RSA DIY with Large Numbers

Conception de la structure Grand Nombre

Notre objet BiguInt stocke:

• mag : Un array de magnitude de type <code>UIntArray</code> avec les éléments de taille maximum $2^{31}=2147483648$, en little endian.

La raison de stocker un tableau de magnitude et une base de travail est que nous allons analyser le String de la valeur.

Example:

```
BigUInt.valueOf("2147483648", radix=10)
```

Ce qui donne dans l'objet :

```
{
    "mag": {0, 1},
}
```

Instancier BigUInt

Constructeur

Nous n'avons qu'un constructeur :

```
class BigUInt {
    val mag: UIntArray

    constructor(mag: UIntArray) {
        this.mag = mag.stripTrailingZero()
    }
}
```

En Kotlin, cela se réduit à :

```
class BigUInt(mag: UIntArray) {
   val mag = mag.stripTrailingZero()
}
```

Parser un String (BigUInt.valueOf)

L'algorithme est assez simple, mais ne supporte que les bases 2 à 36 (car, en base 36, contient les caractères 0-9a-z).

En résumé :

- Vérifie s'il existe un signe et attribue en fonction de la présence de signe
- Convertit les charactères en digit et les stocke dans un array
- Cet array en base |radix| est convertir en base 2^{31}

```
fun valueOf(str: String, radix: Int = DEFAULT_BASE_STRING): BigUInt {
   var i = 0
   val array = when {
        str.first() == '-' || str.first() == '+' -> {
           UIntArray(str.length - 1)
        }
        else -> {
           UIntArray(str.length)
        }
   }
    for (j in array.size - 1 downTo 0) {
        array[j] = Character.digit(str[i], radix).toUInt()
        i++
   }
   // Convert array in base `radix` to base 2^EXPONENT
   val mag = array.toBase2PowK(radix.toUInt(), EXPONENT)
   return BigUInt(mag)
}
```

Ici, EXPONENT est 31.

Note : Sur Kotlin, chaque expression de contrôle de flux permet de retourner la dernière valeur. Exemple :

```
val a = if (condition) {
    println("...")
    32  // This is returned because it is the last line of the expression
} else {
    println("...")
    12  // This is returned because it is the last line of the expression
}
```

Cela permet de remplacer l'opérateur ternaire de Java (condition ? returnMeIfTrue : returnMeIfFalse).

Notez que cette méthode est une **méthode factory**. Ce qui signifie qu'elle doit être stocké dans un objet factory ayant un cycle de vie de <u>singleton</u>.

En Kotlin, cela se résume à faire un <u>companion object</u> :

Ce qui permet:

```
BigUInt.valueOf("12345", 10)
```

object sous Kotlin est un singleton et permet de stocker des variables ou méthodes existant sur toute l'application. (En gros, c'est une méthode static au sens de C++, c'est-à-dire, partagé entre toutes les instances de classes).

Exemple:

```
object ImASingleton {
   fun hello() {}
}
ImASingleton.hello()
```

companion object associe la classe mère (ici, BigUInt) avec l'object.

```
class ImNotASingletonBut {
    companion object { // But, this is a Singleton
        fun hello() {}
    }
}
ImNotASingletonBut.hello()
```

Nous avons définie des classes utilitaires pour convertir des arrays d'une base à une autre.

Convertisseur base n vers base 2^k .

```
/**
  * Convert a array in [radix] to an array in base 2.pow(k)
  *
  * Algorithm Description :
  * - Convert the source in binary
  * - Combine chunks of digit into one
  *
  * Self-Explanatory Example with *137 to base 16 (2^4)*:
  * - 137 = 0b10001001
  * - 0b10001001 = 1000 | 1001 = 0x89
  */1 | 0001 = 0x11
  */
```

Le convertisseur base n vers base 2.

```
* Convert BigInt magnitude array to base 2.
 * Algorithm description: Division method.
@ExperimentalUnsignedTypes
fun UIntArray.toBase2Array(radix: UInt): UIntArray {
   val size = ceil(this.size * log2(radix.toDouble())).toInt()
   val result = UIntArray(size)
   val zero = uintArrayOf(0u)
   var i = 0
   var num = this
   while (!num.contentEquals(zero)) {
        result[i] = num[0] % 2u // num % 2
        num = num.divBy2(radix).stripTrailingZero()
        i++
   }
   return result
}
```

