函数性质与作图讲义：习题版

谢彦桐

北京大学数学科学学院

2021.11.30

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。题型说明，基础题指方法非常标准的题目，综合题指方法标准但需要一些技术技巧的题目，进阶题指方法不常规的题目。

1 知识点理解

本节主要介绍通过函数的导数研究函数性质的方法，最终目标是作出函数图像，这依赖函数单调性、极值等性质。学习本节，应遵循定义到定理到应用的思路，首先理解“极值”、“凹凸”等概念的定义，这些定义通常是不依赖导数的，但是借助导数的信息我们可以更方便地研究函数的这些性质。研究函数性质的方法一般是通过Lagrange微分中值定理和带Lagrange余项的泰勒公式证明的。有余力的同学建议熟悉主要定理的证明，也是对此前知识的复习。

另外，请延续高中的好习惯，研究函数先求出定义域，再研究函数。建议选择某有限闭区间$[a,b]$作为研究函数的定义域。

1.1 单调性

考虑$f(x)$是以$[a,b]$为定义域的函数。称$f(x)$在闭区间$[a,b]$**单调递增**，如果对于一切$a\le x_1<x_2\le b$都有$f(x_1)\le f(x_2)$成立。这里需要指出，单调递增的定义是允许出现$f(x_1)=f(x_2)$的，这一点与高中课本定义不同。如果对于一切$a\le x_1<x_2\le b$都有$f(x_1)<f(x_2)$成立，称$f(x)$在闭区间$[a,b]$**严格单调递增**。

直接使用定义验证单调性非常麻烦。利用Lagrange中值定理，我们可以给出函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$单调递增或严格单调递增的充分必要条件，可以作为函数单调性的判据：

定理 1.1. 如果$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，那么$f(x)$在$[a,b]$(严格)单调递增的充分必要条件是$f'(x)\ge(>)0$对$x\in(a,b)$成立。

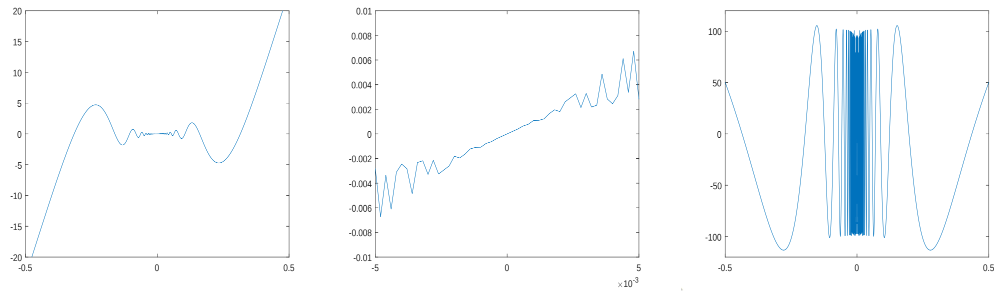

图 1: 三张图片展示了由式(1)定义的函数f在点0附近的性态；从左往右看，第一张图是f的整体示意图；第二张图是f在0附近更小的邻域的局部示意图，可以观察到f在0附近的高频震荡；第三章图是导函数f'的示意图，虽然$f'(0)=1$，但是f'在0的邻域里正负震荡，使得f在0附近不单调。

注解 1. 关于定理*1.1*，最值得强调的一点是，想证明f在闭区间$[a,b]$(严格)单调递增，实际只需要导函数f'在开区间(a,b)非负(为正值)即可，并不需要f'在端点a或b同样非负(为正值)。详见题*1*的注解。

我们指出，单调性的定义必须在区间上讨论的，讨论函数在一个点的东西是没有意义的。例如，为了函数$f(x)$在$[a,b]$区间整体单调递增，必须导函数在(a,b)每一点都非负；如果我们仅仅给出$f'(x)>0$只在一点$x=x_0$成立，即$f'(x_0)>0$，无法说明任何关于f的单调性信息。考虑如下函数

$$f(x)=\begin{cases} x+100x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{1}$$

