解析几何讲义：习题版

谢彦桐
北京大学数学科学学院

2021.12.7

题型说明，基础题指方法非常标准的题目，综合题指方法标准但需要一些技术技巧的题目，进阶题指方法不常规的题目。

1 知识点理解

本章大致可以分为两部分：向量代数和解析几何。向量代数主要研究向量的各种运算，特别强调使用坐标等代数方法运算；解析几何则采用代数方法研究几何图形，其他向量会作为解析几何研究中的主要媒介。特别地，如不加说明，本章所有几何图形均在三维空间讨论。

1.1 向量运算

向量是既有大小又有方向的量，给定空间两点A, B，选择一个连接方向从A到B，就得到了向量$\overrightarrow{AB}$。但是由于我们讨论的是自由向量，所以只要确定了**长度**和**方向**，就可以确定一个向量。向量的长度和方向统称为向量的几何意义。为了表达一个向量我们有两种方法：

1.直接表示法：如通过$\mathbf{a}$或$\overrightarrow{AB}$这样的符号表征向量。本讲义中的粗体字母均代表向量。
2.坐标表示法：在空间直角坐标系上，我们用坐标(x, y, z)表示由原点指向坐标为(x, y, z)的点的向量。这里坐标(x, y, z)既可以表示空间中的一个点，也可以表示一个向量。

与数值类似，空间中的向量可以通过运算得到新的向量或是数值，我们主要介绍向量的各种运算。描述向量时使用坐标运算是比较直观的：

在上述运算中，内积和外积的区别是需要着重区分的。其基本区别是，向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$内积得到的是一个数值$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$，而向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$外积得到的是一个向量，向量的长度为$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$，方向则与向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$所张平面垂直，由右手定则决定。

运算	几何意义&实际意义	坐标表示
加法	平行四边形法则	$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$
数乘	向量在同方向伸缩	$k(x_1,y_1,z_1)=(kx_1,ky_1,kz_1)$
内积	得到一个数值，几何意义比较复杂	$(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
外积	得到与被乘向量所张平面垂直的向量	$(x_1,y_1,z_1)\times(x_2,y_2,z_2)=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$

表 1: 向量四种运算

通过上述运算可以分析向量的位置关系。如果两个向量$\mathbf{a}=(x_1,y_1,z_1)$和$\mathbf{b}=(x_2,y_2,z_2)$平行，即向量方向一致，那么存在λ使得

$$\lambda=\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}. \tag{1}$$

特别地，零向量与任意向量都平行。内积运算的一个应用是用于验证向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$是否垂直，如果$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$，那么$\mathbf{a}$垂直于$\mathbf{b}$。特别地，零向量与任意向量都垂直。

向量的运算具有许多运算法则，主要包括结合律、交换律和分配律。大多数交换律和分配律都成立，与内积外积相关的结合律一般都不成立。我们就易错点主要说明：

1.内积外积相关的结合律一般不成立：如向量$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$与$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$一般不相等，数值$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$和$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$一般不相等。

2.外积不具有交换律而具有反交换律，即$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$。

1.2 平面的方程

解析几何的实质，是通过直角坐标系中的方程来研究空间几何图形。对于空间平面方程，常用的形式包括：法式方程、一般方程、三点式方程和截距式方程。其中法式方程使用范围最广泛。计算平面的核心是计算法向量。

法式方程

首先介绍法向量的概念。对于给定平面，我们总可以找到一个与平面垂直的向量$\mathbf{n}$，称之为**法向量**。一般来说我们总假定法向量是单位向量，即$|\mathbf{n}|=1$，因此一个平面具有方向相反的两个法向量，代表平面的两侧。

给定平面上一点$P:(x_0,y_0,z_0)$，那么对于任意一点$A:(x,y,z)$，向量$\overrightarrow{PA}$作为平面上的向量垂直于法向量，即$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0$对平面上每一个$A$成立。设$\mathbf{n}=(A,B,C)$，写成坐标形式：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{2}$$

如上便是平面上的点$A:(x,y,z)$所满足的法式方程。

法式方程告诉我们最重要的信息上：**确定一个平面的方程，只需要确定其法向量和平面上一点坐标可以。**确定平面一点坐标很容易，因此确定平面的关键是写出其法向量坐标。法向量是平面性质的重要代言人。

