Министерство цифрового развития, связи и массовых коммуникаций
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики»
(СибГУТИ)

Храмова Татьяна Викторовна

Козлова Марина Петровна

Элементы математического анализа

Учебное пособие

Новосибирск
2023

УДК — 51(075.8)

Утверждено редакционно-издательским советом СибГУТИ

Рецензенты: д.т.н., проф. Ельцов И. Н., д.т.н., доц. Нечта В. И.

Храмова Т. В., Козлова М. П. Элементы математического анализа: учебное пособие / Т. В. Храмова, М. П. Козлова; Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики: каф. высшей математики. – Новосибирск, 2023. – 84 с.

Учебное пособие предназначено для студентов направлений 09.03.01 и 11.03.02. Пособие содержит необходимый теоретический материал, задания для практических занятий и самостоятельной работы. Пособие рекомендуется использовать в учебном процессе в начале изучения дисциплин "математика"и "высшая математика". В издании изложены основные разделы математического анализа освоение которых необходимо в самом начале обучения для успешного освоения учебной программы по всем дисциплинам базового цикла.

Содержание

О структуре пособия

Учебное пособие состоит из семи основных разделов, которые содержат теоретический материал и задачи по высшей математике. Объём материала рассчитан на 32 академических часа, которые охватывают первые месяцы годового курса для студентов технических специальностей.

Цель этого пособия сделать переход от школьной программы к изучению высшей математики наиболее плавным, не перегружать курс терминологией на начальных этапах и помочь "технарям" не терять связь с реальностью при изучении полной абстракций дисциплины.

План практических занятий отличается от традиционной стратегии "пределы-производные-интегралы" и рассчитан на "постепенное погружение". В то же время, на лекционных занятиях изложение теоретического материала идёт по традиции. На первых занятиях студенты повторяют изученные в школе разделы математического анализа и осваивают более сложные методы в рамках уже знакомых тем. Большое внимание уделено закреплению изученного материал — решению небольших прикладных задач. Каждый следующий урок опирается на предыдущие и связывает их в единую логическую цепочку.

Первый и второй раздел — повторение дифференцирования функции, приложений производной к исследованию функции на монотонность и экстремум. На первом занятии наша цель — вспомнить формулы дифференцирования и усовершенствовать технику вычисления производных.

Третий раздел посвящен связи производной и первообразной, поверхностному изучению методов интегрирования. Важно понимать, что на начальном этапе не требуется глубокого изучения способов нахождения первообразной — это тема для уже окрепших умов. В первую очередь нужно прочувствовать связь между производными и интегралами.

Для того, чтобы закрепить навыки интегрирования, в четвёртом разделе изучается определённый интеграл и некоторые его приложения.

Пятое занятие посвящено простейшим дифференциальным уравнениям первого порядка. Это довольно сложная тема, но она прекрасно демонстрирует связь интегрирования и дифференцирования, позволяет попрактиковаться в умении вычислять неопределённый интеграл.

Методы вычисления предела, которым традиционно посвящают первые занятия в классическом изложении курса высшей математики, мы изучаем только в шестом разделе. Здесь рассматривается нескольких примеров для раскрытия неопределённостей с помощью преобразования формулы функции, затем для вычисления пределов применяются теоремы дифференцирования.

Следующий раздел, седьмой, посвящён исследованию непрерывности функции и опирается на вычисление предела.

В начале каждого раздела есть небольшой теоретический обзор, ссылки на литературу и видеоматериалы. Задания внутри разделов располагаются по возрастанию уровня сложности. Первые упражнения студенты могут решить опираясь на представленные в пособии примеры и справочные материалы. Дальше задачи усложняются, требуют осмысления нового материала и умения использовать полученные ранее (в том числе, в курсе школьной математики) знания. Такая структура позволяет отработать навыки владения математическим аппаратом и закрепить пройденный материал, научиться применять его в решении практических задач.

В конце пособия предложены тесты для самопроверки, варианты контрольной работы и итогового тестирования.

1 Дифференцирование функций

Производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ так же является функцией, область определения $f'(x)$ включена в область определения $f(x)$, т.е. может быть такой же или меньше.

Определение понятия производной упирается в определения предела. Для поверхностного изучения темы и решения базовых задач, вам будет достаточно материала на страницах этого пособия. Для более глубокого понимания темы рекомендуется повторить соответствующий теоретический материал школьной программы (Рисунок 1).

а) б) в) г)

Рисунок 1 — Ссылки на тематические видеоуроки к занятию:
а) понятие функции; б) предел функции;
в) правила дифференцирования; г) таблица производных

Рекомендуемая литература к разделу 1 [1, 8]

1. "Конспект лекций по высшей математике (в 2 ч.)", Письменный Д. Т. , 2004 г., — ч. 1, глава V, параграф 20 "Производная функции".

2. "Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый уровень)", А.Г. Мордкович., изд-е 13-е, 2012 г. — глава 5 "Производная", параграфы 24-28.

3. Предел и производная. Видеоуроки. http://t.khr.tilda.ws/predel.

1.1 Производные основных элементарных функций

	Формула	**Функция**
1.	$C' = 0,\ C = const$	константа
2.	$(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{R}$ частные случаи: $x' = 1,\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	степенная функция
3.	$(a^x)' = a^x \ln a,\ a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$ частный случай: $(e^x)' = e^x$	показательная функция
4.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$ другая запись: $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$ частный случай: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	логарифмическая функция
5.	$(\sin x)' = \cos x$	синус
6.	$(\cos x)' = -\sin x$	косинус
7.	$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	тангенс
8.	$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	котангенс
9.	$(\mathrm{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	арксинус
10.	$(\mathrm{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	арккосинус
11.	$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	арктангенс
12.	$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	арккотангенс

1.2 Правила дифференцирования

Формула	Правило
а) $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x),\ C = const,$	константу можно вынести;
б) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$	производная суммы/разности;
в) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$	производная произведения;
г) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)},$	производная частного;
д) $(f(g(x))' = f'_g(g) \cdot g'_x(x),$	производная сложной функции.

1.3 Примеры решения задач

Пример 1.1. Даны функции $y_1(x) = \sin x$ и $y_2 = x^3$.
Найдите производные следующих функций:

$$1)\, y_1(x) + y_2(x),\ 2)\, y_1(x) \cdot y_2(x),\ 3)\, \frac{y_1(x)}{y_2(x)},$$

$$4)\, \frac{y_2(x)}{y_1(x)},\ 5)\, y_1(y_2(x)),\ 6)\, y_2(y_1(x)),$$

$$7)\, y_1\left(\frac{1}{y_2(x)}\right),\ 8)\, y_2\left(\frac{1}{y_1(x)}\right),\ 9)\, y_1(y_2(y_1(x))).$$

Решение.

Для того, чтобы найти производную суммы $y_1 + y_2$, используем формулы 2 и 5 из таблицы производных и правило дифференцирования б):

$$1)\, (y_1 + y_2)' = (\sin x + x^3)' = (\sin x)' + (x^3)' = \cos x + 3x^2.$$

Для вычисления производной произведения и частного используем правила дифференцирования в) и г):

$$2)\, (y_1 \cdot y_2)' = (\sin x \cdot x^3)' = (\sin x)' \cdot x^3 + \sin x \cdot (x^3)' = \cos x \cdot x^3 + \sin x \cdot 3x^2 =$$

$$= x^3 \cos x + 3x^2 \sin x;$$

$$3)\ \left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \left(\frac{\sin x}{x^3}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x^3 - \sin x \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot x^3 - \sin x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^3 \cos x - 3x^2 \sin x}{x^6};$$

$$4)\ \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \left(\frac{x^3}{\sin x}\right)' = \frac{(x^3)' \cdot \sin x - x^3 \cdot (\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x};$$

Для вычисления производной от сложной функции (композиции) используется правило дифференцирования д):

$$5)\ (y_1\,(y_2(x)))' = \big(\sin(x^3)\big)' = \cos x^3 \cdot (x^3)' = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3;$$

$$6)\ (y_2\,(y_1(x)))' = \big(\sin^3(x)\big)' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x;$$

$$7)\ \left(y_1\left(\frac{1}{y_2(x)}\right)\right)' = \left(\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)' = \big(\sin\big(x^{-3}\big)\big)' = \cos\left(x^{-3}\right) \cdot \left(x^{-3}\right)' =$$

$$= \cos\left(x^{-3}\right) \cdot \left(-3x^{-4}\right) = -\frac{3}{x^4} \cos\left(\frac{1}{x^3}\right);$$

$$8)\ \left(y_2\left(\frac{1}{y_1(x)}\right)\right)' = \left(\left(\frac{1}{\sin x}\right)^3\right)' = \left(\frac{1}{\sin^3 x}\right)' = \left(\sin^{-3} x\right)' =$$

$$= -3\sin^{-4} x \cdot (\sin x)' = -3\sin^{-4} x \cos x;$$

$$9)\ (y_1\,(y_2(y_1(x))))' = \big(\sin\big(\sin^3 x\big)\big)' = \cos\left(\sin^3 x\right) \cdot \left(\sin^3 x\right)' =$$

$$= \cos\left(\sin^3 x\right) \cdot 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = \cos\left(\sin^3 x\right) \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

1.4 Упражнения к разделу 1

1.1. Найдите производные функций с помощью таблицы и правил дифференцирования.

а) $y = \ln x + \sin x$; **б)** $y = \mathrm{tg} x - 4e^x$;

в) $y = 4\mathrm{arcsin} x - 5\log_3 x$; **г)** $y = \log_x 3 + 3^x$;

д) $y = \dfrac{2}{x^2} + \mathrm{arctg}\, x$; **е)** $y = \arcsin x - \arccos x$;

ж) $y = \mathrm{ctg}\, x - \mathrm{tg}\, x$; **з)** $y = a^{x+1} + x^{a+1}, a > 0, a \neq 1$.

1.2. Продифференцируйте функции а)-и), предварительно упростив. Укажите область определения и область значений каждой функции.

а) $y = x^5$; **б)** $y = \sqrt[5]{x}$; **в)** $y = \sqrt[3]{x^4}$;

г) $y = x\sqrt{x^5}$; **д)** $y = \sqrt[7]{\sqrt[3]{x^5}}$; **е)** $y = x^2\sqrt[7]{x\sqrt[3]{x^5}}$;

ж) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$; **з)** $y = \dfrac{x^2\sqrt{\sqrt[3]{x^{12}}}}{x\sqrt{x}}$; **и)** $y = \dfrac{x^5\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^5}}}{\sqrt[7]{\sqrt[3]{x^5}}}$.

Правила работы со степенями:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c},\ a^c \cdot b^c = (ab)^c,\ \left(a^b\right)^c = a^{bc},\ a^{-b} = \frac{1}{a^b},\ \sqrt[b]{a} = a^{1/b}.$$

1.3. Продифференцируйте данные функции.

а) $y = (x^2 + 4x - 3)\log_2 x$; **б)** $y = e^x \ln x$;

в) $y = 3^x \log_3 x$; **г)** $y = x^3 \sin x$;

д) $y = e^x \cos x$; **е)** $y = x^2 \mathrm{arctg} x$;

ж) $y = \dfrac{\mathrm{arcsin} x}{x^2}$; **з)** $y = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{x}}$;

и) $y = \dfrac{x^5 \cos x}{3^x}$; **к)** $y = \dfrac{\sin x}{2^x \ln x}$;

л) $y = x^5 3^x \cos x$; **м)** $y = 2^x \sin x \ln x$.

1.4. Для заданных функций $y_1 - y_8$ составьте указанные композиции и найдите производные полученных сложных функций.

$$y_1(x) = x^2,\ y_2(x) = e^x,\ y_3(x) = \ln x,\ y_4(x) = \sin x,\ y_5(x) = \cos x,$$

$$y_6(x) = \mathrm{tg} x,\ y_7(x) = \mathrm{arctg} x,\ y_8(x) = \mathrm{arcsin} x.$$

а) $y = y_1(y_2(x));$ **б)** $y = y_2(y_1(x));$

в) $y = y_1(y_2(x)) \cdot y_3(x);$ **г)** $y = y_1(y_2(y_3(x)));$

д) $y = y_2(y_1(y_4(x)));$ **е)** $y = y_7(y_3(x) \cdot y_6(x));$

ж) $y = y_6(y_1(y_1(x)));$ **з)** $y = \dfrac{y_8(x)}{y_4(y_1(x))}.$

1.5. Продифференцируйте данные функции.

а) $y = \ln \sin x^2;$ **б)** $y = \ln \sin^2 x;$

в) $y = \ln^2 \sin x;$ **г)** $y = 3^{\mathrm{arcsin} x};$

д) $y = \mathrm{arcsin} 3^x;$ **е)** $y = e^x \mathrm{arctg} x^3;$

ж) $y = \dfrac{\mathrm{arcsin}\sqrt{x}}{\sin x^2};$ **з)** $y = \dfrac{\ln \sin x}{\cos x}.$

1.6. Продифференцируйте данные функции. Предварительно следует воспользоваться основным логарифмическим тождеством:

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}.$$

а) $y = x^{\sin x};$ **б)** $y = (1 + \ln x)^x;$

в) $y = x^{x^{x^2}};$ **г)** $y = (1 + x^2)^{\mathrm{arcsin} x}.$

2 Приложения производной

2.1 Исследование монотонности и экстремумы

Производная в точке является числом, равным тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке. Изучая знак производной можно охарактеризовать рост функции: если производная (тангенс угла наклона касательной, т.е. угловой коэффициент касательной) положительна, то функция возрастает, если отрицательна — убывает (Рисунок 2). В точках, где производная равна нулю, касательная горизонтальна – такие точки называются **стационарными**. Производная характеризует гладкость графика, в точках разрыва и "излома" производная не определена. Точки, в которых функция определена, но где производная равна нулю или не существует, называются **критическими**.

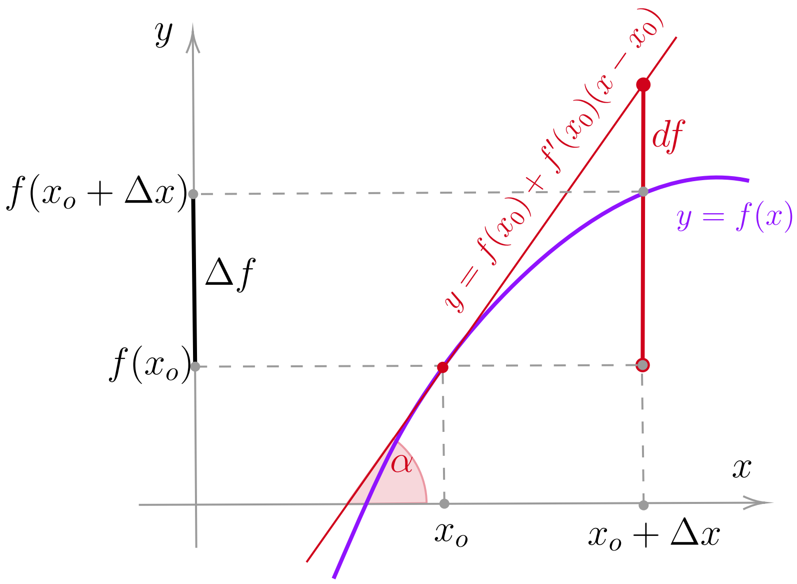


Рисунок 2 — Геометрический смысл производной. Значение производной $f'(x_o)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_o; f(x_o))$ т.е. $f'(x_o) = \mathrm{tg}\alpha$

В точках локального экстремума производная равна нулю или не определена, что связано с геометрическим смыслом производной: касательная в точках экстремума горизонтальна или не существует, если экстремум в точке "излома" (Рисунок 3). На участках между точками разрыва и точками экстремума функция ведёт себя монотонно: возрастает или убывает.

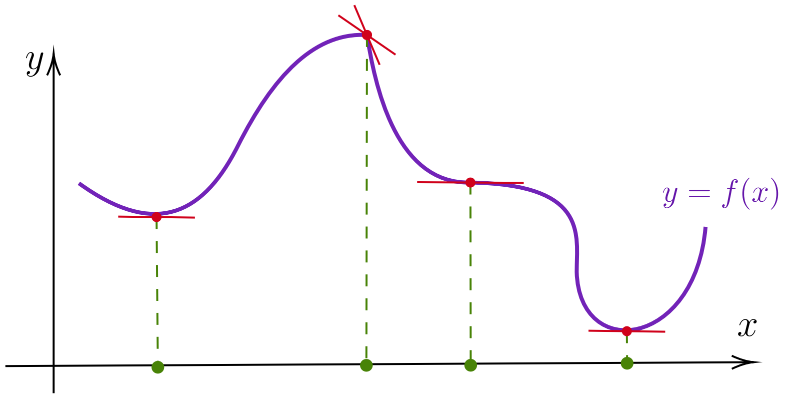


Рисунок 3 — На рисунке отмечены критические точки функции

Чтобы найти экстремумы и участки монотонности следует
1) найти производную функции $f'(x)$;
2) найти точки в которых $f'(x)$ равна нулю или не определена;
3) определить знаки $f'(x)$ на промежутках между точками, найденными в п. 2);
4) определить участки монотонности:

$f'(x)$ положительна, следовательно $f(x)$ возрастает,

$f'(x)$ отрицательна, следовательно $f(x)$ убывает;

5) определить экстремумы — это точки из п.2), в которых функция $y = f(x)$ определена, и, при переходе через которые производная $f'(x)$ меняет знак.

Для лучшего понимания рекомендуется изучить следующие темы:

1. Основные теоремы дифференцирования.

2. Монотонность и экстремумы функции.