根据导数的定义f在全体实数可导，且$f'(0)=1$；但是收到项$x^2\sin\frac{1}{x}$由于f在0附近高频震荡，f在0的任何一个邻域都不单调，见图1。

1.2 极值与最值

我们首先区分极值点和最值点的定义。考虑f是以开区间$[a,b]$为定义域的函数。通俗来说，我们称$x_0\in(a,b)$是f的一个极大值点，就是在x_0附近函数f的函数值都不大于x_0处的函数值$f(x_0)$。数学上，为了刻画“附近”这一概念，我们一般通过邻域的语言：称x_0是f的一个(**严格**)**极大值点**，如果存在x_0的邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，f在邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$有定义，并且$f(y)\leq(<)f(x_0)$对一切$y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$成立；此外我们称函数值$f(x_0)$为一个**极大值**。极小值点和严格极小值点有类似的定义。我们强调，极值点和极值的定义都是局部的。如果f的定义域区间$[a,b]$很大，x_0是f的极大值点只能意味着x_0的局部是函数值最大的点，不能说明x_0是整个定义域上$[a,b]$函数值最大的点。

最值则与极值不同，最值点是f在整个定义域$[a,b]$上函数值最大的点和最小的点。依然考虑f是以开区间$[a,b]$为定义域的函数，设$x_0 \in [a,b]$。称点x_0是f的一个(**严格**)**最大值点**，如果$f(y) \leq (<) f(x_0)$对一切$y \in [a,b]$成立。最小值点和严格最小值点有类似的定义。

关于极值与最值的关系，我们还可以直观的理解，一个点x_0若想成为f在定义域$[a,b]$的最值点，起码要是局部的最值点，即是一个极值点。**所以，函数的最值点只有两种可能，或者是极值点，或者是在闭区间的端点a或b。**

注解 2. f在闭区间$[a,b]$定义，但是定义域区间的端点a或b一定不可能是f的极值点，因为f在a的左邻域没有定义，在b的右邻域没有定义。但是端点a或b则可能是f的极值点。

利用导数的性质，我们可以不通过定义而简单地分析函数f的极值点，最值点的分析则比较复杂。关于f的最值点和导数的关系，我们有如下的几个定理：

定理 1.2. 一阶必要条件，又称*Fermat*定理 设$f(x)$在(a,b)可导，如果x_0是f一个极值点，那么$f'(x_0) = 0$。

定理 1.3. 二阶必要条件 设$f(x)$在(a,b)二阶可导，如果x_0是f一个极大(小)值点，那么$f'(x_0) = 0$，并且$f''(x_0) \leq (\geq) 0$。

定理 1.4. 二阶充分条件 设$f(x)$在(a,b)二阶可导，如果$f'(x_0) = 0$，并且$f''(x_0) < (>) 0$，那么x_0是f一个极大(小)值点。

直接考虑上述三个定理任意凌乱，我们做出几点总结：

1.稳定点和极值点 我们称导函数f'的零点，即满足$f'(x_0) = 0$的点x_0为函数f的**稳定点**。一阶必要条件告诉我们，极值点必须是稳定点。换言之，如果我们想找f的极值点，一阶必要条件告诉我们要在稳定点中寻找极值点。

2.鞍点和极值点 稳定点中不是极值点的点被称为**鞍点**，例如函数$y = x^3$，点$x = 0$是稳定点但不是极值点，因此是鞍点。区分稳定点是极值点还是鞍点是很复杂的问题。

3.两个二阶条件与极值点和鞍点的区分 设x_0是稳定点。如果x_0是极值点，二阶必要条件告诉我们二阶导数$f''(x_0) \leq 0$，但这并不意味着$f''(x_0) \leq 0$可以推出稳定点x_0一定是极大值点；如果想确保稳定点x_0是极大值点，必须将条件削弱为$f''(x_0) < 0$。因此，我们无法通过f的二阶导数给出一个稳定点是极值点的充分必要条件，只能给出充分条件或必要条件。

