洛必达法则和泰勒公式讲义：习题版

谢彦桐

北京大学数学科学学院

2021.11.24

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。如不加说明，自变量为n的极限为序列极限，自变量为x或y的极限为函数极限。

1 知识点理解

本节主要讨论导数在微分学的两个重要应用：洛必达法则和泰勒公式。在学习过程中，既要注意两大工具的使用方法，也要注意定理的内涵。

1.1 洛必达法则：理解与应用

不定式的概念回顾

洛必达法则是旨在解决**函数极限**不定式计算问题的方法。我们先回顾不定式的概念。我们接触的大多数极限都是连续函数（及其四则运算）的极限，如极限$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+1}$，根据连续性$\lim_{x\to 0}(x+1)=\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1$，再利用极限的四则运算性质就可以计算极限$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+1}=1$。

但是有一类极限是不能通过极限四则运算得到的，例如极限$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$，直接利用连续函数的性质计算得到$\lim_{x\to 0}(x-1)=\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$，如果直接使用极限四则运算极限得到$\frac{0}{0}$。对实数的运算而言，$\frac{0}{0}$没有意义，而极限$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$。之所以算不出正确的答案是因为极限的除法运算性质（见课本45页定理2）告诉我们，极限运算$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$成立需要分母极限$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$。这样不能使用四则运算直接计算的极限我们称为**不定式**，有关不定式极限的计算是需要我们单独设计有效方法的。

我们再以$\frac{\infty}{\infty}$为例加深对不定式概念的理解，这里∞就指一个无穷大量极限。考虑$x\to+\infty$时，极限$\ln x$，x和e^x都是无穷大量，显然三者趋于$+\infty$的速度是依次增加的，用极限语言刻画是$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$以及$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$。由此可见，同样是$\frac{\infty}{\infty}$型的极限，根据无穷大量的不同，极限的值也完全不同。

在本节我们主要关注的不定式有如下几类：

$$\frac{0}{0}\quad,\frac{\infty}{\infty}\quad,0\cdot\infty\quad,(+\infty)-(+\infty)\quad,1^{\infty}\quad,0^{0}\quad,(+\infty)^{0}. \tag{1}$$

然而归根结底，上述每一类不定式都可以化为最基本的不定式$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$，例如：

$$1^{\infty}=\exp\left(\infty\cdot\ln(1)\right)=\exp\left(\infty\cdot 0\right)=\exp\left(\frac{0}{0}\right). \tag{2}$$

因此洛必达法则主要是针对$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$两种不定式。如果要对上述其他类型不定式使用洛必达法则，**必须首先将其他类型的不定式化为$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$两种不定式。**

洛必达法则的叙述与释疑

洛必达法则讨论的是$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$两种不定式型的函数极限，其叙述为：

定理 1.1. 设函数$f(x)$和$g(x)$都在$x=a$的某邻域可导（这里a可以是∞，邻域也可以是单侧的），且$g'(a)\neq 0$，还满足
1.$\frac{0}{0}$型 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$。
2.$\frac{\infty}{\infty}$型 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$。
那么如果$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$，其中$l$可以是实数或$\pm\infty$，那么极限$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$。

关于洛必达法则我们需要几点说明：
1.洛必达法则不能简单地写成$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$，因为只有当极限$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在或广义存在（即极限为0）时，极限$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$才与极限$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$相等。如果极限$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$是发散的，那么极限$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$有可能存在也有可能发散，我们无法从洛必达法则得到任何关于极限$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$的信息。兹举例：考虑极限$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\cos x}{2x+\sin x}$，用洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+\cos x)'}{(2x+\sin x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\sin x}{2+\cos x}. \tag{3}$$

显然$\frac{2-\sin x}{2+\cos x}$是以$2\pi$为周期在$\frac{1}{3}$到3震荡的函数，所以极限$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\sin x}{2+\cos x}$发散；但这不意味着原极限$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\cos x}{2x+\sin x}$也发散，用夹逼原理得到

$$\frac{2x-1}{2x+1}\leq\frac{2x+\cos x}{2x+\sin x}\leq\frac{2x+1}{2x-1}, \tag{4}$$

