Se puede interpretar físicamente la tercera derivada en el caso donde la función es la función posición $s = s(t)$ de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta. Como $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función posición es la derivada de la función aceleración y se le denomina **jerk** (tirón):

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Así, el jerk, j, es la razón de cambio de la aceleración. Es un nombre apropiado porque un gran jerk significa un cambio repentino de aceleración, que ocasiona un movimiento repentino en un vehículo.

El proceso de derivación puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se denota mediante $f^{(4)}$. En general, la n-ésima derivada de f se denota mediante $f^{(n)}$ y se obtiene derivando n veces a f. Si $y = f(x)$, se escribe

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 se encuentra que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y así, es una línea recta con pendiente 6. Ya que la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, se tiene

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Por tanto f''' es una función constante y su gráfica es una recta horizontal. Por tanto, para todos los valores de x,

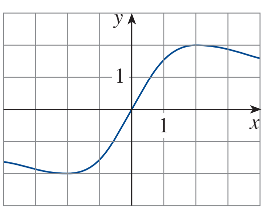
$$f^{(4)}(x) = 0$$

Se ha visto que una aplicación de la segunda y tercera derivada sucede al analizar el movimiento de objetos empleando aceleración y jerk. Se investigará otra aplicación de la segunda derivada en la sección 4.3, donde se muestra cómo el conocer f'' da información acerca de la forma de la gráfica de f. En el capítulo 11 se verá cómo la segunda derivada y las derivadas superiores nos permiten representar funciones como sumas de series infinitas.

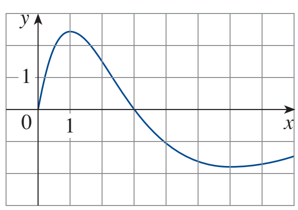
2.8 EJERCICIOS

1–2 Utilice la gráfica que se proporciona para calcular el valor de cada derivada. Luego trace la gráfica de f'.

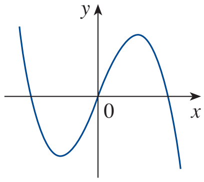
1. (a) $f'(-3)$ (b) $f'(-2)$ (c) $f'(-1)$ (d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$ (f) $f'(2)$ (g) $f'(3)$

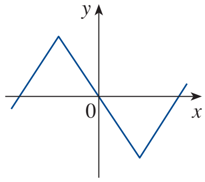


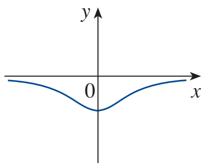
2. (a) $f'(0)$ (b) $f'(1)$ (c) $f'(2)$ (d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$ (f) $f'(5)$ (g) $f'(6)$ (h) $f'(7)$

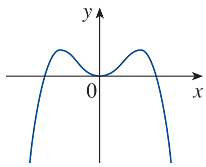


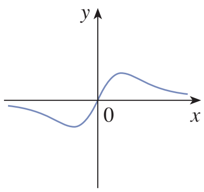
3. Relacione la gráfica de cada función dada en las figuras (a)-(d) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I-IV. Dé las razones para sus selecciones.

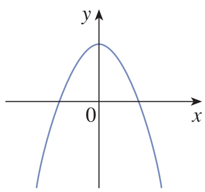
(a)


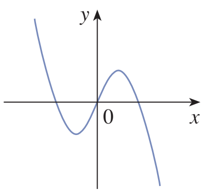
(b)


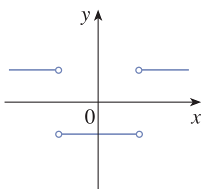
(c)


(d)


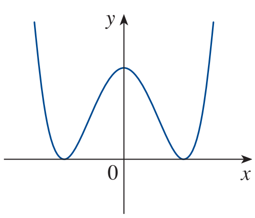
I


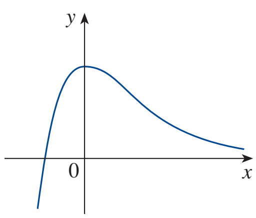
II


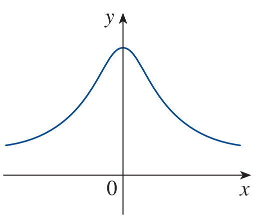
III


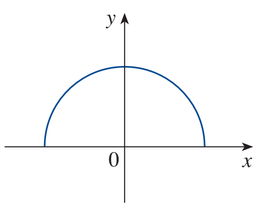
IV


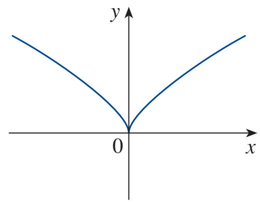
4–11 Trace o copie la gráfica de la función dada f. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego utilice el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de esta.

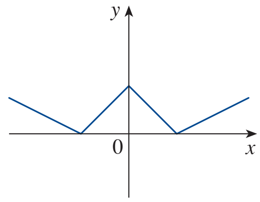
4.


