Лабораторная работа 2.5
Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методами Рунге-Кутты

1. Дано ОДУ 1 порядка, отрезок и точное решение ДУ(по варианту). Поставить задачу Коши
2. Создать функцию для создания равномерной сетки на отрезке
3. (**+1балл**) Запрограммировать функцию, вычисляющую следующее значение решения задачи Коши по предыдущему. Решить задачу Коши с заданным числом разбиений
   а. методом Эйлера (1 порядка)
   б. методом Эйлера-Коши (2 порядка)
   в. Модифицированным методом Эйлера (2 порядка)
   г. Методом 3 порядка, коэф=1/2
   д. Методом 3 порядка коэф=1/3
   е. Методом 4 порядка, коэф=1/2
   ж. Методом 4 порядка коэф=1/3
4. (**+1балл**) Используя созданную функцию решить задачу Коши для заданной точности. Точность достигается по правилу Рунге
5. (**+1балл**) При проведении контрольных тестов построить
   а. На отрезке для двух значений шага ($\mathbf{h_1=2h_2}$), отметив узловые точки
      – графики точного и вычисленного решений
      – графики фактической ошибки
   б. фактической точности от величины шага. График дополнить линией $\mathbf{h^p}$, где **p** – порядок метода
   в. фактической ошибки от заданной точности. На графике отметить линию заданной точности
   г. числа итераций (максимальное число разбиений отрезка равномерной сетки)

Замечание. Число разбиений отрезка представлять в виде степени 2

6. Тестовый пример выполнить по своему варианту вычислив значения решения y(a+0.2) при шаге 0,2 и 0,1. Применив правило Рунге, узнать с какой точностью вычислен интеграл
7. (**+1бонус**) Исследовать
   а. Зависимость решения от ошибки в начальном условии
   б. Объем вычислений – число вызовов функции правой части уравнения
   в. Расположение максимума фактической ошибки

Варианты

1. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x, \quad x \in [0,1.5], \quad y = \sin x + \cos x$

2. $x^2 y' + yx + 1 = 0, \quad x \in [1,3], \quad xy = 1 - \ln|x|$

3. $(2x+1)y' = 4x + 2y, \quad x \in [0,4], \quad y = (2x+1)\ln|2x+1| + 1$

4. $x(y' - y) = e^x, \quad x \in [1,3], \quad y = e^x(\ln|x| + 1)$

5. $y = x(y' - x\cos x), \quad x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi], \quad y = x\sin x$

6. $y' = 2x(x^2 + y), \quad x \in [1,2], \quad y = e^{x^2} - x^2 - 1$

7. $(xy' - 1)\ln x = 2y, \quad x \in [1,3], \quad y = \ln^2 x - \ln x, \quad y'(1) = -1$

8. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}, \quad x \in [1,5], \quad y = x^2 e^{-x}$

9. $y' + 2y = y^2 e^x, \quad x \in [-1,1], \quad y = e^{-x}$

10. $(x+1)(y' + y^2) = -y, \quad x \in [1,5], \quad y(x+1)\ln|x+1| = 1$

11. $xy^2 y' = x^2 + y^3, \quad x \in [1.1,3], \quad y^3 = 3x^2(x-1)$

12. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y, \quad x \in [1,2], \quad y = x^4(\ln x + 1)^2$

13. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x, \quad x \in [1,2], \quad 2y^2 x^4 e^x = 1$

14. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}, \quad x \in [1.1, 4.1], \quad y^2 = x^2 - 1$

15. $(x^2+1)y' - 2xy = (x^2+1)^2, \quad x \in [0,2], \quad y = x(x^2+1)$

Указания к работе 2.5.