由此$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\cos x}{2x+\sin x}=1$。**因此洛必达法则的使用实质是“尝试”的过程**，即为了计算极限$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$，我们尝试计算$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$，如果极限$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$收敛，则极限$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$收敛且相等；若极限$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$发散，尝试失败。
2.洛必达法则也可以处理单侧极限和趋于∞的极限。如果极限$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$，即广

义收敛，我们依然可以用洛必达法则得到$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$。
3.洛必达法则不适用于序列极限。如果想对序列极限使用洛必达法则，必须将序列极限首先换元处理为函数极限。

洛必达法则的使用方法

洛必达法则处理函数极限一般分为三个步骤：检查极限是否为不定式、将极限转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$两种不定式型极限，用洛必达法则计算$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$极限。本节通过四道经典习题，带大家熟悉洛必达法则的四类经典题型。

例 1. 分式型极限 计算极限$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^2}$。

Proof. 显然极限$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^2}$是$\frac{0}{0}$不定式，我们连续使用洛必达法则计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x+2x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos x+2}{2}=\lim_{x\to 0}1-\cos x=0. \quad (5)$$

□

例 2. 减式型极限 计算极限$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$。

Proof. 极限$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$是$\infty-\infty$型不定式，这类问题首先通分，通分后再使用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\ \text{（}\frac{0}{0}\text{型不定式用洛必达法则）}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1+\ln x-1}{1+\ln x-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\ \text{（再用一次洛必达法则）}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

□

例 3. 幂式型极限 计算极限$\lim_{x\to 0+0}x^x$。

Proof. 极限$\lim_{x\to 0+0}x^x$是0^0型不定式，我们首先取对数再使用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0+0}x^x=\lim_{x\to 0+0}\exp(x\ln x)=\exp\left(\lim_{x\to 0+0}x\ln x\right). \quad (7)$$

注意到极限$\lim_{x\to 0+0}x\ln x$是$0\cdot(-\infty)$的乘积不定式，我们可以将它化为$\frac{\infty}{\infty}$的不定式，然后使用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0+0}x\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+0}-x=0. \quad (8)$$

由此本题答案为1。 □

注解 1. 我们注意到处理极限$\lim_{x\to 0+0} x\ln x$，我们有两种变形方式，其一是变形为$\frac{\infty}{\infty}$不定式$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$，其二是变形为$\frac{0}{0}$不定式$\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}}$，两种变形都可以得到可以使用洛必达法则的极限。然而由于对$\frac{1}{\ln x}$求导比对$\ln x$求导复杂得多，选择第一种变形使用洛必达法则可以大大减小计算量。

例 4. 1^∞**幂式型极限** 计算极限$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

Proof. 极限$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$是$1^\infty$型不定式，虽然也可以直接使用取对数的方法使用洛必达法则计算，我们这里介绍凑e的方法，通常可以简化计算（对于其他指数不定式如0^0凑e法无效），

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)\right]^{\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)^{-1}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)\right]^{\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)^{-1}}\right\}^{\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}\right) \text{（用特殊极限}\mathrm{e}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\text{）} \\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\tan x - x}{x^3}\right). \qquad (9)
\end{aligned}
$$

对得到的$\frac{0}{0}$型不定式$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$用洛必达法则

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}, \qquad (10)
$$

因此本题答案$\sqrt[3]{\mathrm{e}}$。 □

注解 2. 本题如果直接使用取对数的方法凑$\frac{0}{0}$不定式并使用洛必达法则会得到

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x^2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x^2}\right), \qquad (11)
$$

如果直接对极限$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x^2}$使用洛必达法则计算会比较繁琐，因为$\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)$的导数不好计算。如果用一步等价无穷小代换$\ln(1+x)\sim x$有

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)\right]}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan x}{x}-1}{x^2}, \qquad (12)
$$

其中$\frac{\tan x}{x}-1$是无穷小量。通过上述变形，得到和凑e法一样的结果。但是相较而言，凑e法是更直接的。

我们指出，在使用洛必达法则求不定式极限时，将题目里的不定式转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$不定式的过程是很有技巧性的，同学们需要自己课后花时间熟悉这一过程才能明白其中的问题，不能只阅读解答。后续习题里我们给出的问题都是有一定难度的，通常要结合洛必达法则与等价无穷小方法、代数变形等。