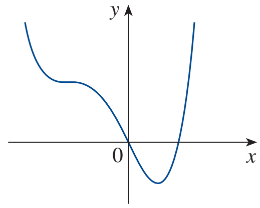
5.


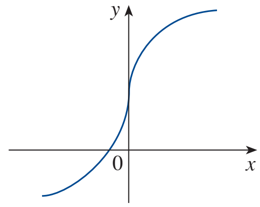
6.


7.


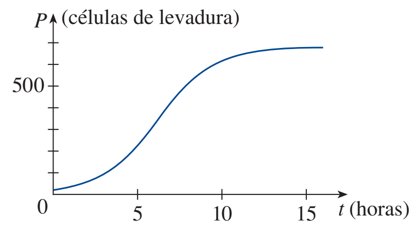
8.


9.


10.


11.


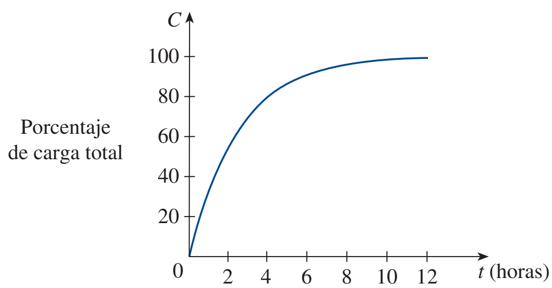
12. Se muestra la gráfica de la función población $P(t)$ para células de levadura en un cultivo de laboratorio. Utilice el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de la derivada $P'(t)$. ¿Qué indica la gráfica de P' acerca de la población de levadura?



13. Una batería recargable se conecta con un cargador. La gráfica muestra $C(t)$, el porcentaje de capacidad que la batería alcanza como una función del tiempo t transcurrido (en horas).

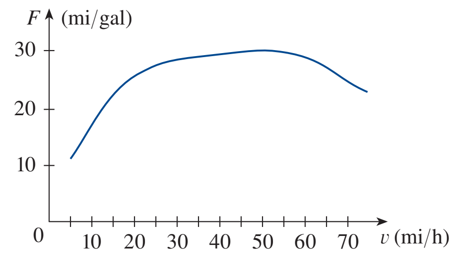
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $C'(t)$?

(b) Trace la gráfica de $C'(t)$. ¿Qué le indica la gráfica?

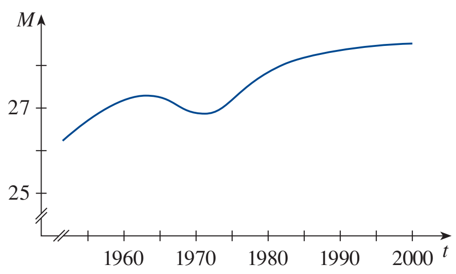


14. La gráfica (del Departamento de Energía de EE. UU.) muestra cómo afecta la rapidez de manejo el consumo de combustible. La economía F se mide en millas por galón, y la rapidez v se mide en millas por hora.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $F'(v)$?
(b) Trace la gráfica de la derivada de $F'(v)$.
(c) ¿A qué rapidez debería manejar si quiere ahorrar combustible?



15. La gráfica ilustra cómo ha variado la edad promedio en que contraían matrimonio por primera vez los hombres japoneses en la segunda mitad del siglo xx. Trace la gráfica de la función derivada $M'(t)$. ¿Durante cuáles años fue negativa la derivada?



16–18 Trace una gráfica cuidadosa de f y debajo de esta la gráfica de f' de la misma manera que en los ejercicios 4-11. ¿Puede intuir una fórmula para $f(x)$ a partir de su gráfica?

16. $f(x) = \operatorname{sen} x$ **17.** $f(x) = e^x$ **18.** $f(x) = \ln x$

---

19. Sea $f(x) = x^2$.

(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$ y $f'(2)$ usando un dispositivo de graficación para hacer un acercamiento sobre la gráfica de f.
(b) Utilice la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$ y $f'(-2)$.
(c) Con los resultados de los incisos (a) y (b), proponga una fórmula para $f'(x)$.
(d) Aplique la definición de derivada para probar que su propuesta del inciso (c) es correcta.

20. Sea $f(x) = x^3$.

(a) Calcule los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$ usando un dispositivo de graficación para hacer un acercamiento de la gráfica de f.
(b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, $f'(-2)$ y $f'(-3)$.
(c) Utilice los valores de los incisos (a) y (b) para trazar la gráfica de f'.
(d) Infiera una fórmula para $f'(x)$.
(e) Aplique la definición de derivada para demostrar que su propuesta del inciso (d) es correcta.

21–31 Encuentre la derivada de cada una de las funciones siguientes usando la definición de derivada. Indique los dominios de la función y de su derivada.

