函数极限讲义

谢彦桐

北京大学数学科学学院

2021.10.12

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。题型说明，基础题指方法非常标准的题目，综合题指方法标准但需要一些技术技巧的题目，进阶题指方法不常规的题目。

目录

1 知识点整理

如不加说明，使用自变量n的极限为序列极限，使用自变量x或y的极限为函数极限。

1.1 连续的定义

我们曾经强调，函数$f(x)$在x_0点的极限的定义是无需函数在x_0处函数值信息的。而函数在x_0处连续的意义，就是**把函数$f(x)$在去心邻域$U(x_0,\delta)/\{x_0\}$的性质与函数值$f(x_0)$连接起来**，即$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。也正因为连续意味着极限$\lim_{x\to x_0} f(x)$存在，所以局部有界性等函数极限的性质对于连续函数也成立，也可以通过单侧极限定义单侧连续，还可以将连续性依据函数的四则运算推广，这一部分请大家自行模仿函数极

限部分自己完成证明。与函数极限类似，连续是一个**局部**概念，即了解$f(x)$在x_0连续也只能了解一个邻域$U(x_0,\delta)$里$f(x)$的函数值是向$f(x_0)$聚拢的，而邻域以外的信息是无从得知的。

这里补充函数极限的另一种序列化定义，它在做题当中是非常有用的:

定理 1.1. 函数$f(x)$在邻域$U(x_0,\delta)$定义，那么$f(x)$在点x_0连续的充分必要条件，是对任意序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\subset U(x_0,\delta)$，如果$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$，那么$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$。

在一些题目中，将函数的连续性通过上述定理转化从序列的收敛性，是比直接使用函数极限的性质或定义更加有用的。

我们生活中常见的函数，如五类基本函数，都在定义域上的各个点连续。因此我们也会定义函数在区间上的连续，即在每一个点连续（闭区间的端点只需要单侧连续即可）。由此我们也会关注函数的不连续点，也称间断点。一个点x_0为$f(x)$间断点需要两个条件:

1.函数$f(x)$在去心邻域$U(x_0,\delta)/\{x_0\}$有定义。

2.$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$不成立，那么$x_0$也是间断点；特别地$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$不成立包括三种情况：$f(x)$在$x_0$点无定义；极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$不存在；极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$存在但不等于$f(x_0)$。

这里同学们容易忽略没有定义的情况，例如$f(x)=x$本来在$x=1$连续，假如我们非要在定义域挖掉$x=1$这个点，那么得到的函数就在$x=1$不连续。而不论$f(x)$在x_0有没有定义，**我们都可以根据极限**$\lim_{x\to x_0}f(x)$**的特点**将间断点分三类:

1.可去间断点 $\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)$，由此$\lim_{x\to x_0}f(x)$存在但是不等于$f(x_0)$。（可以是因为$f(x_0)$点没有定义）

2.跳跃间断点 单侧极限$\lim_{x\to x_0-0}f(x)$和$\lim_{x\to x_0+0}f(x)$都存在但是不相等，因此极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$不存在。

3.第二类间断点 单侧极限$\lim_{x\to x_0-0}f(x)$或$\lim_{x\to x_0+0}f(x)$都是不存在的，因此极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$不存在。

也就是说，为间断点分类实际只需要计算极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$即可。对于常见的函数，大多数点都是连续点，间断点是比较少的，我们只需找到所有可能是间断点的点观察极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$的特点即可。特别地，跳跃间断点和第二类间断点实际代表着函数极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$不存在的两种可能，即“错位现象”和“本质发散”，可见函数极限部分讲义。

1.2 有界闭区间连续函数的性质

连续性的一种直观描述是“函数图像连在一起”，然而这样一种直观认知其实非常

糟糕，主要基于几点：其一函数极限是逐点定义的；其二，部分函数根本画不出图像，如Dirichlet函数。但是即便如此，有界闭区间上连续函数展示出很好的性质，使得这类连续函数的性质核“函数图像连在一起”的函数是类似的。我们总结闭区间上连续函数的性质。