一般方程

展开法式方程(2)，令$D=-\left(Ax_0+By_0+Cz_0\right)$，那么写出平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{3}$$

相应的，对于(3)的平面一般方程，系数组成的向量(A,B,C)就是平面分法向量。

一般方程形式上虽然一般，但是比起法式方程只需要法向量和平面一点两个信息，计算平面一般方程需要求解四个未知数A,B,C,D，虽然这四个未知数在乘除一个常数意义下代表相同的平面。因此直接计算平面一般方程是不划算的，我们也一般不使用一般方程解题。

三点式方程

由于三点确定一个平面，加入找到平面上不共线三个点(x_i,y_i,z_i)，其中$i=1,2,3$，就可以直接“凑出”一个包含上述三个点的平面：

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \tag{4}$$

显然将(x,y,z)代入(x_i,y_i,z_i)时行列式为0。

三点式方程一般不在习题中使用，除非题干明确了平面上三个点。

截距式方程

截距式是三点式方程的特例。**截距**是指平面与三个坐标轴交点的坐标，因此可以是负数。假如平面在三个坐标轴截距分别为A,B,C，那么点$(A,0,0)$，点$(0,B,0)$和点$(0,0,C)$都在平面上，因此凑出平面方程

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1. \tag{5}$$

截距式方程有很大局限性，如果平面在某个坐标轴截距为0，那么截距式方程失效。除非题干明确了平面截距信息，否则截距式方程一般不在习题中使用。

1.3 直线的方程

空间直线的方程包括两面式、标准方程和参数方程，其中一般式和参数方程是最常使用的。计算直线方程的核心是计算方向向量。

两面式方程

两个不平行的平面相交出一条直线，因此可以直接通过写出两个平面的方程来表示其交线方程，即两面式：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

两面式是很不负责任的方法，建议不要使用。

标准方程

我们首先定义直线的方向向量。如果向量$\mathbf{e}$与直线平行，就称为直线的**方向向量**。方向向量代表了直线的延伸方向。**要确定一条直线，只需要确定直线上的一个点，在确定其方向向量来表示直线的延伸方向即可。**

受此启发我们给出直线的标准方程。设方向向量$\mathbf{e} = (a, b, c)$，给定直线上的点$P_0 : (x_0, y_0, z_0)$。对于直线上另一点$P : (x, y, z)$都有向量$\overrightarrow{PP_0}$与向量$\mathbf{e}$平行。根据向量平行的判别方法我们有

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \tag{7}$$

在实际解题中，我们通常可以根据体感计算直线的方向向量，然后以此写出直线方程。

参数方程

在式(7)取

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \in (-\infty, +\infty). \tag{8}$$

可得参数方程

$$\begin{cases} x - x_0 = ta, \\ y - y_0 = tb, \qquad (-\infty < t < +\infty) \\ z - z_0 = tc, \end{cases} \tag{9}$$

参数方程和标准方程内涵一致，都是通过方向向量表征直线。

1.4 位置关系

这一节我们讨论直线和平面的位置关系，判别方法主要是通过平面的法向量和直线的方向向量，通过计算出平面或直线的法向量或方向向量，从向量层面分析平面和直线的位置关系。

直线与直线

平面与平面的位置关系有两种：重合、平行、相交，其中平面垂直是相交的特殊情况。其中重合的情形是容易判别的，我们也可以将重合看作平行的特殊情况。我们主要讨论通过法向量判别平面的平行和相交的方法：

1.平行或重合 两个平面平行或重合的充分必要条件是**法向量平行**。

2.垂直 两个平面垂直的充分必要条件是**法向量垂直**。

3.相交 两个平面相交的充分必要条件是**法向量不平行**。

如果写出两个平面的一般式方程$\Sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$和$\Sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$，根据之前的分析不难写出它们的法向量$\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$和$\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$，由此可以直接通过一般式的系数判别$\Sigma_1$和$\Sigma_2$的位置关系：

1.平行 Σ_1和Σ_2平行的充分必要条件是系数(A_1, B_1, C_1)和(A_2, B_2, C_2)成比例。

2.垂直 Σ_1和Σ_2平行的充分必要条件是系数满足$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$。

