不定积分讲义

谢彦桐
北京大学数学科学学院

2021.11.2

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。题型说明，基础题指方法非常标准的题目，综合题指方法标准但需要一些技术技巧的题目，进阶题指方法不常规的题目。

目录

1 知识点整理

1.1 不定积分的定义

要计算一个函数$f(x)$的不定积分，就是计算$f(x)$的原函数，即找一个函数$F(x)$满足$F'(x)=f(x)$在定义域每一个点都成立。事实上，我们可以证明，**一个函数$f(x)$如果存在原函数$F(x)$，那么其每一个原函数都可以写成$F(x)+C$的形式**。结论证明依赖第四章的微分中值定理，但是我们默认结论是正确的并且可以使用。因此不定积分记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C, \tag{1}$$

其中$C\in\mathbb{R}$为任意常数。**因此计算不定积分时，切忌忘掉$+C$**，因为不定积分运算要求我们找到$f(x)$所有原函数。

这里还有一个问题，是不是每一个函数$f(x)$都存在原函数呢？在定积分的篇章里我

(Ⅰ) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$. 特别地，$\int 1\mathrm{d}x = x + C$.

(Ⅱ) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$，　$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$，

$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$，　$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$.

(Ⅲ) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \xlongequal{\text{或}} -\arccos x + C$.

$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C \xlongequal{\text{或}} -\operatorname{arccot} x + C$.

(Ⅳ) $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x + C\ (a > 0, a \neq 1)$. 特别地，$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

(Ⅴ) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

图 1: 简单不定积分表

们可以证明，连续函数是存在原函数的，甚至一些不连续的函数也可能存在原函数。但是这并不意味着任何函数都存在原函数，事实上Darboux曾给出这样的结论：

定理 1.1. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上存在原函数$F(x)$，那么$f(x)$在$[a,b]$上具有介值性，即对于任意$p,q \in [a,b]$，如果η介于$f(a)$与$f(b)$之间，那么存在r介于p,q之间满足$f(r)=\eta$。

Darboux定理的内容、证明和相关延伸都不需要掌握。Darboux定理给出了一个函数$f(x)$存在原函数的一个必要条件。由于连续函数具有介值性的，因此一个函数存在原函数那么它也必须类似于连续函数有介值性。如果一个函数在定义域存在第一类间断点，该函数显然没有介值性，例如$[-0.5,0.5]$上的函数$f(x)=[x]$，那么它必然是不存在原函数的（证明见定积分一节）。但是当一个函数存在第二类间断点时，该函数可能具有原函数，这里举一例：在导数一节我们曾讨论过病态函数

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

其导函数

$$f_2'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{3}$$

显然导函数$f_2'(x)$在$x=0$是第二类间断点，但是$f_2'(x)$在$\mathbb{R}$上存在原函数$f_2(x)$。

1.2 不定积分计算技巧

通常我们不会考虑病态函数的不定积分，我们只关心连续函数在其定义域的不定积分。本节我们就讨论如何从一个给定函数$f(x)$出发计算不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$。由于不定积分是导数的逆运算，因此我们可以根据导数的情况得到一些形式简单的函数的不定积分，见上图（截自课本105页）。

注解 1. 我们指出函数$\frac{1}{x}$的不定积分原函数是$\ln|x|+C$而非$\ln(x)+C$，后者在$x<0$是

无定义的。作为延伸，一个非常容易记混的是函数$\frac{1}{-x}$的不定积分是$-\ln|x|+C$，而不是$\ln|-x|+C$。

一般的不定积分，都是通过代数变形转化为上述简单的函数的不定积分，例如

例 1. 计算不定积分$\int\frac{2}{x^2-1}\mathrm{d}x$。

Proof. 由于被积函数满足

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}. \tag{4}$$

因此

$$\int\frac{2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=\ln|x-1|-\ln|x+1|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C. \tag{5}$$

□

此外，利用简单的换元法和代数变形，我们也可以将一些看似复杂的不定积分变成我们熟悉的不定积分

例 2. 计算不定积分$\int\frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x$

Proof. 形式上我们要向$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$靠拢，因此考虑换元$x=\sqrt{2}y$得

$$\int\frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{2}\mathrm{d}y}{2(y^2+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan y+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+C. \tag{6}$$

