70. (a) Al trazar la gráfica de $y = e^{-x/10}$ y $y = 0.1$ en una pantalla común, descubra cuánto tiene que aumentar x de modo que $e^{-x/10} < 0.1$.
(b) ¿Puede resolver el inciso (a) sin un dispositivo de graficación?

71. Utilice una gráfica para determinar un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1.5 \right| < 0.05$$

72. Para el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - 3x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -3$$

ilustre la definición 7 mediante la determinación de valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.05$.

73. Para el límite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 3x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 3$$

ilustre la definición 8 mediante la determinación de valores de N que correspondan a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.05$.

74. Para el límite

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x \ln x} = \infty$$

ilustre la definición 9 mediante la determinación de un valor de N que corresponda a $M = 100$.

75. (a) ¿Qué tan grande se tiene que hacer x para que $1/x^2 < 0.0001$?
(b) Tomando $r = 2$ en el teorema 5, se tiene el enunciado

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demuéstrelo directamente utilizando la definición 7.

76. (a) ¿Qué tan grande se debe tomar x de manera que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?
(b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ en el teorema 5, se tiene el enunciado

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demuéstrelo directamente utilizando la definición 7.

77. Utilice la definición 8 para demostrar que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

78. Demuestre, utilizando la definición 9, que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$.

79. Utilice la definición 9 para demostrar que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$.

80. Formule una definición precisa de

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Luego utilice su definición para demostrar que

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

81. (a) Demuestre que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(1/t)$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^-} f(1/t)$$

si estos límites existen.
(b) Utilice el inciso (a) y el ejercicio 65 para encontrar

$$\lim_{x \to 0^+} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

2.7 Derivadas y razones de cambio

El problema de encontrar la recta tangente a una curva y el problema de encontrar la velocidad de un objeto implican encontrar el mismo tipo de límite, como se vio en la sección 2.1. Este tipo especial de límite se denomina *derivada* y se puede interpretar como una razón de cambio en las ciencias naturales o sociales y en ingeniería.

Tangentes

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y uno quiere encontrar la recta tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la recta secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Luego, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende a un número m, entonces se define la *tangente* t como la recta que pasa por P con pendiente m.

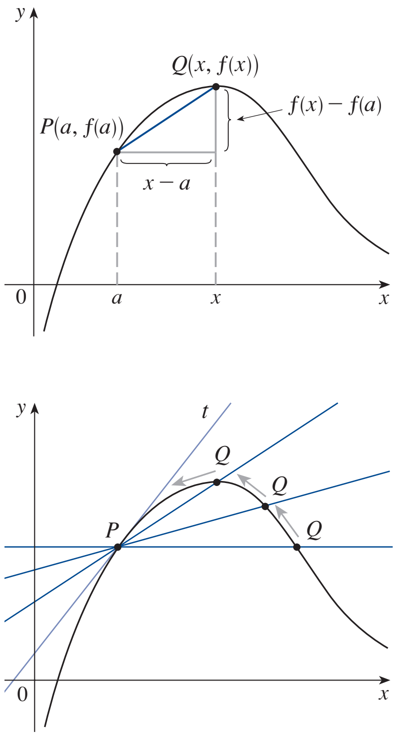


FIGURA 1

(Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a P. Véase la figura 1.)

1 Definición La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

En nuestro primer ejemplo, se confirma la suposición que se hizo en el ejemplo 2.1.1.

EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P(1,1)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Forma punto-pendiente para una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Con la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se encuentra que la ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

■

TEC Visual 2.7 muestra una animación de la figura 2.

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como **la pendiente de la curva** en el punto. La idea es que, si uno se acerca lo suficiente al punto, la curva parece una línea recta. En la figura 2 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$ del ejemplo 1. Cuanto más se acerque uno, tanto más la parábola se parece a una recta. En otras palabras, la curva casi se vuelve indistinguible de su recta tangente.

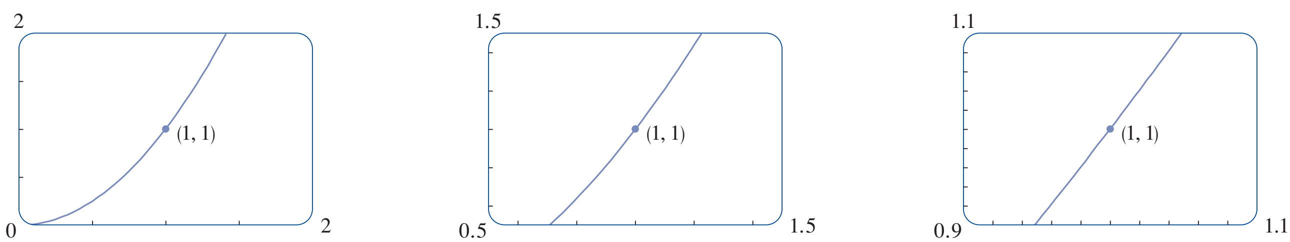


FIGURA 2 Acercamiento hacia el punto (1, 1) de la parábola $y = x^2$

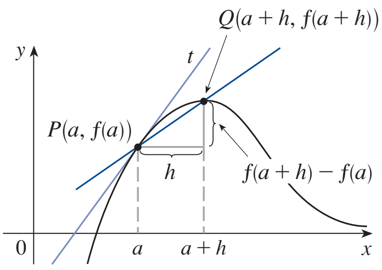


FIGURA 3

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar. Si $h = x - a$, en este caso $x = a + h$, entonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

(Véase la figura 3, donde se ilustra lo que pasa cuando $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.)

Observe que conforme x se aproxima a a, h se acerca a 0 (puesto que $h = x - a$) y por ello la expresión de la pendiente de la recta tangente, en la definición 1, se convierte en

2
$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$, en el punto (3, 1).

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Entonces, de acuerdo con la ecuación 2, la pendiente de la tangente en (3, 1) es

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3 + h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3 + h)}{3 + h}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3 + h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3 + h} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Por tanto una ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

que se simplifica a
$$x + 3y - 6 = 0$$

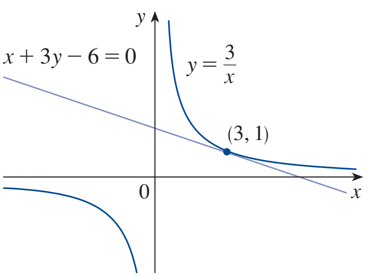


FIGURA 4

En la figura 4 se muestra la hipérbola y su tangente. ■

Velocidades

En la sección 2.1 se investigó el movimiento de una pelota que se dejó caer desde la Torre CN, y se definió su velocidad como el límite del valor de las velocidades promedio sobre períodos de tiempo cada vez más cortos.

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia dirigida) del objeto respecto al origen, en el tiempo t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función de posición** del objeto. En el intervalo de tiempo $t = a$ a $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. (Véase la figura 5.)

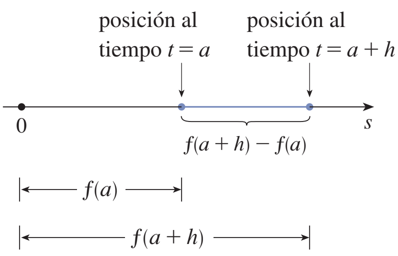
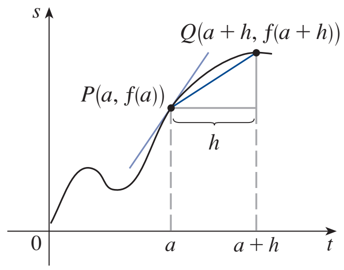


FIGURA 5



$m_{PQ} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

velocidad promedio

FIGURA 6

La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a - h) - f(a)}{h}$$

que es lo mismo que la pendiente de la recta secante PQ en la figura 6.

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre intervalos de tiempo $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la pelota que cae, se definió la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

3
$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la recta tangente en P (compare las ecuaciones 2 y 3).

Ahora que sabe calcular límites, considere nuevamente el problema de la pelota que cae.

EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, a 450 m sobre el nivel del suelo.
(a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?
(b) ¿Con qué rapidez cae cuando choca contra el suelo?

Recuerde, de la sección 2.1, que la distancia (en metros) que recorre la pelota cayendo después de t segundos es $4.9t^2$.

SOLUCIÓN Se necesita encontrar la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota golpea el suelo, de tal manera que es conveniente determinar la velocidad en un tiempo general t. Usando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, se tiene

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(t + h)^2 - 4.9t^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4.9(t^2 + 2th + h^2 - t^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(2th + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4.9h(2t + h)}{h} = \lim_{h \to 0} 4.9(2t + h) = 9.8t \end{aligned}$$

(a) La velocidad después de 5 segundos es $v(5) = (9.8)(5) = 49$ m/s.

(b) Puesto que la plataforma de observación está a 450 m sobre el nivel del suelo, la pelota chocará contra el suelo en el instante t, cuando $s(t) = 450$; es decir,

$$4.9t^2 = 450$$

Esto da

$$t^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

Por tanto, la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo es

$$v\left(\sqrt{\frac{450}{4.9}}\right) = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$ ■

Derivadas

Se ha visto que para determinar la pendiente de una recta tangente (ecuación 2) o la velocidad de un objeto (ecuación 3) surge la misma clase de límite. De hecho, límites de la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

surgen cuando se calcula una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, tal como la velocidad de reacción en química o un costo marginal en economía. Ya que esta clase de límite se presenta muy a menudo, se le da un nombre y una notación especial.

$f'(a)$ se lee "f prima de a".

4 Definición La **derivada de una función *f* en un número *a*,** denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Si se escribe $x = a + h$, entonces $h = x - a$ y h tiende a 0 si y solo si x tiende a a. Por consiguiente, una manera equivalente de expresar la definición de la derivada, como se vio en la búsqueda de rectas tangentes, es

5
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

EJEMPLO 4

Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a.

SOLUCIÓN De la definición 4 se tiene

Las definiciones 4 y 5 son equivalentes, así que se puede usar cualquiera de los dos para calcular la derivada. En la práctica, la definición 4 conduce a menudo a cálculos más simples.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$ ■

Se define la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la recta que pasa por P y tiene pendiente m, dada por la ecuación 1 o 2. Ya que, por la definición 4, esta es la misma que la derivada $f'(a)$, se puede decir lo siguiente.

> La recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la recta que pasa por $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en a.

Si utiliza la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, se puede escribir la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

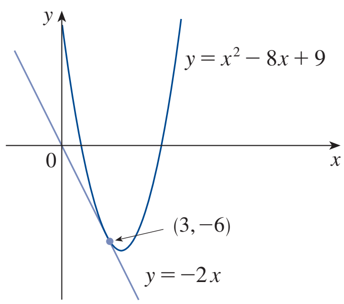


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 se sabe que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a es $f'(a) = 2a - 8$. Por tanto, la pendiente de la recta tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. Por lo que la ecuación de la recta tangente, que se muestra en la figura 7, es

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{o} \qquad y = -2x$$ ■

Razones de cambio

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y se expresa como $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces el cambio en x (también conocido como **incremento** de x) es

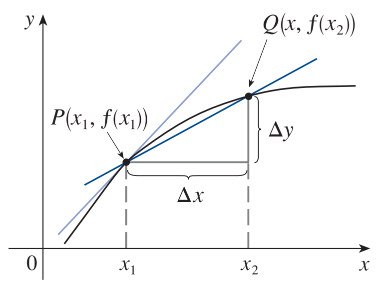
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



razón de cambio promedio $= m_{PQ}$

razón de cambio instantánea $=$ pendiente de la tangente en P

FIGURA 8

se llama **razón de cambio promedio de y con respecto a x** sobre el intervalo $[x_1, x_2]$, y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante PQ en la figura 8.

Por analogía con la velocidad, se considera la razón de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por tanto, haciendo que Δx tienda a 0. El límite de estas razones de cambio promedio se llama **razón de cambio (instantánea) de y con respecto a x** en x_1, que se interpreta (al igual que en el caso de la velocidad) como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

$$\boxed{6} \qquad \text{Razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Se reconoce este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Se sabe que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora se tiene una segunda interpretación:

> La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ respecto a x cuando $x = a$.