然而个人不建议直接背上述通过系数判别平面位置关系的方法，通过法向量判别直线的位置关系更加直接。

直线与平面

直线与平面的位置关系有三种：平行、相交、包含，其中垂直是相交的一种特例。通过法向量和方向向量判别直线与平面位置关系的方法如下

1.平行 直线包含与平面的充分必要条件是**直线的方向向量垂直于平面的法向量**，并且直线和平面没有交点。

2.包含 直线包含与平面的充分必要条件是**直线的方向向量垂直于平面的法向量**，并且直线和平面有交点。

3.垂直 直线包含与平面的充分必要条件是**直线的方向向量平行于平面的法向量**。

4.相交 直线包含与平面的充分必要条件是**直线的方向向量不垂直于平面的法向量**。

直线与直线

直线与直线的位置关系有四种：重合、平行、相交、异面。**其中直线垂直并不说明直线一定相交，异面直线也可以垂直，这是值得注意的。**单独从方向向量出发还不

能完全判别直线之间四种关系，还需要细致讨论：

1.平行或重合 两条直线平行或重合的充分必要条件是方向向量平行。

2.垂直 两条直线垂直的充分必要条件是方向向量垂直。

3.相交 判别两条直线是否相交的方法是联立参数方程求解。

4.异面 判别两条直线是否异面的方法是通过排除法，即两条直线的方向向量不平行（说明不平行），同时直线没有交点（说明不相交）。

1.5 空间曲线

通过方程的方式研究曲线是很方便的，曲线的方程有很多类，我们一般使用参数方程来研究

$$L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \\ z = z(t), \end{cases} \tag{10}$$

我们指出，研究曲线必须声明参数t的定义域。

这里指出，曲线有**定向**的概念，即一条曲线，“从前往后”和“从后往前”在一些场景下会有区别。式(10)给出的曲线，定向就是从$(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$出发到$(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$。以坐标平面$XoY$上的上半圆周举例子，自$z$轴从上往下看，顺时针的参数方程

$$\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = \sin(t), \qquad (-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})\,. \\ z = 0, \end{cases} \tag{11}$$

逆时针看，其参数方程

$$\begin{cases} x = \cos(-t) = \cos(t), \\ y = \sin(-t) = -\sin(t), \qquad (-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})\,. \\ z = 0, \end{cases} \tag{12}$$

此外参数方程的形式一般不唯一，例如上半圆顺时针的参数方程还可以写为

$$\begin{cases} x = \cos(2t), \\ y = \sin(2t), \qquad (-\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4})\,. \\ z = 0, \end{cases} \tag{13}$$

在本章中要求掌握的是曲线**切向量**的计算，对于参数方程(10)确定的空间曲线，切向量是指曲线沿定向的切线的方向向量，为$\mathbf{e} = (x'(t), y'(t), z'(t))$。切向量的计算在下册学习曲线积分非常重要。

最后我们指出，空间曲线的研究方法也可以在平面曲线中应用。一般我们也使用参数方程研究平面曲线：

$$L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)\,. \tag{14}$$

其切向量为平面向量$\mathbf{e} = (x'(t), y'(t))$。由于平面是相对简单的，我们还有两种表达曲线的方式：一般方程和极坐标方程。一般方程是指

$$y = y(x), \quad a < x < b. \tag{15}$$

一般方程只能表达由函数确定的曲线，是有局限性的，其可以看作以x为自变量的曲线。极坐标方程是指极坐标平面上的方程

$$r = r(\theta), \quad a < \theta < b. \tag{16}$$

但是极坐标方程计算切向量是比较麻烦的，我们一般首先将极坐标方程转化为参数方程

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta, \end{cases} \quad (a \leqslant \theta \leqslant b)\,, \tag{17}$$

然后再计算切向量。

1.6 几个补充知识点

以下介绍几个对解题非常有用的补充知识点。

平面束的概念

设两个平面$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$和$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$相交于直线$L$，那么任意一个过$L$的直线方程可以写成如下的方程 $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$，其中$\lambda$和$\mu$是不全为0两个常数。根据不同的$\lambda$和$\mu$确定的平面族被称为平面束。这一结论有时能在解题中发挥意想不到的作用。