注解 3. 在数学中，专门研究函数极值点的数学分支叫做优化，对于复杂的函数我们会借助计算机来寻找函数的极值点。一般来说，稳定点是比较好寻找的，但是由于鞍点和极值点很难区分，我们很容易将鞍点误求成极值点，因此一些性质不好的函数，尤其是非凸函数，优化问题是很有难度的。

最后，我们总结求函数的极值点和最值点的解题过程。计算极值点分为几步：
1.计算f的定义域I。
2.计算f'并求出I上的稳定点。
甲3.通过研究函数f在各个稳定点之间的区间上的单调性，分析稳定点是何种极值点还是鞍点。
乙3.对于每一个稳定点x_0计算$f''(x_0)$，如果$f''(x_0)>0$说明x_0是极小值点；如果$f''(x_0)<0$说明x_0是极大值点；如果$f''(x_0)=0$则进入步**乙4**。
乙4.针对$f''(x_0)=0$的稳定点x_0，我们无法根据f的导数判断x_0是极值点还是鞍点，这时我们一般结合f函数解析式本身的特征，或是函数的图像判断x_0是极值点还是鞍点。

我们指出，在得到稳定点后，方法**甲3**和方法**乙3**、**乙4**都可以用于判断稳定点是何种极值点还是鞍点。一般来说，除非f'符号特别难分析，我们建议使用方法**甲3**，因为方法**甲3**不需要处理复杂的情形，即$f''(x_0)=0$的情形。

从极值点和边界端点a和b可以筛选最值点。设f的定义域是$[a,b]$，假如找到了点列$\{x_k\}_{k=1}^K$是f的K个极大值点，我们只需比较f在区间端点a,b以及各个极大值点x_k的函数值，函数值最大的点则为最大值点。特别地，最大值点可以不唯一。

1.3 凹凸性

借助函数的单调性和极值点，我们已经可以基本分析出函数f的走势。为了更清楚f的形状，尤其是函数图线的具体形状，我们定义函数的凹凸性。数学中，我们用函数与其在某点切线的位置关系来刻画函数图形的凹凸性：考虑f是以开区间(a,b)为定义域的函数，设f在(a,b)上可导，对$x_0\in(a,b)$，切线的方程是$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，如果

$$f(x)>(<)f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\quad \forall x,x_0\in(a,b),\quad x\neq x_0. \tag{2}$$

称f在(a,b)上**向下凸**(**向上凸**)，此时f在(a,b)每一点的切线都位于函数图像之上(之下)。与单调性类似，我们只能在一个区间上讨论函数的凹凸性，函数在一点的凹凸性没有意义。

注解 4. 我们注意到，上述凸和凹的定义依赖f可导。对于不可导的函数，我们也可以只依赖函数本身的信息定义凸性。以凸为例，称函数f在(a,b)是向下凸的，如果对任意$x_1,x_2\in(a,b)$和$t\in(0,1)$，都有$tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\geq f(tx_1+(1-t)x_2)$。这一定义的实质见图*2*。

与单调性类似，我们一般不通过定义判别函数的凹凸性，而是通过二阶导数的信息：

定理 1.5. 设$f(x)$在(a,b)二阶可导，如果$f''(x)>(<)0$对任意$x\in(a,b)$成立，那

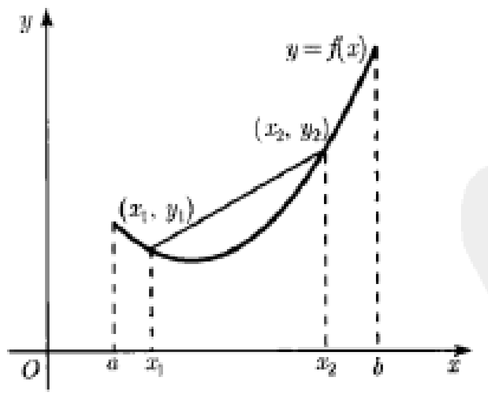

图 2: 图中展示了一个下凸函数。由于$x_1 < x_2$，点$tx_1 + (1-t)x_2$是介于点x_1和x_2之间的点，那么坐标点$(tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$则是连接点$(x_1, y_1)$和$(x_2, y_2)$的线段上的点。我们指出，下凸函数的定义告诉我们，连接(x_1, y_1)和(x_2, y_2)的线段上的每一个点，都位于函数的图形之上。