□

注解 2. 更一般地，对于一切形如$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$的不定积分，其中$a,b,c$为参数，我们都可以通过换元的方法，模仿题*1*和题*2*求解。

除去上述依据公式计算不定积分的方法，我们下面将其他不定积分技巧分为几类，并通过简单的例题向大家展示。不过我们须牢记宗旨，**一切积分技巧的实质都是简化被积函数，使得被积函数变成我们会处理的形式。**

凑微分法（第一类换元法）

我们先看例题

例 3. 计算不定积分$\int\tan x\mathrm{d}x$。

Proof. 计算

$$\int\tan x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C. \tag{7}$$

□

我们可见，凑微分法实质是基于微分运算$\mathrm{d}\cos x = -\sin x\mathrm{d}x$。由此我们从原来的被积函数$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$中提取了项$\sin x$，同微分$\mathrm{d}x$相乘凑出微分$\mathrm{d}\cos x$。当得到不定积分$-\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}$，我们就可以将$\cos x$整体看成一个自变量用此前的公式计算不定积分。

凑微分法是不定积分技巧中最灵活最有效的，讲义的题2到题5都采用了凑微分的技巧。

第二类换元法

我们先看例题

例 4. 计算不定积分$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$。

Proof. 采用换元$x = \sin t$，其中$t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，那么

$$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int|\cos t|\mathrm{d}(\sin t) = \int\cos^2 t\mathrm{d}t = \int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C. \quad (8)$$

由于不定积分$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$是关于$x$的函数，我们还要将$t$用$x$表示出来，那么

$$\frac{\sin 2t}{4} = \frac{\sin t\cos t}{2} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}. \quad (9)$$

因而

$$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} + C. \quad (10)$$

□

第二类换元法的出发点与凑微分法完全不同。第二类换元法基于被积函数的特定形式，使得当我们对x进行特定换元后可以化简被积函数，例如上例中的被积函数$\sqrt{1-x^2}$，进行换元$x = \sin t$后就将被积函数简化为$|\cos t|$。一般来说最为常见的就是三角换元，见讲义题6和题7的详尽分析。第二类换元法的有点是很直接，没有凑微分法浓重的“凑”的成分，但是鲁莽地简化被积函数容易造成计算量的陡增，因此如果对计算能力不自信，个人不建议使用第二类换元法。

注解 3. 我们指出面对不定积分$\int\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$使用三角换元，我们一般采用正弦换元$x = \sin t$，由于$x \in [-1, 1]$，我们必须指定$t$的定义域$t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$取值，这样的好处是保证了$\cos t \geq 0$，在开根号时创造便利。

分部积分法

分部积分法是基于等式

$$\int f(x)\mathrm{d}(g(x)) = f(x)g(x) - \int g(x)\mathrm{d}(f(x)). \quad (11)$$

我们这里看一个例子

例 5. 计算不定积分$\int \arctan x \mathrm{d}x$。

Proof. 用分部积分

$$\begin{aligned}\int \arctan x \mathrm{d}x &= x \arctan x - \int x \mathrm{d}(\arctan x) \\ &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x \\ &= x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C. \end{aligned} \tag{12}$$

□

分部积分法的思路也是很直接的，既然$\arctan x$的积分我们不会求，我们就通过分部积分法转而去求与$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$相关的一个积分，以达到简化被积函数的目的。换言之，上例使用的是分部积分公式(11)的特殊情况$g(x) = x$，即

$$\int f(x) \mathrm{d}x = x f(x) - \int x \mathrm{d}(f(x)). \tag{13}$$

但是这样残暴地把$f(x)$放进微分中的做法有时并不能真正地化简被积函数，因为我们不能保证$xf'(x)$的不定积分比$f(x)$更简单。因此很多时候，我们在使用分部积分时首先会凑一个微分得到形如$\int f(x) \mathrm{d}g(x)$的式子，其中$g(x) \neq x$，然后使用分部积分，请看下例：

例 6. 计算不定积分$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$。

Proof. 用不定积分法计算

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x = \int \sin x \mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x. \tag{14}$$

再对不定积分$\int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x$做分部积分

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x = \int \cos x \mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x. \tag{15}$$

综上可得

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x (\sin x - \cos x) - \int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x, \tag{16}$$

于是

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x (\sin x - \cos x)}{2} + C. \tag{17}$$