Le divBy2(radix):

```
/**
  * Considering that UIntArray is a array of digit. Return this / 2
  *
  * Algorithm description:
  * `(a_0 + a_1 * base + ... + a_n * base^n)/2` can be developed to
  * `a_0/2 + (a_1 * base)/2 + ... + (a_n * base^n)/2`. If one of the division has a carry (i.e is impair), then
  * this carry will pass to the i - 1 th element.
  *
  * So, to summarize:
  * - Loop from the nth element to the zeroth element
```

```
* - Add the carry if exist
 * - Store the new carry if impair
      - Divide by 2 the element
 */
@ExperimentalUnsignedTypes
fun UIntArray.divBy2(radix: UInt): UIntArray {
    val zero = uintArrayOf(0u)
    val one = uintArrayOf(1u)
    if (this.contentEquals(zero) || this.contentEquals(one)) return zero
    val result = this.copyOf()
    var carry = 0u
    for (i in size - 1 downTo 0) {
        result[i] = result[i] + carry
        carry = if (result[i] % 2u == 1u) radix else 0u // Store carry if
remainder exist
        result[i] = result[i] shr 1 // Div by 2
    }
    return result
}
```

Comparaison

Implémenter Comparable<BigUInt>

Nous faisons cela, parce qu'un nombre est comparable et aidera les implémentations futures :

```
class BigUInt(mag: UIntArray) : Comparable<BigUInt> {
    override fun compareTo(other: BigUInt): Int {
        TODO("Not implemented yer")
    }
    override fun equals(other: Any?): Boolean {
        TODO("Not implemented yer")
    }
}
```

compareTo

L'algorithme est la suivant :

- Comparer la taille des arrays de magnitude
- Si les tailles sont les mêmes, comparer les digits en partant de la fin.

Soit, sur Kotlin:

```
override fun compareTo(other: BigUInt): Int {
   return this.compareUnsignedTo(other)
}
```

```
private fun compareUnsignedTo(other: BigUInt): Int {
   return when {
     this.mag.size < other.mag.size -> -1
     this.mag.size > other.mag.size -> 1
     else -> compareMagnitudeTo(other)
   }
}
```

```
private fun compareMagnitudeTo(other: BigUInt): Int {
    // Check for the first biggest number
    for (i in mag.size - 1 downTo 0) {
        if (mag[i] < other.mag[i]) {
            return -1
        } else if (mag[i] > other.mag[i]) {
            return 1
        }
    }
    return 0
}
```

equals

```
override fun equals(other: Any?): Boolean {
   if (this === other) return true
   if (javaClass != other?.javaClass) return false

   other as BigUInt

   if (this.compareTo(other) != 0) return false

   return true
}
```

Opérateurs basique

unaryMinus et unaryPlus

Opérateurs +a et -a. Rien de plus simple en non-signé :

```
operator fun unaryPlus() = this
operator fun unaryMinus() = this
```

plus

Notre implémentation contient quelques conditions pour la sécurité :

```
operator fun plus(other: BigUInt): BigUInt {
   if (this == zero) return other
   if (other == zero) return this

   val result = this addMagnitude other

   return BigUInt(result)
}
```

Allons voir l'implémentation de addMagnitude.

```
private infix fun addMagnitude(other: BigUInt): UIntArray {
   val result = UIntArray(max(mag.size, other.mag.size) + 1)
   var carry = 0uL
   var i = 0
   // Add common parts of both numbers
   while (i < mag.size && i < other.mag.size) {
        val sum: ULong = mag[i] + other.mag[i] + carry
        result[i] = (sum % BASE).toUInt()
        carry = sum / BASE
        i++
   }
   // Add the last part
   while (i < mag.size) {</pre>
       val sum: ULong = mag[i] + carry
        result[i] = (sum % BASE).toUInt()
        carry = sum / BASE
        i++
   while (i < other.mag.size) {</pre>
       val sum: ULong = other.mag[i] + carry
        result[i] = (sum % BASE).toUInt()
        carry = sum / BASE
        i++
   }
   // Add the last carry (if exists)
   if (carry > 0u) result[i] = carry.toUInt()
```

```
return result
}
```

Notez le infix à la déclaration de la fonction. Cela permet a addMagnitude b en plus de a.addMagnitude(b).