么f在(a, b)上上向下凸(向上凸)的。

换言之，我们想寻找函数具有一定凹凸性的区间，只要分析f的二阶导数就可以了。

1.4 渐近线与作图

函数作图并不要求我们像计算机一样把函数图像的任何信息都做出来，重要的是我们把函数的主要信息表现出来。主要信息可以根据与f, f', f''的相关性分为四类：

1.零阶信息 指函数的定义域、连续性、间断点、零点、函数值的符号。

2.一阶信息 指函数的单调性、极值点、稳定点。

3.二阶信息 指函数的凹凸性、拐点。

4.渐进信息 通过渐进线画出函数的大致位置。

注解 5. 考试中作图时，一般不要求计算f的零点以及f函数值的符号，但是在作图时也请注意不要出现过于离谱的情形，如将显然恒正的函数画到x轴以下。

在函数作图前，需要我们首先将函数的四类信息都整理好。习惯上，我们会将函数的一阶信息和二阶信息整理为表格，通过分区间的方法整理y的导数和二阶导数的符号。另一个关键点是渐近线的计算渐近线分为两类：

1.一般渐近线 即不垂直于x轴的渐近线，当$x \to +\infty$或$x \to -\infty$时函数$y = f(x)$的图像会与渐近线接近。可以写出其方程$y = ax + b$，其中参数a, b满足$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$和$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$。特别地我们指出，渐进线可以分为向$+\infty$和向$-\infty$方向两类渐近

线，如果考虑向$-\infty$方向的渐近线，则要将极限中的$+\infty$改为$-\infty$。

2.垂直渐近线 当$x \to c$（包括单侧情形$c+0$或$c-0$），此时f向$+\infty$或$-\infty$发散，此时c可以有定义也可以没有定义，也是f的一个第二类间断点。那么垂直于x轴的直线$x=c$是一条垂直渐近线。

作图的整体步骤如下：

1.零阶信息 写出函数的定义域、连续性、间断点，在计算间断点时可以顺带找到函数的垂直渐近线。

2.一阶信息 计算导数f'，计算稳定点并以稳定点为界分析f'在不同区间的符号，得出f在各个区间的单调性和极值点。

3.二阶信息 计算导数f''，以f''的零点为界分析f''在不同区间的符号，得出f在各个区间的凹凸性和拐点。

4.渐进线 计算f的一般渐近线。

5.制作表格 将f', f''在各个区间的信息整理在表格中，由此得出f在各个区间的单调性凹凸性，同时指出极值点和拐点。注意，在划分表格的各个区间中，应划分f所有的间断点、极值点和拐点。

6.描点 计算f在若干个点的函数值，标在坐标纸上。描点是为了了解图形的大致位置。

7.作图 先在坐标纸上画出渐近线的图形，然后依照f在各个区间的单调性凹凸性，依照上一步的描点绘制图形。

注解 6. 一个函数向$+\infty$和向$-\infty$方向的一般渐近线分别至多有一条，可能没有；函数的垂直渐近线可以有很多条，也可以没有。此外渐近线不一定与函数图像没有交点，例如直线的渐近线是自身。

例 1. 分析函数$y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$的单调性、极值、凹凸性、渐近线，并作图。