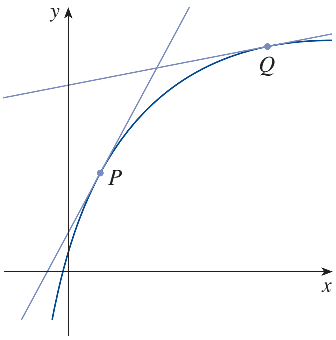


FIGURA 9
Los valores de y cambian rápidamente en P y lentamente en Q.

La conexión con la primera interpretación es que si dibuja la curva $y = f(x)$, entonces la razón de cambio instantánea es la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es grande (y, en consecuencia, la curva es pronunciada, como en el punto P de la figura 9), los valores de y cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana (como en el punto Q), y el valor de y cambia lentamente.

En particular, si $s = f(t)$ es la función posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, entonces $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento s respecto al tiempo t. En otras palabras, $f'(a)$ *es la velocidad de la partícula en el tiempo* $t = a$. La **rapidez** de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|f'(a)|$.

En el siguiente ejemplo se analiza el significado de la derivada de una función que está definida verbalmente.

EJEMPLO 6 Un fabricante produce un rollo de un tejido con ancho fijo. El costo de producir x metros de este tejido es de $C = f(x)$ dólares.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) En términos prácticos, ¿qué significa decir que $f'(1000) = 9$?
(c) ¿Cuál piensa que es más grande $f'(50)$ o $f'(500)$? ¿Qué hay respecto a $f'(5000)$?

SOLUCIÓN
(a) La derivada $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de C respecto a x, es decir, $f'(x)$ significa la razón de cambio del costo de producción respecto al número de metros producidos. (Los economistas llaman a esta rapidez de cambio *costo marginal*. Esta idea se analiza con más detalle en las secciones 3.7 y 4.7.)

Ya que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

las unidades de $f'(x)$ son las mismas que las unidades del cociente de diferencias $\Delta C/\Delta x$. Puesto que ΔC se mide en dólares y Δx en metros, las unidades para $f'(x)$ son dólares por cada metro.

(b) La afirmación $f'(1000) = 9$ significa que, después de fabricar 1000 metros de tejido, la cantidad a la cual se incrementa el costo de producción es de \$9/m. (Cuando $x = 1000$, C se incrementa 9 veces más rápido que x.)

Aquí se está suponiendo que la función costo se comporta bien; es decir, que $C(x)$ no oscila muy rápido cerca de $x = 1000$.

Dado que $\Delta x = 1$ es pequeño si se le compara con $x = 1000$, podría usarse la aproximación

$$f'(1000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

y se dice que el costo de fabricación del 1000-ésimo metro (o del 1001) es de casi 9 dólares.

(c) La razón a la cual se incrementa el costo de producción (por metro) probablemente es inferior cuando $x = 500$ que cuando $x = 50$ (el costo de fabricación del 500-ésimo metro es menor que el costo del 50-ésimo) debido a la escala económica. (El fabricante hace más eficiente el uso de los costos de producción fijos.) De manera que

$$f'(50) > f'(500)$$

Pero, conforme se expande la producción, el resultado de la operación a gran escala será ineficiente y posiblemente existan costos por horas extra de trabajo. En estos términos, es posible que la razón de aumento de los costos empezará con el tiempo a subir. De este modo, es posible que suceda que

$$f'(5000) > f'(500)$$ ■

En el ejemplo siguiente se calcula la razón de cambio de la deuda nacional respecto al tiempo. En este caso, la función no se define mediante una fórmula sino con una tabla de valores.

t	$D(t)$
1994	414.0
1996	469.5
1998	467.3
2000	456.4
2002	442.3

EJEMPLO 7 Sea $D(t)$ la deuda nacional canadiense en el tiempo t. La tabla en el margen da valores aproximados de esta función calculados a mitad de año, en miles de millones de dólares, para distintos valores entre 1994 y 2002. Interprete y calcule el valor de $D'(1998)$.

SOLUCIÓN La derivada $D'(1998)$ significa la razón de cambio de D respecto a t cuando $t = 1998$, es decir, la razón de incremento de la deuda nacional en 1998.

De acuerdo con la ecuación 5,

$$D'(1998) = \lim_{t \to 1998} \frac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$$

Por lo que calcule y tabule los valores del cociente de diferencias (la razón de cambio promedio) como sigue.

t	Intervalo de tiempo	Razón de cambio promedio $= \dfrac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$
1994	[1994, 1998]	13.3
1996	[1996, 1998]	−1.1
2000	[1998, 2000]	−5.5
2002	[1998, 2002]	−6.3

Una nota sobre unidades

Las unidades de la razón de cambio promedio $\Delta D/\Delta t$ son las unidades de ΔD divididas entre las unidades de Δt, o sea, miles de millones de dólares por cada año. La razón de cambio instantánea es el límite de la razón de cambio promedio, por lo que se mide en las mismas unidades: miles de millones de dólares por cada año.

A partir de esta tabla se ve que $D'(1998)$ se localiza en alguna parte entre -1.1 y -5.5 miles de millones de dólares por cada año. [En este caso, está haciendo la suposición razonable de que la deuda no fluctuó de manera errática entre 1998 y el 2000.] Se estima que la razón de incremento de la deuda nacional de Canadá en 1998 fue el promedio de estos dos números, específicamente

$$D'(1998) \approx -3.3 \text{ miles de millones de dólares por cada año.}$$

El signo menos significa que la deuda fue *disminuyendo* con el tiempo.

Otro método sería una gráfica de la función deuda y calcular la pendiente de la recta tangente cuando $t = 1998$. ■

En los ejemplos 3, 6 y 7 aparecen tres casos específicos de razones de cambio: la velocidad de un objeto es la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo; el costo marginal es la razón de cambio del costo de producción respecto al número de artículos producidos; la razón de cambio de la deuda respecto al tiempo es de interés en la economía. Existen otras razones de cambio: en física, la razón de cambio de trabajo respecto al tiempo se llama *potencia*. Los químicos que estudian una reacción química están interesados en la razón de cambio de la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (llamada *velocidad de reacción*). Un biólogo se interesa en la razón de cambio de la población de una colonia de bacterias respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería, e incluso, en las ciencias sociales. En la sección 3.7 se darán más ejemplos.

Todas estas razones de cambio son derivadas y por tanto se pueden interpretar como pendientes de rectas tangentes. Esto le da un significado adicional a la solución del problema de la tangente. Siempre que usted resuelve problemas en que intervienen rectas tangentes, no solo resuelve un problema de geometría. También se está resolviendo en forma implícita gran variedad de problemas de ciencias y de ingeniería, que implican razones de cambio.

2.7 EJERCICIOS

1. Una curva tiene la ecuación $y = f(x)$.
(a) Escriba una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$.
(b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

2. Trace la curva $y = e^x$ en los rectángulos de vista $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$ y $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$. ¿Qué nota acerca de la curva cuando hace un acercamiento hacia el punto $(0, 1)$?

3. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto $(1, 3)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso (a).
(c) Trace la gráfica de la parábola y la recta tangente. Como verificación de su trabajo, haga un acercamiento hacia el punto $(1, 3)$ hasta que la parábola y la recta tangente sean indistinguibles.

4. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto $(1, 0)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente del inciso (a).
(c) Trace la curva y la recta tangente en rectángulos de vista cada vez más pequeños centrados en $(1, 0)$ hasta que parezcan coincidir la curva y la recta.

5–8 Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto dado.

5. $y = 4x - 3x^2$, $(2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1$, $(2, 3)$

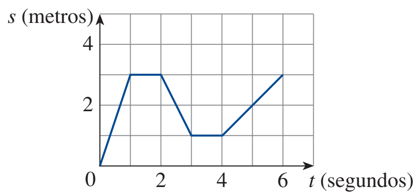
7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$, $(1, 1)$

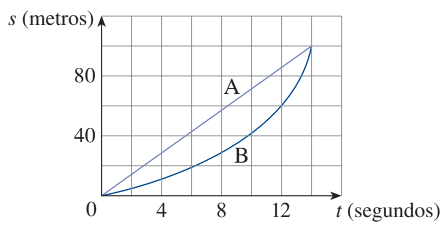
9. (a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x + 3$ en el punto donde $x = a$.
(b) Determine las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, 5)$ y $(2, 3)$.
(c) Trace la gráfica de la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

10. (a) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto donde $x = a$.
(b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(1, 1)$ y $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Trace la gráfica de la curva y ambas rectas tangentes en una misma pantalla.

11. (a) Una partícula empieza moviéndose a la derecha a lo largo de una recta horizontal; la gráfica de su función posición se muestra enseguida. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿Cuándo a la izquierda? ¿Cuándo permanece inmóvil?
(b) Trace una gráfica de la función velocidad.



12. Se muestran las gráficas de las funciones posición de dos corredoras, A y B, quienes compiten en los 100 m y terminan en empate.



(a) Describa y compare cómo desarrollaron la carrera las competidoras.
(b) ¿En qué momento hay la mayor distancia entre las competidoras?
(c) ¿En qué momento tienen la misma velocidad?

13. Si una pelota se lanza al aire verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) una vez que transcurren t segundos está dada por $y = 10t - 4.9t^2$. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

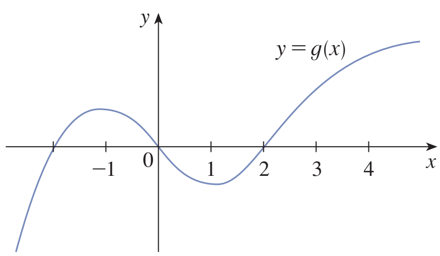
14. Si se lanza una roca verticalmente hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 10t - 1.86t^2$.
(a) Encuentre la velocidad de la roca después de un segundo.
(b) Encuentre la velocidad de la roca cuando $t = a$.
(c) ¿Cuándo caerá la roca a la superficie?
(d) ¿Con qué velocidad chocará la roca contra la superficie?

15. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 1/t^2$, donde t se mide en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula en los instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

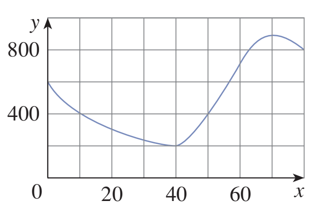
16. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por $s = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos.
(a) Encuentre la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo:
(i) [3, 4] (ii) [3.5, 4]
(iii) [4, 5] (iv) [4, 4.5]
(b) Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 4$.
(c) Trace la gráfica de s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedio en el inciso (a). Luego, dibuje la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea en el inciso (b).

17. Para la función g cuya gráfica está dada, reordene los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento.

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



18. Se muestra la gráfica de una función f.
(a) Encuentre la razón de cambio promedio de f en el intervalo [20, 60].
(b) Identifique un intervalo en el que la razón de cambio promedio de f es 0.
(c) ¿Qué intervalo da una mayor razón de cambio, [40, 60] o [40, 70]?
(d) Calcule $\dfrac{f(40) - f(10)}{40 - 10}$ ¿qué representa geométricamente este valor?



19. Para la gráfica de la función f del ejercicio 18:
(a) Calcule el valor $f'(50)$.
(b) ¿Es $f'(10) > f'(30)$?
(c) ¿Es $f'(60) > \dfrac{f(80) - f(40)}{80 - 40}$? Explique su respuesta.

20. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en $x = 5$ si $g(5) = -3$ y $g'(5) = 4$.

21. Si una ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto donde $a = 2$ es $y = 4x - 5$, encuentre $f(2)$ y $f'(2)$.