Ici, il s'agit de l'algorithme de l'addition cas d'école:

- val sum = mag[i] + other.mag[i] + carry est assez explicite, nous additionnons digits par digits.
- result[i] = sum % base permet d'éviter l'overflow de la base. Si cela overflow (sum / base > 0), alors nous mettons cet overflow dans le carry: carry = sum / base.

minus

Notre implémentation contient quelques conditions pour la sécurité :

```
operator fun minus(other: BigUInt): BigUInt {
   if (this == zero) return other
   if (other == zero) return this

val result = this subtractMagnitude other
   return BigUInt(result)
}
```

Allons voir subtractMagnitude.

```
private infix fun subtractMagnitude(other: BigUInt): UIntArray {
   val result = UIntArray(max(mag.size, other.mag.size))
   var carry = 0uL
   val (largest, smallest) = if (this.compareUnsignedTo(other) < 0) {</pre>
        other to this
   } else {
        this to other
   // Subtract common parts of both numbers
    for (i in smallest.mag.indices) {
        var sub: ULong
        if (largest.mag[i] < carry + smallest.mag[i]) {</pre>
            sub = largest.mag[i] + (largest.base - carry - smallest.mag[i])
            carry = 1u
        } else {
            sub = largest.mag[i] - smallest.mag[i] - carry
            carry = 0u
        result[i] = sub.toUInt()
   }
   // Subtract the last part
    for (i in smallest.mag.size until largest.mag.size) {
        var sub: ULong
        if (largest.mag[i] < carry) {</pre>
            sub = largest.mag[i] + (largest.base - carry)
            carry = 1u
        } else {
            sub = largest.mag[i] - carry
            carry = 0u
        }
        result[i] = sub.toUInt()
    return result
}
```

L'algorithme de la soustraction **non signé** est également classique et assez similaire à l'addition :

- Partir du plus petit et soustraire les parties communes.
 - [largest.mag[i] smallest.mag[i] carry est assez explicite
 - o if (largest.mag[i] < smallest.mag[i] + carry) vérifie s'il existe un carry (e.g: "sub est-il négatif?" ou "sub est-il en underflow?").
 - Si oui, alors on fait remonter dans les nombres positifs en ajoutant base et on stocke (1u) dans le carry.
- Finir par la dernière partie.

times

Rien de surprenant non plus :

```
operator fun times(other: BigUInt): BigUInt {
    if (this == zero || other == zero) return zero
   val result = UIntArray(mag.size + other.mag.size)
   // School case multiplication
   for (i in other.mag.indices) {
        var carry = 0uL
        for (j in mag.indices) {
            // Note: ULong is **necessary** to avoid overflow of other.mag[i] *
mag[j].
            val sum: ULong = result[i + j].toULong() + other.mag[i].toULong() *
mag[j].toULong() + carry
            carry = sum / BASE
            result[i + j] = (sum % BASE).toUInt()
        result[i + mag.size] = carry.toUInt()
    }
    return BigUInt(result)
}
```

Il s'agit du cas d'école. La seule différence est carry = result[i + j] / BASE et result[i + j] = result[i + j] % BASE.

De la même manière que plus et minus, % BASE et / BASE permet d'éviter l'overflow de la base. % BASE va faire que le nombre dépasse pas la base et / base récupère le carry.

shl ou littéralement shift left (pas bitwise)

En little-endian, nombre sh1 n divisera le nombre par $base^n$.

L'implémentation est immédiate :

```
infix fun shl(n: Int): BigUInt {
   if (n == 0) return this
   val result = if (n < mag.size) mag.copyOfRange(n, mag.size) else
uintArrayOf(Ou)
   return BigUInt(result)
}</pre>
```

remsh1 ou le reste du shift left

L'algorithme est choisi est le cas d'école :

```
infix fun remShl(k: Int): BigUInt {
   if (k == 0) return zero

   val divResult = this shl k
   return this - basePowK(k) * divResult
}
```

Car le reste de x/n^k est $rem = x - n^k \times \lfloor \frac{x}{n^k} \rfloor$ puisque remainder $= x - \text{other} \times \text{quotient}$.