Рекомендуемая литература [1, 8]

1. "Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый уровень)", А.Г. Мордкович., изд-е 13-е, 2012 г. — глава 5 "Производная", параграф 30 "Применение производной для исследования функции на монотонность и экстремумы".

2. "Конспект лекций по высшей математике (в 2 ч.)", Письменный Д. Т., 2004 г., — ч. 1, глава V, параграф 25 "Исследование функции при помощи производных".

3. Предел и производная. Видеоуроки. http://t.khr.tilda.ws/predel

2.2 Примеры решения задач

Пример 2.1. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$f(x) = x - x^3$$

в точке $x_0 = 1$, запишите уравнение касательной в этой точке.
Решение. Из геометрического смысла значение производной функции, вычисленное в точке x_0, равно тангенсу угла, образованного положительным направлением оси Ox и положительным направлением касательной, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 (см. Рисунок 2).
Найдём производную от заданной функции

$$f'(x) = (x - x^3)' = 1 - 3x^2,$$

тогда значение производной в точке $x_0 = 1$ будет равно $f'(x_0) = f'(1) = -2$, значит

$$\operatorname{tg}\alpha = -2.$$

Найдем значение функции в заданной точке $f(x_0) = f(1) = 0$, подставляем полученные значения в уравнение касательной, получаем

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 - 2(x - 1) = 2x - 2.$$

Пример 2.2. Найдите точки экстремума функции

$$y = x^2 - 5\ln(x^2 + 4).$$

Решение. Функция $y = x^2 - 5\ln(x^2 + 4)$ определена для всех действительных x. Найдём производную функции

$$y' = 2x - \frac{10x}{x^2 + 4}.$$

Производная также определена для всех действительных x. Найдём нули производной:

$$2x - \frac{10x}{x^2 + 4} = 0, \quad \frac{2x(x^2 - 1)}{x^2 + 4} = 0, \quad x = 0; \pm 1.$$

Для наглядности, изобразим интервалы на числовой прямой и отметим знаки производной и поведение функции (Рисунок 4). Проанализируем полученные результаты:

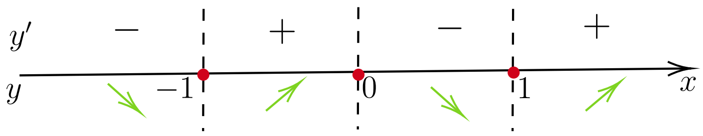


Рисунок 4 — Иллюстрация к примеру 2.2. Над осью отмечены знаки производной, а под осью — поведение функции

в точке $x = -1$ знак производной меняется с "$-$" на "$+$", следовательно $x = -1$ — точка минимума;

в точке $x = 0$ знак производной меняется с "$+$" на "$-$", следовательно $x = 0$ — точка максимума;

в точке $x = 1$ знак производной меняется с "$-$" на "$+$", следовательно $x = 1$ — точка минимума.

2.3 Упражнения к разделу 2

2.1. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y(x)$ в точке x_0, постройте эскиз графика функции $y(x)$ и касательную в этой точке.

а) $y = x^4 - 3$ в точке $x_0 = 1$;

б) $y = (x-2)^3$ в точке $x_0 = 3$;

в) $y = \sqrt[3]{(x+1)}$ в точке $x_0 = 0$;

г) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ в точке $x_0 = 1$;

д) $y = e^x + 1$ в точке $x_0 = 0$;

е) $y = \arcsin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

2.2. Найдите интервалы монотонности функций а)-з).

а) $y = (x-2)^5(2x+1)^4$; **б)** $y = \dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$;

в) $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$; **г)** $y = x - e^x$;

д) $y = x^2 e^{-x}$; **е)** $y = \dfrac{x}{\ln x}$;

ж) $y = 2x^2 - \ln x$; **з)** $y = x + \cos x$.

2.3. Найдите экстремумы функций а)-е).

а) $y = 2x^3 - 3x^2$; **б)** $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{1 + x + x^2}$;

в) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 64}$; **г)** $y = \dfrac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)}$;

д) $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$; **е)** $y = x - \ln(1+x)$.

2.4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций а)-г) на указанных промежутках.

а) $y = x + 2\sqrt{x},\ x \in [0; 4]$; **б)** $y = \sqrt{100 - x^2},\ x \in [-6; 8]$;

в) $y = \dfrac{x-1}{x+1},\ x \in [0; 4]$; **г)** $y = \sin 2x - x,\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3 Первообразная и интеграл

3.1 Неопределённый интеграл и его свойства

Понятие первообразной связано с понятием производной, здесь всё интуитивно понятно. В отличие от вычисления производной, нахождение первообразной является очень творческим процессом, не всегда возможным.

Функция $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ для всех допустимых значений аргумента x. Первообразная определена с точностью до постоянного слагаемого.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (C - const),$$

где $f(x)$ - подынтегральная функция,

dx - дифференциал (приращение) аргумента,

$F(x)$ - первообразная,

$f(x)dx$ - дифференциал первообразной.

3.2 Свойства неопределённого интеграла

а) $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx = \int f(x)dCx,$

б) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$

в) $\int f(x)dx = \int f(x)d(x + b),$

г) $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))dg(x),$

д) $\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x).$

Формула д) называется "формула интегрирования по частям".

3.3 Таблица интегралов

1. $\displaystyle\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1);$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad ;$

3. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

4. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C \quad ;$

5. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C;$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C \qquad ;$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C;$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C;$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mathrm{arcsin}\frac{x}{a} + C;$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \ ;$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C;$

12. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \cdot \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

13. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\frac{x}{a} + C.$

Понятие дифференциала функции является ключевым для понимания методов интегрирования, которые подробно и обстоятельно в этом разделе мы изучать не будем. Дифференциал связан с производной соотношением

$$d(u(x)) = u'(x)\, dx, \quad u'(x) = \frac{du}{dx}.$$

Например

$$d(\sin x) = \cos x\, dx,\ \ d(x^3 + \cos 2x) = (3x^2 - 2\sin 2x)\, dx.$$

Свойства дифференциала повторяют свойства производной.

В нашем курсе мы ограничимся заданиями умеренной сложности, вам будет достаточно материала на страницах этого пособия, воображения и терпения. Для более глубокого понимания темы рекомендуется изучить следующий теоретический материал:

1. Неопределённый интеграл, определение, условия существования, свойства, вывод таблицы интегралов.

2. Методы интегрирования дробно-рациональных, тригонометрических, иррациональных функций (Рисунок 5).

а) б) в) г)

Рисунок 5 — Ссылки на тематические видеоуроки к занятию:
а) простейшие приёмы интегрирования;
б) интегрирование по частям; в) интегрирование дробей;
г) интегрирование тригонометрии

Рекомендуемая литература

1. "Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый уровень)", А.Г. Мордкович., изд-е 14-е, 2013 г. — Глава 8 "Первообразная и интеграл", параграф 48 "Первообразная".

2. "Конспект лекций по высшей математике (в 2 ч.)", Письменный Д. Т., 2001 г., — ч. 1, глава VII "Неопределённый интеграл".

3. Интеграл. Видеоуроки. http://t.khr.tilda.ws/integrallecture

3.4 Упражнения к разделу 3

3.1. Найдите интегралы а)-з) с помощью таблицы.

а) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx;$ **б)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2};$

в) $\displaystyle\int 10^{x+1}\,dx;$ **г)** $\displaystyle\int 2^x e^x\,dx;$

д) $\displaystyle\int 3,4x^{-0,17}dx;$ **е)** $\displaystyle\int \frac{2dx}{x^2+4};$

ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}\;;$ **з)** $\displaystyle\int \sqrt{5-x^2}\,dx.$

3.2. Найдите интегралы а)-з) с помощью таблицы и основных свойств.

а) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-x^2e^x}{x^2}\,dx;$ **б)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-4x^2}};$

в) $\displaystyle\int \sqrt{5x^2+20}\,dx;$ **г)** $\displaystyle\int (x+\sqrt{5x}-3x^5)\,dx;$

д) $\displaystyle\int (\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+\mathrm{tg}\,5)\,dx;$ **е)** $\displaystyle\int x^2(3+4x)^2\,dx;$

ж) $\displaystyle\int (\frac{(\sqrt{x}-3x)^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx;$ **з)** $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx.$

3.3. Найдите интегралы а)-е), используя линейность дифференциала:

$$dx = d(x+a),\;\; dx = \frac{1}{a}d(ax).$$

а) $\displaystyle\int \sqrt[3]{4x+5}\,dx;$ **б)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+1};$

в) $\displaystyle\int \sin{(2-3x)}\,dx;$ **г)** $\displaystyle\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx;$

д) $\displaystyle\int (5-7x)^9\,dx;$ **е)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+10}.$

3.4. Найдите дифференциал функции, если известна ее производная.

$$d(f(x)) = f'(x)dx$$

а) xdx; **б)** $e^x dx$; **в)** $-\dfrac{dx}{x^2}$;

г) $\dfrac{dx}{\cos^2 5x}$; **д)** $\dfrac{dx}{\sqrt{3x}}$; **е)** $\dfrac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

ж) $\sin 2x dx$; **з)** $4(x-4)^3 dx$; **и)** $\dfrac{1}{(x+3)^2}dx$.

3.5. Найдите интегралы а)-е), проявив смекалку.

а) $\displaystyle\int \sin 3x \cos 5x \, dx$; **б)** $\displaystyle\int \frac{(x^2+4x+5)dx}{x+2}$;

в) $\displaystyle\int \sin^2(2-3x)\, dx$; **г)** $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x\, dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{(2x+3)\, dx}{(x^2+3x+5)^2}$; **е)** $\displaystyle\int \frac{(1+\cos^2 x)\, dx}{1-\cos^4 x}$.

3.6. Найдите интегралы а)-з), сделав замену переменной

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))dg(x).$$

а) $\displaystyle\int 3x^2 \sin x^3 \, dx$; **б)** $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x\, dx}{x}$;

в) $\displaystyle\int \sin x \sqrt{\cos x}\, dx$; **г)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}^2 x\, dx}{\cos^2 x}$;

д) $\displaystyle\int \frac{\ln x \sin(\ln^2 x)\, dx}{x}$; **е)** $\displaystyle\int \frac{\sin x e^{\mathrm{arctg}(\cos x)}\, dx}{1+\cos^2 x}$;

ж) $\displaystyle\int \frac{\cos x \sin(\ln(\sin x))\, dx}{\sin x}$; **з)** $\displaystyle\int \frac{2x \sin(\mathrm{arctg} x^2)\, dx}{1+x^4}$.

3.7. Найдите интегралы а)-е), используя формулу интегрирования по частям $\displaystyle\int f(x)\, dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\, df(x)$.

а) $\displaystyle\int x\cos x\, dx$; **б)** $\displaystyle\int \ln x\, dx$; **в)** $\displaystyle\int x^2 \sin x\, dx$;

г) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$; **д)** $\displaystyle\int \cos \ln x\, dx$; **е)** $\displaystyle\int \mathrm{arcsin} x\, dx$.

4 Определённый интеграл

4.1 Понятие определённого интеграла

Пусть дана функция $f(x)$ непрерывная на промежутке $[a;b]$.

1) разобьём $[a;b]$ на участки точками $x_o = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$;

2) вычислим значение функции на участке: $f(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$;

3) умножим длину участка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ на $f(\xi_i)$;

4) составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

5) Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ — это предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на части и от выбора точек ξ_i :

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Определённый интеграл связан с неопределённым, хотя по своей структуре это совершенно другой объект: определённый интеграл это число, неопределённый — множество функций.

На данном этапе нам достаточно понимать как вычисляется определённый интеграл:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т.е. определённый интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$ равен приращению её первообразной $F(x)$ на этом промежутке.

а) б) в)

Рисунок 6 — Ссылки на тематические видеоуроки к занятию: а) определённый интеграл; б) вычисление площадей; в) несобственные интегралы

Основные свойства определённого интеграла

1. $\int\limits_a^b (Af_1(x) + Bf_2(x))\,dx = A\int\limits_a^b f_1(x)\,dx + B\int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$

2. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$, аддитивность.

3. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$

4. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, формула Ньютона-Лейбница.

В нашем курсе мы ограничимся заданиями умеренной сложности, вам будет достаточно материала на страницах этого пособия, воображения и терпения. Для более глубокого понимания темы рекомендуется изучить следующий теоретический материал (Рисунок 6):

1. Определённый интеграл, формула Ньютона-Лейбница.
2. Приложения определённого интеграла.
3. Несобственный интеграл.

Рекомендуемая литература к разделу 4 [1, 8]

1. "Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый уровень)", А.Г. Мордкович., изд-е 13-е, 2012 г. — Глава 8 "Первообразная и интеграл", параграф 49 "Определённый интеграл".
2. "Конспект лекций по высшей математике (в 2 ч.)", Письменный Д. Т., 2001 г., — ч. 1, глава VIII "Определённый интеграл".
3. Интеграл. Видеоуроки. http://t.khr.tilda.ws/integrallecture

4.2 Приложения определённого интеграла

4.2.1 Площадь криволинейной трапеции

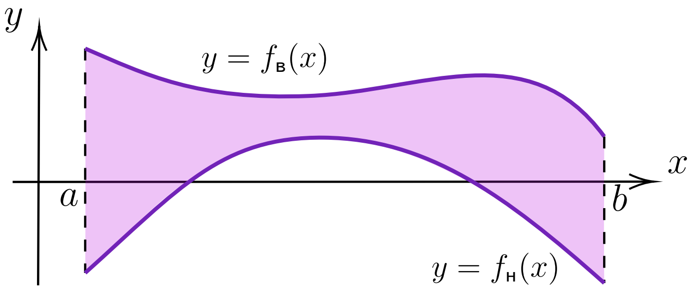


Рисунок 7 — Площадь криволинейной трапеции

Если фигура ограничена двумя кривыми (Рисунок 7) $y = f_в(x)$, $y = f_н(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, то площадь вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b (f_в(x) - f_н(x))\, dx.$$

Если область ограничена более, чем двумя кривыми, то область надо разбить на несколько областей.

4.2.2 Длина дуги

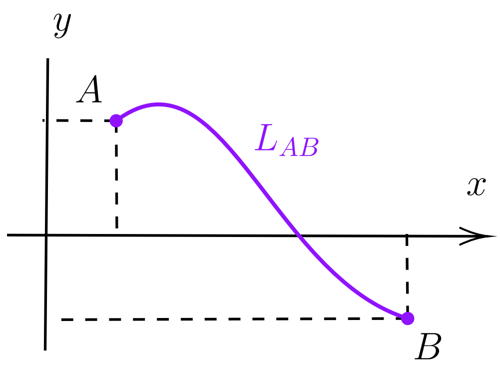


Рисунок 8 — Длина дуги

Длина дуги L_{AB}, лежащей на кривой заданной функцией $y = f(x)$ (Рисунок 8) вычисляется по формуле

$$L_{AB} = \int\limits_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

4.2.3 Объём тела вращения

Объём тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции (Рисунок 9), ограниченной кривой $L_{AB}: \ y = f(x)$ и прямыми $x = x_A, \ x = x_B, \ y = 0$ вокруг оси Ox вычисляется по формуле

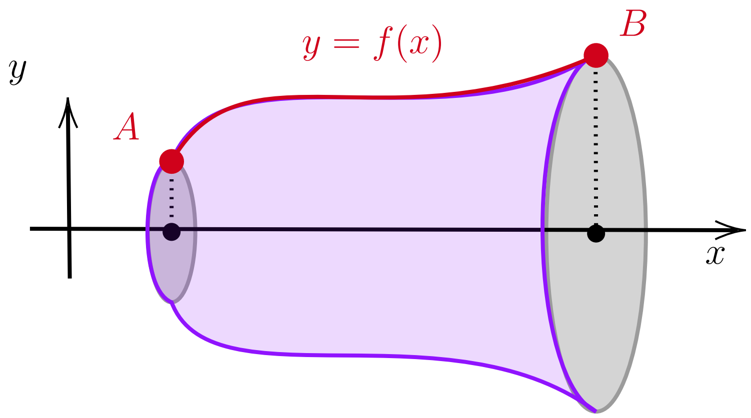


Рисунок 9 — Объём тела вращения

$$V_{Ox} = \pi \int\limits_{x_A}^{x_B} f^2(x)\,dx$$

4.2.4 Площадь поверхности вращения

Площадь поверхности, полученной в результате вращения вокруг оси Ox дуги L_{AB}, лежащей на кривой, заданной функцией $y = f(x)$ вычисляется по формуле

$$S_{Ox} = 2\pi \int\limits_{x_A}^{x_B} y(x) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx.$$

4.2.5 Среднее значение функции на интервале

Среднее значение функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ вычисляется по формуле

$$f^* = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Последняя формула следует из теоремы Лагранжа $c \in [a; b]: \ F'(c) = \dfrac{F(b) - F(a)}{b - a}$. Геометрически, среднее значение — это высота прямоугольника, равного по площади подграфику функции (Рисунок 10).

