

La mesure de Yang-Mills en 2 dimensions

Buisine Léo
Ecole Normale Supérieure de Paris

March 4, 2025

Contents

1	Introduction	2
1.1	Variete differentielle	2
1.2	Fibre vectoriel	2
1.3	Connexion	2
1.4	Fibre principaux	3
1.5	La mesure de Yang-Mills	4
2	Construction de la mesure	5
3	Calcul de la fonction de partition	6
4	Etude asymptotique	7

Chapter 1

Introduction

1.1 Variete differentielle

Definition 1.1.1. Variete differentielle : variete topologique separe localement modelee sur \mathbb{R}^n de maniere lisse, aka munit de cartes et de changements de cartes (un atlas).

Definition 1.1.2. Espace tangent $T_p M$, l'espace des tangeantes a M en p . Si M est lisse de dim n , alors $T_p M$ est homeomorphe a \mathbb{R}^n .

Example. Un groupe de Lie G est un groupe munit d'une structure de variete differentielle compatible. $\mathfrak{g} = T_e G$ est l'algebre de Lie associee.

1.2 Fibre vectoriel

Definition 1.2.1. Un fibre vectoriel de base M de rang k est une variete E munie d'une surjection lisse $\pi : E \rightarrow M$ qui ressemble localement a $M \times \mathbb{R}^k$. On note $E_x \equiv \pi^{-1}(x)$ la fibre au dessus de x .

Example. Le fibre tangeant $TM = \bigcup T_p M$. Le fibre cotangeant T^*M en prenant le dual.

Definition 1.2.2. Soit E, π, M un fibre. Une section locale de E est une application $\sigma : U \subset M \rightarrow E$ tq $\pi \circ \sigma = \text{id}$. On note $\Gamma(M)$ l'espace des sections de M .

Example. Les champs de vecteurs sur M : $\Gamma(TM) = \chi(M)$. Les 1-formes differentielles sur M : $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$. Par exemple, si $X \in \chi(M)$, $X_p = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ et si $\omega \in \Omega^1(M)$, $\omega_p = \sum_{i=1}^n \omega_i(p) dx_i$

1.3 Connexion

∇ est la generalisation des derivees directionelles $\nabla_X S$, avec $X \in \chi(M)$, $S \in \Gamma(E)$

Definition 1.3.1. Une connexion sur (E, π, M) est au choix

- Une application bilineaire $\nabla : \chi(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ qui verifie

$$\begin{aligned}\nabla_{f.X} S &= f \nabla_X S \\ \nabla_X (fS) &= f \nabla_X S + (Xf).s\end{aligned}\tag{1.1}$$

- Une application lineaire $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M, E)$ definit par $S \rightarrow (X \rightarrow \nabla_X S)$ qui verifie la formule de Leibniz juste au dessus

Theorem 1.3.1. *L'espace \mathcal{A} des connexions sur E est un espace affine de direction $\Omega^1(M, \text{End}(E))$. En d'autres termes, si ∇ est une connexion et $A \in \Omega^1(M, \text{End}(E))$, alors $A + \nabla$ est une connexion.*

1.4 Fibre principaux

G groupe de Lie. Il agit sur lui meme par conjugaison, et sur son algebre par le releve de la conjugaison.

Definition 1.4.1. Soit G un groupe de Lie. Un G -fibre principal est une variete diff P munie d'une action libre a droite $P \times G \rightarrow P$, $(p, g) \rightarrow p.g$ dont les fibres $\pi^{-1}(x)$, $x \in M$ sont les orbites de P sous l'action de G .

Definition 1.4.2. Section: comme avant

Definition 1.4.3. Soit (P, π, M) un G -fibre principal. Une connexion sur P est une application $p \in P \rightarrow H_p \subset T_p P$ qui verifie

1. $T_p P = H_p \oplus V_p$ ou $V_p = \ker((d\pi)_p)$
2. H_p , $p \in P$ est stable par action de G .
3. $p \rightarrow H_p$ est lisse.

Soit $X \in \mathfrak{g}$. On lui associe le champs de vecteurs fondamental \tilde{X} sur P defini par

$$\tilde{X}_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p.e^{tX}\tag{1.2}$$

Definition 1.4.4. 2eme def. (P, π, M) . Une connexion sur P est une 1-forme differentielle $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ tq

1. $\omega(\tilde{X}_p) = X$ pour tout $p \in P, X \in \mathfrak{g}$
2. $(R_g)^{-1} \omega = \text{Ad}(g^{-1}) \omega$ pour tout $g \in G$.

Theorem 1.4.1. *Les deux definitions coincident.*

Theorem 1.4.2. *L'espace \mathcal{A} des connexions sur P est un espace affine de direction $\Omega^1(M, \text{ad}(p))$ (c'est un fibre vectoriel de fibre \mathfrak{g})*

Definition 1.4.5. Soit ω une connexion sur P . Sa courbure est la 2-forme $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ definie par $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]$ ou $[\omega \wedge \omega]$ est definie par $[\omega \wedge \omega](x, y) = 2[\omega(x), \omega(y)]$. ω est dite plate si $\Omega = 0$.

1.5 La mesure de Yang-Mills

La Theorie de Yang Mills est une theorie de jauge (des equa diff sur des sections de fibre) non-abelienne. La theorie de YM avec $G = SU(2) \times U(1) \times SU(3)$ est le modele standard ($U(1)$ pour la charge electrique, $SU(3)$ pour la couleur, et $SU(2)$ pour la charge faible). L'espace temps est la variete, l'espace des champs est le G -fibre principal.

La mesure de Yang Mills euclidienne est une mesure sur \mathcal{A} definie par

$$d\mu_{YM}(\omega) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2T} S_{YM}(\omega)} d\omega \quad (1.3)$$

Avec Z la fonction de partition, T la constante de couplage et S l'action de Yang Mills definie par

$$S_{YM}(\omega) = ||\Omega||^2 = \frac{1}{2} \int_M < \Omega \wedge * \Omega > \quad (1.4)$$

Chapter 2

Construction de la mesure

Chapter 3

Calcul de la fonction de partition

Chapter 4

Etude asymptotique