例 1. 求过点$(1, -2, 0)$且过平面$2x - y + z = 3$和平面$x + 2y - z + 1 = 0$交线的平面一般式方程。

Proof. 过平面$2x - y + z = 3$和平面$x + 2y - z + 1 = 0$交线的平面可以写为：

$$\lambda(2x - y + z - 3) + \mu(x + 2y - z + 1) = 0. \tag{18}$$

然后代入点$(1, -2, 0)$求解λ和μ得

$$\lambda - 2\mu = 0. \tag{19}$$

由于平面差一个常数倍不影响，因此代入$\lambda = 2$和$\mu = 1$得

$$5x + z - 5 = 0. \tag{20}$$

□

这类分析过两个平面交线方程的问题，如果首先通过常规做法计算交线的参数方程再用向量方法求解是很麻烦的。

距离的计算

我们常常讨论的距离包括点到直线的距离、点到平面的距离和平行平面之间的距离。其中直线之间的距离也有定义，但是超出了课程范围。我们将分别讨论三类距离的计算方法。

首先点(x_0, y_0, z_0)到平面$Ax + By + Cz + D = 0$的距离是

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{21}$$

上述公式属于高中内容的范畴，其证明是通过计算出过一点的切线方程然后计算垂足坐标。

然后平行平面$Ax + By + Cz + D_1 = 0$和$Ax + By + Cz + D_2 = 0$的距离是

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{22}$$

它的实际意义是一个平面上任意一点到另一个平面的距离。不平行的平面无法定义距离。

最后是点到直线距离的计算，其实质是点向直线做垂线的距离。点$M_0 : (x_0, y_0, z_0)$到直线$l : \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$的距离公式是

$$d = \frac{\left|\mathbf{e} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\mathbf{e}|}, \tag{23}$$

其中向量$\mathbf{e}$是l的方向向量，M_1为l上任意一点。

2 习题归类

本节的重点是向量的运算、直线和平面方程计算与位置关系。常见习题包括

1.向量坐标运算，尤其是外积和内积的计算。

2.向量直接运算，主要是使用外积和内积的各种计算法则。

3.根据题目条件计算平面、直线方程，这类题目应抓住平面和直线的法向量和方向向量

分析。

4.分析平面和直线的位置关系，这类题目中较为有难度的是两条直线的位置关系，其中判别两条直线是否相交或异面需要联立方程计算。

5.距离的计算，包括点线距离、点面距离和线线距离。

6.切向量的计算，给定曲线计算切向量，通常需要根据题设自己写出曲线的参数方程然后计算，可能和应用题结合。

3 习题

题 1. 证明$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=2(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$。

分析：本题属于题型**2**向量的直接计算，利用的是向量外积的分配律和反交换律。

Proof. 根据分配律

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\times\mathbf{a}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\mathbf{b}\\ &= -\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}\\ &= 2(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\end{aligned}\tag{24}$$

其中第二个等号利用了$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{b}=0$，第三个等号利用了外积的饭交换律。 □

题 2. 已知$\mathbf{a}=(1,-2,1),\mathbf{b}=(3,0,1),\mathbf{c}=(2,1,2)$，求$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$和$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

分析：本题属于题型**1**向量的坐标计算，应熟悉坐标运算法则避免算错。

Proof. 根据外积坐标运算

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(-2,2,6),\tag{25}$$

由此

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=-4+2+12=10.\tag{26}$$

另一方面根据外积坐标运算

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=(-1,-4,3),\tag{27}$$

由此

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(1,-2,1)\times(-1,-4,3)=(-2,-4,-6).\tag{28}$$

□

题 3. 求过点$(2,0,-3)$且垂直于平面$2x-2y+4z+7=0$和$2x+y-2z+5=0=0$的平面的一般式方程。

分析：本题属于题型**3**，通过外积运算计算所求平面的法向量。

Proof. 设所求平面为Σ。由于我们已知所求平面Σ上的点$(2,0,-3)$，我们还要计算平面Σ的法向量，设为$\mathbf{n}$。由于Σ与平面$2x-2y+4z+7=0$和$2x+y-2z+5=0=0$垂直，那么$\mathbf{n}$与平面$2x-2y+4z+7=0$和$2x+y-2z+5=0=0$的法向量$(2,-2,4)$和$(2,1,-2)$均垂直，由此