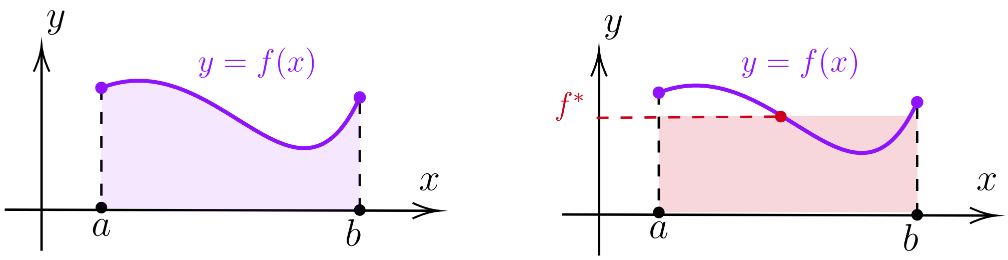


Рисунок 10 — Среднее значение функции на интервале

4.2.6 Центр тяжести однородной пластины

Центр тяжести однородной пластины (Рисунок 11), которая имеет форму криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = f(x) \geq 0,\ x = x_A,\ x = x_B,\ y = 0$, вычисляется по формуле

$$x_c = \frac{\int\limits_{x_A}^{x_B} xy(x)\,dx}{\int\limits_{x_A}^{x_B} y(x)\,dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_{x_A}^{x_B} y^2(x)\,dx}{\int\limits_{x_A}^{x_B} y(x)\,dx}$$

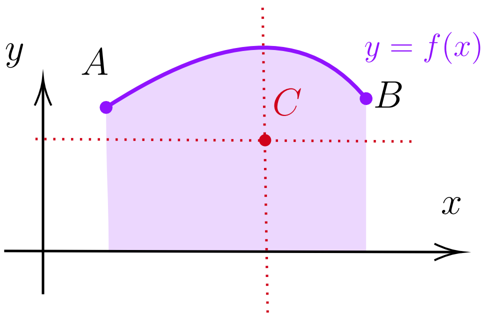


Рисунок 11 — Центр тяжести однородной пластины

4.2.7 Центр тяжести плоской кривой

Центр тяжести плоской кривой $L_{AB}:\ y = f(x)$ от точки A до точки B (Рисунок 12), вычисляется по формуле

$$x_c = \frac{\int\limits_{x_A}^{x_B} x\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}{\int\limits_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}, \quad y_c = \frac{\int\limits_{x_A}^{x_B} y\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}{\int\limits_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}$$

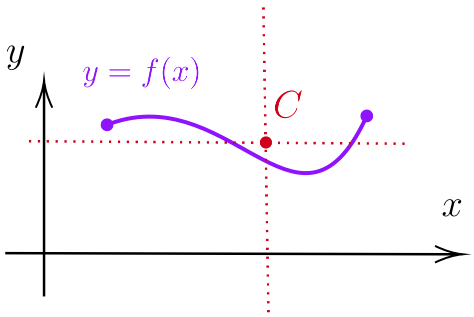


Рисунок 12 — Центр тяжести плоской кривой

4.3 Примеры решения задач

Пример 4.1. Вычислить объём тела, полученного в результате вращения кривой $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ вокруг оси Ox (Рисунок 13).

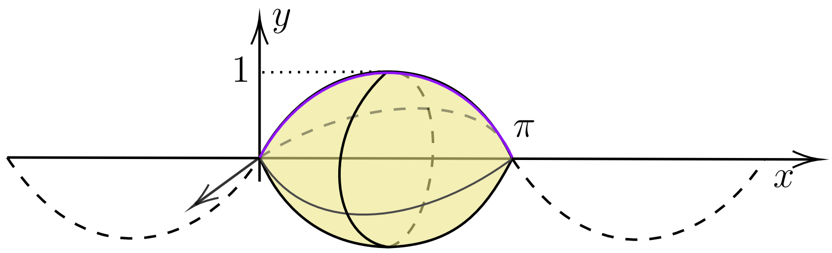


Рисунок 13 — Иллюстрация к примеру 4.1

$$V_{Ox} = \pi \int\limits_a^b y^2(x)\,dx$$

$$V_{Ox} = \pi \int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi \int\limits_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \pi \int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi \int\limits_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\left(0 - \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi^2}{2}$

Пример 4.2. Найдите координаты центра масс однородной плоской пластины (Рисунок 14), которая имеет форму области, ограниченной кривыми

$$y = \sqrt{x},\ y = \sqrt{1-(x-1)^2},\ y = 0.$$

Решение.

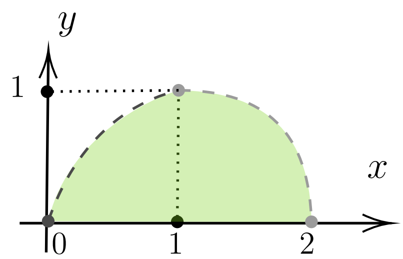


Рисунок 14 — Иллюстрация к примеру 4.2. Форма пластины

Формула для вычисления центра масс $C(x_c; y_c)$ выглядит так:

$$x_c = \frac{\int\limits_{x_A}^{x_B} xy(x)\,dx}{\int\limits_{x_A}^{x_B} y(x)\,dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_{x_A}^{x_B} y^2(x)\,dx}{\int\limits_{x_A}^{x_B} y(x)\,dx}.$$

В первую очередь вычислим знаменатель — по-сути это площадь пластины.

Уравнение $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$ задаёт верхнюю половину окружности радиуса 1 с центром в точке $(1;0)$. Площадь четверти круга радиуса 1 равна $\dfrac{\pi}{4}$.

Вычислим площадь левой части:

$$\int\limits_0^1 y(x)\,dx = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}.$$

В итоге

$$S = \int\limits_{x_A}^{x_B} y(x)\,dx = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

Вычислим числитель выражения для первой координаты центра масс:

$$\int\limits_{x_A}^{x_B} xy(x)\,dx = \int\limits_0^1 x\sqrt{x}\,dx + \int\limits_1^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x^{1,5}\,dx + \int\limits_1^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = \left.\frac{2x^{2,5}}{5}\right|_0^1 +$$

$$+ \int\limits_1^2 (x-1+1)\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5} + \int\limits_1^2 (x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx + \int\limits_1^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx = ...$$

сделаем замену переменной $[u = (x-1),\ 0 \le u \le 1]$

$$... = \frac{2}{5} + \int\limits_0^1 u\sqrt{1-u^2}\,du + \int\limits_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du = ...$$

последний интеграл выражает площадь четверти круга радиуса 1.

$$... = \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du^2 + \frac{\pi}{4} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{1-u^2}\,d(1-u^2) + \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{2(1-u^2)^{1,5}}{3}\right|_0^1 + \frac{\pi}{4} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2}\cdot\left(0 - \frac{2}{3}\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{11}{15} + \frac{\pi}{4}.$$

Вычислим числитель выражения для второй координаты центра масс:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{x_A}^{x_B} y^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\sqrt{x})^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (\sqrt{1-(x-1)^2})^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (1-(x-1)^2)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (2x-x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{1}{2}\left.\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{12}.$$

Вычислим координаты:

$$x_c = \frac{\dfrac{11}{15} + \dfrac{\pi}{4}}{\dfrac{2}{3} + \dfrac{\pi}{4}} = \frac{44 + 15\pi}{40 + 15\pi} \approx 1,05; \quad y_c = \frac{\dfrac{7}{12}}{\dfrac{2}{3} + \dfrac{\pi}{4}} = \frac{7}{8 + 3\pi} \approx 0,4.$$

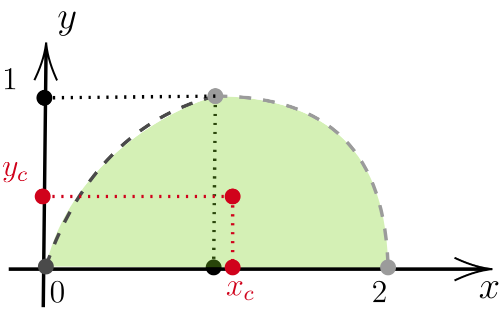


Рисунок 15 — Иллюстрация к примеру 4.2. Центр масс

4.4 Упражнения к разделу 4

4.1. Найдите среднее значение f^* данной функции $y = f(x)$ на указанном промежутке. Постройте эскиз графика функции, отметьте найденное значение, укажите точки в которых оно достигается на данном промежутке.

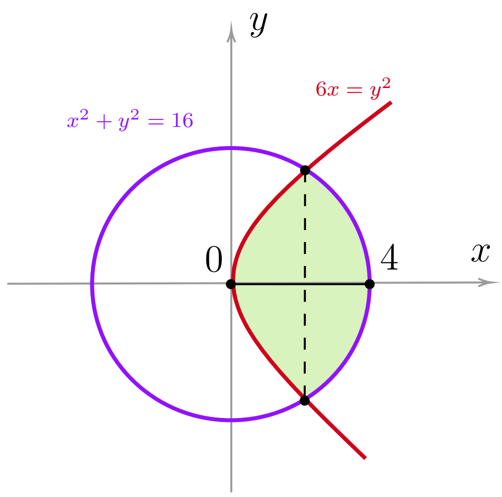
а) $f(x) = x^2 + 4x + 3,\ 0 \le x \le 6;$ **б)** $f(x) = \sqrt{x} + 3,\ 0 \le x \le 9;$

в) $f(x) = \sqrt{4 - x^2},\ 0 \le x \le 2;$ **г)** $f(x) = \dfrac{x+3}{x-3}\ \ -3 \le x \le 2.$

4.2. Найдите площади фигур, ограниченных данными линиями. Фигуры в задачах в)-г) изображены на рисунке (Рисунок 16), точки пересечения кривых найдите самостоятельно.

а) $y = x^2 + 3x + 4,\ y = 1 - x;$ **б)** $y = x^2,\ y = \sqrt{x};$

в) $x^2 + y^2 = 16,\ 6x = y^2;$ **г)** $y = \dfrac{1}{x^2+1},\ y = \dfrac{x^2}{2}.$



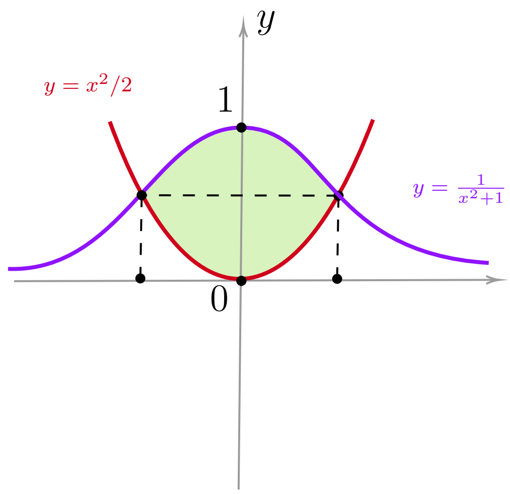


Рисунок 16 — Иллюстрация к заданию 4.2 в) — слева, г) — справа

4.3. Найдите длину дуги кривой на указанном промежутке. Кривые в задачах б)-г) изображены на рисунке (Рисунок 17)

а) $y = x^2,\ 1 \leq x \leq 4;$

б) $y = \ln(1 - x^2),\ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2};$

в) $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2},\ 1 \leq x \leq e;$

г) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}.$

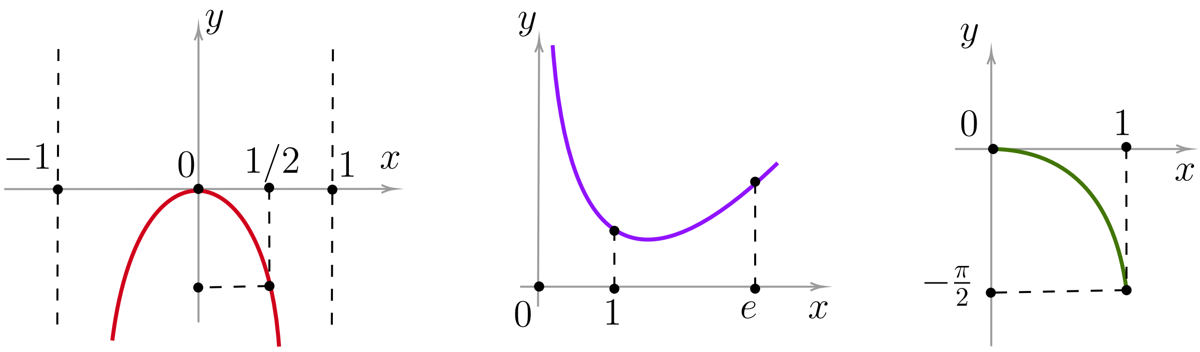


Рисунок 17 — Иллюстрация к заданию 4.3
б) — слева, в) — в центре, г) — справа

4.4. Найдите координаты центра масс плоской пластины.

а) $ABCD$ - трапеция, где $A(0;0),\ B(4;0);\ C(4;4);\ D(0;2);$

б) Область, ограниченная дугой параболы $y = x^2 + 1$ и прямыми $x = -1,\ x = 2;\ y = 0;$

в) Область, ограниченная кривыми $y = \sqrt{1 - x}$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ и прямой $y = 0$ (Рисунок 18).

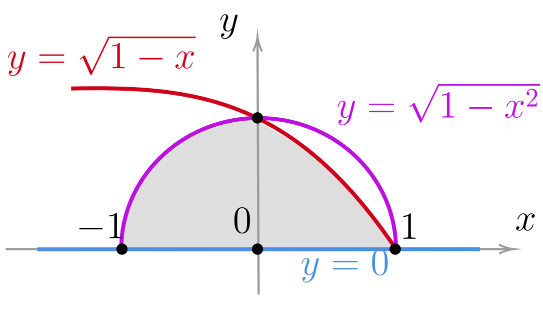


Рисунок 18 — Иллюстрация к заданию 4.4 в)

4.5. Найдите объём тела, ограниченного поверхностью, получающейся при вращении данной кривой вокруг оси $y = 0$. В заданиях а)- в) сделайте чертёж.

а) $y = \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4;$ **б)** $y = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ (x-2)^2, & 1 \le x \le 2; \end{cases}$

в) $y = \dfrac{1}{x}, \ 1 \le x \le 2;$ **г)** $y = \sqrt{1 - \sin x}, \ |x| \le 1$ (Рисунок 19).

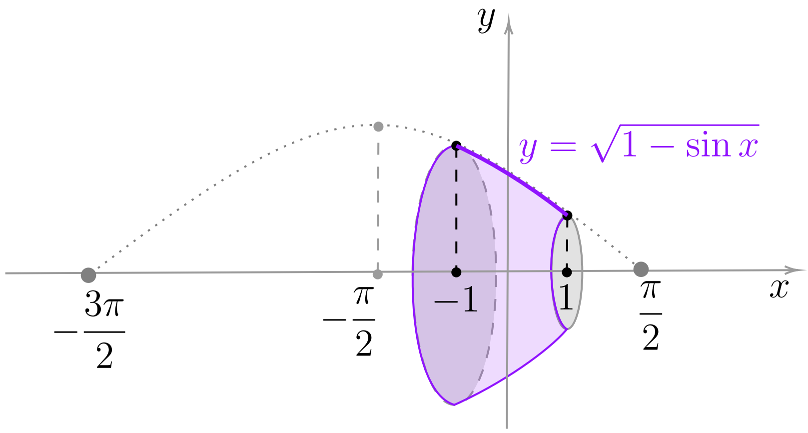


Рисунок 19 — Иллюстрация к заданию 4.5 г)

4.6. Найдите площадь поверхности, получающейся при вращении кривой вокруг оси $y = 0$.

а) $y = \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4;$ **б)** $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi.$

5 Дифференциальные уравнения первого порядка

5.1 Основные определения и теоремы

Уравнение, которое содержит производную называется дифференциальным. Порядок дифференциального уравнения равен максимальному порядку входящих в уравнение производных. В общем виде дифференциальное уравнение выглядит следующим образом:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0.$$

Если уравнение записано в виде

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), ...) = 0,$$

то оно называется **разрешенным относительно старшей производной**. **Решение дифференциального уравнения** — это функция $y(x)$, которая удовлетворяет этому уравнению (т.е. после подстановки, дифференцирования и прочих преобразований мы получим верное равенство).

Логично предположить, что для решения дифференциального уравнения нам понадобится интегрировать. Причём, если уравнение содержи только первую производную, то интегрировать придётся один раз, если уравнение содержит вторую производную, то два раза, и т.д.

Решение может быть найдено как в явной, так и в неявной форме. Если решение найдено в неявном виде

$$\Phi(x, y(x), C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

то оно называется **общим интегралом** дифференциального уравнения. Если же получается выразить искомую функцию явно, то полученное выражение

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

называется **общим решением** дифференциального уравнения.

Переменные C_i в решении уравнения появляются в следствие интегрирования. **Частное решение** — это решение дифференциального уравнения, полученное при некоторых фиксированных значениях констант C_i. Аналогично для **частного интеграла**.

Чтобы найти **частное решение** дифференциального уравнения, формулируется **задача Коши**, которая включает n условий на значение функции и её производных в некоторой точке:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0,$$

$$y(x_o) = y_o,\ y'(x_o) = y_1,\ y''(x_o) = y_2,\ ..., y^{(n-1)}(x_o) = y_{n-1}.$$

Теорема о единственности решения задачи Коши.

Если функция $F(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$ и все её частные производные $F'_y,\ F'_{y^{(i)}},\ i < n$ непрерывны в некоторой области, то для всякой точки этой области существует единственное решение, удовлетворяющее задаче Коши.

Если условия теоремы не выполняются, то решение может и быть, но не единственное. Такие решения называются **особыми**.

Рекомендуемая литература к разделу 5 [2]

1. "Конспект лекций по высшей математике (в 2 ч.)", Письменный Д. Т., 2005 г., — Ч. 2, глава I "Дифференциальные уравнения параграфы 1, 2.