22. Si la recta tangente a $y = f(x)$ en (4, 3) pasa a través del punto (0, 2), encuentre $f(4)$ y $f'(4)$.

23. Trace la gráfica de una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.

24. Trace la gráfica de una función g para la cual $g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

25. Trace la gráfica de una función g que es continua en su dominio $(-5, 5)$ y donde $g(0) = 1$, $g'(0) = 1$, $g'(-2) = 0$, $\lim_{x\to-5^+} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to5^-} g(x) = 3$.

26. Trace la gráfica de una función f donde el dominio es $(-2, 2)$, $f'(0) = -2$, $\lim_{x\to2^-} f(x) = \infty$, f es continua en todos los números dentro de su dominio excepto en ±1, y f es impar.

27. Si $f(x) = 3x^2 - x^3$, encuentre $f'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - x^3$ en el punto (1, 2).

28. Si $g(x) = x^4 - 2$ encuentre $g'(1)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 2$ en el punto $(1, -1)$.

29. (a) Si $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encuentre $F'(2)$ y utilícela para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 5x/(1 + x^2)$ en el punto (2, 2).
(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

30. (a) Si $G(x) = 4x^2 - x^3$, encuentre $G'(a)$ y utilícela para encontrar las rectas tangentes a la curva $y = 4x^2 - x^3$ en los puntos (2, 8) y (3, 9).
(b) Ilustre el inciso (a) al trazar la gráfica de la curva y las rectas tangentes en la misma pantalla.

31–36 Encuentre $f'(a)$.

31. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

32. $f(t) = 2t^3 + t$

33. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

34. $f(x) = x^{-2}$

35. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

36. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

37–42 Cada uno de los límites siguientes representa la derivada de alguna función f en algún número a. Establezca una f y una a en cada caso.

37. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

38. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{e^{-2+h} - e^{-2}}{h}$

39. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^6 - 64}{x - 2}$

40. $\displaystyle\lim_{x\to 1/4} \frac{\frac{1}{x} - 4}{x - \frac{1}{4}}$

41. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

42. $\displaystyle\lim_{\theta\to \pi/6} \frac{\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}}{\theta - \pi/6}$

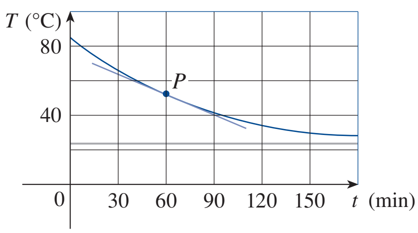
43–44 Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta con ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Encuentre la velocidad y la rapidez cuando $t = 4$.

43. $f(t) = 80t - 6t^2$

44. $f(t) = 10 + \dfrac{45}{t + 1}$

45. Una lata de gaseosa tibia se pone a enfriar en un refrigerador. Trace la gráfica de la temperatura de la gaseosa como función del tiempo. ¿La razón de cambio inicial de la temperatura es mayor o menor que la razón de cambio después de una hora?

46. Se saca un pavo asado del horno cuando su temperatura ha alcanzado 85 °C y se coloca sobre la mesa de un cuarto donde la temperatura es de 24 °C. En la gráfica se muestra cómo disminuye la temperatura del pavo y, finalmente, tiende a la temperatura del cuarto. Por medio de la medición de la pendiente de la recta tangente, calcule la razón de cambio de la temperatura después de una hora.



47. Investigadores midieron la concentración promedio de alcohol en la sangre $C(t)$ de ocho hombres comenzando después de una hora del consumo de 30 ml de etanol (correspondiente a dos bebidas alcohólicas).

t (horas)	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$C(t)$ (mg/mL)	0.33	0.24	0.18	0.12	0.07

(a) Encuentre la razón de cambio promedio de C con respecto a t para cada intervalo de tiempo:
(i) [1.0, 2.0] (ii) [1.5, 2.0]
(iii) [2.0, 2.5] (iv) [2.0, 3.0]
En cada caso, incluya las unidades.
(b) Calcule la razón de cambio instantánea en $t = 2$ e interprete su resultado. ¿Cuáles son las unidades?

Fuente: Adaptado de P. Wilkinson *et al.*, "Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State", *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics* 5 (1977): 207–224.

48. En la tabla se proporciona el número N de establecimientos de una popular cadena de cafeterías. (Se dan los números de establecimientos al 1 de octubre.)

Año	2004	2006	2008	2010	2012
N	8569	12,440	16,680	16,858	18,066

(a) Determine la tasa promedio de crecimiento
(i) de 2006 a 2008
(ii) de 2008 a 2010
En cada caso incluya las unidades. ¿Qué concluye?
(b) Calcule la razón de crecimiento instantánea en 2010 considerando el promedio de dos razones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?
(c) Calcule la razón de crecimiento instantánea en 2010 midiendo la pendiente de una recta tangente.

49. La tabla muestra el número de pasajeros P que llegaron a Irlanda por aire, en millones.

Año	2001	2003	2005	2007	2009
P	8.49	9.65	11.78	14.54	12.84

(a) Encuentre la tasa promedio de incremento de P
(i) de 2001 a 2005 (ii) de 2003 a 2005
(iii) de 2005 a 2007
En cada caso, incluya las unidades.
(b) Calcule la razón de crecimiento instantánea en 2005 tomando el promedio de dos razones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?

50. La tabla muestra valores de la carga viral $V(t)$ en el paciente 303 con VIH, medido en copias de ARN/mL, t días después de que se comenzó con el tratamiento ABT-538.

t	4	8	11	15	22
$V(t)$	53	18	9.4	5.2	3.6

(a) Encuentre la razón de cambio promedio de V con respecto a t en cada intervalo de tiempo:
(i) [4, 11] (ii) [8, 11]
(iii) [11, 15] (iv) [11, 22]
¿Cuáles son las unidades?
(b) Estime e interprete el valor de la derivada $V'(11)$.

Fuente: Adaptada de D. Ho *et al.*, "Rapid Turnover of Plasma Virions and CD4 Lymphocytes in HIV-1 Infection", *Nature* 373 (1995): 123–126.

51. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$.
(a) Encuentre la razón de cambio promedio de C con respecto a x, cuando cambia el nivel de producción:
(i) de $x = 100$ a $x = 105$
(ii) de $x = 100$ a $x = 101$

(b) Encuentre la razón de cambio instantáneo de C con respecto a x, cuando $x = 100$. (Esto se conoce como *costo marginal*. En la sección 3.7 se explica su significado.)

52. Si un tanque cilíndrico contiene 100 000 litros de agua que se pueden drenar por el fondo del depósito en 1 h, entonces la ley de Torricelli da el volumen V del agua que queda después de t minutos como

$$V(t)\ 5\ 100000\left(1 - \tfrac{1}{60}t\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 60$$

Encuentre la rapidez con que fluye el agua hacia afuera del tanque (la razón de cambio instantáneo de V con respecto a t) como función de t. ¿Cuáles son sus unidades? Para los instantes $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ y 60 min, encuentre el gasto y la cantidad de agua que queda en el tanque. Resuma sus hallazgos en una frase o dos. ¿En qué instante el gasto es máximo? ¿Cuándo es mínimo?

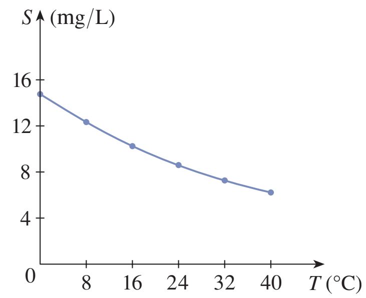
53. El costo de producir x kilogramos de oro a partir de una reciente mina de oro es $C = f(x)$ dólares.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿Que significa el enunciado $f'(50) = 36$?
(c) ¿Qué piensa usted: los valores de $f'(x)$ se incrementarán o disminuirán en corto plazo? ¿Y a largo plazo? Explique.

54. El número de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Suponga que existe una cantidad de espacio y nutrientes para las bacterias. ¿Cree que es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? Si se limita el suministro de nutrientes, ¿afectaría su conclusión? Explique.

55. Sea $H(t)$ el costo diario (en dólares) para acondicionar una oficina de un edificio cuando la temperatura exterior es de t grados Celsius.
(a) ¿Qué significa $H'(15)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿Esperaría que $H'(15)$ fuera positiva o negativa? Explique su respuesta.

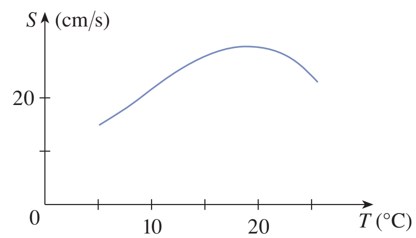
56. La cantidad (en kilogramos) de un café en grano gourmet que vende una empresa a un precio de p dólares por kilogramo es $Q = f(p)$.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(8)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿Es $f'(8)$ positivo o negativo? Explique su respuesta.

57. La cantidad de oxígeno que se puede disolver en agua depende de la temperatura de esta. (De esa manera la contaminación térmica influye en el contenido de oxígeno en el agua.) La gráfica muestra cómo varía la solubilidad S de oxígeno como una función de la temperatura del agua T.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Calcule e interprete el valor de $S'(16)$.



Fuente: C. Kupchella *et al.*, *Environmental Science: Living Within the System of Nature*, 2a. ed. (Boston: Allyn and Bacon, 1989).

58. La gráfica muestra la influencia de la temperatura T en la rapidez máxima sostenible de nado S del salmón Coho.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Calcule los valores de $S'(15)$ y $S'(25)$ e interprételos.



59–60 Determine si $f'(0)$ existe.

59. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

60. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

61. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{1000}\operatorname{sen}(1000x)$ en el rectángulo de vista $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-4, 4]$. ¿Qué pendiente parece que tiene la gráfica en el origen?
(b) Haga un acercamiento para la venta de vista $[-0.4, 0.4]$ por $[-0.25, 0.25]$ y calcule el valor de $f'(0)$. ¿Esto concuerda con la respuesta del inciso (a)?
(c) Ahora haga un acercamiento a la ventana de vista $[-0.008, 0.008]$ por $[-0.005, 0.005]$. ¿Desea revisar su cálculo para $f'(0)$?

PROYECTO DE REDACCIÓN PRIMEROS MÉTODOS PARA ENCONTRAR TANGENTES

La primera persona en formular explícitamente las ideas de límites y derivadas fue Sir Isaac Newton en la década de 1660. Pero Newton reconoció: "Si he visto más lejos que otros hombres, es porque he estado parado sobre los hombros de gigantes". Dos de esos gigantes fueron Pierre Fermat (1601-1665) y el maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estaba familiarizado con los métodos que estos hombres habían aplicado para encontrar rectas tangentes, y los métodos de ambos tuvieron que ver con la formulación final del cálculo a la que llegó Newton.

Las referencias siguientes contienen explicaciones de estos métodos. Lea una o varias de estas referencias y escriba un informe en que compare los métodos de Fermat o de Barrow con los métodos modernos. En particular, utilice el método de la sección 2.7 para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 2x$ en el punto $(1, 3)$ y muestre cómo habrían resuelto Fermat o Barrow el mismo problema. Aunque usted usó derivadas y ellos no, indique las semejanzas entre los dos métodos.

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics* (Nueva York: Wiley, 1989), pp. 389, 432.

2. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (Nueva York: Springer-Verlag, 1979), pp. 124, 132.

3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed. (Nueva York: Saunders, 1990), pp. 391, 395.

4. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972), pp. 344, 346.

2.8 La derivada como una función

En la sección anterior se consideró la derivada de una función f en un número fijo a:

$$\boxed{1} \qquad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Ahora se cambiará el punto de vista y hará que el número a varíe. Si en la ecuación 1 reemplaza a con una variable x, se obtiene

$$\boxed{2} \qquad \boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

Dado cualquier número x para el cual este límite existe, asigne a x el número $f'(x)$. De modo que considere a f' como una nueva función, llamada **derivada de f** y definida por medio de la ecuación 2. Se sabe que el valor de f' en x, $f'(x)$, se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

La función f' se conoce como derivada de f porque se ha "derivado" de f por medio de la operación de encontrar el límite en la ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

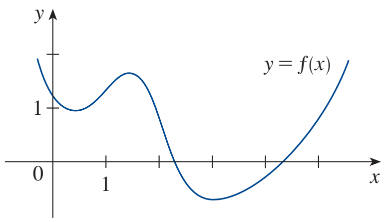


FIGURA 1

EJEMPLO 1 En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f. Utilícela para dibujar la gráfica de la derivada f'.