Proof. 我们首先整理$y=f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$的各种信息。

零阶信息 定义域$\{x \neq -1\}$。在$x \neq -1$的每一个点f都连续，在$x=-1$处

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty, \tag{3}$$

以及

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty. \tag{4}$$

由此$x=-1$是垂直渐近线。

一阶信息首先计算

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}. \tag{5}$$

由此f有两个稳定点$-5, 1$。结合f'的分母的符号，整理f各个区间的单调性以及极值点：

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	无定义	$+$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	无定义	$-$	0	$+$
y	$\nearrow,\frown$	极大值点	$\searrow,\frown$	极小值点	$\nearrow,\frown$	极大值点	$\nearrow,\smile$

表 1: 函数$y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$导数信息表。

1.在$(-\infty,-5)$单调递增。
2.在$(-5,-1)$单调递减。
3.在$(-1,1)$单调递增。
4.在$(1,+\infty)$单调递增。
所以-5是极大值点，1不是极值点。

二阶信息首先计算

$$f''(x)=\frac{24(x-1)}{(x+1)^4}, \tag{6}$$

由此分析f的凹凸性：
1.在$(-\infty,-1)\cup(-1,1)$上凸。
2.在$(1,+\infty)$下凸。
所以1是拐点。

渐近线 计算极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1, \tag{7}$$

和

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x^2-4x-1}{(x+1)^2}=-5. \tag{8}$$

由此得到一条渐近线$y=x-5$。另一方面，将上述极限$x\to+\infty$改为$x\to-\infty$极限值不变，因此$y=x-5$是$x\to+\infty$和$x\to-\infty$的渐近线。

制作表格 由于f有一个间断点，一个极值点和一个拐点，我们以这三个点分段整理f的导数信息如表1：

描点和作图 首先找到函数上几个点，如点$(-2,-27),(0,-1),(1,0),(2,\frac{1}{4})$。然后画出渐近线$x=-1$和渐近线$y=x-5$，两条渐近线将坐标平面划分成为四部分，但是根据我们描点的结果，函数图像位于两条渐近线交出的左下方和右上方。最后我们可以据此画图。

□

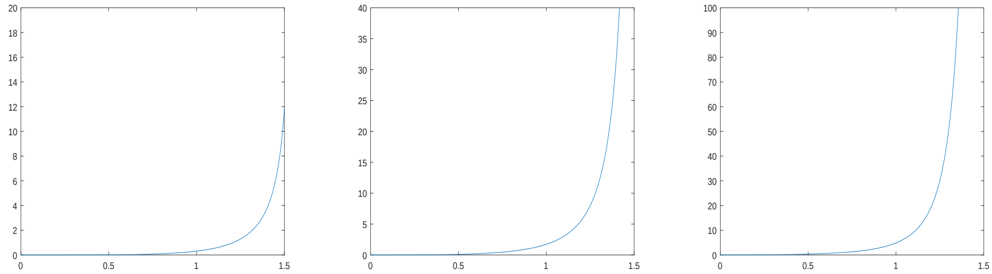

图 3: 三张图片依次是题1解答中，函数$f(x), f'(x), f''(x)$在定义域$[0, \frac{\pi}{2})$的图像

2 习题

题 1. 设$x \in (0, \frac{\pi}{2})$，证明不等式：$\frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{x}$。

分析：本题是借助函数的极值信息和单调性信息证明不等式的题目，通过选择合适的函数并研究其导数信息证明结论。

Proof. 定义$f(x) = \sin x \tan x - x^2$，我们只要说明$f(x) > 0$对$x \in (0, \frac{\pi}{2})$成立即可。为此我们需要研究$f(x)$的性态，方便起见我们在定义域$[0, \frac{\pi}{2})$讨论$f$（注：一般来说在闭区间讨论函数比较方便，但是$f$在$\frac{\pi}{2}$没有定义）。计算

$$f'(x) = \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - 2x. \tag{9}$$

由于f'分正负依然无法直接研究，我们首先根据f''研究f'的性态

$$f''(x) = \cos x + \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} - 2 = \left(\cos x + \frac{1}{\cos x} - 2\right) + \frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}. \tag{10}$$