2. Дифференциальные уравнения. Видеоуроки. http://t.khr.tilda.ws/difurlecture

5.2 Некоторые виды дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения

5.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение прервого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если уравнение может быть приведено к виду

$$f(x)dx = g(y)dy,$$

то оно называется **уравнением с разделяющимися переменными** и решается непосредственным интегрированием обоих частей:

$$f(x)dx = g(y)dy\ \Rightarrow\ \int f(x)dx = \int g(y)dy.$$

5.2.2 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Если уравнение может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

то оно называется **однородным**. Для решения такого уравнения используется замена

$$y(x) = u(x) \cdot x, \quad y' = u'x + u,$$

которая сводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \;\Rightarrow\; y = ux \;\Rightarrow\; u'x + u = f(u) \;\Rightarrow\; \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

5.2.3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение, которое можно привести к виду

$$y' + p(x)y = q(x)$$

называется **линейным**.

Для решения линейного уравнения можно использовать подстановку $y = u(x) \cdot v(x)$, которая сводит его к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$$y = u(x) \cdot v(x), \quad y' = u'v + v'u$$

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \quad \Rightarrow \quad u'v + v'u + puv = q,$$
$$(u'v - q) + (v' + pv)u = 0.$$

Первый шаг решения заключается в том, что мы ищем функцию v такую, чтобы второе слагаемое "занулилось" и тут всегда будет достаточно предсказуемое уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' + pv = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -pdx,$$

$$\ln|v| = -\int pdx \quad \Rightarrow \quad v^* = e^{-\int pdx}.$$

Затем, когда найдена одна часть решения, мы подставляем её в уравнение и ищем вторую и на этот раз в общем виде:

$$u'v - q + (v' + pv)u = 0 \quad \Rightarrow \quad u'v^* = q,$$

$$du = \frac{q}{v^*}dx \quad \Rightarrow \quad u = \int \frac{q}{v^*}dx,$$

$$y = e^{-\int p dx} \cdot \int \frac{q}{v^*}dx.$$

Выглядит устрашающе, но на практике всё не так уж и драматично.

5.2.4 Уравнение Бернулли

Уравнение Бурнулли отличается от линейного уравнения степенным множителем в правой части и имеет вид

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)y^n.$$

Уравнение Бернулли можно решить тем же методом, что и линейное:

$$y = u(x) \cdot v(x), \quad y' = u'v + v'u,$$

$$u'v + v'u + p(x) \cdot uv = q(x)u^n v^n,$$

$$(uv' - q(x)u^n v^n) + v(u' + p(x) \cdot u) = 0,$$

$$u' + p(x) \cdot u = 0 \quad \Rightarrow \quad u^*,$$

$$u^* v' - q(x)(u^*)^n v^n = 0 \quad \Rightarrow \quad v,$$

$$y(x) = u^*(x) \cdot v(x).$$

Ниже вы найдёте ссылки на видеоуроки, где подробно решены несколько задач по каждой из тем (Рисунок 20).

а) б) в) г)

Рисунок 20 — Ссылки на тематические видеоуроки к занятию:
а) уравнения с разделяющимися переменными;
б) однородные дифференциальные уравнения;
в) линейные дифференциальные уравнения; г) уравнения Бернулли

5.3 Примеры решения задач

Пример 5.1. Найдите общее решение или общий интеграл уравнения

$$y' = \frac{x^3}{y^2}.$$

Решение. Данное уравнение "разделяется":

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^2},$$

$$y^2 dy = x^3 dx,$$

$$\int y^2 dy = \int x^3 dx,$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^4}{4} + C.$$

Общий интеграл: $\dfrac{y^3}{3} = \dfrac{x^4}{4} + C, \ C \in \mathbb{R};$

общее решение: $y = \sqrt[3]{\dfrac{3x^4}{4} + A}, \ A \in \mathbb{R}.$

Пример 5.2. Найдите общее решение или общий интеграл уравнения

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}.$$

Решение. Уравнение имеет вид $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ и является однородным. Сделаем подстановку

$$y = u \cdot x, \ y' = u, x + u, \quad u = \frac{y}{x} :$$

$$u'x + u = u + \frac{1}{u^2},$$

$$u'x = \frac{1}{u^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} x = \frac{1}{u^2} \quad \Rightarrow \quad u^2 du = \frac{dx}{x},$$

$$\int u^2 du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{u^3}{3} = \ln|x| + C.$$

Подставим $u = \dfrac{y}{x}$ и получим общий интеграл уравнения:

$$\frac{y^3}{3x^3} = \ln|x| + C.$$

Пример 5.3. Найдите общее решение или общий интеграл уравнения

$$y' + 2xy = e^{-x^2}.$$

Найдите частное решение этого уравнения, если задано начальное условие: $y(2) = 0$.

Решение. Уравнение имеет вид $y' + p(x)y = q(x)$ и является линейным. Сделаем подстановку

$$y = uv, \quad y' = u'v + v'u:$$

$$u'v + uv' + 2uvx = e^{-x^2}.$$

Сгруппируем слагаемые и последовательно найдём u и v:

$$(u'v - e^{-x^2}) + u(v' + 2vx) = 0,$$

$$v' + 2vx = 0,$$
$$v' = -2vx,$$
$$\frac{dv}{dx} = -2vx,$$
$$\frac{dv}{v} = -2xdx,$$
$$\int \frac{dv}{v} = -\int 2xdx,$$
$$\ln|v| = -x^2 + C,$$
$$v = Ce^{-x^2},$$
$$v^* = e^{-x^2}.$$

Подставим найденную функцию v^* в уравнение:

$$u'v^* - e^{-x^2} = 0 \;\Rightarrow\; u'e^{-x^2} = e^{-x^2},$$

$$u' = 1, \;\Rightarrow\; u = x + C,$$
$$y = uv = e^{-x^2}(x + C).$$

Общее решение уравнения: $y = e^{-x^2}(x + C)$.

Теперь найдем частное решение для заданных начальных условий: $y(2) = 0$, подставим значения в общее решение, найдем C.

$$2 = e^0 \cdot (0 + C) \Rightarrow C = 2$$

Частное решение уравнения: $y = e^{-x^2}(x + 2)$.

Пример 5.4. Найдите общее решение или общий интеграл уравнения

$$y' + 2xy = xy^3.$$

Решение. Уравнение имеет вид $y' + p(x)y = q(x)y^n$ и является уравнением Бернулли. Сделаем подстановку $y = uv, \quad y' = u'v + v'u$ и сгуппируем слагаемые:

$$u'v + u(v' + 2vx) = xu^3v^3.$$

Найдём первый сомножитель решения:

$$v' + 2vx = 0,$$

$$v' = -2vx,$$
$$\frac{dv}{v} = -2xdx,$$
$$\int \frac{dv}{v} = -\int 2xdx,$$
$$\ln|v| = -x^2 + C,$$
$$v = Ce^{-x^2},$$
$$v^* = e^{-x^2}.$$

Подставим найденную функцию v^* в уравнение и найдём второй сомножитель:

$$u'v^* = xu^3(v^*)^3,$$
$$u'e^{-x^2} = xu^3e^{-3x^2},$$
$$\frac{du}{u^3} = xe^{-2x^2}dx,$$
$$\int \frac{du}{u^3} = \int xe^{-2x^2}dx,$$

$$-\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{4}e^{-2x^2} + C,$$

$$u = \pm\sqrt{\frac{2}{e^{-2x^2} + C}}.$$

В итоге,

$$y = uv = \pm e^{-x^2}\sqrt{\frac{2}{e^{-2x^2} + C}} = \pm\sqrt{\frac{2}{1 + Ce^{2x^2}}}.$$

Общий интеграл уравнения:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{1 + Ce^{2x^2}}}.$$

5.4 Упражнения к разделу 5

5.1. Найдите общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

а) $yy' = \dfrac{1-2x}{1-y}$; **б)** $y'\cos^2 x - y^2 + 1 = 0$;

в) $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$; **г)** $xy' + y = y^2$;

д) $y' = 10^{x+y}$; **е)** $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$;

ж) $y' = x^2y^3$; **з)** $e^y dx + x^4 dy = 0$;

и) $(1+x^3)y' = 2^y$; **к)** $\sin^2 y dx - 2\sqrt{x}dy = 0$;

л) $\dfrac{1+2x+x^2}{y^2+6y+9} \cdot y' = 1$; **м)** $3x^2 y \ln y dx = \cos^2 x^3 dy$.

5.2. Найдите общее решение или общий интеграл однородного дифференциального уравнения.

а) $xdy - ydx = ydy$; **б)** $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 1$;

в) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$; **г)** $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

5.3. Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения.

а) $y' + 2y = e^{4x}$; **б)** $y' + 2xy = e^{1-x^2}$;

в) $y' + \dfrac{1+2x}{x^2}y = 1$; **г)** $xy' - y - e^{1/x} = 0$.

5.4. Найдите частное решение или частный интеграл дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.

а) $y' = x(1+y^2)$, $y(2) = 0$; **б)** $y' + \dfrac{y}{x} = 1$, $y(1) = 1$;

в) $y' - y = e^x y^3$, $y(0) = 1$; **г)** $y' + ye^x = 0$, $y(0) = e$.

6 Методы вычисления предела функции

В этом разделе мы изучаем базовое понятие математического анализа, которое лежит в основе дифференциального и интегрального исчисления. Речь идёт о понятии предела с которым вы уже встречались в школьном курсе математики.

Теория пределов — основа языка матанализа, это надо изучить для того, чтобы внятно изъясняться в своей профессиональной среде.

6.1 Эпсилон-дельта определение предела

Предел функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_o — это число A такое, что для всех значений, которые отличаются от A на некоторое сколь угодно малое фиксированное число ε найдется такое число δ, что для всех значений переменной, отличных от x_o не более чем на δ, (кроме, может быть, самой точки x_o) все соответствующие значения функции $f(x)$ отличаются от A не более чем на ε.

В языке теории пределов используется формат ε-δ-определений, например определение предела можно записать так:

$$A = \lim_{x \to x_o} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \; (\; 0 < |x - x_o| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Здесь $\forall$ — **квантор всеобщности**, который читается как "для всех" или "любой" , а $\exists$ — **квантор существования**, который читается как "существует" или "найдётся" .

Промежуток $0 < |x - x_o| < \delta$ называется δ-**окрестностью** точки x_o.

Более подробно об эпсилон-дельта языке математике вы можете посмотреть в видео, ссылка на которое дана на Рисунке 21.

Рисунок 21 — Ссылка видеоурок об $\varepsilon - \delta$-определениях

Отдельно определяется понятие **предела функции на бесконечности**: A — предел функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \, \exists R > 0 \; (\; x > R \; \Rightarrow \; |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Арифметические свойства пределов

1. Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x).$$

2. Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

3. Предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\quad \lim_{x\to a}g(x)\neq 0.$$

4. Числовой множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to a}Cf(x)=C\lim_{x\to a}f(x).$$

6.2 Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Предел функции в точке иногда вычисляется очень просто — достаточно подставить значение в формулу, задающую функцию и вычислить. В некоторых случаях подстановка предельной точки в формулу приводит к выражениям вида

$$\infty\cdot A\ (A\neq 0),\quad \infty+C,\ \frac{\infty}{C},\ \infty+\infty,\ \infty^{\infty},\ \frac{C}{\infty},$$

где $C=const$. Значения в этом случае получаются вполне определённые, хотя иногда и бесконечные:

$$\infty\cdot A=\infty\ (A\neq 0),\ \ \infty+C=\infty,\ \ \frac{\infty}{C}=\infty,\ \infty+\infty=\infty,\ \ \infty^{\infty}=\infty,\ \ ...$$

Вместо "бесконечность" и "ноль которые записаны в равенствах, понимаются бесконечно малая и бесконечно большая величины, а основные символические равенства записанные выше аккуратно формулируются в виде теорем. Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x\to x_o$, если её абсолютное значение при стремлении к предельному значению аргумента выше любого наперёд заданного числа (т.е. её предел в этой точке равен бесконечности):

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall M < \infty \exists \delta > 0 \; (0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x)| > |M|).$$

Бесконечно большая величина при $x \to \infty$ определяется аналогично, но с поправкой на "окрестность бесконечности":

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall M < \infty \exists R < \infty \; (|x| > |R| \Rightarrow |f(x)| > |M|).$$

Например, бесконечно большими на $+\infty$ являются функции

$$y = \ln x,\; y = e^x,\; y = x^2,$$

а бесконечно большими в т. $x = 0$ являются

$$y = 1/x^2,\; y = \ln|x|,\; y = \mathrm{ctg} x,\; y = \frac{1}{\sin x},\; y = e^{1/x^2}.$$

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to x_o$, если при стремлении аргумента к предельному значению, абсолютное значение функции меньше любого наперёд заданного числа (т.е. её предел в этой точке равен нулю):

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = 0 : \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 \; (\; 0 < |x - x_o| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)| < \varepsilon).$$

Пример функций, бесконечно малых в 0:

$$y = x^2,\; y = \sin x,\; y = \mathrm{tg} x,\; y = e^{-1/x^2}.$$

Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими подчиняется следующим правилам:

- $[0 + 0] = 0$, т.е. сумма конечного числа бесконечно малых величин является бесконечно малой.
- $[0 \cdot A] = 0$, т.е. произведение бесконечно малой величины на ограниченную является бесконечно малой.
- $[\infty \cdot A] = \infty$, т.е. произведение бесконечно большой величины на ограниченную является бесконечно большой.
- $[\infty/A] = \infty$, т.е. частное от деления бесконечно большой величины на ограниченную является бесконечно большой.
- $[0/A] = 0$, т.е. частное от деления бесконечно малой величины на ограниченную (не равную нулю) является бесконечно малой.

- $[A/\infty] = 0$, т.е. частное от деления ограниченной величины на бесконечно большую является бесконечно малой.

- $[A/0] = \infty$, т.е. частное от деления ограниченной величины на бесконечно малую является бесконечно большой.

- $[\infty + A] = \infty$, т.е. сумма бесконечно большой величины и ограниченной является бесконечно большой.

- $[\infty + \infty] = \infty$, т.е. сумма бесконечно больших величин является бесконечно большой.

- $[\infty \cdot \infty] = \infty$, т.е. произведение бесконечно больших величин является бесконечно большой.

Если при подстановке предельного значения в формулу функции возникают выражения вида:

$$\infty \cdot 0, \ \ \frac{0}{0}, \ \ \frac{\infty}{\infty}, \ \ \infty^0, \ \ 0^0, \ \ 1^\infty, \ \ \infty - \infty,$$

то это проблема и для её решения требуется как-то законно преобразовать выражение, чтобы данная **неопределённость** исчезла. Ниже вы можете найти примеры решения задач, а также ссылку на обучающее видео (Рисунок 22).

6.3 Замечательные пределы

Теорию пределов активно используют для асимптотического сравнения величин. Величины $f(x)$ и $g(x)$ **одного порядка** при $x \to x_o$ (говорят, что ($f(x)$ "о большое" от $g(x)$), если

$$f(x) = O(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = C, \ C = \text{const}, \ C \neq 0.$$

Величины $f(x)$ и $g(x)$ — **эквивалентны** при $x \to x_o$, если предел их отношения равен 1:

$$f(x) \sim g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Бесконечно малая величина $f(x)$ **более высокого порядка** малости, чем $g(x)$ при $x \to x_o$ (говорят $f(x)$ "о малое" от $g(x)$ и пишут $f(x) = o(g(x))$), если

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Первый замечательный предел это утверждение о том, что синус эквивалентен своему аргументу в окрестности нуля:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Из первого замечательного предела следует несколько важных эквивалентностей при $x \to 0$:

$$\sin(x) \sim x,$$

$$\mathrm{tg} x \sim x,$$

$$\mathrm{arctg} x \sim x,$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Первый замечательный предел используют для раскрытия неопределённостей связанных с тригонометрией.

Второй замечательный предел гласит, что

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

или в другом виде $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$

где $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,72$ — число Эйлера, $n \in \mathbb{N}$. Из второго замечательного предела следует также несколько важных эквивалентностей при $x \to 0$:

$$\ln(1 + x) \sim x,$$

$$e^x \sim 1 + x.$$

Второй замечательный предел используют для раскрытия неопределённостей связанных с логарифмической и показательной функциями.

а) б) в) г)

Рисунок 22 — Ссылки на тематические видеоуроки к занятию:
а) методы вычисления предела;
б) первый замечательный предел; в) второй замечательный предел;
г) сравнение бесконечно малых

6.4 Правило Лопиталя

Здесь речь пойдёт о замечательной теореме, в которой для вычисления предела используется дифференцирование.

Правило Лопиталя (для вычисления пределов). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ обе являются бесконечно малыми или обе являются бесконечно большими в окрестности некоторой точки $x = a$. Тогда предел отношения этих функций равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Рисунок 23 — Ссылка на тематические видеоуроки:
примеры использования правила Лопиталя

Рекомендуемая литература к разделу 6 [1, 8]

1. "Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый уровень)", А.Г. Мордкович., изд-е 13-е, 2012 г. — глава 5 "Производная", параграф 26.

1. "Конспект лекций по высшей математике (в 2 ч.)", Письменный Д. Т., 2001 г., — ч. 1, глава V "Введение в анализ", параграфы 16–18, 25.

3. Предел и производная. Видеоуроки. http://t.khr.tilda.ws/predel

6.5 Примеры решения задач

Пример 6.1. Найдите пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{6}{x+1},\ \text{б) } \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\sin 2x},\ \text{в) } \lim_{x\to\pm\infty} e^{x+5},$$

$$\text{г) } \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2-1},\ \text{д) } \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}5x.$$

Решение.

а) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x+1}=\frac{6}{\infty+1}=\frac{6}{\infty}=0;$

б) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\sin 2x}=\frac{\sin\pi}{\sin 2\pi}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{2\cos x}=-\frac{1}{2};$

в) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{x+5}=e^{+\infty}=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}e^{x+5}=e^{-\infty}=0;$

г) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{\infty}=0;$

д) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}5x=\operatorname{arctg}(+\infty)=\pi/2.$

Пример 6.2. Найдите пределы

$$\text{а) } \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x},\ \text{б) } \lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sin x^2},\ \text{в) } \lim_{x\to0}\frac{1-e^{x^2}}{4x},\ \text{г) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x.$$

Решение.

а) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=[\ln(1+x^2)\sim x^2]=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0}x=0;$

б) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sin x^2}=[\sin 4x\sim 4x,\ \sin x^2\sim x^2]=\lim_{x\to0}\frac{4x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4}{x}=\frac{4}{0}=\infty;$

в) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-e^{x^2}}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=[e^{x^2}\sim 1+x^2]=\lim_{x\to0}\frac{1-(1+x^2)}{4x}=-\lim_{x\to0}\frac{x}{4}=0;$

г) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=[1^\infty]=[\text{преобразуем основание и степень}]=$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{x\cdot\frac{2}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1-1/x}}=e^2.$

Пример 6.3. Вычислить предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0} x\cdot\ln x.$$

Решение. Для того, чтобы использовать правило в данном случае, следует преобразовать произведение в дробь, а для этого один из сомножителей необходимо убрать в знаменатель. Так как сомножителей два, то возможны два варианта. В такой ситуации нет ничего плохого в том, чтобы пробовать случайный вариант и оценивать прогресс.

Неверный выбор:

$$\lim_{x\to+0} x\cdot\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+0}\frac{x}{1/\ln x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{x'}{(1/\ln x)'} = \lim_{x\to+0}\frac{1}{-1/(x\ln^2 x)} = -\lim_{x\to+0} x\ln^2 x = \ldots$$

невооруженным глазом видно, что стало хуже, чем было.

Верный выбор:

$$\lim_{x\to+0} x\cdot\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0.$$

Пример 6.4. Вычислить предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}(x-\ln x).$$

Решение. Для того, чтобы использовать правило в данном случае, следует преобразовать разность в дробь. Как один из способов, можно записать каждое слагаемое в виде дроби и привести к общему знаменателю, но в таком прямом подходе есть минусы — выражение может получиться драконообразным:

$$\lim_{x\to\infty}(x-\ln x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1/x}-\frac{1}{1/\ln x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1/\ln x - 1/x}{1/(x\ln x)}\right) = \left[\frac{0}{0}\right].$$

В случае с логарифмами, есть один удачный способ преобразования разности в отношение:

$$\lim_{x\to\infty}(x-\ln x) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty}(\ln e^x - \ln x) = \lim_{x\to\infty}\ln\frac{e^x}{x} = \left[\ln\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{e^x}{1} = \ln\infty = \infty.$$

Пример 6.5. Вычислить предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \mathrm{ctg} x\right).$$

Решение. Преобразуем разность в дробь, используя связь тангенса и котангенса:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \mathrm{ctg} x\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{tg} x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg} x - x}{x\mathrm{tg} x} = \left[\ln\frac{0}{0}\right] = [\text{ П.Л.}] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\frac{x}{\cos^2 x} + \mathrm{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2 x}{\frac{x+\sin x\cos x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2x + \sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\sin x\cos x}{2 + 2\cos 2x} = 0.$$

Пример 6.6. Вычислить предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{x-2}}.$$

Решение. Для того, чтобы показательно-степенное выражение преобразовать в дробь используется основное логарифмическое тождество:

$$f^g = e^{\ln f^g} = e^{g\ln f} = e^{\frac{\ln f}{1/g}},$$

а затем вычисляется предел уже только от степени.

$$\lim_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{x-2}} = [1^\infty] = \lim_{x\to 2} e^{\ln(3-x)^{\frac{1}{x-2}}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} e^{\frac{\ln(3-x)}{x-2}} = \left[e^{\frac{0}{0}}\right] = \lim_{x\to 2} e^{\frac{-1/(3-x)}{1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Пример 6.7. Вычислить предел, используя правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = [0^0] = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln x}{1/\sin x}} = \left[e^{\frac{\infty}{\infty}}\right] = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\sin^2 x}{x\cos x}} = e\left[e^{\frac{0}{0}}\right] = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x}} = \left[e^{-\frac{0}{1}}\right] = 1.$$

6.6 Упражнения к разделу 6

6.1. Найдите пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x}{\mathrm{arctg}x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{5-x}-1}{x+4}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x}{x\sin 2x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{e^x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-3}{\cos x-1}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{\ln x}$.

6.2. Найдите пределы, преобразовав выражение.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-6}{4x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{5+x}-1}{x+4}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x\sin 2x}$.

6.3. Найдите пределы, используя эквивалентности.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin^2 4x}{\sin 3x\mathrm{tg}^5 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}-\cos x}{\cos 2x\mathrm{arctg}^2 x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin^3 4x}{\sin 3x+\mathrm{arctg}^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}+1}{\sin 3x+\mathrm{ctg}^2 x}$.

6.4. Найдите пределы, используя правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-6}{5x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-x^2+x}{4x^2-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x}{x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\mathrm{arctg}x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sin 2x^2}$.

6.5. Найдите пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \mathrm{ctg} x$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x \cdot \mathrm{tg} x$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \big(\ln{(x^2+1)} - \ln{(4x^2-1)}\big)$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{(x-1)}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln{(x^2+1)}}{\ln{(4x^2-1)}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$.

6.6. Найдите при каком значении параметра a верно равенство.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^a} = 1$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^a \cos x}{\mathrm{arctg}^2 x^3} = 1$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(1-\cos x)\sin^3 x}{x^a} = 1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5(e^x-1)}{\ln(1+x^a)} = 1$.

6.7. Найдите при каком значении параметра a верно равенство.

а) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x-ax^2-2}{5x^2-1} = 1$;

б) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{ax^2-2\sqrt{x}+1}{x^2-1} = 1$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3-ax^2-x}{2x^2-1} = 2$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3-ax^2-2x}{3x^2-x-1} = 4$.

6.8. Найдите при каком значении параметров a и b верно равенство.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{bx^a(1-\cos x)}{\sin x \mathrm{tg} 2x} = 1$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{bx^a(1-\cos x^2)}{\sin x \mathrm{tg} 2x} = 1$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^a(1-\cos 8x)}{b\sin x^2 \mathrm{tg} 4x} = 1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^a(1-\cos 5x)}{b\sin x^2 \mathrm{tg} 5x} = 1$.

7 Непрерывность функции

7.1 Условия непрерывности функции

Функция непрерывна в точке, если её значение в этой точке совпадает с пределом. Для плоского случая всё интуитивно понятно: если график можно нарисовать одной линией не отрывая карандаш от бумаги, то функция непрерывна.

Для аккуратного определения непрерывности и классификации точек разрыва нам потребуется понятие **односторонних пределов**.

Число A_- — **предел функции** $y = f(x)$ **при** $x \to x_o$ **слева**, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \ (\ 0 < x_o - x < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A_-| < \varepsilon)$$

Число A_+ — **предел функции** $y = f(x)$ **при** $x \to x_o$ **справа**, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \ (\ 0 < x - x_o < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A_+| < \varepsilon)$$

$A_- = \lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x)$ — левый предел в точке;

$A_+ = \lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x)$ — правый предел в точке

Функция $f(x)$ **непрерывна** в некоторой точке x_o, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \ (\ 0 \leq |x - x_o| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon)$$

т.е. предел функции существует в этой точке и равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.

Функция непрерывна справа (слева) в точке, если предел справа (слева) в точке существует и равен значению функции.

Функция непрерывна на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке $x \in (a, b)$.

Функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке $x \in (a, b)$, а в граничных точках непрерывна справа/слева соответственно.

Условия непрерывности функции в точке

- 1) функция **определена** в данной точке;
- 2) существует и конечен **левый предел** в точке;
- 3) существует и конечен **правый предел** в точке;
- 4) односторонние **пределы равны друг другу**;

- 5) односторонние **пределы равны значению функции** в точке.

Точка называется **точкой разрыва**, если не выполняется хотя бы одно условие 1)-5).

7.2 Классификация точек разрыва

- т. x_o — **точка разрыва 1го рода** $f(x)$, если односторонние пределы в т. x_o существуют, но не равны значению функции в точке;

- т. x_o — **точка разрыва 2го рода**, во всех остальных случаях;

т. x_o — **скачок**, где односторонние пределы в т. x_o существуют, но не равны друг другу;
т. x_o — **точка бесконечного разрыва**, если какой-либо из односторонних пределов равен ∞;
т. x_o — **точка устранимого разрыва** $f(x)$, если предел $f(x)$ в т. x_o существует, но не равен $f(x_o)$.

На рисунке (Рисунок 24) изображен график функции с тремя точками разрыва: бесконечный разрыв (точка разрыва второго рода) , устранимый разрыв и скачок (точки разрыва первого рода).

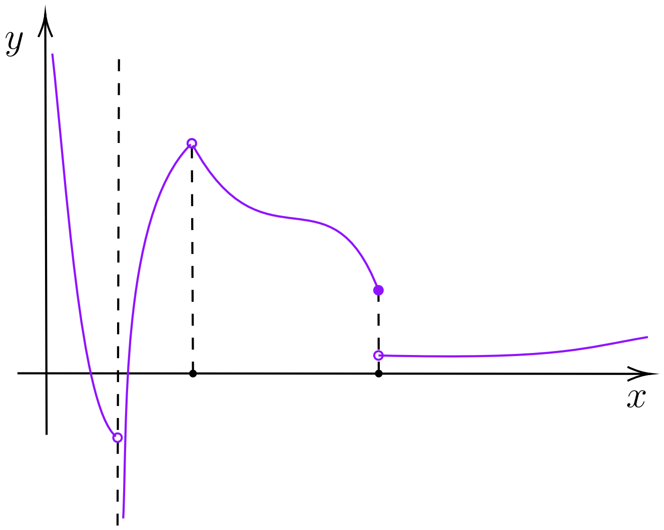


Рисунок 24 — Точки разрыва функции (слева направо): бесконечный разрыв, устранимый разрыв, скачок.

Рекомендуемая литература к разделу 7

1. "Конспект лекций по высшей математике (в 2 ч.)", Письменный Д. Т., 2001 г., — ч. 1, глава V "Введение в анализ", параграф 19.

2. Предел и производная. Видеоуроки. http://t.khr.tilda.ws/predel

Рисунок 25 — Ссылка на тематические видеоуроки: примеры исследование непрерывности функции

7.3 Основные элементарные функции и их непрерывность

Основные элементарные функции являются непрерывными на области допустимых значений. Ниже представлены все основные элементарные функции с указанием области определения $D(f)$ и множества значений $E(f)$.

Степенная функция $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$. Хотя показатель a может быть любым действительным числом, чаще всего встречаются следующие случаи.

- Степенная функция с целым положительным показателем (Рисунок 26) определена на всей числовой оси, область значений зависит от чётности. Для чётного показателя $y = x^{2k}$ — область значений равна $[0; \infty)$, для нечётного $y = x^{2k+1}$ — $(-\infty; \infty)$.

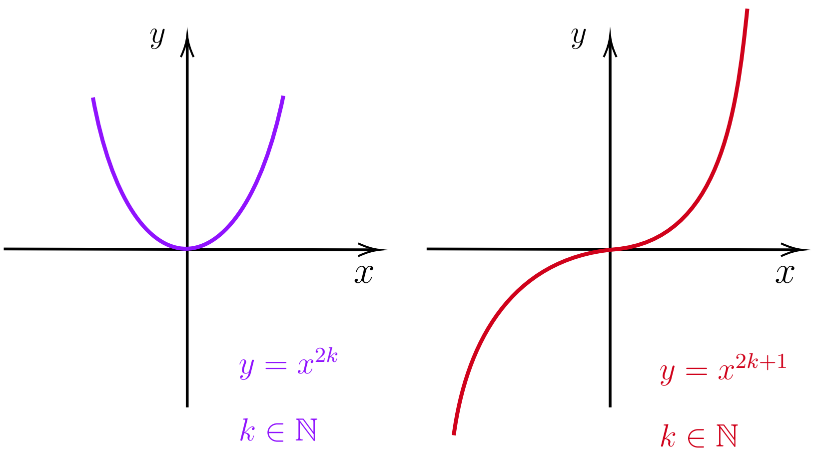


Рисунок 26 — Степенная функция с целым положительным показателем

- Степенная функция с рациональным показателем $y = x^{1/2k}$ определена при $x \in [0; \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, область значений $y \in [0; \infty)$. Для нечётного знаменателя показателя $y = x^{1/(2k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$ — область значений и область определения равны $\mathbb{R}$ (Рисунок 27).

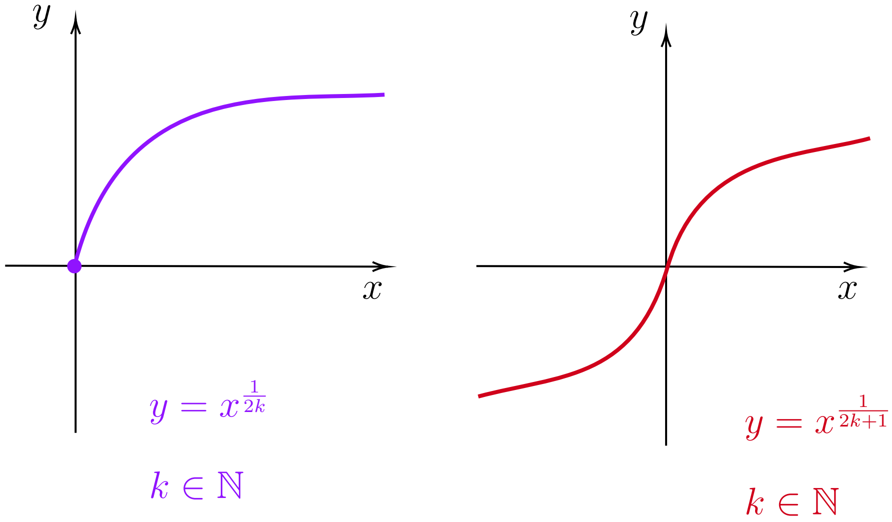


Рисунок 27 — Степенная функция с рациональным положительным показателем

- Степенная функция с целым отрицательным показателем $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ (Рисунок 28) определена на всей числовой оси за исключением точки $x = 0$, область значений зависит от чётности. Для чётного показателя — область значений равна $(0; \infty)$, для нечётного — $(-\infty; \infty) \setminus \{0\}$.

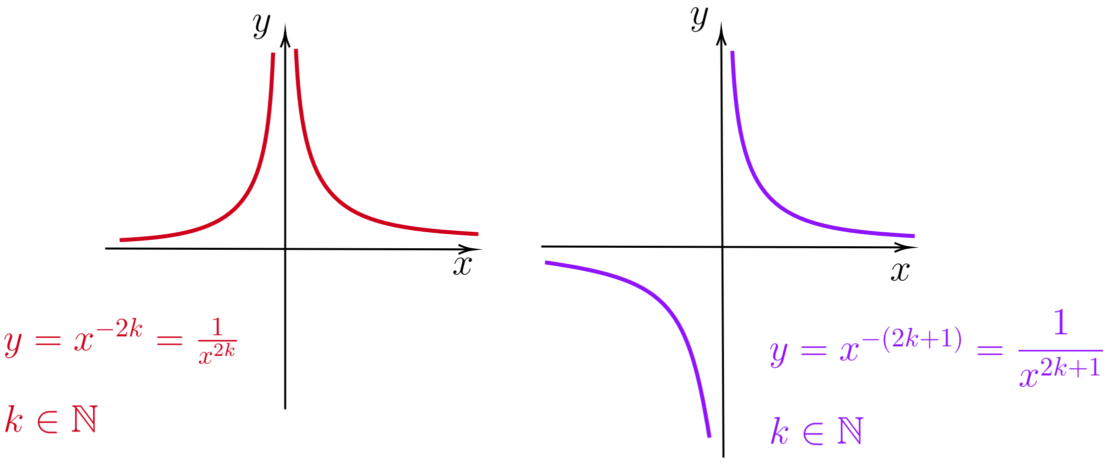


Рисунок 28 — Степенная функция с целым отрицательным показателем

Показательная функция $y = a^x$, $a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$. Функция определена для всех значений аргумента x, область значений — положительные числа $(0; \infty)$.

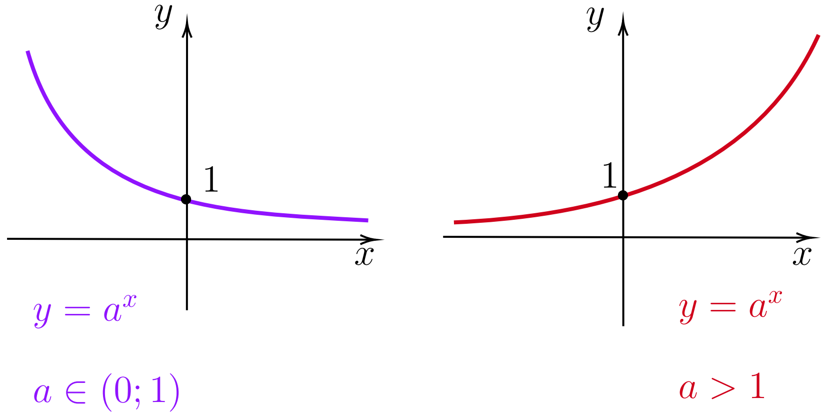


Рисунок 29 — Показательная функция
с основанием меньше 1 (слева) и больше 1 (справа)

Логарифмическая функция $y = \log_a x,\ a \in (0; 1) \cup (1; \infty)$ является обратной к показательной. Логарифм определён только для положительных значений $x \in (0; \infty)$, область значений функции $y \in \mathbb{R}$.