□

在本题中，如果直接使用形如(13)的分部积分，得到的新不定积分比原不定积分更复杂。但是我们将$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$通过凑微分的方式得到$\int \sin x \mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$然后采用不定积分，得到的新不定积分$\int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x$要简单的1多。因此使用不定积分，**要聪明地结合凑微分的方法**。

注解 4. 我们注意到例5我们并不是直接化简得到$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$的值，而是通过两次不定积分得到了一个关于$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$的方程(16)。这种情形在不定积分的习题中很常见。

讲义的题8到题12都介绍不定积分的分部积分方法。一般来说，见到形如$\arctan x$或是$\ln x$等项，我们最好通过形如式(13)的分部积分使得我们可以计算$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$或$(\ln x)' = \frac{1}{x}$相关的积分；若是见到$\mathrm{e}^x$或$\sin x$这样便于凑微分的项，我们最好首先用形如例5的方式将他们凑如微分中再使用不定积分。

有理分式法

有理分式积分法是被积函数为有理分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$的积分，其中$P(x)$和$Q(x)$都是多项式。与此前的方法不同，有理分式法是没有思维难度的定式方法，只要完成相应的操作你就一定可以计算出积分。相应的，有理分式法在思维难度上很低伴随着就是相当大的计算量，这是读者在选择积分方法时需要斟酌的。

我们不妨设$P(x)$的次数是小于$Q(x)$的，实际上如果$P(x)$次数大于$Q(x)$我们可以通过多项式带余除法的方法提出项，例如$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$，其中多项式项$x$可以积分，有理式项$\frac{x}{x^2+1}$是分子次数小于分母的有理式积分。

接下来我们通过例子为大家介绍有理分式积分法

例 7. 用有理分式法计算不定积分$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x$

第一步：检查有理分式的分子次数是否小于分母次数 检查无误。

第二步：对分母进行因式分解 计算得

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x-1)^3. \tag{18}$$

第三步：依据因式分解结果，将有理分式写成四类基本分式项的和 四类基本分式项是指

$$\begin{gathered} \frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}(n>1) \\ \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}(n>1), \end{gathered} \tag{19}$$

其中p, q是根据因式分解结果确定的，A, B, C则是待定常数。课本137页的关系式详细给出了什么样的因式分解结果可以拆解出什么样的基本分式项，我们这里不赘述。对于本例而言，我们可以得到

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}, \tag{20}$$

其中A, B, C, D为待定系数。

第四步：根据基本分式拆解结果计算待定系数 比较有效的计算方法有两种。其一是**通分法**。对式(20)右侧直接通分

$$
\begin{aligned}
& \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3} \\
= & \frac{A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx}{x^4-3x^3+3x^2-x} \\
= & \frac{(A+B)x^3+(-3A-2B+C)x^2+(3A+B-C+D)x-A}{x^4-3x^3+3x^2-x}.
\end{aligned} \tag{21}
$$

然后逐项对应

$$
\begin{aligned}
A+B &= 1, \\
-3A-2B+C &= 0, \\
3A+B-C+D &= 0, \\
-A &= 1.
\end{aligned}
$$

由此$A=-1, B=2, C=1, D=2$。另一种方法是**代数试法**，在(20)代入x特定值可以计算参数A, B, C, D，例如代入$x=2$建立方程

$$
\frac{A}{2}+B+C+D=\frac{9}{2}. \tag{22}
$$

但是这一方法计算量偏大，我们这里给出一种特殊的代数法，我们称为**留数法**。在式(20)两侧同乘x得

$$
\frac{x^3+1}{x^3-3x^2+3x-1}=A+\frac{Bx}{x-1}+\frac{Cx}{(x-1)^2}+\frac{Dx}{(x-1)^3}, \tag{23}
$$

此时在式(23)左右代入$x=0$得

$$
-1=A. \tag{24}
$$

由此直接计算出A的值。类似在式(20)左右同乘$(x-1)^3$得

$$
\frac{x^3+1}{x}=\frac{A(x-1)^3}{x}+B(x-1)^2+C(x-1)+D. \tag{25}
$$

代入$x=1$得$D=2$。这一方法虽然可以有效计算A和D的值，但是并不能直接计算B和C的值。但是既然已经计算出A和D，再结合代数试法就容易计算出B和C，并降低了计算量。总上我们得出了基本分式拆解

$$
\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}. \tag{26}
$$

第五步：结合有理分式拆解(26)逐项计算不定积分显然

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x &= \int\left[-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right]\mathrm{d}x \\
&= -\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+C.
\end{aligned} \tag{27}
$$