SOLUCIÓN Se puede calcular el valor de la derivada, en cualquier valor de x, trazando la tangente en el punto $(x, f(x))$ y estimando su pendiente. Por ejemplo, para $x = 5$, trace la recta tangente en P de la figura 2(a) y estime su pendiente alrededor de $\frac{3}{2}$, por tanto, $f'(5) \approx 1.5$. Esto nos permite situar el punto $P'(5, 1.5)$ en la gráfica de f' directamente debajo de P. (La pendiente de la gráfica de f se convierte en el valor de y sobre la gráfica de f'.) Si repite este procedimiento en varios puntos, se obtiene la gráfica que se muestra en la figura 2(b). Observe que las tangentes en A, B y C son horizontales, de modo que la derivada es 0 ahí, y la gráfica de f' cruza el eje x (donde $y = 0$) en los puntos A', B' y C', directamente debajo de A, B y C. Entre A y B las tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)$ es positiva ahí. (La gráfica está arriba del eje x.) Pero entre B y C las tangentes tienen pendiente negativa, de modo que $f'(x)$ ahí es negativa.

TEC Visual 2.8 presenta una animación de la figura 2 para diferentes funciones.

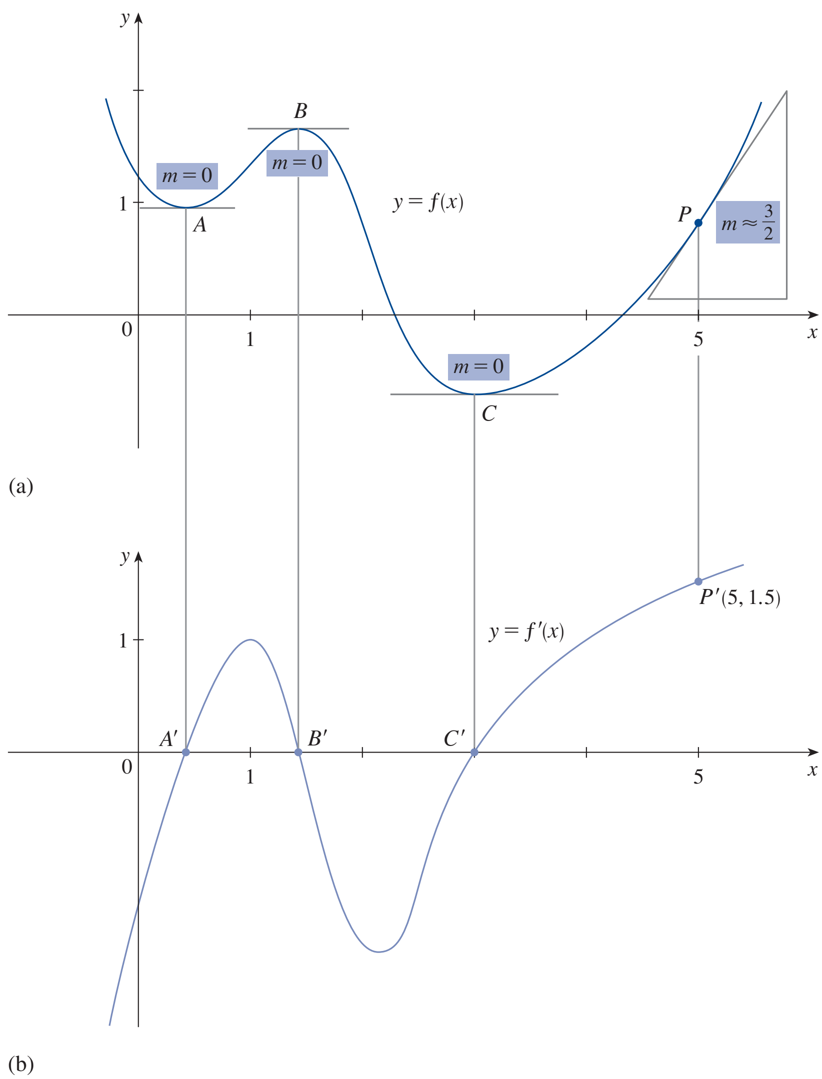


FIGURA 2

■

EJEMPLO 2

(a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.

(b) Ilustre esta fórmula comparando las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN

(a) Cuando se usa la ecuación 2 para calcular una derivada, hay que recordar que la variable es h y que x se considera temporalmente como una constante durante el cálculo del límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

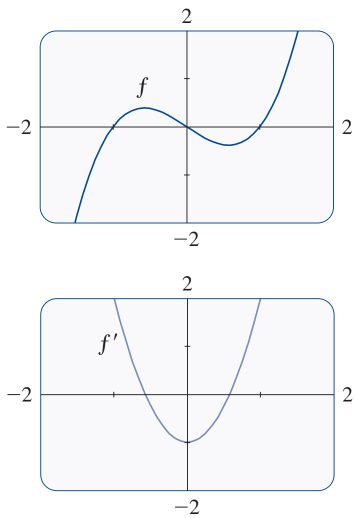


FIGURA 3

(b) Use un dispositivo de graficación para trazar las gráficas de f y f' de la figura 3. Observe que $f'(x) = 0$ cuando f tiene tangentes horizontales y que $f'(x)$ es positiva cuando las tangentes tienen pendientes positivas. De modo que estas gráficas sirven como comprobación de nuestro trabajo del inciso (a). ■

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la derivada de f. Indique el dominio de f'.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \qquad \text{(Racionalice el numerador)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Observe que $f'(x)$ existe si $x > 0$, de modo que el dominio de f' es $(0, \infty)$. Este es, ligeramente menor que el dominio de f, que es $[0, \infty)$. ■

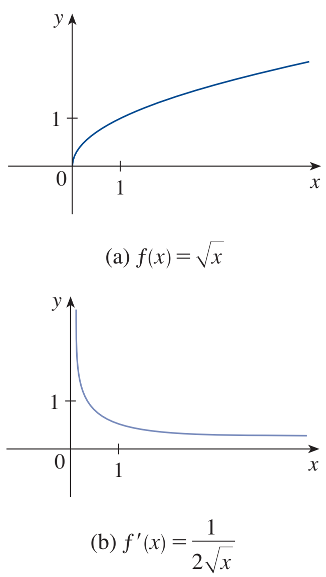


FIGURA 4

Compruebe que el resultado del ejemplo 3 es razonable observando las gráficas de f y f' en la figura 4. Cuando x está cerca de 0, $\sqrt{x}$ está cerca de 0, por tanto, $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ es muy grande, y esto corresponde a rectas tangentes muy pronunciadas cerca de (0, 0) de la figura 4(a), y a valores grandes de $f'(x)$ justo a la derecha de 0 en la figura 4(b). Cuando x es grande, $f'(x)$ es muy pequeña, y esto corresponde a rectas tangentes más aplanadas en el extremo derecho de la gráfica de f y a la asíntota horizontal de la gráfica de f'.

EJEMPLO 4 Encuentre f' si $f(x) = \dfrac{1 - x}{2 + x}$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1 - (x + h)}{2 + (x + h)} - \dfrac{1 - x}{2 + x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(1 - x - h)(2 + x) - (1 - x)(2 + x + h)}{h(2 + x + h)(2 + x)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(2 - x - 2h - x^2 - xh) - (2 - x + h - x^2 - xh)}{h(2 + x + h)(2 + x)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(2 + x + h)(2 + x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(2 + x + h)(2 + x)} = -\frac{3}{(2 + x)^2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}}{e} = \frac{ad - bc}{bd} \cdot \frac{1}{e}$$

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, en 1646, y estudió leyes, teología, filosofía y matemáticas en la universidad local, donde se graduó de bachiller a los 17 años. Después de lograr su doctorado en leyes a la edad de 20, ingresó al servicio diplomático y pasó la mayor parte de su vida viajando por las capitales de Europa, en misiones políticas. En particular, trabajó para conjurar una amenaza militar francesa contra Alemania e intentó reconciliar a las Iglesias católica y protestante.

Su estudio formal de las matemáticas no se inició sino hasta 1672, cuando se encontraba en una misión diplomática en París. Allí construyó una máquina para realizar cálculos y se encontró con científicos, como Huygens, quienes dirigieron su atención hacia los desarrollos más recientes en matemáticas y en ciencias. Leibniz se empeñó en desarrollar una lógica simbólica y un sistema de notación que simplificara el razonamiento lógico. En particular, su versión del cálculo, que publicó en 1684, estableció la notación y las reglas para encontrar derivadas que aún se usan en la actualidad.

Por desgracia, en la década de 1690 surgió una terrible disputa entre los seguidores de Newton y los de Leibniz acerca de quién había inventado el cálculo. Leibniz incluso fue acusado de plagio por los miembros de la Real Academia de Inglaterra. La verdad es que cada uno lo inventó por separado. Newton llegó primero a su versión del cálculo, pero —debido a su temor a la controversia—, no la publicó de inmediato. Por tanto, el informe de Leibniz del cálculo en 1684 fue el primero en publicarse.

Otras notaciones

Si usa la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, entonces algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se llaman **operadores de derivación** porque indican la operación de derivación, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx, introducido por Leibniz, no se debe considerar como una razón (por ahora); es sencillamente un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación útil y sugerente, en especial cuando se usa en la notación de incrementos. Con la ecuación 2.7.6, se puede reescribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si desea indicar el valor de una derivada dy/dx en la notación de Leibniz en un número específico a, use la notación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$. La barra vertical significa "evaluar en".

3 Definición Una función f es **derivable en a** si $f'(a)$ existe. Es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ o $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

EJEMPLO 5 ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y se puede elegir h suficientemente pequeño de modo que $x + h > 0$, de aquí que $|x + h| = x + h$. Por tanto, para $x > 0$ se tiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

y, por consiguiente, f es derivable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ se tiene que $|x| = -x$ y se puede elegir h suficientemente pequeña para que $x + h < 0$ y, así, $|x + h| = -(x + h)$. Por tanto, para $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0} (-1) = -1$$

por lo que f es derivable para cualquier $x < 0$.

Para $x = 0$ se debe investigar

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \qquad \text{(si existe)}$$

Calcule por separado los límites por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

y

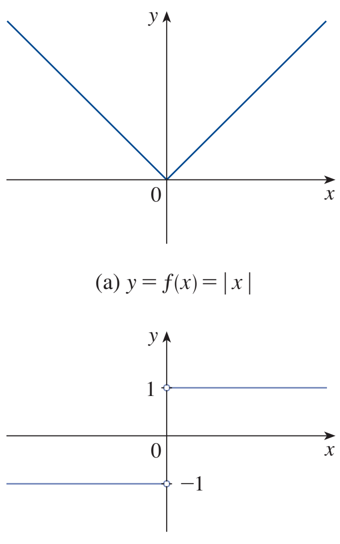
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que estos límites son diferentes, $f'(0)$ no existe. Así, f es derivable en toda x, excepto en $x = 0$.

Una fórmula para f' está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica se muestra en la figura 5(b). El hecho de que $f'(0)$ no exista se refleja geométricamente en el hecho de que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en (0, 0). [Véase la figura 5(a).] ■



(a) $y = f(x) = |x|$

(b) $y = f'(x)$

FIGURA 5

Tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables para una función. El teorema siguiente muestra cómo se relacionan estas propiedades.

> **4 Teorema** Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.

DEMOSTRACIÓN Para demostrar que f es continua en a, se debe demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Para esto empiece por probar que la diferencia $f(x) - f(a)$ tiende a 0.

