Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Кафедра прикладной математики и информатики

Отчет по лабораторной работе №2.3 по дисциплине

"Численные методы"

Выполнила студент гр. 5030102/20003 Королева Д.С.
Преподаватель Добрецова С.Б.

Санкт-Петербург
2024

1 Формулировка задачи

Представим определенный интеграл на промежутке $[a, b]$ функции $F(x)$ в виде $\int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x)f(x)dx$ Формулы вида $\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ называются квадратурными $A_k x_k \in [a, b]$ - коэффициенты и узлы квадратурной формулы

Задача состоит в рабиении интеграла и вычисления его методом трапеций с определенной точностью на заданном отрезке. В данной раюоте решается задача интегрирования для функции $x^5 - 9.2x^3 + 2.5x^2 - 7x + 1.4$

2 Алгоритм метода трапеций

n - число узлов
пусть h $= \frac{b-a}{n}$ - шаг интегрирования
$x_{i+1} = x_i + h$
Тогда $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} * h, i = 1..n$
Результат представляет собой $I = \sum_{i=1}^n I_i$

3 Нахождение с заданной точностью. Правило Рунге

Чтобы найти интеграл с заданной точностью ϵ, воспользуемся следующим критерием остановки:

$\frac{I_{2m}-I_m}{2^p-1} < \epsilon$, где р - порядок метода, для метода парабол $p = 2$

Тут I_{2m} - интеграл, вычсиленный с заданной точностью

4 Тестовый пример

Функция $f(x) = x^5 - 9.2x^3 + 2.5x^2 - 7x + 1.4, [0, 1]$
Точное значение интеграла $I = -3.4$
случай $k = 0$ значит число разбиений $n = 2^0 = 1$
$h = \frac{1-0}{1} = 1,$
$f(1) = 1^5 - 9.2 * 1^3 + 2.5 * 1^2 - 7 * 1 + 1.4 = -11.3$
$f(0) = 1.4$
$I_1 = \frac{-11.3+1.4}{2} 1 = -4.95$

случай $k = 1$ значит число разбиений $n = 2^1 = 2$
$h = \frac{1-0}{2} = 0.5,$
$f(1) = 1^5 - 9.2 * 1^3 + 2.5 * 1^2 - 7 * 1 + 1.4 = -11.3,$
$f(0.5) = 0.5^5 - 9.2 * 0.5^3 + 2.5 * 0.5^2 - 7 * 0.5 + 1.4 = -2.59,$
$f(0) = 1.4$

$I_2 = \frac{-11.3-2.59}{2}0.5 + \frac{-2.59+1.4}{2}0.5 = -3.77$

Фактическая ошибка: $-3.77 - (-3.4) = 0.37$

Достигнутая точность: $\frac{-3.77+4.95}{3} = 0.39$

случай $k = 2$ значит число разбиений $n = 2^2 = 4$

$h = \frac{1-0}{4} = 0.25,$

$f(1) = 1^5 - 9.2 * 1^3 + 2.5 * 1^2 - 7 * 1 + 1.4 = -11.3,$

$f(0.75) = 0.75^5 - 9.2 * 0.75^3 + 2.5 * 0.75^2 - 7 * 0.75 + 1.4 = -6.08,$

$f(0.5) = 0.5^5 - 9.2 * 0.5^3 + 2.5 * 0.5^2 - 7 * 0.5 + 1.4 = -2.59,$

$f(0.25) = 0.25^5 - 9.2 * 0.25^3 + 2.5 * 0.25^2 - 7 * 0.25 + 1.4 = -0.34,$

$f(0) = 1.4$

$I_4 = \frac{-11.3-6.08}{2}0.25 + \frac{-6.08-2.59}{2}0.25 + \frac{-2.59-0.34}{2}0.25 + \frac{-0.34+1.4}{2}0.25 = -3.49$

Фактическая ошибка: $-3.49 - (-3.4) = -0.09$

Достигнутая точность: $\frac{-3.49+3.77}{3} = 0.09$

5 Модульная структура программы

double the_trapezoidal_rule(double a, double b, int k)

На вход функции подается границы отрезка игтегрирования и число итераций для разбиения. Возвращается значение интеграла, вычисленное методом трапеций

double function(double x)

Функция вычисляет значение полинома в точке x и возвращает его.

double antiderivative(double x)

Функция вычисляет значение первообразной полинома в точке x и возвращает его.