1.2 理解泰勒公式

泰勒公式，又名泰勒展开，**它的核心是将严格给定的函数$f(x)$用一个n次多项式$P_n(x)$来近似**。由于函数$f(x)$本身具有形状的，我们自然不能期望$P_n(x)$能在任意大的区间近似$f(x)$，因此我们通常研究一个邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$，同时假定n次多项式$P_n(x)$为

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n. \tag{13}$$

在这一邻域上对$f(x)$近似效果最好的多项式是如下的**泰勒多项式**

$$P_n^T(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{14}$$

特别地，多项式的系数是f及其导数在x_0处的函数值除以对应的阶乘，即$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$。这里有两个问题：

1.什么样的近似是好的近似？我们期望误差$e(x) = f(x) - P_n(x)$在邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$足够的小。注意到当x趋于x_0时$e(x)$是一个无穷小量，我们就以$e(x)$这一无穷小量的阶的大小来刻画近似的好坏。**事实上当$P_n(x)$取泰勒多项式$P_n^T(x)$的时候，近似达到最好的同时，$e(x)$成为比n次无穷小量$(x-x_0)^n$更高阶的无穷小量，即$e(x) = o((x-x_0)^n)$，这便是"最好"的概念。**实际上我们期望$e(x)$成为比$(x-x_0)^n$更高阶的无穷小量是非常合理的，因为$P_n(x)$本身是n次多项式，我们通过调整$P_n(x)$的各项系数改变误差函数$e(x)$，但是这样的改变一定是一个不高于$(x-x_0)^n$的小量。

2.为什么泰勒多项式是对f最好的近似？课本上对此做出了详细的推导，我们仅以$n=1$的情形距离说明。当$n=1$时，泰勒多项式退化为点斜式直线$P_1^T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$，其斜率等于导数$f'(x_0)$，因此$P_1^T(x)$是函数$f(x)$在$x=x_0$的切线。当$x \to x_0$时，近似$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$就相当于$f(x)$在$x_0$处的一阶微分。

综合上述理解，我们明白了当用泰勒多项式$P_n^T(x)$近似$f(x)$时，误差$e^T(x) = f(x) - P_n^T(x)$是一个比n次无穷小量$(x-x_0)^n$更高阶的无穷小量，由此我们得到了$f(x)$在$x=x_0$的邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$上的**局部泰勒公式**：

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n^T(x) + o((x-x_0)^n) \\ &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \\ &\qquad \text{当} x \to x_0, \end{aligned} \tag{15}$$

其中称误差函数$e(x) = o((x-x_0)^n)$为**泰勒公式的Peano余项**。这里我们给出两点释疑：

1.我们知道$o((x-x_0)^n)$代表一个无穷小量，而无穷小量是极限。**因此泰勒公式(15)代表的不再是用泰勒多项式$P_n^T(x)$在邻域近似$f(x)$的整体行为，而是当x趋于x_0的一个极限行为。**用极限的语言写下来是

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0, \tag{16}$$

这样的极限语言与小o符号的等价的。但是显然，泰勒公式(15)更方便地表达了这一极限行为。

2.局部泰勒公式分为两部分：泰勒多项式和Peano余项。泰勒多项式由函数f在x_0的各阶导数决定，根据x_0的不同泰勒多项式是不同的；余项代表了泰勒多项式的近似误差，虽然我们写不出具体表达式，但是我们可以确定当$x\to x_0$时它是一个高于n阶无穷小量。这也告诉我们了写出一个函数在某点x_0的泰勒多项式的步骤，首先计算f的高阶导数并求出对应的泰勒多项式，最后补充Peano余项。

1.3 局部泰勒公式的计算

局部泰勒公式的计算依赖于计算f的各阶导数，而我们知道计算高阶导数并不容易。所以本节我们介绍一下可以避免计算高阶导数的同时，计算给定函数泰勒公式的方法：

公式法

一些简单的函数的高阶导数比较好计算，我们也很容易写出部分简单的函数带Maclaurin余项的局部泰勒公式（即0点处的局部泰勒公式）：

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o\left(x^n\right) \quad (x\to 0), && (17)\\
\sin x &= x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right) \quad (x\to 0), && (18)\\
\cos x &= 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o\left(x^{2n+1}\right) \quad (x\to 0), && (19)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right) \quad (x\to 0), && (20)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right) \quad (x\to 0), && (21)
\end{aligned}$$