La información dada es que f es derivable en a; es decir,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

SP Un aspecto importante de la solución de problemas es intentar encontrar una conexión entre lo dado y lo desconocido. Consulte el paso 2 (Piense en un plan) en *Principios para la resolución de problemas*, en la página 71.

existe (véase la ecuación 2.7.5). Para relacionar lo dado con lo desconocido, divida y multiplique $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (lo cual es posible cuando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

De este modo, si usa la ley del producto y la ecuación (2.7.5), se puede escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x\to a}(x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Para utilizar lo que se acaba de demostrar, se comienza con $f(x)$ y se suma y se resta $f(a)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}[f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a) \end{aligned}$$

Por tanto, f es continua en a. ■

NOTA El inverso del teorema 4 es falso; es decir, hay funciones que son continuas, pero que no son derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ porque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}|x| = 0 = f(0)$$

(Véase el ejemplo 2.3.7.) Pero en el ejemplo 5 se demostró que f no es derivable en 0.

¿Cómo deja de ser derivable una función?

En el ejemplo 5 se vio que la función $y = |x|$ no es derivable en 0 y en la figura 5(a) se muestra que su gráfica cambia de dirección repentinamente cuando $x = 0$. En general, si la gráfica de una función f tiene "esquinas" o "picos", la gráfica de f no tiene recta tangente en esos puntos y f no es derivable ahí. [Al intentar calcular $f'(a)$, se encuentra que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes.]

El teorema 4 da otra forma en que una función no tiene derivada. Este dice que si f no es continua en a, entonces f no es derivable en a. Por lo que, en cualquier discontinuidad (por ejemplo, una discontinuidad de salto), f no es derivable.

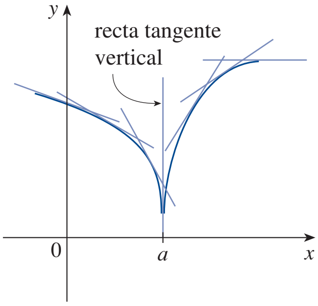


FIGURA 6

Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; es decir, f es continua en a y

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$$

Esto significa que las rectas tangentes se vuelven más y más empinadas cuando $x \to a$. En la figura 6 se muestra una forma en que esto puede suceder; la figura 7(c) muestra otra. Las tres posibilidades que se acaban de analizar se ilustran en la figura 7.

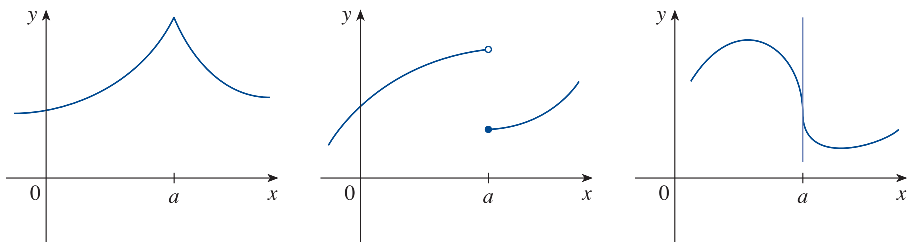


FIGURA 7
Tres maneras para que f no sea derivable en a

(a) Una esquina (b) Una discontinuidad (c) Una tangente vertical

Una calculadora graficadora o una computadora ofrecen otra manera de ver la derivabilidad. Si f es derivable en a, entonces, con un acercamiento al punto $(a, f(a))$, la gráfica se alinea y adquiere más y más la apariencia de un recta. (Véase la figura 8. Un ejemplo específico es la figura 2.7.2.) Pero no importa cuánto se acerque a puntos como los de las figuras 6 y 7(a), no puede eliminar el pico o esquina (véase la figura 9).

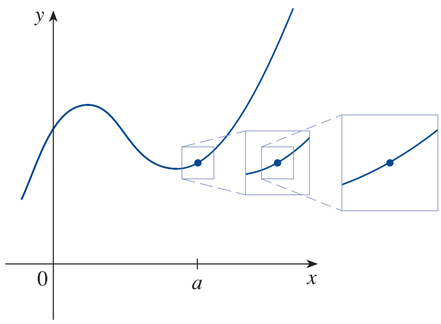


FIGURA 8
f es derivable en a

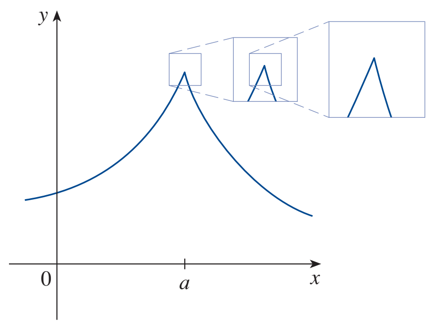


FIGURA 9
f no es derivable en a

Derivadas superiores

Si f es una función derivable, entonces su derivada f también es una función, por lo que f puede tener una derivada de sí misma, denotada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se llama **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Utilizando la notación de Leibniz, la segunda derivada de $y = f(x)$ se escribe como

$$\underbrace{\frac{d}{dx}}_{\text{derivada de}} \underbrace{\left(\frac{dy}{dx}\right)}_{\text{primera derivada}} = \underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{segunda derivada}}$$

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre e interprete $f''(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 se encuentra que la primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$. Por lo que la segunda derivada es

$$\begin{aligned} f''(x) = (f')'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x \end{aligned}$$

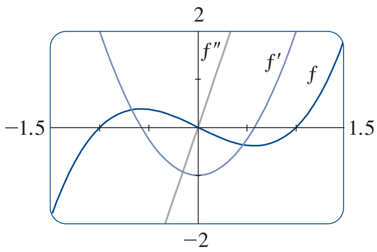


FIGURA 10

TEC En Module 2.8 usted puede ver cómo cambian los coeficientes de un polinomio f y cómo afectan el aspecto de la gráfica de f, f' y f''.

Las gráficas de f, f' y f'' se muestran en la figura 10.

Se puede interpretar $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. En otras palabras, es la razón de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$.

Observe de la figura 10 que $f''(x)$ es negativa cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente negativa y es positiva cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente positiva. De esta manera, las gráficas sirven como una comprobación de sus cálculos. ■

En general, una segunda derivada se puede interpretar como una razón de cambio de una razón de cambio. El ejemplo más conocido es la *aceleración*, que se define como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto que se desplaza en línea recta, su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A la razón de cambio de la velocidad instantánea con respecto al tiempo se le llama **aceleración** $a(t)$ del objeto. En estos términos, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y, en consecuencia, es la segunda derivada de la función posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o en la notación de Leibniz,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

La aceleración es el cambio de velocidad que se siente cuando se acelera o se desacelera en un auto.

La **tercera derivada** f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. Por lo que, $f(x)$ se puede interpretar como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la razón de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, entonces, las notaciones alternativas para la tercera derivada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

Se puede interpretar físicamente la tercera derivada en el caso donde la función es la función posición $s = s(t)$ de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta. Como $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función posición es la derivada de la función aceleración y se le denomina **jerk** (tirón):

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3 s}{dt^3}$$

Así, el jerk, j, es la razón de cambio de la aceleración. Es un nombre apropiado porque un gran jerk significa un cambio repentino de aceleración, que ocasiona un movimiento repentino en un vehículo.

El proceso de derivación puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se denota mediante $f^{(4)}$. En general, la n-ésima derivada de f se denota mediante $f^{(n)}$ y se obtiene derivando n veces a f. Si $y = f(x)$, se escribe

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 se encuentra que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y así, es una línea recta con pendiente 6. Ya que la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, se tiene

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Por tanto f''' es una función constante y su gráfica es una recta horizontal. Por tanto, para todos los valores de x,

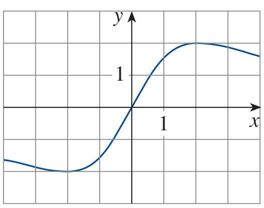
$$f^{(4)}(x) = 0$$ ■

Se ha visto que una aplicación de la segunda y tercera derivada sucede al analizar el movimiento de objetos empleando aceleración y jerk. Se investigará otra aplicación de la segunda derivada en la sección 4.3, donde se muestra cómo el conocer f'' da información acerca de la forma de la gráfica de f. En el capítulo 11 se verá cómo la segunda derivada y las derivadas superiores nos permiten representar funciones como sumas de series infinitas.

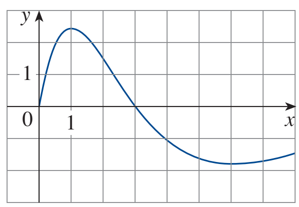
2.8 EJERCICIOS

1–2 Utilice la gráfica que se proporciona para calcular el valor de cada derivada. Luego trace la gráfica de f'.

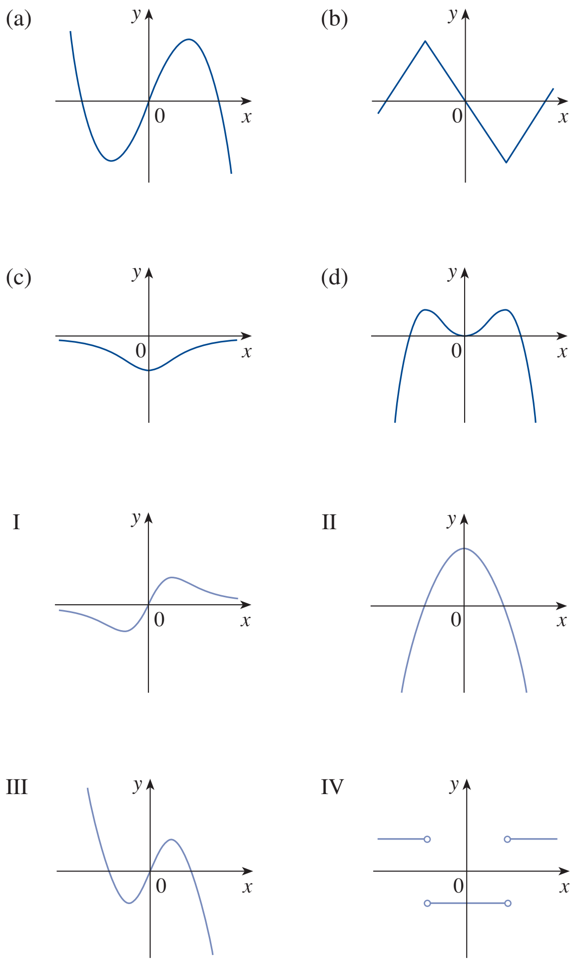
1. (a) $f'(-3)$ (b) $f'(-2)$ (c) $f'(-1)$ (d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$ (f) $f'(2)$ (g) $f'(3)$



2. (a) $f'(0)$ (b) $f'(1)$ (c) $f'(2)$ (d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$ (f) $f'(5)$ (g) $f'(6)$ (h) $f'(7)$

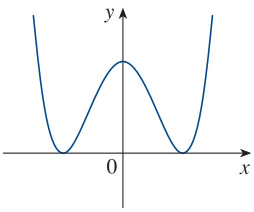


3. Relacione la gráfica de cada función dada en las figuras (a)-(d) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I-IV. Dé las razones para sus selecciones.

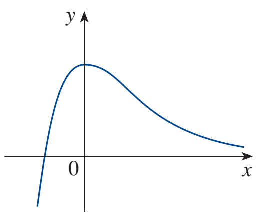


4–11 Trace o copie la gráfica de la función dada *f*. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego utilice el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de esta.

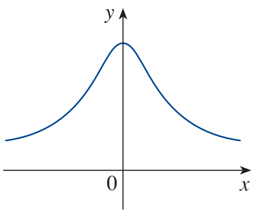
4.



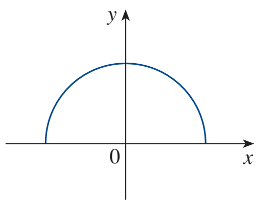
5.