Note: L'implémentation de basePowk.

```
private fun basePowK(k: Int): BigUInt {
   val mag = UIntArray(k + 1).apply {
      set(k, 1u)
   }
   return BigUInt(mag)
}
```

Sur Kotlin, apply permet enchainer des opérations à la déclaration. Equivalent :

```
private fun basePowK(base: UInt, k: Int): BigUInt {
   val mag = UIntArray(k + 1)
   mag[k] = 1u
   return BigUInt(mag)
}
```

div

div est nécessaire d'être implémenté afin de faire l'opérateur rem (ou %) et de calculer le modInverse.

Cependant, div est actuellement lourd à implémenter. Par conséquent, **nous essaierons de l'éviter au mieux**.

L'implémentation est l'algorithme de Binary Search (recherche par dichotomie).

```
operator fun div(other: BigUInt): BigUInt {
    if (other == zero) throw ArithmeticException("/ by zero")
    if (this == one || this == zero) return zero
    var left = zero
    var right = this
    var prevMid = zero
    while (true) {
        val mid = left + (right - left).divBy2()
        val productResult = other * mid
        when {
            productResult == this || prevMid == mid -> { // Exit condition: mid
= this / other.
                return mid
            }
            productResult < this -> { // mid < this / other. Too low.</pre>
                left = mid // x if after the middle.
            else -> { // mid > this / other. Too high.
                right = mid // x is before the middle.
            }
        prevMid = mid
    }
}
```

En effet, l'algorithme s'applique car $other \times x$ est strictement croissant et continue. Par conséquent, en appliquant cet algorithme, si $other \times mid = this$ alors $\frac{this}{other} = mid$.

L'implémentation de divBy2() est issue de l'implémentation de UIntArray.divBy2.

```
fun divBy2() = BigUInt(mag.divBy2(BASE))
```

Déduction à propos choix de l'algorithme Binary Search : Le choix de cet algorithme a actuellement un complexité faible : $\mathcal{O}(1)$ si other est un multiple de 2. **Cela influencera l'implémentation de l'algorithmie modulaire.**

rem ou modulo

Même implémentation de remsh1. Il s'agit du cas d'école.

```
operator fun rem(other: BigUInt): BigUInt {
   if (other == zero) throw ArithmeticException("/ by zero")
   if (this == other || other == one) return zero

val divResult = this / other
   return this - other * divResult
}
```

modInverse avec pgcd(a, n) = 1

Maintenant, que nous avons implémenté div, nous pouvons implémenter modInverse selon l'algorithme d'Euclide étendue sachant qcd(this, other) == 1:

```
infix fun modInverse(other: BigUInt): BigUInt {
   if (other <= one) return zero
   var (oldR, r) = this to other
   var (t, tIsNegative) = zero to false
    var (oldT, oldTIsNegative) = one to false
    while (oldR > one) {
        if (r == zero) // this and other are not coprime
        return zero
        val q = oldR / r
        // (r, oldR) = (oldR - q * r, r)
        (oldR - q * r).let {
            oldR = r
            r = it
        }
        // (t, oldT) = (oldT - q * t, t)
        val qt = q * t
        val tempT = t
        val tempTIsNegative = tIsNegative
        if (tIsNegative == oldTIsNegative) {
            if (oldT > qt) { // oldT - q * t >= 0. Default case.}
                t = oldT - qt
                tIsNegative = oldTIsNegative
            } else { // oldT - q * t < 0. We swap the members.
                t = qt - oldT
                tIsNegative = !tIsNegative // Switch the sign because oldT - q *
t < 0
        } else { // oldT and t don't have the same sign. The subtraction become
an addition.
            t = oldT + qt
            tIsNegative = oldTIsNegative
        oldT = tempT
        oldTIsNegative = tempTIsNegative
    return if (oldTIsNegative) (other - oldT) else oldT
}
```

Algorithmie sous la forme de Montgomery

montgomeryTimes

```
A\otimes B=A\cdot B\cdot r^{-1} \bmod n
```

Rien d'extraordinaire. Nous suivons l'implémentation indiqué par l'algorithme de réduction de Montgomery.

```
fun montgomeryTimes(other: BigUInt, n: BigUInt, v: BigUInt): BigUInt {
   val s = this * other
   val t = (s * v) remShl n.mag.size
   val m = s + t * n
   val u = m shl n.mag.size
   return if (u >= n) u - n else u
}
```

v tel que $n \cdot v \equiv -1 \mod r$. r tel que si $base^{k-1} \leqslant n < base^k$ alors $r = base^k$.