根据平均值不等式$\cos x + \frac{1}{\cos x} - 2 > 0$在$x \in (0, \frac{\pi}{2})$成立，所以$f''(x) > 0$在$x \in (0, \frac{\pi}{2})$成立；由此$f'(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$严格单调递增，所以

$$f'(x) > f'(0) = 0, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}), \tag{11}$$

由此$f(x)$在$[0, \frac{\pi}{2})$严格单调递增，所以$f(x) > f(0) = 0$在$x \in (0, \frac{\pi}{2})$成立。 □

注解 7. 本题在证明$f'(x)$在$[0, \frac{\pi}{2}]$严格单调递增时，只依赖二阶导数$f''(x) > 0$在$x \in (0, \frac{\pi}{2})$成立，无需要f''在端点0的信息。

注解 8. 本题如果选择$g(x) = \frac{\tan x}{x} - \frac{x}{\sin x}$再证明$g(x) > 0$是非常麻烦的，做题时要选择合适的函数进行分析，解答中的f形式显然更简单。

题 2. 设$\alpha > 0$，如果$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}$在$(0, +\infty)$严格单调递减，求$\alpha$的取值范围。

分析：本题考查分析单调性的技巧。本题的解题关键是发现u单调性性质然后与极限$\lim_{x\to+\infty} u(x)$比较。

Proof. 通过计算导数f'分析单调性，如果f在$(0,+\infty)$严格单调递减意味着f'在$(0,+\infty)$取负值：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}\left((x+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+\alpha}{x^2+x}\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

定义

$$u(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+\alpha}{x^2+x}. \tag{13}$$

注意到u与f'同号，为了$f'<0$只要说明$u<0$在$(0,+\infty)$成立。

关于u，一个不容易注意到的信息是

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)=0. \tag{14}$$

为了了解u的更多信息，继续计算导函数

$$u'(x)=\frac{\alpha+(2\alpha-1)x}{x^2(1+x)^2}. \tag{15}$$

根据u'系数的特征分类讨论：

1.如果$\alpha\geq\frac{1}{2}$，此时$u'(x)>0$对$x\in(0,+\infty)$成立，于是u的单调递增的。此时考虑$\lim_{x\to+\infty}u(x)=0.$，这说明$u(x)<\lim_{x\to+\infty}u(x)=0$，于是$f$是单调递减的。

2.如果$\alpha<\frac{1}{2}$，那么当$x\in(\frac{\alpha}{1-2\alpha},+\infty)$足够大时有$\alpha+(2\alpha-1)x<0$，说明此时$u'(x)<0$，即$u(x)$在$(\frac{\alpha}{1-2\alpha},+\infty)$单调递减，因此$u(x)>\lim_{x\to+\infty}u(x)=0$，与$u'(x)<0$矛盾。 □

题 3. 在$[-3,2]$求$f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$的极值点和最值点。

分析：本题是标准的极值最值题。

Proof. 选定定义域$[-3,2]$，计算导数

$$f'(x)=(x+2)(x-1)^2(5x+4), \tag{16}$$

因此f的稳定点有$x_1=-2$，$x_2=-\frac{4}{5}$和$x_3=1$。

进一步判别稳定点是否为极值点，有两种方法：计算二阶导数

$$f''(x)=20x^3+12x^2-30x-2. \tag{17}$$

x	$[-3,-2)$	-2	$(-2,-\frac{4}{5})$	$-\frac{4}{5}$	$(-\frac{4}{5},1)$	1	$(1,2]$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y''	无需	$-$	无需	$+$	无需	0	无需
y	$\nearrow$	极大值点	$\searrow$	极小值点	$\nearrow$	非极值点	$\nearrow$