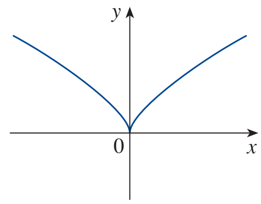
6.



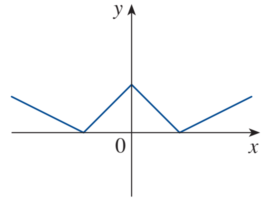
7.



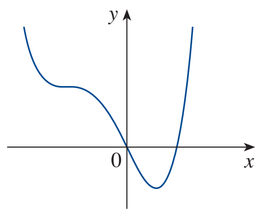
8.



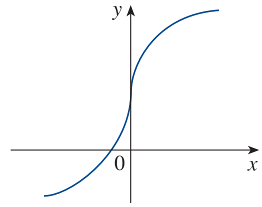
9.



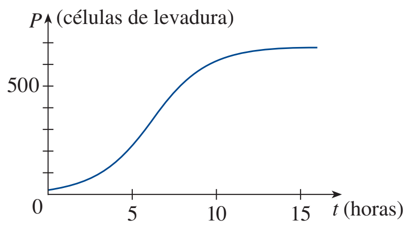
10.



11.



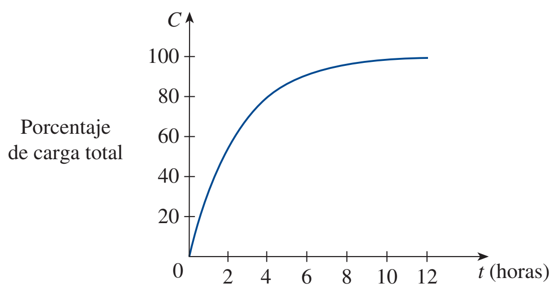
12. Se muestra la gráfica de la función población $P(t)$ para células de levadura en un cultivo de laboratorio. Utilice el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de la derivada $P'(t)$. ¿Qué indica la gráfica de P' acerca de la población de levadura?



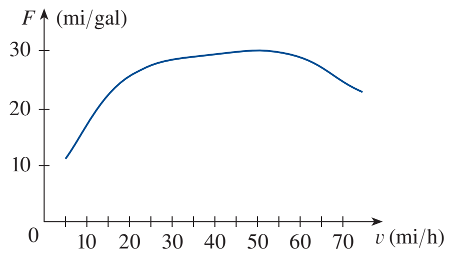
13. Una batería recargable se conecta con un cargador. La gráfica muestra $C(t)$, el porcentaje de capacidad que la batería alcanza como una función del tiempo *t* transcurrido (en horas).

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $C'(t)$?

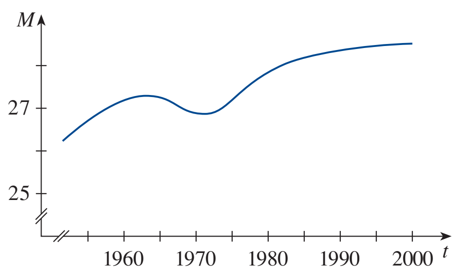
(b) Trace la gráfica de $C'(t)$. ¿Qué le indica la gráfica?



14. La gráfica (del Departamento de Energía de EE. UU.) muestra cómo afecta la rapidez de manejo el consumo de combustible. La economía F se mide en millas por galón, y la rapidez v se mide en millas por hora.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $F'(v)$?
(b) Trace la gráfica de la derivada de $F'(v)$.
(c) ¿A qué rapidez debería manejar si quiere ahorrar combustible?



15. La gráfica ilustra cómo ha variado la edad promedio en que contraían matrimonio por primera vez los hombres japoneses en la segunda mitad del siglo xx. Trace la gráfica de la función derivada $M'(t)$. ¿Durante cuáles años fue negativa la derivada?



16–18 Trace una gráfica cuidadosa de f y debajo de esta la gráfica de f' de la misma manera que en los ejercicios 4-11. ¿Puede intuir una fórmula para $f(x)$ a partir de su gráfica?

16. $f(x) = \operatorname{sen} x$ **17.** $f(x) = e^x$ **18.** $f(x) = \ln x$

---

19. Sea $f(x) = x^2$.
(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$ y $f'(2)$ usando un dispositivo de graficación para hacer un acercamiento sobre la gráfica de f.
(b) Utilice la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$ y $f'(-2)$.
(c) Con los resultados de los incisos (a) y (b), proponga una fórmula para $f'(x)$.
(d) Aplique la definición de derivada para probar que su propuesta del inciso (c) es correcta.

20. Sea $f(x) = x^3$.
(a) Calcule los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$ usando un dispositivo de graficación para hacer un acercamiento de la gráfica de f.
(b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, $f'(-2)$ y $f'(-3)$.
(c) Utilice los valores de los incisos (a) y (b) para trazar la gráfica de f'.
(d) Infiera una fórmula para $f'(x)$.
(e) Aplique la definición de derivada para demostrar que su propuesta del inciso (d) es correcta.

21–31 Encuentre la derivada de cada una de las funciones siguientes usando la definición de derivada. Indique los dominios de la función y de su derivada.

21. $f(x) = 3x - 8$

22. $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 2.5t^2 + 6t$

24. $f(x) = 4 + 8x - 5x^2$

25. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

26. $f(x) = x + \sqrt{x}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

30. $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

---

32. (a) Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ comenzando con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ aplicando las transformaciones de la sección 1.3.
(b) Use la gráfica del inciso (a) para trazar la gráfica de f'.
(c) Aplique la definición de derivada para encontrar $f'(x)$. ¿Cuáles son los dominios de f y de f'?
(d) Utilice un dispositivo de graficación para trazar la grafica de f' y compárela con su trazo del inciso (b).

33. (a) Si $f(x) = x^4 + 2x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

34. (a) Si $f(x) = x + 1/x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

35. La tasa de desempleo $U(t)$ varía con el tiempo. La tabla da el porcentaje de desempleo en la fuerza laboral australiana medida a medio año de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8.1	2000	6.2
1996	8.0	2001	6.9
1997	8.2	2002	6.5
1998	7.9	2003	6.2
1999	6.7	2004	5.6

(a) ¿Cuál es el significado de $U'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores estimados para $U'(t)$.

36. Sea $P(t)$ el porcentaje de población de Filipinas arriba de 60 años de edad en el instante t. La tabla da las proyecciones de los valores de esta función de 1995 a 2020.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5.2	2010	6.7
2000	5.5	2015	7.7
2005	6.1	2020	8.9

(a) ¿Cuál es el significado de $P'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores para $P'(t)$.
(c) Trace la gráfica de P y P'.

37. La tabla da la altura conforme pasa el tiempo de un árbol de pino típico de madera en un sitio administrado.

Edad tres (años)	14	21	28	35	42	49
Altura (pies)	41	54	64	72	78	83

Fuente: Arkansas Forestry Commission

Si $H(t)$ es la altura del árbol después de t años, construya una tabla de valores calculados para H' y trace su gráfica.

38. La temperatura del agua afecta la tasa de crecimiento de la trucha de arroyo. La tabla muestra la cantidad de peso ganado por la trucha de arroyo después de 24 días con diferentes temperaturas del agua.

Temperatura (°C)	15.5	17.7	20.0	22.4	24.4
Peso ganado (g)	37.2	31.0	19.8	9.7	−9.8

Si $W(x)$ es la ganancia de peso a la temperatura x, construya una tabla de valores estimados de W' y trace su gráfica. ¿Cuáles son las unidades de $W'(x)$?

Fuente: Adaptado de J. Chadwick Jr., "Temperature Effects on Growth and Stress Physiology of Brook Trout: Implications for Climate Change Impacts on an Iconic Cold-Water Fish." *Masters Theses.* Paper 897. 2012. scholarworks.umass.edu/theses/897.

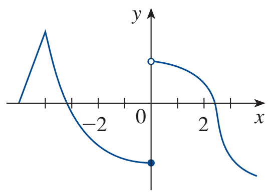
39. Sea P el porcentaje de energía eléctrica de una ciudad que se produce por paneles solares t años después del 1 de enero de 2000.
(a) ¿Qué representa dP/dt en este contexto?
(b) Interprete el enunciado

$$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=2} = 3.5$$

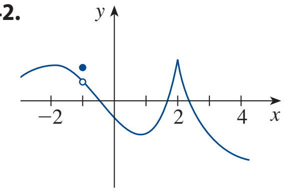
40. Suponga que N es el número de personas en Canadá que viajan en coche a otra provincia para vacacionar este año cuando el precio promedio de gasolina es de p dólares por litro. ¿Espera dN/dp sea positiva o negativa? Explique su respuesta.

41–44 Observe la gráfica de f. Indique, con razones, los números en los que f *no* es derivable.

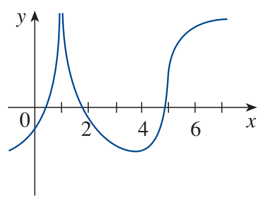
41.



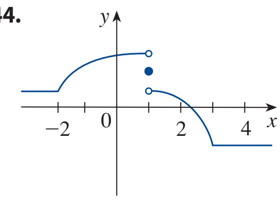
42.



43.



44.

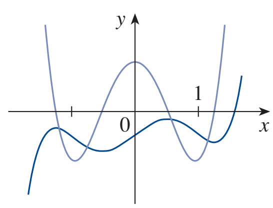


45. Trace la gráfica de la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Haga acercamientos sucesivos primero hacia el punto $(-1, 0)$ y luego en dirección al origen. ¿Qué diferencia existe en cuanto al comportamiento de f en las cercanías de estos dos puntos? ¿Qué conclusiones infiere acerca de la derivabilidad de f?

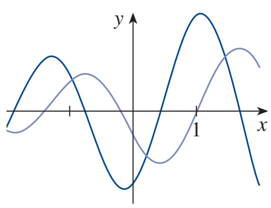
46. Haga un acercamiento hacia los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(-1, 0)$ en la gráfica de la función $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. ¿Qué observa? Registre lo que observa en términos de la derivabilidad de g.

47–48 Se muestran las gráficas de una función f y su derivada f'. ¿Cuál es mayor $f'(-1)$ o $f''(-1)$?

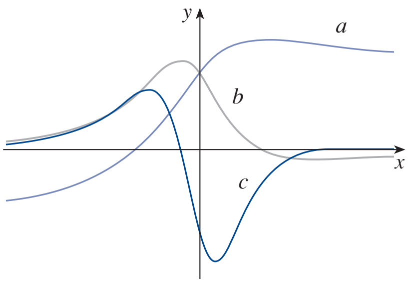
47.



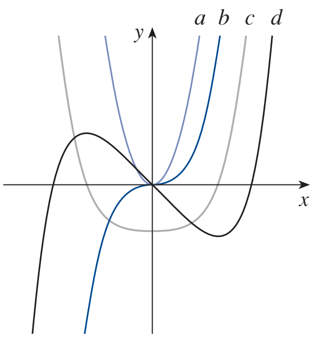
48.



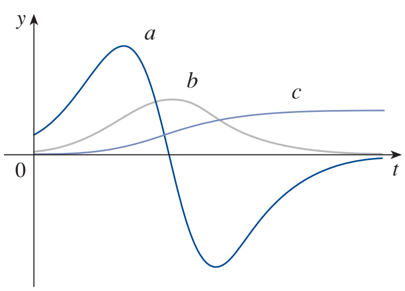
49. La figura muestra las gráficas de f, f' y f''. Indique cada curva y explique el porqué de su elección.



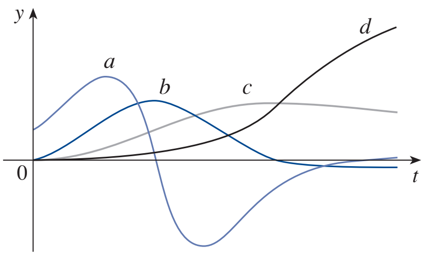
50. La figura muestra gráficas de f, f', f'' y f'''. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



51. La figura muestra las gráficas de tres funciones. Una es la función posición de un automóvil, otra es la velocidad del mismo, y la de su aceleración. Identifique cada curva y explique las razones de su elección.



52. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones. Una es la función de posición de un auto, la de velocidad, la de aceleración y la de su jerk. Identifique cada curva y explique los motivos de su elección.

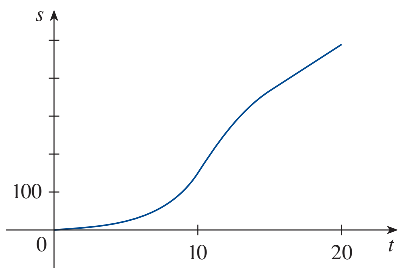


53–54 Utilice la definición de derivada para encontrar $f'(x)$ y $f''(x)$. Luego, trace la gráfica de f, f' y f'' en una misma pantalla y verifique para ver si sus respuestas son razonables.

53. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **54.** $f(x) = x^3 - 3x$

55. Si $f(x) = 2x^2 - x^3$ encuentre $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$. Trace la gráfica de f, f', f'' y f''' en una misma pantalla. ¿Las gráficas son consistentes con la interpretación geométrica de estas derivadas?

56. (a) Se muestra la gráfica de una función posición de un automóvil, donde s se mide en metros y t en segundos. Utilice la gráfica de la velocidad y la aceleración del automóvil. ¿Cuá1 es la aceleración en $t = 10$ segundos?



(b) Utilice la curva de aceleración del inciso (a) para calcular el jerk en $t = 10$ segundos. ¿Cuáles son las unidades del jerk?

57. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Si $a \neq 0$, utilice la ecuación 2.7.5 para encontrar $f'(a)$.
(b) Demuestre que $f'(0)$ no existe.
(c) Demuestre que $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0). (Recuerde: la forma de la función de f. Véase la figura 1.2.13.)

58. (a) Si $g(x) = x^{2/3}$, demuestre que $g'(0)$ no existe.
(b) Si $a \neq 0$, encuentre $g'(a)$.
(c) Demuestre que $y = x^{2/3}$ tiene una recta tangente vertical en (0, 0).
(d) Ilustre el inciso (c) al trazar la gráfica de $y = x^{2/3}$.

59. Demuestre que la función $f(x) = |x - 6|$ no es derivable en 6. Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

60. ¿Dónde no es derivable la función parte entera $f(x) = [\![x]\!]$? Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

61. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x\,|x|$.
(b) ¿Para qué valores de x es f derivable?
(c) Encuentre una fórmula para f'.

62. (a) Trace la gráfica de la función $g(x) = x + |x|$.
(b) ¿Para qué valores de x es g derivable?
(c) Encuentre una fórmula para g'.

63. Recuerde que a una función f se le denomina *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio, e *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para toda x. Demuestre cada uno de los enunciados siguientes.
(a) La derivada de una función par es una función impar.
(b) La derivada de una función impar es una función par.

64. Las derivadas **por la izquierda** y **por la derecha** de f en a están definidas por

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y $$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si estos límites existen. Entonces $f'(a)$ existe si y solo si estas derivadas laterales existen y son iguales.

(a) Determine $f'_{-}(4)$ y $f'_{+}(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5-x} & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Trace la gráfica de f.
(c) ¿Dónde es discontinua f?
(d) ¿Dónde f no es derivable?

65. Nick comienza a correr y corre cada vez más rápido durante 3 minutos, luego camina durante 5 minutos. Se detiene en un cruce por 2 minutos, corre bastante rápido durante 5 minutos y camina durante 4 minutos.
(a) Trace una posible gráfica de la distancia s que Nick ha cubierto después de t minutos.
(b) Trace una gráfica de ds/dt.

66. Cuando abre el grifo del agua caliente, la temperatura T del agua depende del tiempo que el agua ha estado corriendo.
(a) Trace una posible gráfica de T como función del tiempo t transcurrido desde que abrió el grifo.
(b) Describa cómo varía la razón de cambio de T con respecto a t, conforme esta aumenta.
(c) Trace la gráfica de la derivada de T.

67. Sea ℓ la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1). El *ángulo de inclinación* de ℓ es el ángulo ϕ que ℓ forma con la dirección positiva del eje x. Calcule ϕ redondeado al grado más cercano.

2 REPASO

VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

Las respuestas a la verificación de conceptos se encuentran en las páginas finales del libro.

1. Explique qué significa cada uno de los enunciados siguientes e ilustre con un trazo.
(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$
(d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Describa varias formas en que un límite puede no existir. Ilustre con gráficas.

3. Enuncie las leyes de los límites siguientes.
(a) Ley de la suma
(b) Ley de la diferencia
(c) Ley del múltiplo constante
(d) Ley del producto
(e) Ley del cociente
(f) Ley de la potencia
(g) Ley de la raíz

4. ¿Qué establece el teorema de la compresión?

5. (a) ¿Qué quiere darse a entender al decir que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.
(b) ¿Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

6. ¿Cuáles de las curvas siguientes tienen asíntotas verticales? ¿Cuáles tienen asíntotas horizontales?
(a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$ (c) $y = \tan x$
(d) $y = \tan^{-1} x$ (e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$
(g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) ¿Qué significa que f sea continua en a?
(b) ¿Qué significa que f sea continua sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$? ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de esta función?

8. (a) Dé ejemplos de funciones que sean continuas en $[-1, 1]$.
(b) Dé un ejemplo de una función que no sea continua en $[0, 1]$.

9. ¿Qué establece el teorema del valor intermedio?

10. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

11. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con posición $f(t)$ en el instante t. Escriba una expresión para la velocidad instantánea de un objeto en el instante $t = a$. ¿Cómo se puede interpretar esta velocidad en términos de la gráfica de f?

12. Si $y = f(x)$ y x cambia de x_1 a x_2, escriba expresiones para lo siguiente.
(a) La razón promedio de cambio de y con respecto a x a lo largo del intervalo $[x_1, x_2]$.
(b) La razón de cambio instantáneo de y con respecto a x en $x = x_1$.

13. Defina la derivada $f'(a)$. Analice dos maneras de interpretar este número.

14. Defina la segunda derivada de f. Si $f(t)$ es la función de posición de una partícula, ¿cómo puede interpretar la segunda derivada?

15. (a) ¿Qué significa que f sea derivable en a?
(b) ¿Cuál es la relación entre derivabilidad y continuidad de una función?
(c) Trace la gráfica de una función que sea continua, pero no derivable en $a = 2$.

16. Describa varias maneras en que una función puede no ser derivable. Ilustre con gráficas.

EXAMEN VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. $\displaystyle \lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4}-\frac{8}{x-4}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{2x}{x-4}-\lim_{x\to 4}\frac{8}{x-4}$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6}=\frac{\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2+2x-4}=\frac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. $\displaystyle \frac{x^2-9}{x-3}=x+3$

5. $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)$

6. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 5} [f(x)/g(x)]$ no existe.

7. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 5} [f(x)/g(x)]$ no existe.

8. Si no existe el $\lim_{x\to a} f(x)$ y ni el $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ no existe.

9. Si el $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero no existe el $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ no existe.

10. Si existe el $\lim_{x\to 6} [f(x)g(x)]$ entonces el límite debe ser igual a $f(6)\,g(6)$.

11. Si p es un polinomio, entonces $\lim_{x\to b} p(x)= p(b)$

12. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to 0} [f(x) - g(x)] = 0$.

13. Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas.

14. Si f tiene dominio $[0, \infty)$ y no tiene asíntota horizontal entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

15. Si la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$, entonces f no está definida en 1.

16. Si $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe un número c entre 1 y 3 tal que $f(c) = 0$.

17. Si f es continua en 5 y $f(5) = 2$ y $f(4) = 3$, entonces $\lim_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

18. Si f es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = 4$ y $f(1)= 3$, entonces existe un número r tal que $|r| < 1$ y $f(r) = \pi$.

19. Sea f una función tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$. Entonces existe un número positivo δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - 6| < 1$.

20. Si $f(x)> 1$ para toda x y $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

21. Si f es continua en a, entonces f es derivable en a.

22. Si $f'(r)$ existe, entonces $\lim_{x\to r} f(x)= f(r)$.

23. $\displaystyle \frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

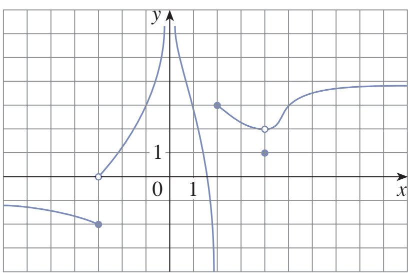
24. La ecuación $x^{10} + 10x^2 + 5 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 2)$.

25. Si f es continua en a, también lo es $|f|$.

26. Si $|f|$ es continua en a, también lo es f.

EJERCICIOS

1. Se da la gráfica de f.



(a) Encuentre cada uno de los límites siguientes o explique por qué no existen.

(i) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to -3} f(x)$

(iv) $\lim_{x\to 4} f(x)$ (v) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(vii) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ (viii) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

(b) Exprese las ecuaciones de las asíntotas horizontales.
(c) Exprese las ecuaciones de las asíntotas verticales.
(d) ¿En qué números f es discontinua? Explique.

2. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2,\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to -3} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2,$$

f es continua por la derecha en 3

3–20 Encuentre cada uno de los límites siguientes.

3. $\lim_{x\to 1} e^{x^3-x}$

4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

5. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

6. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-9}{x^2+2x-3}$

7. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h-1)^3+1}{h}$

8. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2-4}{t^3-8}$

9. $\lim_{r\to 9} \dfrac{\sqrt{r}}{(r-9)^4}$

10. $\lim_{v\to 4^+} \dfrac{4-v}{|4-v|}$

11. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^4-1}{u^3+5u^2-6u}$

12. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x^3-3x^2}$

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

14. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{2x-6}$

15. $\lim_{x\to\pi^-} \ln(\operatorname{sen} x)$

16. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1-2x^2-x^4}{5+x-3x^4}$

17. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$

18. $\lim_{x\to\infty} e^{x-x^2}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(1/x)$

20. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

21–22 Utilice las gráficas para descubrir las asíntotas de la curva. Después, demuestre lo que ha descubierto.

21. $y=\dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}$

23. Si $2x-1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para $0<x<3$, encuentre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

24. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2\cos(1/x^2)=0$.

25–28 Demuestre cada uno de los enunciados siguientes utilizando la definición precisa de límite.

25. $\lim_{x\to 2} (14-5x)=4$

26. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}=0$

27. $\lim_{x\to 2} (x^2-3x)=-2$

28. $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x-4}}=\infty$

29. Sea

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x<0 \\ 3-x & \text{si } 0\leqslant x<3 \\ (x-3)^2 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada límite si este existe.

(i) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(iv) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (v) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 3} f(x)$

(b) ¿Dónde es discontinua f?

(c) Trace la gráfica de f.

30. Sea

$$g(x)=\begin{cases} 2x-x^2 & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 2-x & \text{si } 2<x\leqslant 3 \\ x-4 & \text{si } 3<x<4 \\ \pi & \text{si } x\geqslant 4 \end{cases}$$

(a) Para cada uno de los números 2, 3 y 4, descubra si g es continua por la izquierda, por la derecha o continua en el número.

(b) Trace la gráfica de g.

31–32 Demuestre que cada una de las funciones siguientes es continua en su dominio. Exprese el dominio.

31. $h(x)=xe^{\operatorname{sen} x}$

32. $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-2}$

33–34 Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación en el intervalo dado.

33. $x^5-x^3+3x-5=0, \quad (1, 2)$

34. $\cos\sqrt{x}=e^x-2, \quad (0, 1)$

35. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y=9-2x^2$ en el punto $(2, 1)$.

(b) Determine la ecuación de esta tangente.

36. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y=\frac{2}{1-3x}$$

y los puntos de abscisas 0 y -1.