关于这些公式有一些释疑：

1.上述公式都刻画的是0处的局部泰勒公式，即$x\to 0$的极限行为。如果考虑$x\neq 0$处的局部泰勒公式，上述公式皆不成立！

2.注意到$\sin x$的局部泰勒公式中，泰勒多项式部分的次数是$2n+1$，因此余项本应该是$o\left(x^{2n+1}\right)$，但是我们给出的Maclaurin余项却是$o\left(x^{2n+2}\right)$，这是因为$\sin x$对应的泰勒多项式中，$2n+2$次多项式系数为0，使得余项自然提升一阶达到$o\left(x^{2n+2}\right)$。

3.注意到$(1+x)^\alpha$的局部泰勒公式中，如果α是正整数，那么泰勒多项式相当于多项式$(1+x)^\alpha$二项式展开的前$n+1$项；在实际应用中，我们一般取α为有理数，例如当$\alpha=\frac{1}{2}$时，函数$\sqrt{1+x}$有如下局部泰勒公式

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+o\left(x^n\right). \tag{22}$$

当$\alpha=-1$时，函数$\frac{1}{1+x}$有如下局部泰勒公式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o\left(x^n\right). \tag{23}$$

既然我们已经了解一些简单的函数的泰勒公式，而泰勒公式本身也是表达极限关系的等式，所以我们考虑一些由已经泰勒公式的函数四则运算而得的函数。由于泰勒公式的四则运算涉及o余项的运算，我们首先总结：考虑$x\to 0$，设正整数$m<n$，那么加法运算满足

$$x^n+o\left(x^m\right)=o\left(x^m\right),\quad o\left(x^n\right)+o\left(x^m\right)=o\left(x^m\right), \tag{24}$$

其实质是，x^n或$o\left(x^n\right)$都是比x^m更高阶的无穷小量，自然也可以包含在无穷小量$o\left(x^m\right)$中；设m,n是两个正整数，考虑乘法运算

$$x^n\cdot o\left(x^m\right)=o\left(x^{m+n}\right),\quad o\left(x^n\right)\cdot o\left(x^m\right)=o\left(x^{m+n}\right), \tag{25}$$

其实质是，两个无穷小量相乘可以得到阶数更高的无穷小量。关于无穷小量的计算公式无需记忆，更多地要理解其实质。

接下来我们介绍几个借助公式计算局部泰勒公式的例子：

例 5. 乘法运算 计算$y=\mathrm{e}^x\sin x$带*Maclaurin*余项的局部泰勒公式，其中余项展到$o(x^4)$。

Proof. 借助泰勒公式(17)和(18)得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^x\sin x\\
=\;&\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\\
=\;&x+x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^4+o(x^4)\\
=\;&x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^4).
\end{aligned} \tag{26}$$

初学者可能会对如何选择e^x和$\sin x$泰勒公式的项数有所疑惑。实际上，因为我们希望找到$\mathrm{e}^x\sin x$的余项$o(x^4)$的泰勒公式，相当于要写出$\mathrm{e}^x\sin x$的四次泰勒多项式。而$\mathrm{e}^x\sin x$的四次泰勒多项式只能由e^x和$\sin x$的泰勒公式中次数不大于四的项相乘而得，因此我们也只需将e^x和$\sin x$展开的余项$o(x^4)$。实际上，即便是e^x和$\sin x$的泰勒多项式中不大于四次的项，乘起来也可能得到大于四阶的无穷小量（例如e^x的项$\frac{x^2}{2}$和$\sin x$的项$-\frac{x^3}{6}$，乘起来得到的无穷小量属于$o(x^4)$），这样的项乘积无需计算，直接进入$\mathrm{e}^x\sin x$的泰勒公式的余项$o(x^4)$里。 □