注解 5. 我们考试遇到的有理分式积分的分母通常次数较低或者形式简单，因为对于一般的多项式$P(x)$，我们并无法将其彻底地因式分解，因此也无法将有理分式用式(19)中的基本分式表达出来。

注解 6. 计算式(20)待定系数的方法中，通分法和代数试法虽然麻烦但是是一定可以算出来的。留数法虽然简单，但是其通常只能对分母为*1*次的基本分式使用。

其他不定积分技巧

其余不定积分方法包括配对法、递推法、三角有理式法、根式法等，我们将在对应习题中介绍。我们特别指出，三角有理式法和根式法都是理论上保证相应的积分可以化成有理分式的方法，但是我们知道有理积分的计算是方程异常麻烦，更不要说三角有理式法和根式法还常常伴随复杂的换元了。所以一般来说，不到万不得已不要使用三角有理式法和根式法。

2 习题

题 1. 已知$f'(2+\cos x)=\tan^2 x+\sin^2 x$，求$f(x)$的表达式。

分析：由于题目条件并没有给出f'的表达式，我们既可以通过计算f'表达式的方法积分得到f的表达式，也可以利用复合函数求导的性质。

Proof. **方法1** 我们考虑$g(x)=f(2+\cos x)$，根据复合函数求导法则有

$$g'(x)=f'(2+\cos x)(-\sin x)=-\sin x\left(\tan^2 x+\sin^2 x\right). \tag{28}$$

计算不定积分得

$$\begin{aligned} g(x) &= -\int \sin x\left(\tan^2 x+\sin^2 x\right)\mathrm{d}x \\ &= \int\left(\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}+1-\cos^2 x\right)\mathrm{d}(\cos x) \\ &= \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos^2 x\right)\mathrm{d}(\cos x) \\ &= -\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos^3 x}{3}+C. \end{aligned} \tag{29}$$

根据$g(x)=f(2+\cos x)$得到

$$f(x)=\frac{1}{2-x}+\frac{(2-x)^3}{3}+C. \tag{30}$$

方法2 我们换元$t=2+\cos x$，那么$\cos x=t-2$，根据题设

$$f'(t)=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}+1-\cos^2 x=\frac{1}{(t-2)^2}-(t-2)^2. \tag{31}$$

由此积分

$$\begin{aligned} f(t) &= \int f'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int \left(\frac{1}{(t-2)^2} - (t-2)^2\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{t-2} - \frac{(t-2)^3}{3} + C. \end{aligned} \tag{32}$$

由此得$f(x)$的表达式。 □

注解 7. 本题一种错误的做法是$f(2+\cos x) = \int f'(2+\cos x)\mathrm{d}x$。我们想通过$f'$计算$f$，要么就必须由题设首先写出$f'(x)$的表达式再进行不定积分，要么就要考虑$g(x) = f(2+\cos x)$的导数$g'(x)$的不定积分得到$g(x)$的表达式。

题 2. 计算不定积分$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

分析：本题最难处理的部分是分母的$\sqrt{x^2-1}$，我们提供两种凑微分的处理方法。其一是标准的“倒数微分”技巧，另外一种则是旨在让复杂的$\sqrt{x^2-1}$进入微分。

Proof. **方法1** 注意到$\mathrm{d}\sqrt{x^2-1} = \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$，由此化简

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}\sqrt{x^2-1} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan t + C, \tag{33}$$

其中换元$t = \sqrt{x^2-1}$，由此$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \arctan\sqrt{x^2-1} + C$。

方法2 我们的目标是凑出微分$\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$，首先考虑$x>0$的情况

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\arcsin\frac{1}{x} + C. \tag{34}$$

而当$x<0$时，我们从根号$\sqrt{x^2+1}$提取因子时，等式为$\sqrt{1-x^2} = -x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$，因此

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \arcsin\frac{1}{x} + C. \tag{35}$$

根据x的符号总结$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C$。根据反三角函数的性质验证$-\arcsin\frac{1}{|x|} = \arctan\sqrt{x^2-1}$，因此两种方法结果相同。 □