6 Анализ решения задачи

Из графика зависимости фактической ошибки от заданной точности видно, что линия зависимости лежит под биссектрисой графика, а значит точность достигается и метод построен верно.

По графику зависимости числа разбиений отрезка от заданной точности можно сделать вывод, что чем больше число разбиений, чтем точнее вычисляется интеграл.

По графику зависимости фактической точности от длины разбиения отрезка делаем вывод, что меньше длина разбиения, тем дучше достигается точность. Зависимость равномерная

7 Вывод

В данной работе был построен метод трапеций, решающий задачу решения интеграла полинома с помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса.

8 Приложение

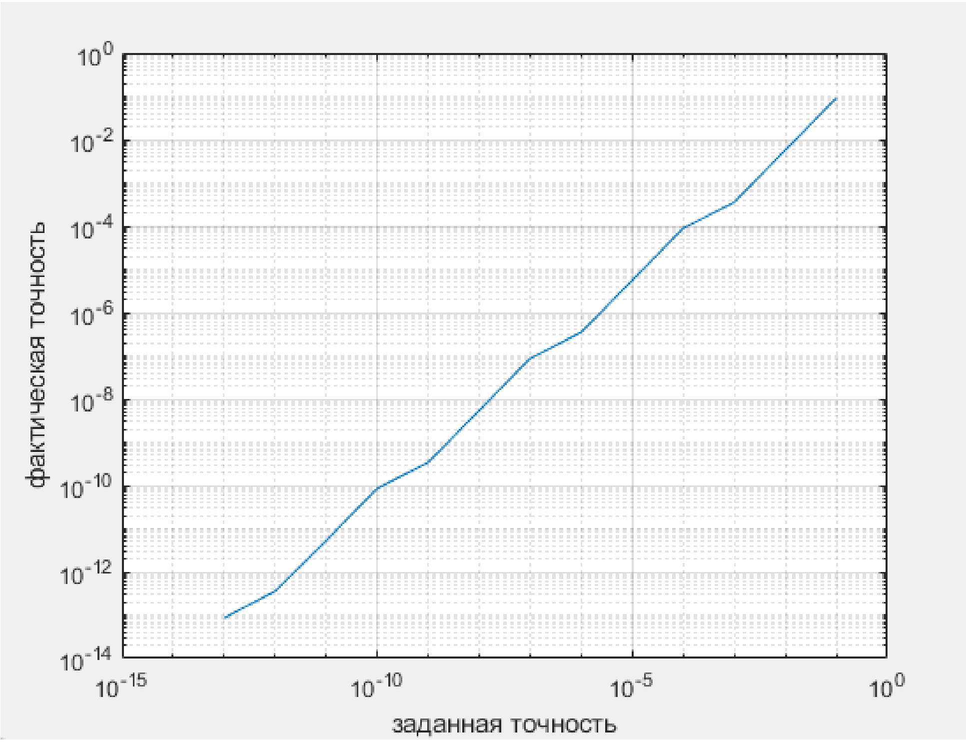

Figure 1: График 1- Зависимость фактической ошибки от заданной точности

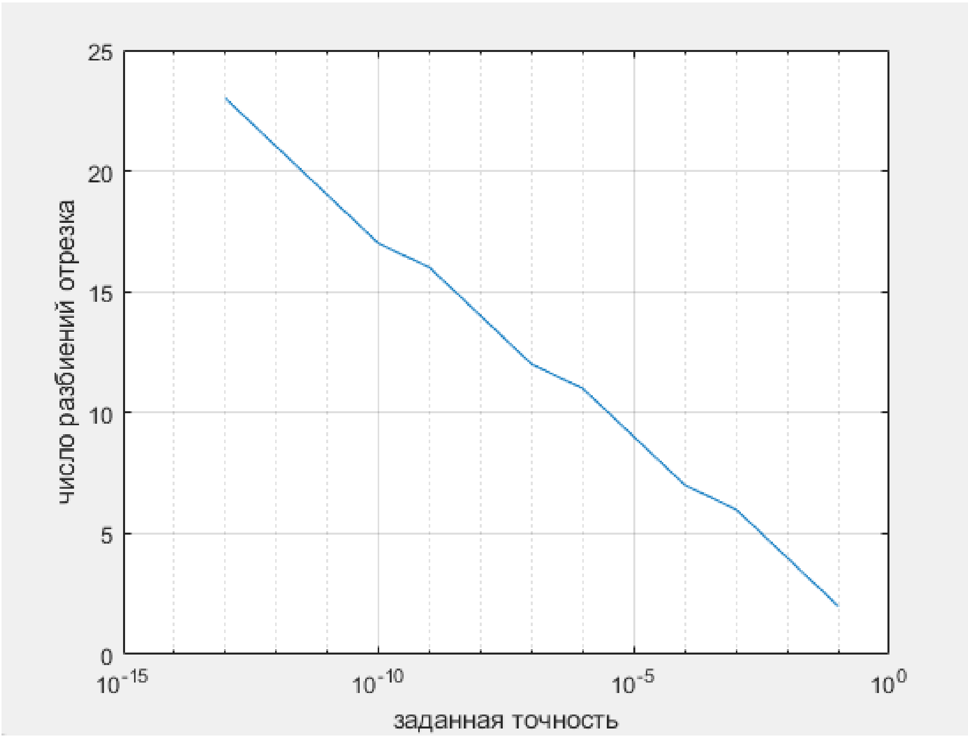

Figure 2: График 2 - зависимость числа разбиений отрезка от заданной точности

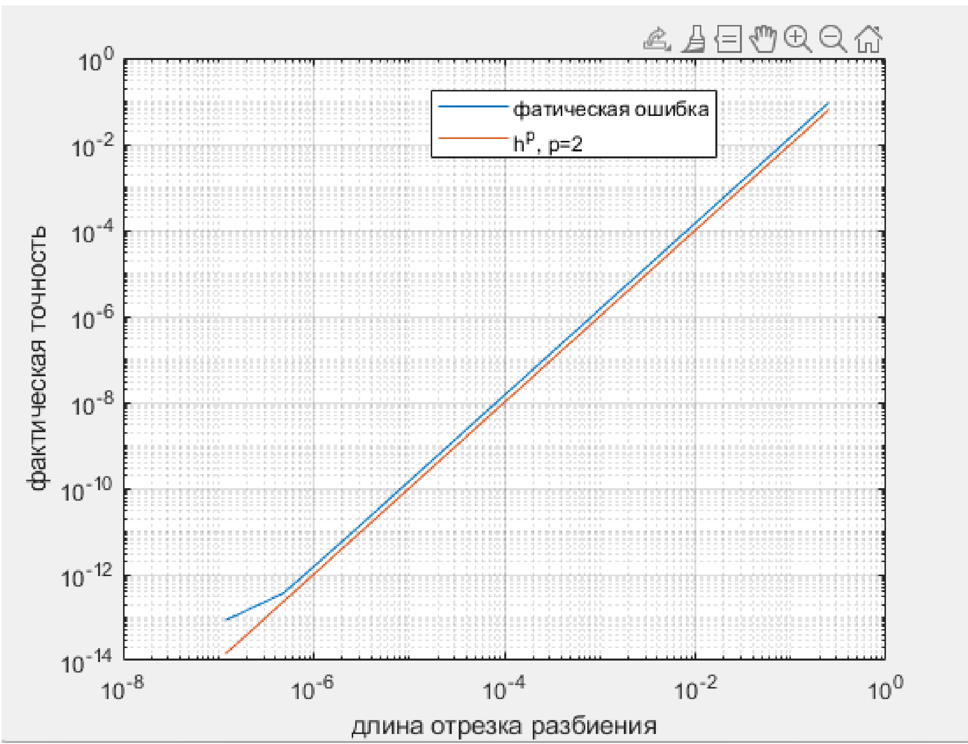

Figure 3: График 3 - зависимость фактической точности от длины разбиения отрезка