Notez remsh1 qui signifie "reste de shift left n.mag.size fois" soit "reste de $/base^{\mathrm{n.mag.size}}$ ".

Tests de montgomeryTimes

Avant de passer à la suite, il serait intéressant de tester montgomeryTimes pour passer sous la forme de Montgomery et afin de montrer l'utilisation de cette méthode.

Nous rappelons que la forme de Montgomery est $\phi(a) = a \cdot r \mod n$.

Or:

$$a \otimes r^2 \mod n = a \cdot r^2 \cdot r^{-1} \mod n$$

= $a \cdot r \mod n$
= $\phi(a)$

Inversement:

$$\phi(a) \otimes 1 = \phi(a) \cdot 1 \cdot r^{-1} \mod n$$
$$= a \cdot r \mod n \cdot r^{-1} \mod n$$
$$= a \mod n$$

Donc notre test est:

```
"A to phi(A) with A = 413 * BASE mod 3233 = 882" {
   val a = BigUInt.valueOf("413", 10)
   val n = BigUInt.valueOf("3233", 10)

val r = BigUInt.basePowK(n.mag.size)
   val rSquare = BigUInt.basePowK(n.mag.size * 2) % n
   val v = r - (n modInverse r)
   val aMgy = a.montgomeryTimes(rSquare, n, v)

v shouldBe BigUInt.valueOf("1721706655", 10)
   aMgy shouldBe BigUInt.valueOf("882", 10)
}
```

Note: Le test est sous format Kotest.

Notez v issue de l'identité de Bezout $r \cdot r' - n \cdot v = 1$ soit $n \cdot v \equiv -1 \bmod r$.

Nous pouvons également tester les 2 sens de transformation de Montgomery :

```
"phi(A) to A with A = 413 * BASE mod 3233 = 882" {
  val a = BigUInt.valueOf("413", 10)
  val n = BigUInt.valueOf("3233", 10)

val r = BigUInt.basePowK(n.mag.size)
  val rSquare = BigUInt.basePowK(n.mag.size * 2) % n
  val v = r - (n modInverse r)

val aMgy = a.montgomeryTimes(rSquare, n, v)
  val aNotMgy = aMgy.montgomeryTimes(BigUInt.one, n, v)

aNotMgy shouldBe a
}
```

Ce qui donne:

```
      ✓ Test Results
      61 ms

      ✓ ✓ me.nguye.number.BigUIntTest
      61 ms

      ✓ ✓ montgomeryTimes should
      61 ms

      ✓ A to phi(A) with A = 413 * BASE mod 3233 = 882
      40 ms

      ✓ phi(A) to A with A = 413 * BASE mod 3233 = 882
      21 ms
```

modPow, exponentiation modulaire avec la réduction de Montgomery

L'algorithme utilisé est <u>square-and-multiply</u>.

```
fun modPow(exponent: BigUInt, n: BigUInt): BigUInt {
   val exponentBase2 = exponent.mag.toBase2Array(radix=BASE)
   val r = basePowK(n.mag.size)
   val rSquare = basePowK(n.mag.size * 2) % n
   // v*n = -1 \mod r = (r - 1) \mod r
   val v = r - (n modInverse r)
   // Put this in montgomery form
   val thisMgy = this.montgomeryTimes(rSquare, n, v)
   var p = r - n // 1 in montgomery form
    for (i in exponentBase2.size - 1 downTo 0) {
        p = p.montgomeryTimes(p, n, v) // Square : p = p*p
        if (exponentBase2[i] == 1u) {
            p = p.montgomeryTimes(thisMgy, n, v) // Multiply : p = p * a
        }
    }
    // Return the result in the standard form
    return p.montgomeryTimes(one, n, v)
}
```

Faisons ligne par ligne:

- val exponentBase2 = exponent.toBase2Array(radix=BASE) permet exponentiation via l'algorithme square-and-multiply.
- val r = basePowK(n.mag.size), car, r est choisi tel que si $base^{k-1} \leqslant n < base^k$ alors $r = base^k$ pour que r soit premier avec n.
- val rSquare = basePowK(n.mag.size * 2) % n est $r^2 \mod n$
- val v = r (n modInverse r) est un coefficient de Bezout issue de $r \cdot r' n \cdot v = 1$.

```
var p = r - n // 1 in montgomery form
for (i in exponentBase2.mag.size - 1 downTo 0) {
   p = p.montgomeryTimes(p, n, v) // Square : p = p*p
   if (exponentBase2.mag[i] == 1u) {
      p = p.montgomeryTimes(thisMgy, n, v) // Multiply : p = p * a
   }
}
```

est l'algorithme square-and-multiply.