表 2: 函数$f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$导数信息表。

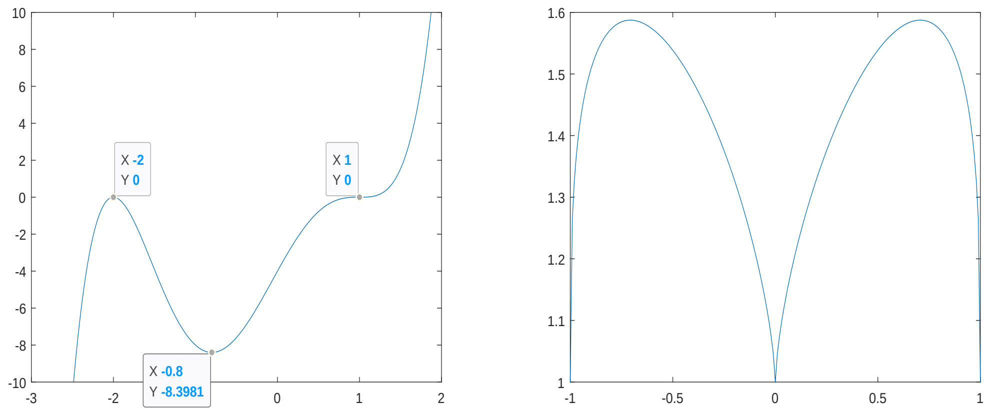

图 4: 左：题3示意图，标注三个稳定点位置；右：题4示意图。

分别代入计算$f''(-2)=-54$，$f''(-\frac{4}{5})=\frac{486}{25}>0$和$f''(1)=0$。由此$x_1=-2$和$x_2=-\frac{4}{5}$分别为$f$的极大值点和极小值点。对于$x_3=1$我们仍需要继续考虑。

另一方面，我们将定义域$[-3,2]$分成四段：$(-3,-2),(-2,-\frac{4}{5}),(-\frac{4}{5},1)$和$(1,2)$，通过$f'$的形式，$f'$在四段的符号分别为$+,-,+,+$，所以我们可以绘制$f$的大致图像（不需要画凹凸性），做表2，如图4。由图像可得$-2,-\frac{4}{5}$分别是极大值点和极小值点，而点$x_3=1$两侧f均单调递增，所以1是鞍点，不是极值点。

最后我们计算最值点：分别计算得$f(3)=-200$，$f(-2)=0$，$f(-\frac{4}{5})=\frac{26244}{3125}\approx-8.4$和$f(2)=16$，所以$f$在$[-3,2]$的最大值点和最小值点为2和-3。 □

注解 9. 计算$f(-\frac{4}{5})$时实际不需要算出具体值，就可以大致估计出$f(3)<f(-\frac{4}{5})$。

题 4. 在$[-1,1]$求$f(x)=x^{\frac{2}{3}}-\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}$极值点和最值点。

分析：本题的陷阱是f在0处的导数不存在，因此不能直接根据Fermat定理通过稳定点寻找极值点。

Proof. 定义域确定为$[-1,1]$，我们不难计算$x\neq 0,\pm 1$时f的导数：

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{2x}{3}\left(x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{2x}{3}\left(x^{-\frac{4}{3}}-\left(x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}\right) \tag{18}$$

x	$(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$	0	$(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$
y'	$+$	0	$-$	不可导	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	极大值点	$\searrow$	极小值点	$\nearrow$	极大值点	$\searrow$

表 3: 函数$f(x)=x^{\frac{2}{3}}-\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}$导数信息表。

当$x=0,\pm1$时f不可导。事实上证明f在这些点不可导是异常麻烦的，也很难使用洛必达法则和泰勒公式等技巧。然而我们这里也没必要计算这些导数。特别地本题的f是一个偶函数，因此我们只要在$(0,1)$上研究f'即可，忽略导数不存在的端点0和1。

令$f'(x)=0$得到

$$x^{-\frac{4}{3}}=\left(x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}, \tag{19}$$