定理 1.2. 设$f(x) \in C[a,b]$，那么
1.有界性 $f(x)$是$[a,b]$上的有界函数。
2.极值可达性质 设$M = \sup_{[a,b]} f(x)$和$m = \inf_{[1,b]} f(x)$，那么存在$x_1, x_2 \in [a,b]$使得$f(x_1) = M$和$f(x_2) = m$。
3.介值性 如果实数η介于$f(a)$与$f(b)$之间，即$f(a) < \eta < f(b)$或$f(b) < \eta < f(a)$成立，那么存在$x_0 \in (a,b)$使得$f(x_0) = \eta$。
4.值域是区间 $f(x)$在定义域$[a,b]$上的值域是$[m,M]$。

关于上述定理我们指出几点
1.上述几个结论的证明都依赖了实数的定义，即“实数盖满整个数轴”这一事实，而实数的定义在本课程是不要求的。直观地考虑介值定理，如果$f(x) \in C[a,b]$，满足$f(a) > 0$和$f(b) < 0$。由于实数是足够多盖满数轴的，函数$f(x)$的图像在a处位于数轴以上，在b处位于数轴以下，而图像穿过数轴的位置一定是一个实数x_0，满足$f(x_0) = 0$。
2.我们指出上述几个性质只对有限闭区间$[a,b]$的连续函数成立，如果函数在开区间$(a,b]$或是无穷区间$(-\infty, b)$定义，上述性质可能不成立，读者可自行举出反例。更一般地，我们称使得连续函数具有有界性、极值可达性和介值性的集合为紧集（此定义不严格），而有限闭区间便是一维欧式空间$\mathbb{R}$中的紧集。

2 题目类型和解题方法整理

- 证明函数在一点的连续性
- 找出函数的间断点并判断类型
- 利用函数极限的序列化定义（定理1.1）解题
- 利用有限闭区间连续函数的有界性、极值可达性或介值性解题

一般来说，与连续函数有关的证明题（如本次题4-6）可以使用的方法是有限的，一般都使用序列化的连续性定义、介值定理、有界或极值定理证明，如使用介值定理一般要构造辅助函数。在做题时也要尝试向这些定理靠拢，尝试把要证明的问题说清楚，切忌模糊处理或借助图像证明。

3 习题

题 1. 求下列函数在$\mathbb{R}$上的各个间断点并判断类型

1.$\frac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$。

2.$[|\cos x|]$。

分析：本题是找出函数间断点并分类的题目。由于两个函数形式上都接近基本函数的四则运算，因此它们在大多数点都连续，我们只要找出那些可能不连续的点x_0，并通过计算单侧极限$\lim_{x\to x_0+0} f(x)$和$\lim_{x\to x_0-0} f(x)$判断其是否为间断点以及间断点类型即可。

Proof. **1.**设$f(x)=\frac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$，那么$f(x)$在点$\pm1$和$0$以外均有定义且连续，我们只要考虑没有定义的点即可。首先计算

$$\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{|x|\,(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}, \tag{1}$$

由此$x=1$为可去间断点。接着计算

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x(x-1)}{|x|\,(x^2-1)}=\lim_{x\to-1+0}-\frac{1}{x+1}=+\infty, \tag{2}$$

和

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x(x-1)}{|x|\,(x^2-1)}=\lim_{x\to-1-0}-\frac{1}{x+1}=-\infty, \tag{3}$$

由此$x=-1$为第二类间断点。（注：函数极限为无穷属于发散的一类）继续计算

$$\lim_{x\to0+0}\frac{x(x-1)}{|x|\,(x^2-1)}=\lim_{x\to0+0}\frac{1}{x+1}=1, \tag{4}$$

和

$$\lim_{x\to0-0}\frac{x(x-1)}{|x|\,(x^2-1)}=\lim_{x\to-1+0}-\frac{1}{x+1}=-1, \tag{5}$$

由此$x=0$的跳跃间断点。综上函数有$1,0,-1$三个间断点，分别为可去间断点，跳跃间断点和第二类间断点。

2.设$f(x)=[|\cos x|]$，我们发现由于$|\cos x|\in[0,1]$，因此除非$\cos x=\pm1$时$f(x)=1$，其余情况$f(x)=0$。另一方面，结合图像有当$|\cos x|$为整数（即$\cos x=\pm1,0$时）可以使$f(x)$产生间断。我们对上述几类分别讨论。果$\cos x=0$即$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，其中$k\in\mathbb{Z}$，那么有

$$\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}[|\cos x|]=0=f\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right), \tag{6}$$