例 6. 换元运算 计算$y=\frac{1}{1+x^2}$带*Maclaurin*余项的局部泰勒公式。

Proof. 我们之前给出过$\frac{1}{1+x}$的泰勒公式(23)，为了方便理解我们选用自变量y:

$$\frac{1}{1+y}=1-y+y^2-\cdots+(-1)^ny^n+o\left(y^n\right). \tag{27}$$

由于泰勒公式是**描述极限行为的等式**，我们可以使用极限换元法。在(27)取换元$y=x^2$可得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^nx^{2n}+o(x^{2n}). \tag{28}$$

特别注意到，$\frac{1}{1+x^2}$的泰勒多项式的奇数次项系数均为0，使用我们也可以写为

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^nx^{2n}+o(x^{2n+1}). \tag{29}$$

□

例 7. **分式拆分** 计算$y=\frac{x^3+2x+1}{x^2-1}$带*Maclaurin*余项的局部泰勒公式。

Proof. 模仿处理有理分式积分的方法，可以将$\frac{x^3+2x+1}{x^2-1}$首先由假分式化为真分式，然后分解为基本分式的和

$$\frac{x^3+2x+1}{x^2-1}=x+\frac{3x+1}{x^2-1}=x+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}, \tag{30}$$

其中$\frac{1}{x+1}$的泰勒公式是我们熟悉的，考虑$\frac{2}{x-1}=\frac{-2}{1+(-x)}$，并在泰勒公式(23)中用$-x$替代$x$有

$$\frac{2}{x-1}=-2-2x-2x^2-\cdots-2x^n+o(x^n), \tag{31}$$

由此

$$\begin{aligned}
&\frac{x^3+2x+1}{x^2-1}\\
=\;& x+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}\\
=\;& x+\left(-2-2x-2x^2-\cdots-2x^n+o(x^n)\right)+\left(1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+o\left(x^n\right)\right)\\
=\;& -1-2x-x^2-3x^3-\cdots-\left(2+(-1)^n\right)x^n+o(x^n).
\end{aligned} \tag{32}$$

□

微分法

接下来要介绍的微分法使得我们可以对更广的一类函数计算其泰勒公式，我们直接看例题:

例 8. 计算$y=\arctan x$带*Maclaurin*余项的局部泰勒公式。

Proof. 我们知道$y' = \frac{1}{1+x^2}$，根据前面的例题可以写出y'的局部泰勒公式：

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}). \tag{33}$$

接下来的部分我们分为直观理解和严格叙述两部分叙述：

直观理解 对Taylor公式(33)的左右两侧同时计算积分：

$$y = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}), \tag{34}$$

这里我们还借助了无穷小量的形式积分运算$\int o(x^{2n+1})\mathrm{d}x = o(x^{2n+2})$。从直观上，$2n+1$次的函数积分得到$2n+2$次的函数是直观的，上述方法得到的泰勒公式也是完全正确的，但是上述方法理论有两个错误：

1.积分$\int o(x^{2n+1})\mathrm{d}x = o(x^{2n+2})$是毫无道理的形式计算，我们完全不了解小量$o(x^{2n+1})$具体的不等式。

2.泰勒公式(33)不是简单的等式，而是刻画$x \to 0$的极限，我们曾经说过极限运算和积分运算通常不能换序，因此我们不能做形如式(34)的，对于y'泰勒公式逐项地积分。

即便如此，上述方法不仅可以得到正确的泰勒公式，还有很好的指导意义。从泰勒多项式系数的角度，我们可以把上述推理避开积分语言严格化。

严格叙述 由于y'是y的导数，因此函数y'的n阶导数就是y的$n+1$阶导数。根据Taylor多项式(33)的表达式，我们可以得到y'高阶导数信息：

$$\frac{(y')^{(n)}(0)}{n!} = \frac{y^{(n+1)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0, & n\text{是奇数}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n\text{是偶数}. \end{cases} \tag{35}$$

另一方面，y的泰勒多项式的$n+1$次项系数为

$$\frac{y^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{y^{(n+1)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0, & n\text{是奇数}, \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n+1}, & n\text{是偶数}. \end{cases} \tag{36}$$

由此我们可以写出$y = \arctan x$的泰勒公式，其中只有次数为奇数的项：

$$y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}). \tag{37}$$

□

总结下来，微分法处理的是那些y本身泰勒公式很复杂，但是导函数y'可以通过公式法计算处泰勒公式的情形。我们借助直观为“逐项积分”的方法，通过传递高阶导数函数值信息，由y'的泰勒公式反推y的泰勒公式。

