцію до зменшення.

3) припускаючи, що залежність між  та  близька до лінійної, знайти вибіркові рівняння лінійної регресії  на  та  на .

Припустимо, що залежність між  та є лінійною, то функція регресії  на  матиме вигляд.

Визначимо вибіркові параметри та за формулами

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Дані | | Вибірковий параметр **a0** | Вибірковий параметр **a1** |
| ∑ xi | 97,9 | 2,885234312 | -0,158160107 |
| ∑ yi | 7,598 |
| ∑ x2i | 1208,31 |
| ∑ y2i | 7,523764 |
| ∑ xi yi | 91,358 |
| обсяг n | 8 |

Таким чином, вибіркове рівняння прямої регресії Y на X має вигляд

Функція регресії X на Y має вигляд

Визначимо вибіркові параметри та за формулами

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Дані | | Вибірковий параметр **b0** | Вибірковий параметр **b1** |
| ∑ xi | 97,9 | 17,24782508 | -5,27541467 |
| ∑ yi | 7,598 |
| ∑ x2i | 1208,31 |
| ∑ y2i | 7,523764 |
| ∑ xi yi | 91,358 |
| обсяг n | 8 |

Таким чином, вибіркове рівняння прямої регресії X на Y має вигляд

4) нанести на кореляційне поле прямі регресії  на  та  на .

Для перевірки правильності співвідношень використаємо формулу

Тож, кутові коефіцієнти правильні.