题 3. 计算不定积分$\int \frac{\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x + 9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x$

分析：本题很容易凑出微分$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\mathrm{d}x$，据此进行积分。

Proof. 凑微分

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\left(4\sin^2 x+9\left(1-\sin^2 x\right)\right)^2}\mathrm{d}(\sin x)\\
&= \int \frac{t}{(9-5t^2)^2}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(9-5t^2)^2}\mathrm{d}(t^2)\\
&= \frac{1}{10\,(9-5t^2)}+C, \qquad (36)
\end{aligned}
$$

其中换元$t=\sin x$，由此

$$
\int \frac{\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{10\left(9-5\sin^2 x\right)}+C=\frac{1}{10\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)}+C. \qquad (37)
$$

□

题 4. 计算不定积分$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$

分析：本题是含有ln的微分，为了化简被积函数，我们可以尝试凑出含ln的积分。此外还有一种使用第二类换元法的方法，计算量更大但是思路更直接。

Proof. **方法1** 为了处理$\ln\frac{1+x}{1-x}$项，我们注意到如下微分

$$
\mathrm{d}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{2}{1-x^2}. \qquad (38)
$$

于是直接得

$$
\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C. \qquad (39)
$$

方法2 由于项$\ln\frac{1+x}{1-x}$不容易处理，我们做换元$t=\frac{1+x}{1-x}$，这要换元不仅化简了被积函数，而且x关于t的表达式$x=\frac{t-1}{t+1}$是分式，也不至于过分复杂。接着用第二类积分换元法

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1-\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^2}\ln t\,\mathrm{d}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\\
&= \int \frac{(t+1)^2}{4t}\cdot\frac{2}{(1+t)^2}\ln t\,\mathrm{d}t\\
&= \int \frac{\ln t}{2t}\mathrm{d}t\\
&= \frac{(\ln t)^2}{4}+C. \qquad (40)
\end{aligned}
$$

由此$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C$。 □

注解 8. 本题体现了凑微分的第一类换元法相较于第二类换元法在计算量的优势，但是通常第一类换元法需要对被积函数更细致的观察。

题 5. 计算不定积分$\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$

分析：为了对三角函数式凑微分，有时可以采用恒等变形$1=\sin^2 x+\cos^2 x$。此外由于被积函数分子有项$\cos x-\sin x$，我们希望将这一项凑入微分中以化简被积函数。

Proof. 用恒等变形$1=\sin^2 x+\cos^2 x$得到

$$\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}=\frac{2(\cos x-\sin x)}{1+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}=\frac{2(\cos x-\sin x)}{1+(\sin x+\cos x)^2}. \tag{41}$$

由此进行凑微分

$$\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{2\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{1+(\sin x+\cos x)^2}=\arctan(\sin x+\cos x)+C. \tag{42}$$

□

题 6. 计算不定积分$\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\mathrm{d}x$

分析：一般见到被积函数内涵根号下的平方项的，常常都使用三角换元处理，以去除被积函数的根号项。利用三角恒等式$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$结合第二类换元法，可以去除这一问题的根号，但是相应计算量也很大。本题还有一些特异方法。

Proof. **方法1** 做三角换元$x=\sqrt{\frac{3}{2}}\tan t$，其中$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，由此$\sqrt{2x^2+3}=\frac{\sqrt{3}}{|\cos t|}=\frac{\sqrt{3}}{\cos t}$。由此对积分用第二类换元法

$$\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\mathrm{d}x=\frac{\frac{\sqrt{3}}{\cos t}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\tan t}\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan t\right)=\sqrt{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t}. \tag{43}$$

针对三角积分$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t}$我们提出两种处理方法。

方法1.1 用凑微分的方法

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t} &= \int \frac{\sin t\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin^2 t}=-\int \frac{\mathrm{d}\cos t}{\cos^2 t(1-\cos^2 t)}\\ &= -\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2(1-y^2)}=-\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2}-\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2}\\ &= \frac{1}{y}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|+C,\end{aligned} \tag{44}$$

其中换元$y=\cos t$，由此$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right|+C$。

方法1.2用恒等变形$1=\sin^2 x+\cos^2 x$得到

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t}=\int \frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t\sin t}\mathrm{d}t=\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}+\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t. \tag{45}$$