由此$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$为连续点。继续计算$|\cos x|=1$，此时$x=k\pi$，其中$k\in\mathbb{Z}$，那么有

$$\lim_{x\to k\pi}[|\cos x|]=0\neq f\left(k\pi\right)=1, \tag{7}$$

因此$k\pi$为可去间断点。

□

题 2. 求下列函数在$(0,1)$上的各个间断点并判断类型

1.*Dirichlet*函数$D(x)=\begin{cases}1 & , \quad x\in\mathbb{Q}, \\ 0 & , \quad x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$。

2.*Riemann*函数$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & , \quad x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}, \\ 0 & , \quad x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$。

分析：Dirichlet函数和Riemann函数是高等数学中重要的病态函数，它们的存在大大促进了高等数学的严格化。上述两个分析都用的实数的稠密性，见课本习题1.1的题7和题8。

Proof. **1.**我们将证明$D(x)$在$(0,1)$的任一点都不连续。

取$r\in(0,1)$，对于$\forall n\in\mathbb{N}^*$，根据实数的稠密性，存在有理数$r_n\in\big(r-n^{-1},r\big)$和无理数$y_n\in\big(r-n^{-1},r\big)$。根据夹逼原理有$\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}y_n=r$。另一方面，根据定义$D(r_n)=1$且$D(y_n)=0$，因此$\lim_{n\to\infty}D(r_n)=1$而$\lim_{n\to\infty}D(y_n)=0$，由此左极限$\lim_{x\to r-0}D(x)$不存在。同理右极限$\lim_{x\to r+0}D(x)$不存在。因此任意$r\in(0,1)$为第二类间断点。

2.我们将证明$R(x)$在有理数点不连续，在无理数点连续。

我们首先证明$\lim_{x\to r}f(x)=0$对一切$r\in(0,1)$成立。用$\varepsilon-\delta$语言，对一切$\varepsilon>0$，我们希望找到一个足够小的$\delta>0$使得$f(x)<\varepsilon$对$x\in U(r,\delta)/\{r\}$成立。取一个足够大的$n\in\mathbb{N}^*$使得$n>\frac{1}{\varepsilon}$，考虑集合$A=\Big\{y=\frac{p}{q}\in(0,1)\mid q\leq n\Big\}$，那么$A$是一个元素个数有限的有理数集，并且对于一切$x\in(0,1)/A$有$f(x)<\frac{1}{n}<\varepsilon$，这是因为所有分母不大于$n$的有理数都在集合$A$里。由于$A$是有限集，我们取

$$d=\inf_{y\in A,y\neq r}|y-r|>0. \tag{8}$$

取$\delta=\frac{d}{2}$，由此$[U(r,\delta)/\{r\}]\cap A=\emptyset$，因此对一切$x\in U(r,\delta)/\{r\}$有$f(x)<\varepsilon$，命题得证。

借助$\lim_{x\to r}f(x)=0$对一切$r\in(0,1)$成立，我们显然有一切有理数点都是可去间断点，一切无理数点都是连续点。 □

注解 1. 在证明*Dirichlet*函数在每一点的单侧极限都不存在时，我们利用了证明极限发散的经典方法，即构造两个序列r_n和y_n都收敛到r，但是$f(r_n)$和$f(y_n)$不收敛到同一个值。

题 3. 回答下列问题

1.是否存在一个在全体实数定义的函数，其有且仅有一个连续点，其余各点都是间断

点？

2.是否存在一个在全体实数定义的函数，它在每一个点都不连续，且有且仅有一点的极限是存在的，其余各点极限皆不存在？

分析：本题展示了两个非常特殊的函数，其构造方法是基于病态的Dirichlet函数。由于Dirichlet函数在任何一个点都不连续且是第二类间断点，所以我们很容易在Dirichlet函数的基础上构造在大多数点都不连续且极限不存在的函数。