Elle fonctionne de la manière suivante :

- \circ Si x^k , alors k est décomposable en base 2. (exemple si $k=22=(10110)_2$) Donc, $x^k=x^{a_n2^n+\ldots+a_0}$. ($x^{22}=x^{16+4+2}=x^{16}x^4x^2$)
- \circ Si il y a des 1, alors il faut multiplier, car $x^a\cdot x^b=x^{a+b}$ (plus précisément : $x^{a_i2^i}\cdot x^{a_j2^j}=x^{a_i2^i+a_j2^j}$).

- o Nous utilisons "square" pour multiplier l'exposant par 2 (décaler à gauche les bits de l'exposant), car $x^a\cdot x^a=x^{2a}$ (plus précisément : $x^{a_i2^i}\cdot x^{a_i2^i}=x^{a_i2^{i+1}}$.
- o Donc, en reprenant l'exemple :
 - On itère 5 fois. Chaque itération (squaring) multiplie les exposants par 2.
 - La première multiplication à la première itération va permettre de construire x^{16} grâce aux 4 itérations (square) restantes.
 - La deuxième multiplication à la troisième itération va permettre de construire x^4 grâce aux 2 itérations (square) restantes.
 - La troisième multiplication à la quatrième itération va permettre de construire x^2 grâce la dernière itération.
- p.montgomeryTimes(one, n, v) est la mise sous la forme "standard" (non-Montgomery).

Test de modPow

Paramètres

- Base de travail: 10
- Entrées :

```
d =
1040558441671077812485897526089204421214358524130047196074639508239873128211
3275916680998868588284966002871345280915424736058018571225927752937375563384
3749387184470871012615224812078370633557809434904918225321388120741945280206
70877
c1 =
2907589156223685355406259912832815959018302898055210108554426270478005354953
4418578507236855720567419975163282590047789761592080601496152946952125090156
7446011587172953825114315233286969047361527760435665801422048859124438317920
7778418363139822182666461154723983793619893969217826316733888203460760986573
1118
c2 =
1884373410417546174762005634597764433919185101394525088563340762993600120692
4360108249391255994307246258972445193033936764824225343511129353256115730527
6340533720594607574733025175393648331282672638754090446864553851327686234406
1352945624304163487361558480011365417897195417316438238034880347571065633374
1640
n =
1797693134862315907729305190789024733617976978942306572734300811577326758055
0096313270847732240753602112011387987139335765878976881441662249284743063947
7074095512480796227391561801824887394139579933613278628104952355769470429079
0618088095228864239559174423176933873251711350717926983445502235717324055626
49211
```

• Attendu:

```
m1 = 123

m2 = 200
```

Code / Protocole

```
@ExperimentalTime
@ExperimentalUnsignedTypes
fun main() {
    val radix = 10

    val d = BigUInt.valueOf("...", radix) // Entrée tronquée
    val c1 = BigUInt.valueOf("...", radix) // Entrée tronquée
    val c2 = BigUInt.valueOf("...", radix) // Entrée tronquée
    val n = BigUInt.valueOf("...", radix) // Entrée tronquée

println("decrypting")
    measureTime {
        println(c1.modPow(d, n))
        println(c2.modPow(d, n))
        }.also { println("Time Elapsed : $it") }
```

}

Résultat

```
decrypting
{123}
{200}
Time Elapsed: 277ms
```

Résultat satisfaisant et rapide.

Rsa

Le comportement de RSA est immédiat :

```
@ExperimentalUnsignedTypes
object Rsa {
   fun decrypt(c: BigUInt, d: BigUInt, n: BigUInt) = c.modPow(d, n)
   fun encrypt(m: BigUInt, e: BigUInt, n: BigUInt) = m.modPow(e, n)
}
```