1.4 泰勒公式的应用

本节介绍泰勒公式的三个应用。计算高阶导数和计算极限是局部泰勒公式的直接应用。而为了在证明题使用泰勒公式，通常需要借助带Lagrange余项的泰勒公式。

计算高阶导数

根据公式(15)，某函数f的泰勒多项式各项的系数是由其高阶导数值$f^{(n)}(x_0)$确定的。而我们此前介绍了许多不依赖高阶导数也可以求出函数f的局部泰勒公式和泰勒多项式的方法，我们就可以根据f的泰勒公式反推计算高阶导数值$f^{(n)}(x_0)$。

例如在学习高阶导数的计算时，我们曾采用“化显为隐”的方法计算了$y = \arctan x$的各阶导函数函数值$y^{(n)}(0)$，是非常麻烦的。然而此前得到了$y = \arctan x$的泰勒多项式(37)，利用式(37)我们可以计算$y = \arctan x$在$x = 0$的高阶导数

$$\frac{y^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0, & n\text{是偶数}, \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}, & n\text{是奇数}. \end{cases} \tag{38}$$

由此计算出

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n\text{是偶数}, \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)!}, & n\text{是奇数}. \end{cases} \tag{39}$$

注解 3. 我们指出，通过f在x_0的局部泰勒公式我们只能算出f在x_0一点的高阶导数，而得不到f高阶导数在其他点的信息。

计算极限

利用泰勒公式可以计算$\frac{0}{0}$型不定式极限，由于在$x = 0$处的局部泰勒公式是我们熟悉的，我们一般考虑$x \to 0$的极限。这类极限通常可以写成如下形式

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{x^m}, \tag{40}$$

其中$m \in \mathbb{N}^*$，函数$P(x)$是无穷小量，于是我们写出$P(x)$的局部泰勒公式，余项$o(x^m)$：

$$P(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + o(x^m). \tag{41}$$

根据无穷小量$P(x)$和x^m的量级关系，我们分三种情况：

1.如果$P(x)$是比x^m更高阶的无穷小量，那么系数$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$，此时$P(x) = o(x^m)$，代入极限(40)得$I = 0$。

2.如果$P(x)$是与x^m同阶的无穷小量，那么系数$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0$但$a_m \neq 0$，此时$P(x) = a_m x^m + o(x^m)$，那么$I = \lim_{x\to 0} \frac{a_m x^m + o(x^m)}{x^m} = \lim_{x\to 0} (a_m + o(1)) = a_m$。

3.如果$P(x)$是比x^m低阶的无穷小量，那么系数$a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}$不全为$0$，显然极限(40)得$I = \infty$。

在上述情况中，需要我们使用泰勒公式计算极限(40)的是情况**2**，即$P(x)$是与x^m同阶的无穷小量。此时我们需要写出$P(x)$的泰勒公式(41)，就可以计算极限(40)。总结下来，泰勒公式求极限方法的解题步骤如下：

1.将极限化成(40)的形式，如果极限非$x \to 0$一般建议换元为$x \to 0$形式。

2.写出分子$P(x)$带余项$o(x^m)$的局部泰勒公式。

3.代入(40)计算极限。

我们以下述例题为例：

例 9. 计算极限$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$。

Proof. 首先通分

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - x - 1}{x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)}. \tag{42}$$

通过等价无穷小关系$x \sim \mathrm{e}^x - 1$得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - x - 1}{x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - x - 1}{x^2}. \tag{43}$$

于是得到了形如(40)的极限。根据e^x的局部泰勒公式，展开到余项$o(x^2)$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \tag{44}$$

代入极限(43)得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - x - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{45}$$

□

带Lagrange余项的泰勒公式与近似估计

最后我们介绍带Lagrange余项的泰勒公式及其应用。我们知道局部泰勒公式的实质是用泰勒多项式$P_n^T(x)$（定义于式(14)）近似f，并在邻域内证明误差余项满足

$$e(x) = f(x) - P_n^T(x) = o\left((x - x_0)^n\right), \quad x \to 0. \tag{46}$$

但是局部泰勒公式的主要问题是，我们无法给出$e(x)$的具体形式，并且我们只能得到$e(x)$的极限行为。为了了解$e(x)$的更多信息，在严格的数学证明里我们通常更倾向于