一方面根据例题1得

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \int \frac{\sin t\mathrm{d}t}{1-\cos^2 t} = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{1-\cos^2 t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right| + C. \tag{46}$$

另一方面

$$\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos t} + C. \tag{47}$$

由此也可得$\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right| + C$。

接下来有

$$\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{\cos t} + \sqrt{3}\ln\left|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}\right| + C. \tag{48}$$

由于$\tan t = \frac{\sqrt{6}}{3}x$，因此$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}x^2}} = \sqrt{\frac{3}{2x^2+3}}$。进一步

$$\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{2x^2+3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{3}}\right| + C. \tag{49}$$

方法2 换元$t = \sqrt{2x^2+3}$，那么$t^2 = 2x^2+3$，求微分得$2t\mathrm{d}t = 4x\mathrm{d}x$，移项$\mathrm{d}x = \frac{t\mathrm{d}t}{2x}$，代入积分中

$$\int \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{t}{x}\cdot\frac{t}{2x}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{t^2-3}\mathrm{d}t. \tag{50}$$

上述操作也可以理解为第二类换元法$t = \sqrt{2x^2+3}$。继续对t积分

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{t^2-3}\mathrm{d}t &= \int \left(1+\frac{3}{t^2-3}\right)\mathrm{d}t = t + \frac{\sqrt{3}}{2}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}t \\ &= t + \frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C. \end{aligned}\tag{51}$$

带回换元可得到式(49)结果。 □

题 7. 计算不定积分$\int \sqrt{7+x-x^2}\mathrm{d}x$

分析：我们可以变形$\sqrt{7+x-x^2} = \sqrt{\frac{29}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$，并尝试三角换元的方法求解。

Proof. 换元$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\sin t$，其中$t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，用第二类换元法

$$\int \sqrt{7+x-x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{29}}{2}|\cos t|\mathrm{d}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\sin t\right) = \frac{29}{4}\int \cos^2 t\mathrm{d}t. \tag{52}$$

利用二倍角公式得

$$\int \cos^2 t\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C. \tag{53}$$

我们注意到$t=\frac{2}{\sqrt{29}}\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)$以及

$$\begin{aligned}\sin 2t &= 2\sin t\cos t=2\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\sqrt{7+x-x^2}\right)\\ &= \frac{8}{29}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{7+x-x^2}.\end{aligned}\tag{54}$$

由此

$$\int\sqrt{7+x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{29}}{4}\arcsin\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{7+x-x^2}+C.\tag{55}$$

□

题 8. 计算不定积分$\int\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$

分析：本题可以用三角换元做，但是做起来非常麻烦。本题也可以用分部积分做，但是思路比较巧妙。本题作为一道经典题，值得我们细细思考

Proof. **方法1** 三角换元$x=\tan t$，其中$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$得

$$\int\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}.\tag{56}$$

根据典型的三角凑微分方法有

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t}=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos^4 t}=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{(1-\sin^2 x)^2}=\int\frac{\mathrm{d}y}{(1-y^2)^2},\tag{57}$$

其中$y=\sin t$。对于上面的有理分式积分，我们将其分解为基本分式

$$\frac{1}{(1-y^2)^2}=\frac{A}{y+1}+\frac{B}{(y+1)^2}+\frac{C}{y-1}+\frac{D}{(y-1)^2},\tag{58}$$

经过一番计算解得$A=B=D=\frac{1}{4}$，$C=-\frac{1}{4}$，进一步

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}y}{(1-y^2)^2} &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{(y+1)^2}-\frac{1}{y-1}+\frac{1}{(y-1)^2}\right)\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right|-\frac{y}{2(y-1)}+C.\end{aligned}\tag{59}$$

根据$y=\sin t$和$x=\tan t$，可以计算出$y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，由此

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right|-\frac{y}{2(y^2-1)}+C\\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+C.\end{aligned}\tag{60}$$

利用对数性质也可以化简$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right|=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$。

方法2 直接微分部积分

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x &= x\sqrt{1+x^2}-\int x\mathrm{d}\left(\sqrt{1+x^2}\right)=x\sqrt{1+x^2}-\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1+x^2}-\int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1+x^2}-\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x-\int \sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{61}$$

特别地，积分$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$是一道经典习题，见课本129页例题11，我们直接写出结果

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+C. \tag{62}$$

所以我们得到

$$\int \sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\right)+C. \tag{63}$$