21. $f(x) = 3x - 8$ **22.** $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 2.5t^2 + 6t$ **24.** $f(x) = 4 + 8x - 5x^2$

25. $f(x) = x^3 - 3x + 5$ **26.** $f(x) = x + \sqrt{x}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$ **28.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$ **30.** $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

---

32. (a) Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ comenzando con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ aplicando las transformaciones de la sección 1.3.
(b) Use la gráfica del inciso (a) para trazar la gráfica de f'.
(c) Aplique la definición de derivada para encontrar $f'(x)$. ¿Cuáles son los dominios de f y de f'?
(d) Utilice un dispositivo de graficación para trazar la grafica de f' y compárela con su trazo del inciso (b).

33. (a) Si $f(x) = x^4 + 2x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

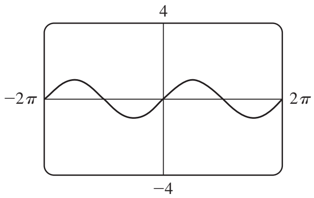
34. (a) Si $f(x) = x + 1/x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

35. La tasa de desempleo $U(t)$ varía con el tiempo. La tabla da el porcentaje de desempleo en la fuerza laboral australiana medida a medio año de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8.1	2000	6.2
1996	8.0	2001	6.9
1997	8.2	2002	6.5
1998	7.9	2003	6.2
1999	6.7	2004	5.6

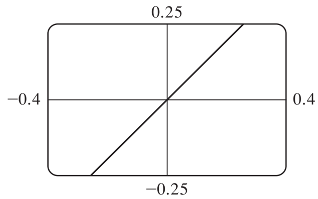
(a) ¿Cuál es el significado de $U'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores estimados para $U'(t)$.

61. (a)



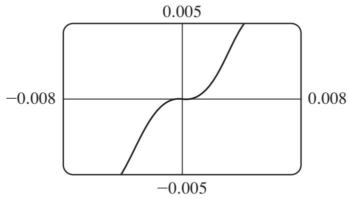
La pendiente parece ser de 1.

(b)



Sí

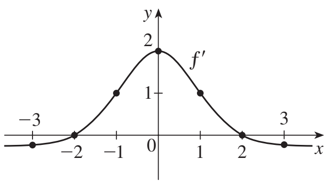
(c)



Sí; 0

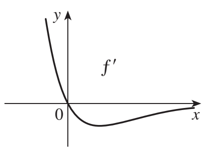
EJERCICIOS 2.8 ■ PÁGINA 160

1. (a) −0.2 (b) 0 (c) 1 (d) 2
(e) 1 (f) 0 (g) −0.2

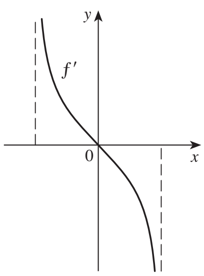


3. (a) II (b) IV (c) I (d) III

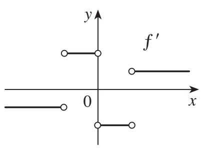
5.



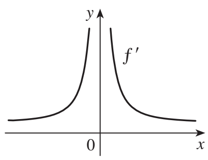
7.



9.

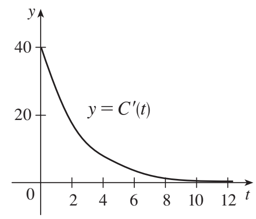


11.



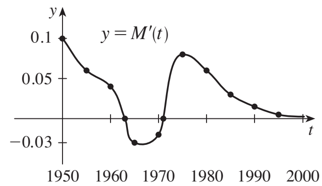
13. (a) La razón de cambio instantánea del porcentaje de plena capacidad con respecto al tiempo transcurrido en horas

(b)



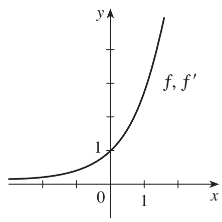
La razón de cambio del porcentaje de plena capacidad es decreciente y se aproxima a 0.

15.



1963 a 1971

17.



$f'(x) = e^x$

19. (a) 0, 1, 2, 4 (b) −1, −2, −4 (c) $f'(x) = 2x$

21. $f'(x) = 3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **23.** $f'(t) = 5t + 6$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

25. $f'(x) = 3x^2 - 3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

27. $g'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}$, $(-\infty, 9]$, $(-\infty, 9)$

29. $G'(t) = \dfrac{-7}{(3+t)^2}$, $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$, $(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

31. $f'(x) = 4x^3$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ **33.** (a) $f'(x) = 4x^3 + 2$

35. (a) La razón a la que cambia la tasa de desempleo, en porcentaje de desempleados al año

(b)

t	$U'(t)$	t	$U'(t)$
1995	−0.10	2000	0.10
1996	0.05	2001	0.15
1997	−0.05	2002	−0.35
1998	−0.75	2003	−0.45
1999	−0.85	2004	−0.60

37.

t	14	21	28	35	42	49
$H'(t)$	$\frac{13}{7}$	$\frac{23}{14}$	$\frac{9}{7}$	1	$\frac{11}{14}$	$\frac{5}{7}$