Proof. **1.**存在，构造函数$f(x) = xD(x)$，其中$D(x)$是Dirichlet函数。由于$D(x)$只取值0或1，由此可以证明$x = 0$是$f(x)$一个连续点。对于其他点$r \neq 0$，我们都可以模仿证明Dirichlet函数的单侧极限$\lim_{x\to r+0} D(x)$和$\lim_{x\to r-0} D(x)$的方法不存在的方法，证明$f(x)$的单侧极限也不存在，由此可知$f(x)$在$x = 0$以外的每一个都不连续，是第二类间断点。

2.存在，我们修改**1**中函数为$g(x) = \begin{cases} xD(x) & , \quad x \neq 0, \\ 1 & , \quad x = 0. \end{cases}$，即在**1**中函数基础上将0处函数值由0改为了1。如此得到的函数在$x \neq 0$依然都是第二类间断点，在$x = 0$处极限存在，但是是可去间断点。 □

题 4. 设$f(x)$为$(0, +\infty)$上的连续函数，满足$f(x^2) = f(x)$对一切$x > 0$成立，设$f(2021) = 1$，求$f(2022)$。

分析：本题的难点在于如何使用条件$f(x)$连续，为此我们使用了序列化的连续函数定义。

Proof. 根据题设有

$$f(2021) = f\left(\sqrt{2021}\right) = f\left(\sqrt[4]{2021}\right) = \cdots \tag{9}$$

由此对于一切$n \in \mathbb{N}^*$有$f\left(2021^{2^{-n}}\right) = f(2021) = 1$。设$y_n = 2021^{2^{-n}}$，显然$\lim_{n\to\infty} y_n = 1$。根据序列化的连续函数的定义有$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(1)$，由此$f(1) = 1$。

接下来再设$z_n = 2022^{2^{-n}}$，同理也有$f(z_n) = f(2022)$对一切$n \in \mathbb{N}^*$成立，此外我们还有$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(1)$，因此$f(2022) = f(1) = 1$。 □

题 5. 设函数$f(x) \in C[0, 1]$，满足$f(0) = f(1)$，求证存在α和β是$[0, 1]$中的点，满足$\beta - \alpha = \frac{1}{2}$且$f(\alpha) = f(\beta)$。

分析：本题是关于连续函数的“存在性”问题，这类问题通常使用有限闭区间连续函数的介值原理都可以解答，而问题的关键是构造一个连续的函数$F(x)$，并

通过$F(x)$的介值性质得到需要的存在性结果。本题是这类问题最经典的例子，由于结论$f(\alpha+\frac{1}{2})=f(\alpha)$很难直接通过$f$的介值性得到，我们转而构造新的函数$F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$并使用$F(x)$介值性证明结论。

Proof. 定义函数$F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$是$[0,\frac{1}{2}]$上的连续函数，由于$f(0)=f(1)$我们有$F(0)+F(\frac{1}{2})=f(1)-f(0)=0$我们分为两种情况：
1.如果$F(0)=F(\frac{1}{2})=0$，由此$f(0)=f(\frac{1}{2})=f(1)$，取$\alpha=0$和$\beta=\frac{1}{2}$符合题目要求。
2.如果$F(0)$和$F(\frac{1}{2})$都不是0，不妨$F(0)>0$而$F(\frac{1}{2})<0$，由介值定理存在$\alpha\in(0,\frac{1}{2})$使得$F(\alpha)=0$，由此$f(\alpha+\frac{1}{2})=f(\alpha)$，取$\beta=\alpha+\frac{1}{2}$满足题设。 □

题 6. 设$f(x)$是在$[0,1]$上的正值连续函数，定义$M(x)=\max_{0\le t\le x}f(t)$和$Q(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x)}{M(x)}\right]^n$。求证函数$Q(x)$在$[0,1]$连续的充分必要条件是$f(x)$在$[0,1]$单调递增。

分析：本题看起来很复杂，但是由于$M(x)\ge f(x)\ge 0$对一切$x\in[0,1]$成立，$Q(x)$实际只有0和1两种取值。借助这一认识，我们可以通过连续函数极值可达性的语言把结论证清楚。