左右乘方$-\frac{3}{2}$次得到

$$x^2=\left|x^2-1\right|, \tag{20}$$

解得$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$是稳定点。

接下来，由于f''非常难计算，我们分段考虑f'的符号。当$x\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$和$x\in(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$时可以验证$f$的符号是$+,-$。（注意$f'$在这两段函数值必然同号，只要取一个特殊的函数值验证即可，如$f(\frac{1}{2})>0$和$f(1)<0$）由此，函数f在$(0,1)$上的变化趋势是先增后减，如表格，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}$是f一个极大值点。由于f是偶函数，所以$-\frac{\sqrt{2}}{2}$是f一个极大值点。

另一方面，我们考虑f的不可导点0附近的性质。根据f是偶函数，可知f在0右侧单调递增，在0左侧单调递减，因此0是f一个极小值点。

最后研究最值点。可以计算得$f(-1)=f(0)=f(1)=1$和$f(\frac{\sqrt{2}}{2})=f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=2^{\frac{2}{3}}$。由此$f$有三个最小值点$0,\pm1$和两个极大值点$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$。

□

题 5. 分析函数$y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$的单调性、极值、凹凸性、渐近线，并作图。

Proof. 我们首先整理$y=f(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$的各种信息。

零阶信息 定义域$\{x\neq-1\}$。在$x\neq-1$的每一个点f都连续，在$x=-1$处

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}=-\infty, \tag{21}$$

以及

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}=-\infty. \tag{22}$$

由此$x=-1$是垂直渐近线。f的零点是0和-1。

一阶信息首先计算

$$f'(x) = \frac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3}. \tag{23}$$

由此f有三个稳定点，从小到大依次是：$x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}, x_2 = 0, x_3 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$。结合$f'$的分母的符号，我们不难整理$f$各个区间的单调性以及极值点：

1.在$(-\infty, \frac{-3-\sqrt{17}}{2})$单调递增。

2.在$(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, -1)$单调递减。

3.在$(-1, 0)$单调递增。

4.在$(0, \frac{-3+\sqrt{17}}{2})$单调递减。

5.在$(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, +\infty)$单调递增。

根据区间的单调性，点$\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$是极大值，点0是极小值点。

二阶信息首先计算

$$f''(x) = \frac{10x-2}{(x+1)^4}, \tag{24}$$

我们不难整理f各个区间的凹凸性以及极值点：

1.在$(-\infty, -1) \cap (-1, \frac{1}{5})$上凸。

2.在$(\frac{1}{5}, +\infty)$下凸。

不难验证点$\frac{1}{5}$是拐点。

渐近线 计算极限

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} = 1, \tag{25}$$

和

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x(3x+1)}{(x+1)^2} = -3. \tag{26}$$

由此得到一条渐近线$y = x - 3$。另一方面，将上述极限$x \to +\infty$改为$x \to -\infty$极限值不变，因此$y = x - 3$是$x \to +\infty$和$x \to -\infty$的渐近线。

制作表格 整理一阶二阶信息得到表4。由于函数有一个间断点，三个稳定点和一个拄点，我们要以这五个点为界分成六段进行讨论：

描点和作图 首先找到函数上几个点，如点$(-2, -12), (0, 0), (1, 0), (2, \frac{4}{9})$，然后画出渐近线，依照渐近线作图。

$\square$

x	$(-\infty,\frac{-3-\sqrt{17}}{2})$	$\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$	$(\frac{-3-\sqrt{17}}{2},-1)$	-1	$(-1,0)$	0
y'	$+$	0	$-$	无定义	$+$	0
y''	$-$	$-$	$-$	无定义	$-$	$-$
y	$\nearrow,\frown$	极大值点	$\searrow,\frown$	间断点	$\nearrow,\frown$	极小值点
x	$(0,\frac{1}{5})$	$\frac{1}{5}$	$(\frac{1}{5},\frac{-3+\sqrt{17}}{2})$	$\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$	$(\frac{-3+\sqrt{17}}{2},+\infty)$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y	$\searrow,\frown$	拐点	$\searrow,\smile$	极小值点	$\nearrow,\smile$	

表 4: 函数$y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$导数信息表。