Задача Коши в простейшем случае ставится для дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием

$$y' = f(x,y) \quad x \in [a,b] \quad y(a) = y_a$$

Строится сетка (***x₀=a***, ***xₙ=b***) на отрезке [***a,b***] (в общем случае она может быть неравномерной). Методы Рунге-Кутты строятся с наперед заданной точностью **s** по схеме

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^{s} \rho_j k_j \quad k_j = f(x_i + \alpha_j h_i, y_i + h_i \sum_{m=1}^{j-1} \beta_{jm} k_m)$$

Все методы Рунге-Кутты являются

– одношаговыми – значение решения в следующей точке находится только по значению решения в предыдущей точке

– явными – неизвестная величина стоит слева от знака равенства, а все что справа – известно

Простейшим методом Рунге-Кутты является метод 1 порядка точности – метод Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad y_0 = y_a - \text{известно}$$

Методы Рунге-Кутты 2 порядка

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \tilde{y}_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h_i, \tilde{y}_{i+1}) \right], \quad \text{метод Эйлера} - \text{Коши}$$

$$\alpha = 1 \quad \tilde{y}_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} f(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i + \frac{h_i}{2}, \tilde{y}_{i+1}), \quad \text{модифицированный метод Эйлера}$$

В литературе существуют другие названия этих методов

Схемы методов Рунге-Кутты 3его и 4ого порядков

Во всех схемах $k_1 = f(x_i, y_i)$

Схемы 3ого порядка		Схемы 4ого порядка	
1/2	1/3	1/2	1/3
$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{hk_1}{2})$ $k_3 = f(x_{i+1}, y_i - hk_1 + 2hk_2)$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{3}}, y_i + \frac{hk_1}{3})$ $k_3 = f(x_{i+\frac{2}{3}}, y_i + \frac{2hk_2}{3})$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{hk_1}{2})$ $k_3 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{hk_2}{2})$ $k_4 = f(x_{i+1}, y_i + hk_3)$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{3}}, y_i + \frac{hk_1}{3})$ $k_3 = f(x_{i+\frac{2}{3}}, y_i - \frac{hk_1}{3} + hk_2)$ $k_4 = f(x_{i+1}, y_i + hk_1 - hk_2 + hk_3)$

Метод Эйлера – единственный метод 1ого порядка, а методов 2ого порядка и далее можно создать бесконечно много

Достижение точности в методах Рунге-Кутты

Во всех вышеприведенных формулах величина шага может быть изменена при переходе от одной точке к другой. Один из способов вычислить значение функции с определенной точностью – это применить правило Рунге. Тогда алгоритм действий для получения следующего значения функции будет такой

1. Вычислить $\boldsymbol{y_{i+1}}$ с помощью y_i с шагом $\boldsymbol{h=x_{i+1}-x_i}$
2. Вычислить $\boldsymbol{y_{i+1}}$ с помощью $\boldsymbol{y_i}$ с шагом $\boldsymbol{h/2}$ (от точки $\boldsymbol{x_i}$ необходимо сделать два шага до точки $\boldsymbol{x_{i+1}}$)

3. Вычислить поправку $\frac{y_{i+1}^{h}-y_{i+1}^{h/2}}{2^{k}-1}$ (здесь k – порядок метода) и сравнить ее с точностью
4. Если точность больше поправки, то повторить действия начиная с п.2., уменьшив шаг в 2 раза.
5. Если поправка меньше точности, то перейти к следующей точке.

В схемах четвертого порядка на каждом шаге можно вычислять величину $\Theta=\left|\frac{k_2-k_3}{k_1-k_2}\right|$.
Если это число меньше 0,05 (нескольких сотых), то шаг считается выбранным правильно, иначе шаг следует уменьшить.
Как и в любом итерационном методе, мы будем следить за сходимостью метода по двум зависимостям
- **фактическая точность от задаваемой точности**. Здесь под фактической точностью понимается норма (лучше бесконечная) разности значений полученной функции и точного решения
- **число итераций от задаваемой точности**. Итерации – это число разбиений отрезка (степень 2) для достижения заданной точности. Эти числа могут быть не одинаковые для различных точек отрезка, поэтому на график выносится максимальное из них: при таком числе разбиений мы точно достигнем нужной точности
Также можно поступать «наоборот». Менять шаг вычислять **фактическую точность.** Тогда график строится от **величины шага**.
Исследовательская часть работы