□

题 9. 计算不定积分$\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$

分析：不难注意到微分$\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{-2x\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^2}$，借此使用分部积分是最快的方法。

Proof. 用分部积分法

$$\begin{aligned}\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= -\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)}+\int \frac{1}{2x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{64}$$

由于积分$\int \frac{1}{2x(1+x^2)}\mathrm{d}x$是有理式积分，我们用观察法代数变形

$$\int \frac{1}{2x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{2x}-\int \frac{x}{2\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{2}-\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{4}+C. \tag{65}$$

于是

$$\int \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{\ln x}{2}-\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{4}+C. \tag{66}$$

□

题 10. 计算不定积分$\int \frac{x\arccos x}{\left(1-x^2\right)^2}\mathrm{d}x$

分析：观察这一问题，一方面由于被积函数有$\arccos x$，在例4的指引下我们希望将$\arccos x$留在微分以外用分部积分，另一方面，微分$\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)=\frac{2x\mathrm{d}x}{\left(1-x^2\right)^2}$指引我们模仿上一题用凑微分的方法。

Proof. 用分部积分法

$$\begin{aligned}\int \frac{x\arccos x}{\left(1-x^2\right)^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \arccos x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\\ &= \frac{\arccos x}{2\left(1-x^2\right)}-\int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned} \tag{67}$$

针对分式积分$\int \frac{\mathrm{d}x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$用三角换元$x=\sin t$，其中$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{2\cos^3 t}=\int \frac{\mathrm{d}t}{2\cos^2 t}=\frac{\tan t}{2}+C. \tag{68}$$

由$x=\sin t$知$\tan t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$。由此

$$\int \frac{x\arccos x}{\left(1-x^2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{\arccos x}{2\left(1-x^2\right)}-\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}+C. \tag{69}$$

□

题 11. 计算不定积分$\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

分析：为处理复杂项$\mathrm{e}^{\arctan x}$，我们凑微分$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\arctan x}\right)=\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}$。

Proof. 计算

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\arctan x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{70}$$

接着对积分$\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$再做分部积分

$$\begin{aligned}\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x &= \int \frac{x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\arctan x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}\\ &= \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{71}$$

结合两次不定积分可得等式

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{(1+x)\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x. \tag{72}$$

于是$\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{(1+x)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C$。 □

题 12. 计算不定积分$\int \frac{x\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x$

分析：本题特别关注一类形如$I=\int xf(x)\mathrm{d}x$的不定积分，其中$f(x)$的不定积分是比较容易计算的，设$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$。如果$F(x)$不复杂，这类问题通常可以使用下述不定积分计算$\int xf(x)\mathrm{d}x=xF(x)-\int F(x)\mathrm{d}x$。

Proof. 在题3我们计算出

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{10\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)}+C. \tag{73}$$

这相当于微分关系

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{10\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)}\right)=\frac{\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x. \tag{74}$$

由此使用分部积分

$$\int \frac{x\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{10\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)}-\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}x}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}. \tag{75}$$

我们继续计算，利用微分$\mathrm{d}(\tan x)=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$有

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\left(4\tan^2 x+9\right)}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{4\tan^2 x+9}=\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{2\tan x}{3}\right)+C.\end{aligned} \tag{76}$$

因此

$$\int \frac{x\sin x\cos x}{\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{10\left(4\sin^2 x+9\cos^2 x\right)}-\frac{\arctan\left(\frac{2\tan x}{3}\right)}{60}+C. \tag{77}$$

□

题 13. 用配对法计算两个不定积分$I=\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{a\cos x+b\sin x}$和$J=\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{a\cos x+b\sin x}$，其中参数$a,b>0$。

分析：本题是配对法的主要例子之一，是必须牢记的题型。单独计算不定积分I,J很难，于是我们选择计算不定积分$bI+aJ$和$aI-bJ$，并反解不定积分I,J。

Proof. 首先计算

$$bI+aJ=\int\frac{a\cos x+b\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x=x+C, \tag{78}$$

接下来

$$aI-bJ=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x=\ln|a\cos x+b\sin x|+C. \tag{79}$$

由此得

$$I=\frac{bx+a\ln|a\cos x+b\sin x|}{a^2+b^2}+C, \tag{80}$$

和

$$J=\frac{ax-b\ln|a\cos x+b\sin x|}{a^2+b^2}+C. \tag{81}$$

□

题 14. 用配对法计算两个不定积分$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$和$J=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}$