37. El desplazamiento (en metros) de un objeto que se mueve en línea recta está dado por $s=1+2t+\frac{1}{4}t^2$, donde t se mide en segundos.

(a) Encuentre la velocidad promedio en los períodos de tiempo siguientes:

(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$ (iii) $[1, 1.5]$ (iv) $[1, 1.1]$

(b) Encuentre la velocidad instantánea cuando $t=1$.

38. De acuerdo con la ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene fija, entonces el producto de la presión P y el volumen V es constante. Suponga que, para cierto gas, $PV=4000$, donde P se mide en pascales y V en litros.

(a) Encuentre la razón de cambio promedio de P cuando V se incrementa de 3 L a 4 L.

(b) Exprese V como función de P y demuestre que la razón de cambio instantánea de V con respecto a P es inversamente proporcional al cuadrado de P.

39. (a) Utilice la definición de derivada para encontrar $f'(2)$, donde $f(x)=x^3-2x$.

(b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3-2x$ en el punto $(2, 4)$.

(c) Ilustre el inciso (b) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

40. Encuentre una función f y un número a tales que

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^6-64}{h}=f'(a)$$

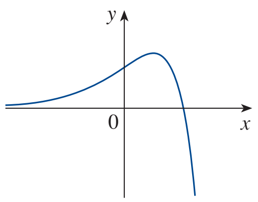
41. El costo total de pagar un préstamo para estudiante a una tasa de interés de r% por año es $C=f(r)$.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(r)$? ¿Cuáles son sus unidades?

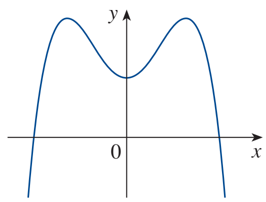
(b) ¿Qué significa el enunciado $f'(10) = 1200$?
(c) ¿Es $f'(r)$ siempre positiva o cambia de signo?

42–44 Trace o copie la gráfica de la función dada. Luego trace directamente debajo su derivada.

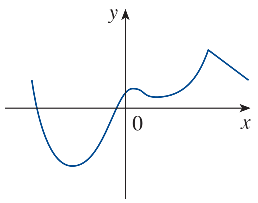
42.



43.



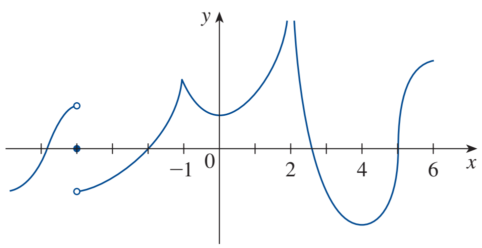
44.



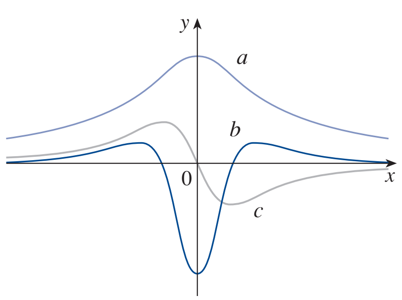
45. (a) Si $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$ utilice la definición de derivada para encontrar $f'(x)$.
(b) Encuentre los dominios de f y f'.
(c) Trace la gráfica de f y f' en una pantalla común. Compare las gráficas para ver si su respuesta al inciso (a) es razonable.

46. (a) Encuentre las asíntotas de la gráfica de $f(x) = \dfrac{4 - x}{3 + x}$ y utilícelas para dibujar la gráfica.
(b) Utilice la gráfica del inciso (a) y trace la gráfica de f'.
(c) Utilice la definición de derivada para encontrar $f'(x)$.
(d) Utilice un dispositivo de graficación para trazar la gráfica de f' y compárela con su trazo del inciso (b).

47. Se muestra la gráfica de f. Enuncie, con razones, los números en los que f no es derivable.



48. La figura muestra la gráfica de f, f' y f''. Identifique cada curva y explique su elección.



49. Trace la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes: el dominio de f es todos los números reales excepto 0, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $f'(x) > 0$ para toda x en el dominio de f, $\lim_{x\to -\infty} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 1$.

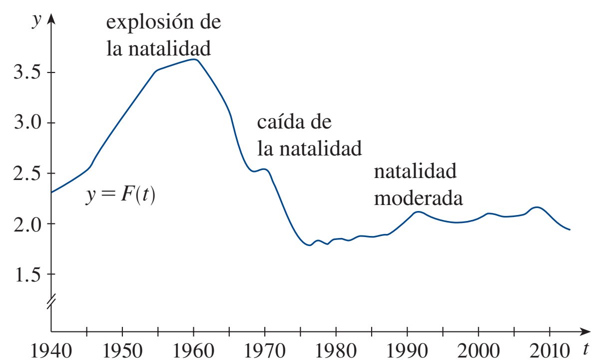
50. Sea $E(t)$ el valor del euro (la moneda europea) en términos del dólar de los Estados Unidos al tiempo t. La tabla da los valores de la función, a partir de mediados de año, de 2000 a 2004. Interprete $E'(2002)$ y calcule su valor.

t	2000	2001	2002	2003	2004
$E(t)$	0.955	0.847	0.986	1.149	1.218

51. Sea $B(t)$ el número de billetes de 20 dólares en circulación al tiempo t. La tabla da los valores de esta función de 1990 a 2010, al 31 de diciembre, en miles de millones. Interprete y calcule el valor de $B'(2000)$.

t	1990	1995	2000	2005	2010
$B(t)$	3.45	4.21	4.93	5.77	6.53

52. La *tasa de fertilidad total*, al tiempo t, denotada con $F(t)$, es una estimación del número promedio de niños nacidos de cada mujer (suponiendo que las tasas de natalidad actuales permanezcan constantes). En la gráfica de la tasa de fertilidad total en EE. UU., se muestran las fluctuaciones desde 1940 hasta 2010.
(a) Calcule los valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ y $F'(1987)$.
(b) ¿Cuáles son los significados de estas derivadas?
(c) ¿Puede sugerir razones para los valores de estas derivadas?



53. Suponga que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo x, donde $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Encuentre $\lim_{x\to a} f(x)$.

54. Sea $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$
(a) ¿Para qué valores de a existe $\lim_{x\to a} f(x)$?
(b) ¿En qué números es discontinua la función f?

Problemas adicionales

En el análisis de los principios para la resolución de problemas, se consideró la estrategia para resolver problemas llamada *Introduzca algo extra* (véase la página 71). En el ejemplo siguiente se muestra cómo este principio resulta útil a veces cuando evalúa límites. La idea es cambiar la variable, introducir una nueva variable relacionada con la original, de tal manera que el problema se haga más sencillo. Más adelante, en la sección 5.5, se utilizará más esta idea general.

EJEMPLO Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$, donde c es una constante.

SOLUCIÓN Como se ve, este límite parece desafiante. En la sección 2.3 se evaluaron varios límites en los que tanto el numerador como el denominador tendieron a 0. Ahí, la estrategia fue realizar cierto tipo de manipulación algebraica que condujo a una eliminación simplificadora, pero en este caso no está claro qué clase de álgebra se necesita.

Por tanto, se introduce una nueva variable t con la ecuación

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}$$

También se necesita expresar x en términos de t, por lo que se resuelve esta ecuación

$$t^3 = 1 + cx \qquad x = \frac{t^3 - 1}{c} \quad (\text{si } c \neq 0)$$

Observe que $x \to 0$ es equivalente a $t \to 1$. Esto permite convertir el límite dado en uno que implique a la variable t:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} &= \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} \end{aligned}$$

El cambio de variable permitió reemplazar un límite relativamente complicado con uno más sencillo de un tipo que ya se ha visto. Al factorizar el denominador como una diferencia de cubos, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3} \end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variable se tuvo que excluir el caso en que $c = 0$. Pero si $c = 0$, la función es 0 para toda x distinta de cero y así este límite es 0. Por tanto, en todos los casos, el límite es $c/3$. ■

Los problemas siguientes sirven para poner a prueba y desafiar sus habilidades para resolver problemas. Algunos requieren una cantidad considerable de tiempo para pensar, de modo que no se desaliente si no los puede resolver de inmediato. Si tiene alguna dificultad, quizá le sirva consultar en la página 71 el análisis de los principios para la resolución de problemas.

PROBLEMAS

1. Evalúe el $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Encuentre los números a y b tales que el $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$.

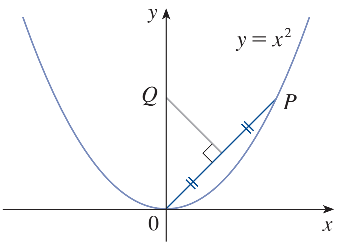


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

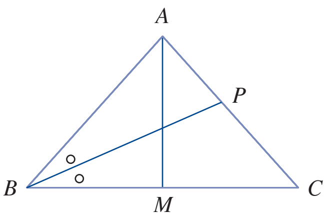


FIGURA PARA EL PROBLEMA 10

3. Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

4. En la figura se muestra un punto P sobre la parábola $y = x^2$ y el punto Q donde la bisectriz perpendicular de OP interseca al eje y. Conforme P se aproxima al origen, a lo largo de la parábola, ¿qué sucede con Q? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

5. Evalúe los límites siguientes, si estos existen, donde $[\![x]\!]$ denota la función parte entera.

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{[\![x]\!]}{x}$ (b) $\lim_{x \to 0} x\, [\![1/x]\!]$

6. Trace la región en el plano definida por cada una de las ecuaciones siguientes:

(a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ (b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$

(c) $[\![x + y]\!]^2 = 1$ (d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encuentre todos los valores de a tales que f sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant a \\ x^2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

8. Un **punto fijo** de una función f es un número c en su dominio tal que $f(c) = c$. (La función no mueve a c; este permanece fijo.)

(a) Trace la gráfica de una función continua con dominio [0, 1] cuyo rango también se encuentre en [0, 1]. Localice un punto fijo de f.

(b) Intente graficar una función continua con dominio [0, 1] y rango en [0, 1] que no tenga un punto fijo. ¿Cuál es el obstáculo?

(c) Utilice el teorema de valor intermedio para comprobar que cualquier función continua con dominio [0, 1] y rango en [0, 1] debe tener un punto fijo.

9. Si $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = 2$ y $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = 1$, encuentre $\lim_{x \to a}[f(x)\, g(x)]$.

10. (a) En la figura se muestra un triángulo isósceles ABC con $\angle B = \angle C$. La bisectriz del ángulo B interseca el lado AC en el punto P. Suponga que la base BC permanece fija, pero que la altura $|AM|$ del triángulo tiende a 0, de modo que A se aproxima al punto medio M de BC. ¿Qué sucede con P durante este proceso? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

(b) Intente trazar la trayectoria recorrida por P durante este proceso. Luego encuentre la ecuación de esta curva y úsela para trazarla.

11. (a) Si parte de 0° de latitud y avanza en dirección oeste, puede denotar con $T(x)$ la temperatura en el punto x en cualquier tiempo dado. Suponga que T es una función continua de x, y demuestre que, en cualquier tiempo fijo, existen por lo menos dos puntos opuestos sobre el ecuador que tienen exactamente la misma temperatura.

(b) ¿E1 resultado del inciso (a) se cumple para puntos que estén sobre cualquier circunferencia sobre la superficie de la Tierra?

(c) ¿El resultado del inciso (a) se cumple para la presión barométrica y para la altitud arriba del nivel del mar?

12. Si f es una función derivable y $g(x) = xf(x)$, utilice la definición de derivada para demostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

13. Suponga que f es una función que satisface la ecuación

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todos los números reales x y y. Suponga también que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(a) Encuentre $f(0)$. (b) Encuentre $f'(0)$. (c) Encuentre $f'(x)$.

14. Suponga que f es una función con la propiedad de que $|f(x)| \leqslant x^2$ para toda x. Demuestre que $f(0) = 0$. Luego muestre que $f'(0) = 0$.