$$\mathbf{n}=(2,-2,4)\times(2,1,-2)=(0,12,6). \tag{29}$$

因此得到Σ的方程

$$12y+6(z+3)=0. \tag{30}$$

化简为一般式

$$2y+z+3=0. \tag{31}$$

□

题 4. 设一个平面在各个坐标轴的的截距均相等且经过$(5,-7,4)$，求其一般式方程

分析：本题属于题型**3**，本题可以通过使用截距式简化计算，但是必须注意截距式方程无法涵盖截距为0的情况。

Proof. 设三个坐标轴的截距都是A，分情况讨论：
1.如果$A\neq 0$，那么根据截距式可以写出平面方程

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{A}+\frac{z}{A}=1. \tag{32}$$

代入点$(5,-7,4)$得$A=2$，由此平面$\frac{x+y+z}{2}=1$满足条件。
2.如果$A=0$，此时方程不能写成截距式形式。由于平面在三个坐标轴的截距都是0，那么平面一定过原点$(0,0,0)$，所以平面具有形式

$$Ax+By+Cz=0. \tag{33}$$

代入点$(5,-7,4)$会发现系数A,B,C选取不唯一，只要满足$5A-7B+AC=0$且A,B,C不同为0即可。 □

题 5. 将由两面式方程$l:\begin{cases}x-3z+5=0,\\ y-2z+8=0,\end{cases}$ 确定的直线化为标准式方程。

分析：本题属于一类典型题型，将两面式直线化为标准式。

Proof. 要将两面式化为标准式，就需要找到直线上的一个点，再求出直线l的方向向量$\mathbf{e}$。我们注意到直线l作为平面$x-3z+5=0$和平面$y-2z+8$的交线，l必然与平面$x-3z+5=0$和平面$y-2z+8$的法向量都垂直，因此l的方向向量$\mathbf{e}$与法向量$(1,0,-3)$和$(0,1,-2)$垂直，所以

$$\mathbf{e}=(1,0,-3)\times(0,1,-2)=(3,2,1). \tag{34}$$

另一方面，我们显然可以取l上一个点$(-5,-8,0)$，由此可得l的标准式方程

$$\frac{x+5}{3}=\frac{y+8}{2}=z. \tag{35}$$

□

题 6. 判断直线$l_1:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$和直线$l_2:\begin{cases}x=-2\\y=t+1\\z=-2t+2\end{cases}$的位置关系。

分析：本题属于题型**4**中最复杂的一种，判别直线之间位置关系。

Proof. 直线之间的位置关系包括重合、平行、相交、异面四种，我们依次判别。

首先考虑l_1,l_2是否平行或重合。l_1和l_2的方向向量分别为$\mathbf{e}_1=(-1,2,1)$和$\mathbf{e}_2=(0,1,-2)$，两个向量显然不平行，所以l_1与l_2不平行或重合。

接着考虑l_1,l_2是否相交，将l_2的参数方程代入l_1联立

$$3=\frac{t+1}{2}=3-2t. \tag{36}$$

由此t无解，所以l_1,l_2不相交。

根据排除法，得l_1,l_2异面。 □

题 7. 求$(2,1,3)$到平面$2x-2y+z-3=0$的距离。

分析：本题属于题型**5**中点与平面的距离计算，直接套公式计算。

Proof. 直接使用公式计算

$$d=\frac{|4-2+3-3|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}. \tag{37}$$

□

题 8. 求点$(3,4,5)$到直线$x=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$的距离。

分析：本题属于题型**5**中点与直线的距离计算，直接套公式计算。

Proof. 为了使用公式，我们首先得到直线$x = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}$的方向向量为$\mathbf{e} = (1, -3, -2)$。此外任取直线上一点$M_1 : (0, 4, 3)$，由$M_0 : (3, 4, 5)$得向量

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (-3, 0, -2). \tag{38}$$

所以计算外积

$$\mathbf{e} \times \overrightarrow{M_0M_1} = (6, 8, -9). \tag{39}$$

代入公式

$$d = \frac{\left|\mathbf{e} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\mathbf{e}|} = \frac{\sqrt{189}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}. \tag{40}$$

□