分析：这一题也是采用配对的方法，直接计算不定积分$I+J$和$-I+J$。本题思路比较巧妙，供大家开拓思路参考。

Proof. 首先计算$I+J$得，考虑换元$y=x-\frac{1}{x}$有

$$\begin{aligned}\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x &= \int\frac{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\mathrm{d}x}{\frac{1}{x^2}+x^2}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2+2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)+C. \quad (82)\end{aligned}$$

再计算$-I+J$考虑换元$z=x+\frac{1}{x}$有

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x &= \int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{\frac{1}{x^2}+x^2}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}=\int\frac{\mathrm{d}z}{z^2-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\left(\frac{1}{z-\sqrt{2}}-\frac{1}{z+\sqrt{2}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}x+1}{x+\sqrt{2}x+1}\right|+C. \quad (83)\end{aligned}$$

由此可得

$$I=\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}x+1}{x+\sqrt{2}x+1}\right|+C. \tag{84}$$

以及

$$J=\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}x+1}{x+\sqrt{2}x+1}\right|+C. \tag{85}$$

□

题 15. 用迭代法写出下列积分的递推式，其中$n,m\in\mathbb{N}$:

1.$I_n=\int\sin^n x\mathrm{d}x$

2.$J_{n,m}=\int x^n(\ln x)^m\mathrm{d}x$

分析：这类带一般参数n的不定积分，一般是通过分部积分的方法建立递推关系，而分部积分的思路与一般的分部积分大体一致。本题的**1**是将任意凑微分的单独一项$\sin x$凑入微分，本题的**2**则是保留导数好计算的$(\ln x)^m$在微分以外将余下部分凑微分。

Proof. **1.**用分部积分

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^n x\mathrm{d}x = -\int \sin^{n-1} x\mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}\left(\sin^{n-1} x\right) \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\left(1-\cos^2 x\right)\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n, \qquad (86)
\end{aligned}$$

由此

$$nI_n = (n-1)I_{n-2} - \sin^{n-1} x\cos x. \qquad (87)$$

2.用分部积分

$$\begin{aligned}
J_{n,m} &= \int x^n(\ln x)^m\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int (\ln x)^m\mathrm{d}\left(x^{n+1}\right) \\
&= \frac{x^{n+1}(\ln x)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^{n+1}\cdot\left(\frac{(\ln x)^{m+1}}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{n+1}(\ln x)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln x)^{m-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{n+1}(\ln x)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}J_{n,m-1}. \qquad (88)
\end{aligned}$$

□

注解 9. 与之前的分部积分题目相同，分部积分的目的一直是转化被积函数为我们能处理的部分。以***1***为例，为了建立递推公式，我们将I_n写成了关于I_n和I_{n-2}的不定式，而I_{n-2}是递推式中的前项，由此我们得到了I_n关于I_{n-2}的递推式。

题 16. 用根式不定积分技巧计算不定积分$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)(x-2)}}\mathrm{d}x$

分析：对于根式型不定积分问题，**我们的关键是明白使用什么样的换元可以使得被积函数转化为有理分式**。换元正确计算量一般不大，换元不正确则可能做不出来。

Proof. 对被积函数变形

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)(x-2)}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)^2}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\mathrm{d}x. \qquad (89)$$

做换元$t=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$得$x=\frac{2t^2-1}{t^2-1}$，于是$\frac{1}{x-1}=1-\frac{1}{t^2}$。由此

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)(x-2)}}\mathrm{d}x = \int t\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2\cdot\frac{-2t}{\left(t^2-1\right)^2}\mathrm{d}t = \int \frac{-2}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{2}{t}+C. \quad (90)$$

进一步

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)(x-2)}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C. \tag{91}$$

$\square$

注解 10. 本题式(89)的代数变形很重要。如果直接换元$t = \sqrt{(x-1)(x-2)}$是无法计算出本题积分的，而使用换元$t = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$则大大化简积分。一般来说，根式积分我们使用换元的形式通常为$t = \sqrt[n]{ax+b}$或$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$，即根号下是一次多项式或一次有理分式，则保证了$x$关于$t$的表达式也不会太复杂，不至于对积分造成额外的麻烦。