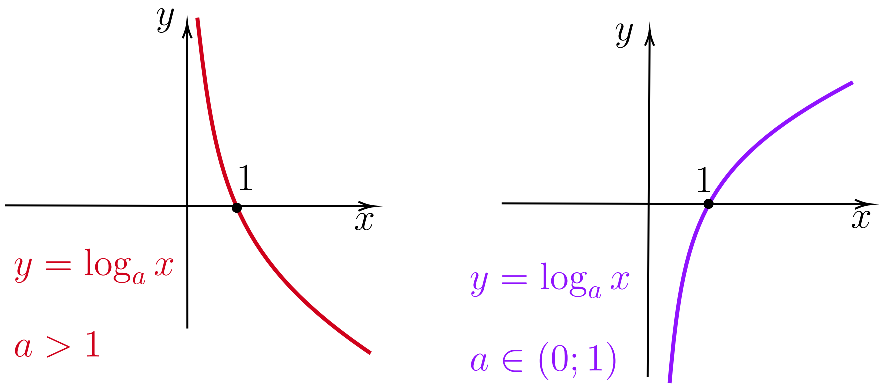


Рисунок 30 — Показательная функция
с основанием меньше 1 (слева) и больше 1 (справа)

Синус и косинус. Эти тригонометрические функции определены на всей числовой оси, значения функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ лежат в промежутке $[-1; 1]$ (Рисунок 31).

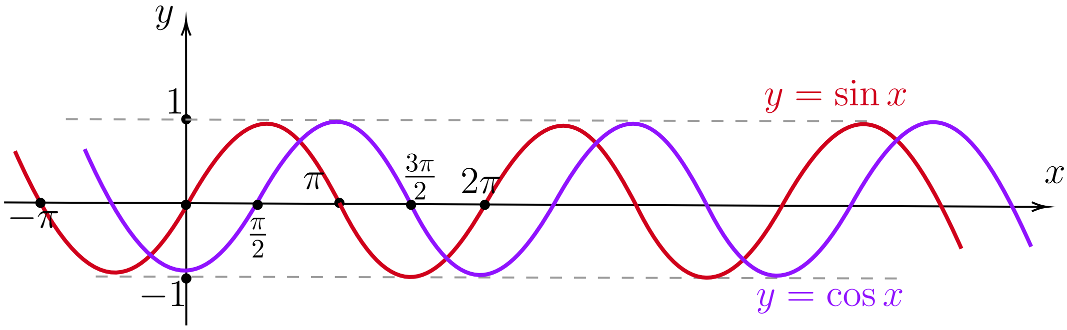


Рисунок 31 — Графики синуса и косинуса

Тангенс и котангенс не определены в точках, где косинус и синус равны 0. Множество значений функций — $\mathbb{R}$.

Область определения тангенса $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\pi k + \dfrac{\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$, котангенса $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ (Рисунок 32).

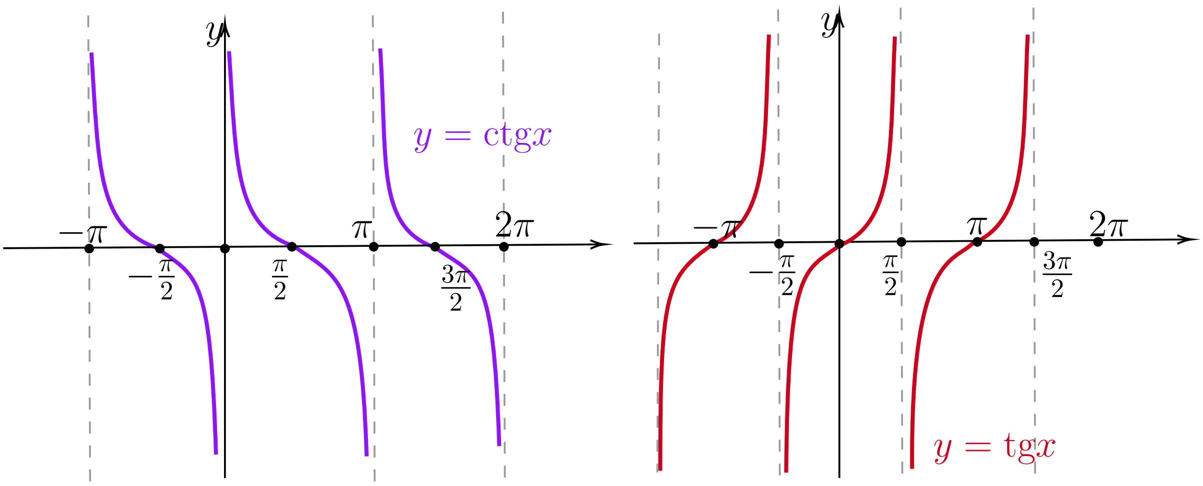


Рисунок 32 — Графики тангенса и котангенса

Арксинус и арккосинус (Рисунок 33) — обратные тригонометрические функции с очень ограниченной областью определения и множеством значений.

Арксинус $y = \arcsin x$ определён при $x \in [-1; 1]$, множество значений $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Арккосинус $y = \arccos x$ также определён при $x \in [-1; 1]$, множество значений $y \in [0; \pi]$.

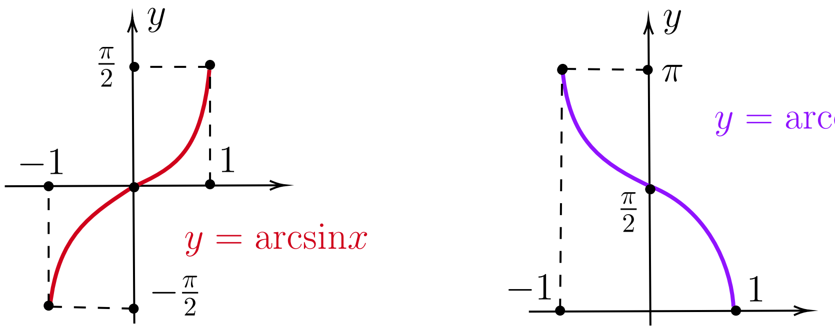
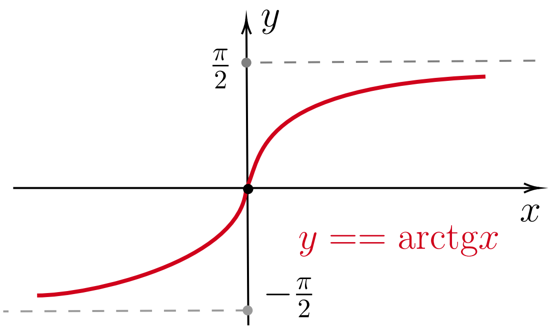


Рисунок 33 — Графики арксинуса и арккосинуса

Арктангенс и арккотангенс (Рисунок 34) всюду определены, но ограничены. Функция $y = \mathrm{arctg}x$ принимает значения $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, а $y = \mathrm{arcctg}x$ приниммает значения $y \in [0; \pi]$.



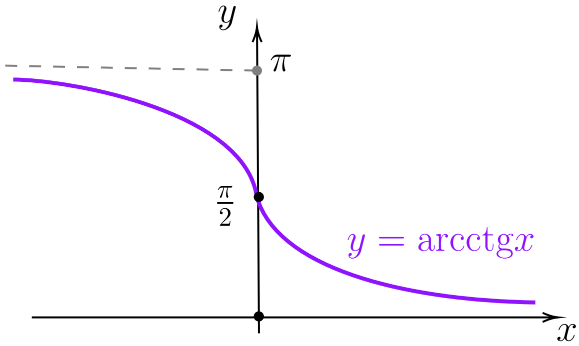


Рисунок 34 — Графики арктангенса и арккотангенса

7.4 Непрерывность функции на отрезке

Имеют место несколько замечательных теорем.

Теорема Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.

Утверждение теоремы проиллюстрировано на Рисунке 35. Фиолетовой линией обозначен график функции, m — наименьшее значение, которое в данном случае достигается дважды, а M — наибольшее значение, оно достигается в данном случае на границе промежутка.

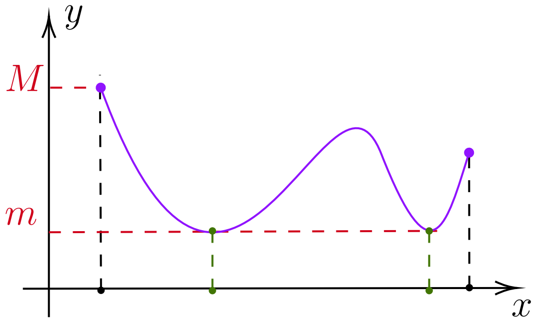


Рисунок 35 — Иллюстрация теоремы Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении

Теорема Больцано – Коши о промежуточных значениях. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает все значения между A и B.

Утверждение теоремы проиллюстрировано на Рисунке 36. Фиолетовой линией обозначен график функции, A — значение функции на левой границе промежутка, а B — на правой. Промежуток $[B; A]$ включён в множество значений функции.

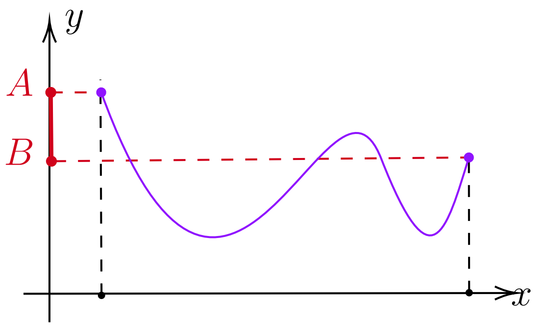


Рисунок 36 — Иллюстрация к теореме Больцано – Коши о промежуточных значениях

Следствие теоремы Больцано-Коши (о нуле). Если $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка c, в которой функция обращается в ноль: $f(c) = 0$ (Рисунок 37)

Утверждение теоремы проиллюстрировано на Рисунке 37. Фиолетовой линией обозначен график функции, отмечены точки графика, соответствующие концам промежутка. Точки пересечения с осью Ox — это нули функции, они отмечены красным.

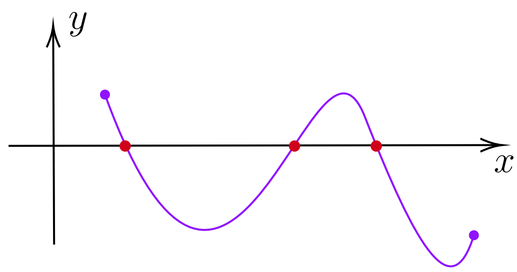


Рисунок 37 — Иллюстрация к следствию теоремы Больцано – Коши

7.5 Примеры решения задач

Пример 7.1. Определите характер точек разрыва функции, постройте эскиз графика функции

$$y = \begin{cases} x^2+1, & x<-1, \\ 2^{x+2}, & x\in(-1;3], \\ \dfrac{1}{x-4}, & x>3. \end{cases}$$

Решение. Функция задана различными формулами на различных участках области определения. На интервале $(-\infty;-1)$ функция $y = x^2+1$ непрерывна, на интервале $(-1;3)$ функция $y = 2^{x+2}$ также непрерывна, следовательно на интервале $(-\infty;3)$ разрыв может быть только в точке $x=-1$ где меняется формула. По аналогичной причине следует исследовать точку $x=3$ — там также меняется формула, задающая функцию. На интервале $[3;\infty)$ функция задана формулой $y=\dfrac{1}{x-4}$ и не определена в точке $x=4$, которая принадлежит этому интервалу. Точка $x=4$ определённо является точкой разрыва, так как там функция не определена, осталось только уточнить характер этого разрыва.

Итак, исследуем поочерёдно подозрительные на разрыв точки

$$x=-1,\ x=3,\ x=4.$$

Исследуем точку $x=-1$.

Чтобы определить характер разрыва, если он есть, следует в первую очередь вычислить правосторонний и левосторонний предел в точке:

$$\lim_{x\to-1-0} f(x) = (x^2+1)\Big|_{x=-1} = (-1)^2+1 = 2;$$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x) = 2^{x+2}\Big|_{x=-1} = 2^{-1+2} = 2.$$

Односторонние пределы равны друг другу, это означает что в точке может быть устранимый разрыв или это может быть точка непрерывности функции. Значение функции в точке $x=-1$ не определено, так как она не входит ни в один из интервалов на которых задана функция. Итак, односторонние пределы совпадают, но не равны значению функции в точке, следовательно $x = -1$ — точка разрыва первого рода (устранимый разрыв).

Исследуем точку $x = 3$.

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = 2^{x+2}\Big|_{x=3} = 2^{3+2} = 32;$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \frac{1}{x-4}\Big|_{x=3} = \frac{1}{3-4} = -1.$$

Односторонние пределы не равны друг другу, но имеют конечные значения — это означает что в точке $x = 3$ функция имеет разрыв первого рода (скачок). Значение функции в точке $x = 3$ определяется по формуле $y = \dfrac{1}{x-4}$ и равно -1, на диагноз разрыва это не влияет, но пригодится при построении эскиза графика.

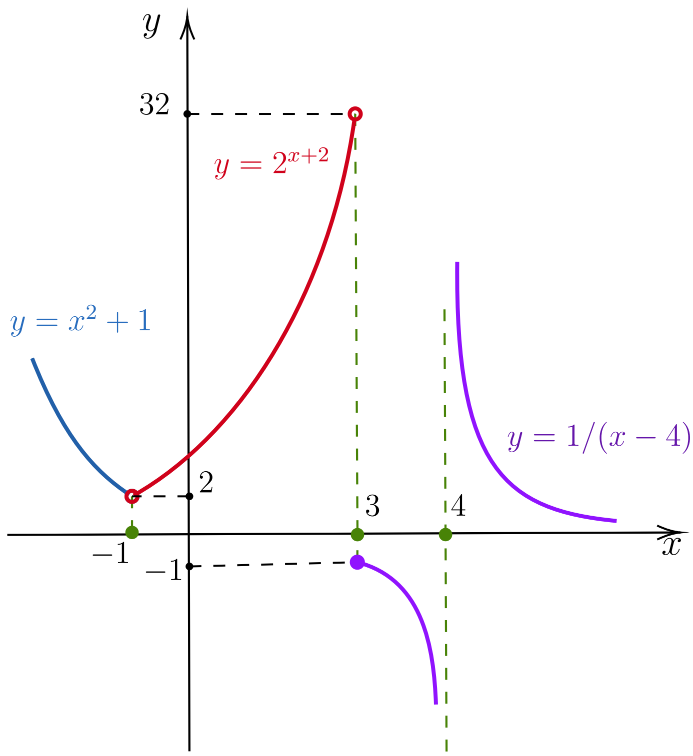


Рисунок 38 — Эскиз графика функции из примера 7.1

Исследуем точку $x = 4$.

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \frac{1}{x-4}\Big|_{x=4-0} = \left[\frac{1}{4-0-4} = \frac{1}{-0}\right] = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x) = \frac{1}{x-4}\Big|_{x=4+0} = \left[\frac{1}{4+0-4} = \frac{1}{+0}\right] = +\infty;$$

Односторонние пределы бесконечны — это означает что в точке $x = 4$ функция имеет разрыв второго рода (бесконечный разрыв).

Эскиз графика функции изображен на Рисунке 38.

Пример 7.2. Определите характер точек разрыва функции, постройте эскиз графика функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$$

Решение. Значения функции не определены в точках $x = \pm 1$, эти точки являются подозрительными на наличие разрыва.

Исследуем точку $x = -1$.

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{1+4+3}{(-1-0)^2 - 1} = \frac{7}{+0}\right] = \infty;$$

$$\lim_{x \to -1+0} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{1+4+3}{(-1+0)^2 - 1} = \frac{7}{-0}\right] = -\infty.$$

Односторонние пределы бесконечны — это означает что в точке $x = -1$ функция имеет разрыв второго рода (бесконечный разрыв).

Исследуем точку $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1-0} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1-0} \frac{x-3}{x+1} =$$

$$= \frac{-2}{2} = -1;$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1+0} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x-3}{x+1} =$$

$$= \frac{-2}{2} = -1.$$

Односторонние пределы конечны и равны друг другу — это означает что в точке $x = 1$ функция имеет разрыв первого рода (устранимый разрыв).

Для построения эскиза графика упростим формулу:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \frac{x-3}{x+1} = \frac{x+1-4}{x+1} = 1 - \frac{4}{x+1}.$$

График представляет из себя гиперболу $-\dfrac{4}{x}$, смещённую на -1 влево по оси Ox и на на 1 вверх по оси Oy. Точка $x = 1$ является устранимым разрывом, поэтому на графике точка $(1;-1)$ отсутствует (Рисунок 39).