Proof. 我们首先注意到，由于$M(x)\ge f(x)\ge 0$对一切$x\in[0,1]$成立，$Q(x)$实际只有0和1两种取值，并且

$$Q(x)=\begin{cases}1 & , \quad M(x)=f(x),\\ 0 & , \quad M(x)>f(x).\end{cases} \tag{10}$$

一方面，如果$f(x)$在$[0,1]$单调递增，那么$M(x)=f(x)$对一切$x\in(0,1]$都成立，因此$Q(x)=1$在$[0,1]$恒成立。另一方面，如果$Q(x)$在$[0,1]$连续，那么由于$Q(x)$只取两种值，那么$Q(x)$在$[0,1]$恒为0或恒为1。现在取x_1满足$f(x_1)=\sup_{[0,1]}f(x)$，那么$M(x_1)=f(x_1)$，因此$Q(x_1)=1$，那么$Q(x)$只能恒为1，这说明对一切$x\in[0,1]$有$f(x)=M(x)$，进一步$f(x)\ge f(y)$对一切$x>y$成立，说明$f(x)$单调递增。 □

题 7. 设连续函数$f(x)$定义域为$[a,b]$，且值域是$[a,b]$的子集，并且满足$|f(p)-f(q)|\le|p-q|$对一切$p,q\in[a,b]$成立。证明下述结论
1.存在$y\in[a,b]$使得$f(y)=y$。
2.任取$x_0\in[a,b]$，定义序列$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$，那么序列$\{x_n\}$是收敛的。

分析：**1**小问要证明$f(y)=y$，一个直接的思路是构造$g(x)=x-f(x)$并使用介值原理证明。**2**小问要证明抽象序列$\{x_n\}$收敛，我们的思路则是尝试证明$\{x_n\}$单调，并使用单调收敛原理。

Proof. **1.**定义$g(x)=x-f(x)$，由于f的值域是$[a,b]$的子集，因此$g(a)\le 0\le g(b)$。由于$g(x)$是连续函数，根据介值定理$g(x)$在$[a,b]$一定存在零点y，由此$y=f(y)$。

2.本命题的证明是比较长的。我们首先证明$g(x)$是单调递增的序列。对于$a \le p < q \le b$，根据题设有

$$f(b) - f(a) \le |f(b) - f(a)| \le b - a, \tag{11}$$

由此$g(b) \ge g(a)$，这说明$g(x)$是一个单调递增的函数。

接下来我们分析题目要求的序列$\{x_n\}$，假如起始点x_0是函数$g(x) = x - f(x)$的零点，那么序列$\{x_n\}$是常数列显然收敛，因此我们只考虑x_0不是函数g零点的情形。此时由于g是一个单调递增的函数，并且具有零点y，我们可以将x_0分为两种情况：

情况1 $x_0 < y$且$g(x_0) < 0$，亦即$x_0 < f(x_0)$。

情况2 $x_0 > y$且$g(x_0) > 0$，亦即$x_0 > f(x_0)$。

这两种情况的证明方法实际是一致的，我们考虑**情况1**。

我们首先分析思路。对**情况1**，由于$f(x_0) > x_0$，我们显然有$x_1 = \frac{f(x_0)+x_0}{2} > x_0$。我们希望$x_1 \le y$，那么必然有$g(x_1) < 0$或$g(x_1) = 0$。如果$g(x_1) = 0$，那么依然得到$\{x_n\}$是常数列；如果$g(x_1) < 0$，那么$f(x_1) \le x_1$，就能进一步再推出$x_2 > x_1$。如果这样的推理成立，我们必然可以推断，当$x_0 < y$时，序列$\{x_n\}$的每一项都是递增的，并且$x_n \le y$。

我们接下来证明$x_1 \le y$。由于$y = f(y)$，根据题目要求有

$$f(x_0) - y \le |f(y) - f(x_0)| \le y - x_0. \tag{12}$$

那么移项得

$$y \ge \frac{f(x_0) + x_0}{2}. \tag{13}$$

根据上面的分析，只要说明了$x_1 \le y$，就有$x_0 \le x_1 \le y$，进一步就可以连续地推出$x_0 \le x_1 \le x_2 \cdots \le y$，因此序列$\{x_n\}$单调递增，则收敛。 □