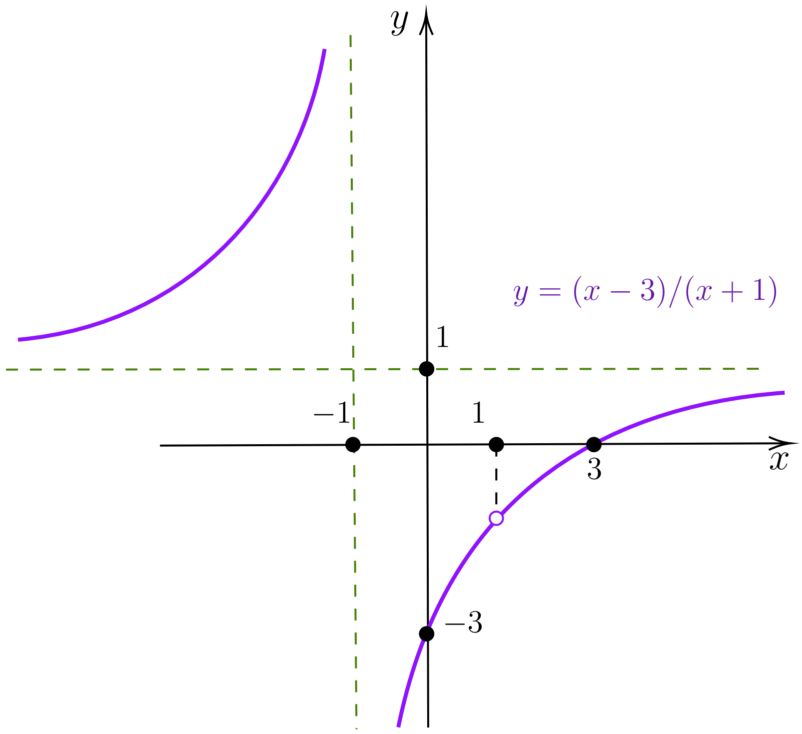


Рисунок 39 — Эскиз графика функции из примера 7.2

7.6 Упражнения к разделу 7

7.1. Укажите, на каких участках функция $y(x)$ непрерывна.

а) $y(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$; **б)** $y(x) = \sqrt{-x^2 + 7x - 12}$;

в) $y(x) = \sqrt{|x-1|(2x-4)}$; **г)** $y(x) = \log_3(-x^2 + 7x - 12)$;

д) $y(x) = \arcsin(4x - 3)$; **е)** $y(x) = \sqrt{3 - \sqrt{3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4}}$;

ж) $y(x) = \operatorname{tg}(\arccos(x-1))$; **з)** $y(x) = \sqrt{\log_2((4-x)(x-1)) - 1}$.

7.2. Определите характер точек разрыва функции, постройте эскиз графика функции.

а) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$; **б)** $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$; **г)** $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

д) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x^2, & x \in [0; 1], \\ x - 1, & x > 1; \end{cases}$ **е)** $f(x) = \begin{cases} \ln x^2, & x < -1, \\ \dfrac{1}{x}, & x \in [-1; 1), \\ x^2, & x > 1; \end{cases}$

ж) $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4|, & x \le \pi, \\ \sin |x|, & x \in (\pi; 9), \\ 0, & x > 9; \end{cases}$ **з)** $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ e^{\frac{1}{x}}, & x \in (0; 1), \\ \dfrac{1}{e^x}, & x > 1. \end{cases}$

Ответы и указания

Ответы и указания к разделу 1

1.1.

а) $\dfrac{1}{x}+\cos x;$ **б)** $\dfrac{1}{\cos^2 x}-4e^x;$

в) $\dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{5}{x\ln 3};$ **г)** $-\dfrac{\ln 3}{x\ln^2 x}+3^x\ln 3;$

д) $\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^3};$ **е)** $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}};$

ж) $-\dfrac{4}{\sin^2 2x};$ **з)** $a^{x+1}\ln a+(a+1)x^a.$

1.2.

а) $y'=5x^4;$ **б)** $y'=\dfrac{1}{5}x^{-4/5};$ **в)** $y'=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x};$

г) $y'=3,5x^{2,5};$ **д)** $y'=\dfrac{5}{21\sqrt[21]{x^{16}}};$ **е)** $y'=\dfrac{50}{21}\sqrt[21]{x^{29}};$

ж) $y'=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}};$ **з)** $y'=2,5x^{1,5};$ **и)** $y=\dfrac{463}{84}\sqrt[84]{x^{379}}.$

1.3.

а) $(2x+4)\log_2 x+\dfrac{x^2+4x-3}{x\ln 2};$ **б)** $e^x(\ln x+\dfrac{1}{x});$

в) $3^x(\ln x+\dfrac{1}{x\ln x});$ **г)** $x^3\cos x+3x^2\sin x;$

д) $e^x(\cos x-\sin x);$ **е)** $2x\mathrm{arctg}x+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}};$

ж) $\dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-2\mathrm{arcsin}x\right);$ **з)** $\dfrac{2-3\ln x}{2x^2\sqrt{x}};$

и) $\dfrac{1}{3^x}(5x^4\cos x-x^5\sin x-x^5\cos x\ln 3);$

к) $\dfrac{1}{2^x\ln^2 x}\left(\left(\ln 2\ln x+\dfrac{1}{x}\right)\sin x-\ln x\cos x\right);$

л) $y=5x^4 3^x\cos x+x^5 3^x\ln 3\cos x-x^5 3^x\sin x;$

м) $y=2^x\ln 2\sin x\ln x+2^x\cos x\ln x+\dfrac{2^x\sin x}{x}.$

1.4.

а) $2e^{2x}$; **б)** $2xe^{x^2}$;

в) $2e^{2x}\ln x+\dfrac{e^{2x}}{x}$; **г)** $2x$;

д) $\sin 2xe^{\sin^2 x}$; **е)** $\dfrac{1}{1+\ln^2 x\cdot \mathrm{tg}^2 x}\left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}+\dfrac{\ln x}{\cos^2 x}\right)$;

ж) $\dfrac{4x^3}{\cos^2 x^4}$; **з)** $\left(2x\cos x^2 \mathrm{arcsin}x-\dfrac{\sin x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\dfrac{1}{\sin^2 x^2}$.

1.5.

а) $\dfrac{2x\cos x^2}{\sin x^2}$; **б)** $\dfrac{\sin 2x}{\sin^2 x}$;

в) $\dfrac{2\cos x\ln\sin x}{\sin x}$; **г)** $\dfrac{3^{\mathrm{arcsin}x}\ln 3}{\sqrt{1-x^2}}$;

д) $\dfrac{3^x\ln 3}{\sqrt{1-3^{2x}}}$; **е)** $e^x\mathrm{arctg}x^3+\dfrac{3x^2e^x}{1+x^6}$;

ж) $\dfrac{1}{\sin^2 x^2}\left(2x\cos x^2\mathrm{arcsin}\sqrt{x}-\dfrac{\sin x^2}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\right)$;

з) $\dfrac{1}{\cos^2 x}\left(-\sin x\ln\sin x-\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$.

1.6.

а) $x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\ln x\cos x\right)$;

б) $(1+\ln x)^x(\ln(1+lnx)+\dfrac{1}{1+\ln x})$;

в) $x^{x^{x^2}}(x^{x^2}\ln x(2x\ln x+x)+x^{x^2-1})$;

г) $(1+x^2)^{\mathrm{arcsin}x}\left(\dfrac{2x\mathrm{arcsin}x}{1+x^2}+\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Ответы и указания к разделу 2

2.1. Графики основных элементарных функций можно посмотреть в разделе 7.3

а) $\mathrm{tg}\,\alpha=4$, уравнение касательной $y=4x-6$,

б) $\mathrm{tg}\,\alpha=3$, уравнение касательной $y=3x-8$,

в) $\operatorname{tg}\alpha = 1/3$, уравнение касательной $y = \dfrac{1}{3}x$,
г) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, уравнение касательной $y = 2x - 1$,
д) $\operatorname{tg}\alpha = 1$, уравнение касательной $y = x + 2$,
е) $\operatorname{tg}\alpha = 1$, уравнение касательной $y = x - \frac{\pi}{6}$.

2.2.
а) Возрастает на $(-\infty; -1/2)$ и $(11/18; +\infty)$, убывает на $(-1/2; 11/18)$.
б) Возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, убывает на $(-1; 1)$.
в) Возрастает на $(1/2; 1)$, убывает на $(-\infty; 0)$, $(0; 1/2)$ и $(1; +\infty)$.
г) Возрастает на $(-\infty; 0)$, убывает на $(0; +\infty)$.
д) Возрастает на $(0; 2)$, убывает на $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$.
е) Возрастает на $(e; +\infty)$, убывает на $(0; 1)$, $(1; e)$.
ж) Возрастает на $(1/2; +\infty)$, убывает на $(0; 1/2)$.
з) Возрастает на $(-\infty; +\infty)$.

2.3.
а) $x = 0$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума.
б) $x = 0$ — точка максимума, $x = -2$ — точка минимума.
в) $x = 0$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума.
г) $x = -3$ — точка максимума.
д) $x = 0$ — точка максимума.
е) $x = 0$ — точка минимума.

2.4.
а) наибольшее значение $y = 8$, наименьшее — $y = 0$.
б) наибольшее значение $y = 10$, наименьшее — $y = 6$.
в) наибольшее значение $y = 0,6$, наименьшее — $y = -1$.
г) наибольшее значение $y = \dfrac{\pi}{2}$, наименьшее — $y = -\dfrac{\pi}{2}$.

Ответы и указания к разделу 3

3.1.
а) $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + C$; **б)** $-\dfrac{1}{x} + C$;
в) $\dfrac{10 \cdot 10^x}{\ln 10} + C$; **г)** $\dfrac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C$;
д) $\dfrac{3,4x^{0,83}}{0,83} + C$; **е)** $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + C$
ж) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$; **з)** $\dfrac{x}{2} \cdot \sqrt{5 - x^2} + \dfrac{5}{2} \cdot \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{5}} + C$

3.2.

а) $-\dfrac{2}{\sqrt{x}}-e^x+C$; **б)** $\dfrac{1}{2}\text{arcsin}x+C$;

в) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x\sqrt{x^2+4}+4\ln|x+\sqrt{x^2+4}|)+C$;

г) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2\sqrt{5x^3}}{3}-\dfrac{x^6}{2}+C$; **д)** $-\dfrac{1}{x^2}+\operatorname{ctg}x+x\operatorname{tg}5+C$;

е) $3x^2+6x^4+\dfrac{16}{5}x^5)+C$; **ж)** $\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{36}{13}x\sqrt{x}+\dfrac{27}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}+C$;

з) $\dfrac{8}{15}\sqrt[8]{x^{15}}+C.$

3.3.

а) $\dfrac{3}{16}(4x+5)^{4/3}+C$; **б)** $-\dfrac{1}{(x+1)}+C$; **в)** $\dfrac{1}{3}\cos(2-3x)+C$;

г) $\dfrac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\text{arcsin}\dfrac{x+1}{2}+C$; **д)** $-\dfrac{(5-7x)^{10}}{70}+C$;

е) $\dfrac{1}{3}\text{arctg}\dfrac{x+1}{3}+C.$

3.4. Ответы

а) $d\dfrac{x^2}{2}$;	**б)** de^x;	**в)** $d\dfrac{1}{x}$;
г) $\dfrac{1}{5}d\text{tg}5x$;	**д)** $\dfrac{2}{3}d\sqrt{3x}$;	**е)** $\dfrac{1}{2}d\text{arcsin}2x$;
ж) $-0.5d\cos 2x$;	**з)** $d(x-4)^4$;	**и)** $-d\dfrac{1}{x+3}$.

3.5. Указания

а) используйте формулу "произведения синусов";
б) выделите целую часть дроби и остаток;
в) используйте формулу понижения степени;
г) используйте основное тригонометрическое тождество;
д) выражение в числителе является производной от знаменателя.

3.5. Ответы

а) $-\dfrac{\cos 8x}{16}+\dfrac{\cos 2x}{4}+C$; **б)** $\dfrac{x^2}{2}+2x+\ln|x+2|+C$; **в)** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin(4-6x)}{12}$;

г) $\mathrm{tg}x - x + C$; **д)** $-\dfrac{1}{x^2+3x+5} + C$; **е)** $-\mathrm{ctg}x + C$.

3.6.

а) $-\cos x^3 + C$; **б)** $\dfrac{\ln^3 x}{3} + C$; **в)** $-\dfrac{2\cos^{1,5} x}{3} + C$; **г)** $\dfrac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + C$;

д) $-\dfrac{\cos(\ln^2 x)}{2} + C$; **е)** $-e^{\mathrm{arctg}(\cos x)} + C$; **ж)** $-\cos(\ln(\sin x)) + C$;

з) $-\cos(\mathrm{arctg}x^2) + C$.

3.7.

а) $x\sin x + \cos x + C$; **б)** $x\ln x - x + C$;

в) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$; **г)** $\int \dfrac{e^x(\sin x - \cos x}{2} + C$;

д) $\dfrac{x}{2}(\sin\ln x + \cos\ln x) + C$; **е)** $x\mathrm{arcsin}x + \sqrt{1-x^2} + C$.

Ответы и указания к разделу 4

4.1.

а) $f^* = f(2\sqrt{7}-2) = 27$; **б)** $f^* = f(4) = 5,$;

в) $f^* = f\left(\sqrt{\dfrac{16-\pi^2}{4}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$; **г)** $f^* = f\left(3 - \dfrac{5}{\ln 6}\right) = 1 - \dfrac{6\ln 6}{5}$.

4.2. **а)** $\dfrac{2}{3}$; **б)** $\dfrac{1}{3}$; **в)** $\dfrac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ и $\dfrac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$; **г)** $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$.

4.3. **а)** $\sqrt{65} - \dfrac{\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{8+\sqrt{65}}{2+\sqrt{5}}\right|$; **б)** $\ln 3 - \dfrac{1}{2}$; **в)** $\dfrac{e^2+1}{4}$; **г)** 2.

4.4.

а) $x_c = \dfrac{20}{9},\ y_c = \dfrac{16}{9}$; **б)** $x_c = \dfrac{7}{8},\ y_c = \dfrac{13}{10}$;

в) $x_c = -\dfrac{4}{40+15\pi},\ y_c = \dfrac{7}{8+3\pi}$.

4.5. **а)** 8π; **б)** $\dfrac{2\pi}{5}$; **в)** $\dfrac{\pi}{2}$; **г)** 2.

4.6. **а)** $\dfrac{28\sqrt{2}\pi}{3}$; **б)** $2\sqrt{2}\pi - \pi\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|$.

Ответы и указания к разделу 5

5.1. Вид решения может отличаться, но вы можете проверить ваш или приведённый здесь результат подстановкой в исходное уравнение.

а) $\dfrac{3y^2-2y^3}{6} = x - x^2 + C$; **б)** $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{y-1}{y+1}\right| = \mathrm{tg}x + C$;

в) $\arcsin x + \arcsin y = C$; **г)** $2\mathrm{arctg}(2y-1) = \ln|Cx|$;

д) $10^x + 10^{-y} = C$; **е)** $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$.

5.2. Вид решения может отличаться, но вы можете проверить ваш или приведённый здесь результат подстановкой в исходное уравнение.

а) $y\ln Cy + x = 0$; **б)** $\ln Cx + \dfrac{2x}{y-x}$;

в) $\dfrac{y^2}{2x^2} + \dfrac{y}{x} = \ln\dfrac{Cx^5}{(x^2+y^2)^2}$; **г)** $\ln C\sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{y}{x} = 0$.

5.3. Вид решения может отличаться, но вы можете проверить ваш или приведённый здесь результат подстановкой в исходное уравнение.

а) $y = \dfrac{1}{6}e^{4x} + Ce^{-2x}$; **б)** $y = \dfrac{ex+C}{e^{x^2}}$;

в) $y = Cxe^{-\dfrac{1}{x}} - x$; **г)** $y = Cx - xe^{-\dfrac{1}{x}}$.

5.4. Вид решения может отличаться, но вы можете проверить ваш или приведённый здесь результат подстановкой в исходное уравнение.

а) $\mathrm{arctg}y = \dfrac{x^2}{2} - 2$; **б)** $x^3 - 2x^2y + x = 0$;

в) $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}e^x}{\sqrt{5-2e^{3x}}}$; **г)** $y = e^{2-e^x}$.

Ответы и указания к разделу 6

6.1. **а)** ∞; **б)** 0; **в)** не существует; **г)** ∞; **д)** ∞; **е)** ∞; **ж)** 0; **з)** ∞; **и)** ∞; **к)** 0.

6.2. **а)** 5; **б)** ∞; **в)** $0,25$; **г)** $0,5$; **д)** $0,5$; **е)** $0,5$.

6.3. **а)** ∞; **б)** $3,5$; **в)** $1/3$; **г)** 0.

6.4. **а)** 9; **б)** ∞; **в)** $-1/4$; **г)** $0,5$; **д)** 3; **е)** $0,5$.

6.5. **а)** 1; **б)** 0; **в)** $-2\ln 2$; **г)** 1; **д)** $1/4$; **е)** $\sqrt{e}$.

6.6. **а)** 2; **б)** 6; **в)** 5; **г)** 6.

6.7. **а)** -5; **б)** 1; **в)** -4; **г)** -12.

6.8. **а)** $a=0,\ b=4$; **б)** $a=-2,\ b=4$;
в) $a=1,\ b=8$; **г)** $a=1,\ b=5$.

Ответы и указания к разделу 7

7.1.
а) $(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$; **б)** $[3;4]$; **в)** $[2;+\infty)$; **г)** $(-1;5)$; **д)** $[\frac{1}{2};1]$;
е) $[-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{5\sqrt{3}}{3}]$; **ж)** $[0;2]$ **з)** $[2;3]$.

7.2.

а) $x=\pm 2$- разрывы II рода (бесконечный разрыв);
б) $x=-2$ - разрыв II рода (бесконечный разрыв);
в) $x=2$ - разрыв I рода (устранимый разрыв), $x=-2$ - разрыв II рода (бесконечный разрыв) ;
г) $x=0$ - разрыв I рода (скачок);
д) $x=1$ - разрыв I рода (скачок);
е) $x=-1$ - разрыв I рода (скачок), $x=0$ - разрыв II рода (бесконечный разрыв);
ж) $x=\pi, x=9$ - разрывы I рода (скачок) ;
з) $x=0$ - разрыв II рода (бесконечный разрыв), $x=1$ - разрыв I рода (скачок).

Варианты контрольных заданий

Задание 1. Составьте сложные функции а)—г), найдите их область определения и производные:

а) $y = f_i(f_j(f_k(x)))$,

б) $y = f_j(f_k(f_i(x)))$,

в) $y = f_{i+1}(x) \cdot f_k(x)$,

г) $y = \dfrac{f_{j+1}(x)}{f_i(x)}$, где

$f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \sqrt{x},\ f_3(x) = e^x,$

$f_4(x) = \mathrm{arccos} x,\ f_5(x) = \cos x,\ f_6(x) = 2^x,$

$f_7(x) = \mathrm{ctg} x,\ f_8(x) = \ln x,\ f_9(x) = x^7,\ f_{10}(x) = \mathrm{arctg} x.$

1.	$i = 1,\ j = 2,\ k = 3.$	**2.**	$i = 2,\ j = 1,\ k = 6.$
3.	$i = 5,\ j = 6,\ k = 1.$	**4.**	$i = 7,\ j = 4,\ k = 6.$
5.	$i = 1,\ j = 4,\ k = 2.$	**6.**	$i = 2,\ j = 8,\ k = 6.$
7.	$i = 3,\ j = 6,\ k = 1.$	**8.**	$i = 7,\ j = 9,\ k = 6.$
9.	$i = 2,\ j = 4,\ k = 5.$	**10.**	$i = 7,\ j = 3,\ k = 5.$
11.	$i = 6,\ j = 3,\ k = 2.$	**12.**	$i = 4,\ j = 1,\ k = 6.$
13.	$i = 1,\ j = 8,\ k = 1.$	**14.**	$i = 7,\ j = 3,\ k = 2.$
15.	$i = 1,\ j = 3,\ k = 5.$	**16.**	$i = 2,\ j = 3,\ k = 6.$
17.	$i = 3,\ j = 4,\ k = 8.$	**18.**	$i = 7,\ j = 9,\ k = 2.$
19.	$i = 2,\ j = 4,\ k = 5.$	**20.**	$i = 1,\ j = 3,\ k = 4.$
21.	$i = 6,\ j = 8,\ k = 1.$	**22.**	$i = 5,\ j = 3,\ k = 6.$
23.	$i = 2,\ j = 8,\ k = 1.$	**24.**	$i = 7,\ j = 1,\ k = 2.$
25.	$i = 1,\ j = 9,\ k = 5.$	**26.**	$i = 4,\ j = 5,\ k = 6.$
27.	$i = 3,\ j = 7,\ k = 8.$	**28.**	$i = 7,\ j = 5,\ k = 1.$
29.	$i = 2,\ j = 9,\ k = 2.$	**30.**	$i = 6,\ j = 3,\ k = 4.$

Задание 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, касательной к графику в точке с абсциссой x_0 и заданной прямой.

1. $y = \ln(x+4)^6 - 8x - 19,\ x_0 = -3,\ x = -1.$

2. $y = x^3 + 2x^2 - 4x,\ x_0 = 0,\ x = x_{\min}$ (абсцисса точки минимума).

3. $y = (x-2)e^x,\ x_0 = -2,\ x = 1.$

4. $y = 8x - 4\mathrm{tg}x - 2\pi + 2,\ x_0 = -2,\ x = \dfrac{\pi}{4}.$

5. $y = \ln(x+4)^8 - x + 1,\ x_0 = -5,\ x = 0.$

6. $y = x^3 - 8x + 1,\ x_0 = 1,\ x = x_{\max}$ (абсцисса точки максимума).

7. $y = xe^{2-x^2},\ x_0 = 2,\ x = 1.$

8. $y = x - 2\cos x + 2\pi,\ x_0 = 0,\ x = 2\pi.$

9. $y = \dfrac{x^2+64}{x},\ x_0 = 4,\ x = 1.$

10. $y = x + \dfrac{225}{x} + 6,\ x_0 = 5,\ x = 20.$

11. $y = 6\ln(x-4) - x + 2,\ x_0 = 7,\ x = 20.$

12. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 15,\ x_0 = 3,\ x = x_{\min}$ (абсцисса точки минимума).

13. $y = (x-1)e^{-x},\ x_0 = 0,\ x = 2.$

14. $y = x\sqrt{x} - 3x + 1,\ x_0 = 1,\ x = x_{\min}$ (абсцисса точки минимума).

15. $y = 4\ln(x+5) - 2x - 3,\ x_0 = -1,\ x = 5.$

16. $y = x^3 - 3x^2 - 6x,\ x_0 = 0,\ x = x_{\max}$ (абсцисса точки максимума).

17. $y = x - \dfrac{25}{x} + 25,\ x_0 = -5,\ y = 0.$

18. $y = x(x-1)^2,\ x_0 = 0,\ x = x_{\min}$ (абсцисса точки минимума).

19. $y = 2\sqrt{1-x} + x,\ x_0 = -2,\ x = 1.$

20. $y = 2x\sqrt{1-x^2},\ x_0 = 0,\ x = 1.$

21. $y = \ln x^6 - 8x + 13,\ x_0 = 1,\ x = 3.$

22. $y = x^4 - 4x + 1,\ x_0 = 0,\ x = x_{\min}$ (абсцисса точки минимума).

23. $y = (2x-1)e^{x^2-x},\ x_0 = 1,\ x = 0.$

24. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x},\ x_0 = 2,\ x = x_{\min}$ (абсцисса точки минимума).

25. $y = x^2 - 4\sqrt{x},\ x_0 = 2,\ x = 0.\ x = x_{\min}$ (абсцисса точки минимума).

Задание 3. Найдите общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения; найдите частное решение (частный интеграл), соответствующий данным начальным условиям.

1. $(1+e^x)y' = ye^x, \quad y(0) = 1.$

2. $(1+x^3)dy = x^2y^4dx, \quad y(0) = -1.$

3. $y' - ye^x = (x+1)e^{e^x}, \quad y(0) = 0.$

4. $y' = 3x^2y - xe^{x^3}, \quad y(0) = 5.$

5. $y^3y' = x(y^4+1)e^{x^2}, \quad y(0) = 0.$

6. $\sin^2 x dy = e^y dx, \quad y(\pi/2) = 0.$

7. $y' - y = (x^2+1)e^x, \quad y(0) = 3.$

8. $y' = \mathrm{tg} x y - \cos x, \quad y(0) = 0.$

9. $(1+2e^x+e^{2x})y' = y^2e^x, \quad y(0) = 2.$

10. $(9+6x^2+x^4)dy = 2x\cos^2 y dx, \quad y(0) = 0.$

11. $(1+e^y)(x+1)^8 = y'e^y, \quad y(0) = \ln 2.$

12. $(1+y)^3dy = x^2y^4dx, \quad y(0) = 1.$

13. $y' - 2yx = e^{(x+1)^2}, \quad y(0) = 0.$

14. $y' = \sin x y - 4e^{\cos x}, \quad y(0) = e.$

15. $(y^3+3y^2+3y+1)y' = (y+1)e^x, \quad y(0) = 2.$

16. $e^{-y^2}\sin^2 x dx = ydy, \quad y(0) = 0.$

17. $y' - 4yx^3 = (x^2+1)e^{x^4}, \quad y(0) = 5.$

18. $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x}} - x^2e^{2\sqrt{x}}, \quad y(0) = 4.$

19. $(1+4e^x+4e^{2x})y' - y^2e^x = 0, \quad y(0) = 1.$

20. $(9+x^4)dy = 2x^3\cos^2 y dx, \quad y(0) = 0.$

21. $(8-e^x)y' = \sqrt{y}e^x, \quad y(0) = 0.$

22. $y' + ye^x = e^xe^{e^x}, \quad y(0) = 0.$

23. $ex - 2yy' = 2, \quad y(0) = 0.$

24. $(\sin x+1)dy = 2\cos x\sin^2 2y dx, \quad y(0) = \pi/4.$

25. $(x^3+3x^2+3x+1)y' = (y+1)^4, \quad y(0) = 0.$

Тесты для проверки знаний

Вводный тест (рекомендуется на первом занятии)

Вопрос 1. Функция $y = x^3 + 5x^5$ является...

Выберите один или несколько вариантов:

а) убывающей;
б) возрастающей;
в) периодической;
г) нечетной;
д) четной.

Вопрос 2. Функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ является...

Выберите один или несколько вариантов:

а) убывающей;
б) возрастающей;
в) периодической;
г) нечетной;
д) четной.

Вопрос 3. Функция $y = \sqrt{8 - x^3}$ является...

Выберите один или несколько вариантов:

а) убывающей;
б) возрастающей;
в) периодической;
г) нечетной;
д) четной.

Вопрос 4. Среди перечисленных ниже, всюду определёнными и непрерывными функциями являются...

Выберите один или несколько вариантов:

а) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$;
б) $y = e^{\frac{1}{x+2}}$;
в) $y = \mathrm{tg}(x)$;
г) $y = \mathrm{arctg}(x)$;
д) $y = \sin x$.

Вопрос 5. Среди перечисленных ниже, ограниченными являются...

Выберите один или несколько вариантов:

а) $y = e^{\sin x}$;
б) $y = \dfrac{1}{x + 2}$;

в) $y = \arcsin(x)$;
г) $y = \operatorname{arctg}(x)$;
д) $y = \ln x$.

Вопрос 6. Функция монотонно возрастает на промежутке, если на этом промежутке...

Выберите один вариант:

а) производная положительна;
б) производная не отрицательна;
в) функция положительна;
г) первообразная не отрицательна;
д) первообразная положительна.

Вопрос 7. Верными являются следующие правила ...

Выберите один или несколько вариантов:

а) $(uv)' = u'v'$;
б) $(uv)' = u'v' + uv$;
в) $(uv)' = u'v + v'u$;
г) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$;
д) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v + v'u}{u^2}$;
е) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v + v'u}{v^2}$;
ж) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{u^2}$.

Вопрос 8. На рисунке (Рисунок 40) изображены графики функции и её производной, при этом...

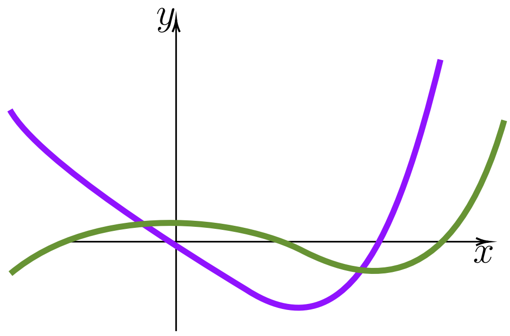


Рисунок 40 — К тестовому вопросу 8

а) функция — фиолетовый, её производная — зелёный;
б) функция — зелёный, её производная — фиолетовый.

Итоговый тест

Вопрос 1. Из перечисленных ниже соотношений неопределенностями являются...

Выберите один или несколько вариантов:

а) $\dfrac{0}{0}$; **б)** $\infty + \infty$;

в) $\infty - \infty$;

г) ∞^{∞};

д) $\dfrac{\infty}{0}$;

е) $\infty + \infty$;

ж) $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Вопрос 2. Определение предела функции на бесконечности задано выражением...

Выберите один вариант:

а) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, R > 0 \ : \ x > R \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon$;

б) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ 0 < x - x_0 < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon$;

в) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ 0 < x_0 - x < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon$;

г) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ : \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - A| < \varepsilon$.

Вопрос 3. Порядок малости величин верно определён в случае...

Выберите один или несколько вариантов:

а) $x^2 = o(\sin x), \quad x \to 0$;

б) $\sqrt{x} = O(x^2), \quad x \to 0$;

в) $\sqrt{x} = o(\sin x), \quad x \to 0$;

г) $x = o(\sin^2 4x), \quad x \to 0$.

Вопрос 4. Функция имеет в точке устранимый разрыв, если в этой точке...

Выберите один или несколько вариантов:

а) существует конечный предел справа;

б) существует конечный предел слева;

в) хотя бы один односторонний предел равен бесконечности;

г) предел слева равен пределу справа;

д) значение функции в точке совпадает со значениями односторонних пределов;

е) предел функции в точке существует.

Вопрос 5. Из перечисленных, разрыв II рода в некоторой точке имеют функции...

Выберите один или несколько вариантов:

а) $y = \dfrac{\text{arctg}\frac{1}{x} - 1}{x^2 + 1}$;

б) $y = \dfrac{\text{arctg}\frac{1}{x^2} - 1}{x^2 - 1}$;

в) $y = \dfrac{\sin x}{x^2 - 1}$;

г) $y = \dfrac{1}{\sin x - 1}$;

д) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$;

е) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Вопрос 6. Верными утверждениями являются...

Выберите один или несколько вариантов:

а) Приращение касательной к функции в точке равно дифференциалу функции этой точке;

б) Угол между осью Ox и касательной функции в некоторой точке равен производной функции в этой самой точке;

в) Тангенс угла между осью Ox и касательной функции в некоторой точке равен производной функции в этой самой точке;

г) Производная функции характеризует скорость изменения аргумента функции;

д) Производная функции характеризует скорость графика;

е) Производная функции характеризует скорость изменения значения функции.

Вопрос 7. В каком из перечисленных случаев верно применено правило Лопиталя? Верными равенствами являются...

Выберите один или несколько вариантов:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 1}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x^2 + 1)'}{(\ln x)'}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2 - 1}{\ln x}\right)'$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + \ln x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + \ln x)'}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\sin(x - 1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2 - 1)'}{(\sin(x - 1))'}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2)'}{(\sin x)'}$.

Вопрос 8. Формула $2\pi\int\limits_{x_A}^{x_B} y(x)\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ используется для вычисления...

Выберите один вариант:

а) длины кривой;

б) площади поверхности вращения;

в) среднего значения функции;

г) центра тяжести кривой;

д) площади криволинейной трапеции.

Вопрос 9. Формула Ньютона- Лейбница верно сформулирована в случае...

Выберите один вариант:

а) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$;

б) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) + F(a)$;

в) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$;

г) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b) + C$.

Вопрос 10. Линейными дифференциальными уравнениями первого порядка являются...

Выберите один вариант:

а) $y' = \dfrac{x^2}{y^2} + y$;

б) $y = \sin\dfrac{y'}{x}$;

в) $y = x^2 - 4y'$;

г) $xy' = y - x$;

д) $y - 1 = x^2 4y'$;

е) $y' = y^2 - x^2 y$.

Справочные материалы

Основные тригонометрические тождества

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1;$

2. $\mathrm{tg}^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

3. $\mathrm{tg} x \cdot \mathrm{ctg} x = 1;$

4. $\mathrm{ctg}^2 x + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x};$

5. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$

6. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1;$

7. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x;$

8. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$

9. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$

10. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y.$

Правила преобразования степенных выражений

1. $a^b \cdot a^c = a^{b+c};$

2. $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c};$

3. $\left(a^b\right)^c = a^{bc};$

4. $\sqrt[n]{a} = a^{1/n};$

5. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n};$

6. $a^n = b^{n \log_b a}.$

Основные логарифмические тождества

Свойства имеют место на области определения рассматриваемых функций: $\log_a b$ *имеет смысл, если* $a, b > 0$ *и* $a \neq 1$.

1. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c;$

2. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$

3. $\log_a b^c = c \cdot \log_a b;$

4. $\log_{a^c} b = \dfrac{1}{c} \cdot \log_a b;$

5. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a};$

6. $a = b^{\log_b a}.$

Литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 частях. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 4-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2004. - 279 с.: ил. - ISBN 5-8112-0884-7

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. Ч.2: учебник / Д. Т. Письменный. - 2-е изд., испр. - Москва: Айрис-пресс, 2005. - 251 с. - ISBN 5-8112-0882-0

3. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. - Москва: АСТ: Астрель, 2007. - 654, [1] с.: ил. - Предм. указ.: с. 639-649. - ISBN 5-17-004601-4

4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. - Москва: Астрель: АСТ, 2003. - 558 с. - ISBN 5-17-010062-0

5. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие / Г. Н. Берман. - 22-е изд., перераб. - Санкт-Петербург: Профессия, 2002. - 432 с.: ил. - ISBN 5-93913-009-7

6. Трофимов, В. К. Интегральное исчисление. Неопределенные интегралы: учеб. пособие / В. К. Трофимов, Т. С. Мурзина, Т. Э. Захарова; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск: СибГУТИ, 2006. - 83 с.

7. Трофимов, В. К. Интегральное исчисление. Определенные интегралы: учеб. пособие / В. К. Трофимов, Т. С. Мурзина, Т. Э. Захарова; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. - Новосибирск: СибГУТИ, 2006. - 151 с.

8. Алгебра и начала математического анализа. 10-11-е классы [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений: (базовый уровень): в 2 ч. / А. Г. Мордкович. - 13-е изд., стер. - Москва: Мнемозина, 2012. Ч. 1: Учебник. Ч. 1. - 2012. - 399 с. : ил.; ISBN 978-5-346-01992-3

Храмова Татьяна Викторовна

Козлова Марина Петровна

Элементы математического анализа

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать .
формат бумаги 60x84/16, отпечатано на ризографе, шрифт 10,
п. л. 5, заказ No , тираж экз.
СибГУТИ
630102, г. Новосибирск, ул. Кирова, 86, офис 107, тел. (383) 269-83-20