使用带Lagrange余项的泰勒公式。**带Lagrange余项的泰勒公式与局部泰勒公式（或称带Peano余项的泰勒公式）的主要区别，在于前者一般在一个区间$[a,b]$上讨论并给出了$e(x)$的具体形式，后者只能在某点x_0的邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$考虑并只能给出$e(x)$的极限行为。**

下面我们叙述带Lagrange余项的泰勒公式的内容：假如f在闭区间$[a,b]$具有$n+1$阶导函数，并且$x_0\in(a,b)$，那么在每一个点$x\in[a,b]$，泰勒多项式$P_n^T(x)$对f的近似效果为

$$e(x)=f(x)-P_n^T(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{47}$$

其中ξ是依赖x的参数，其值介于x与x_0之间。实际上如果f的$n+1$阶导数是有界的，自然有$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=o\left((x-x_0)^n\right)$，这说明带Lagrange余项的泰勒公式通常蕴含了带Peano余项的泰勒公式。

注解 4. 注意推导带*Peano*余项的n次泰勒公式只要求f在x_0一点n阶可导，而推导带*Lagrange*余项的n次泰勒公式则需要f在整个区间$[a,b]$都具有$n+1$阶导函数。后者对f更强光滑性的要求，是*Lagrange*余项泰勒公式具有更强性质的保证。

带Lagrange余项的泰勒公式虽然形式较繁，却能定量地分析泰勒多项式对函数的近似效果。带Lagrange余项的泰勒公式最大的应用是近似计算，我们仅重复课本上的例子。我们希望用计算机近似正弦函数$\sin x$在开区间$(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$上各点的函数值，并希望近似的结果与正弦函数真正的函数值误差尽可能小。我们考虑$\sin x$在$x_0=0$处的带Lagrange余项的泰勒公式：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \tag{48}$$

其中ξ是介于x与x_0之间的参数。我们希望用计算机计算$2n$次泰勒多项式的函数值$P_{2n}^T(x)$代替$\sin x$，他们之间的误差是

$$\left|\sin x-P_{2n}^T(x)\right|=\left|\frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|\le\frac{1}{(2n+1)!}, \tag{49}$$

其中应用了$|\cos\xi|\le 1$和$x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$。因此，只要取$n$足够大，就可以使得$P_{2n}^T(x)$更好地近似$\sin x$，而$P_{2n}^T(x)$是多项式，其值适合计算机计算，这也是计算机计算三角函数函数值的方法。例如，课本上取$n=11$，即22次泰勒多项式$P_{22}^T(x)$对$\sin x$的经典可以达到10^{-11}。

带Lagrange余项的泰勒公式的另一个主要应用是在证明题中研究函数f与其高阶导数之间的性质。由于

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{50}$$

关系式为f与其导函数f',f''等建立了联系。详见讲义后的证明题。

2 习题

题 1. 用洛必达法则计算极限$\lim_{n\to\infty} n\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$。

分析：为了使用洛必达法则，我们必须首先将序列极限转化为函数极限。本题使用三次洛必达法则化简极限，但是使用过程中应注意代数变形的选择以减小计算量。

Proof. 根据函数极限的性质，取$x=\frac{1}{n}$有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}. \tag{51}$$

极限$\lim_{x\to 0+0}\frac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$是$\frac{0}{0}$不定式，我们用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{-(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}}{1}=-\mathrm{e}\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right), \tag{52}$$

第二个等号使用极限$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$。接着处理$\frac{0}{0}$型不定式$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$，部分同学想通分去除繁分式，这样的做法是不明智的，因为如果同分将得到形如$(x+1)\ln(1+x)$的项，其导数比直接对$\ln(1+x)$求导更复杂。我们直接用两次洛必达法则计算

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+x)^2}\right)=-\frac{1}{2}. \tag{53}$$

由此本题答案为$\frac{\mathrm{e}}{2}$。 □

题 2. 用洛必达法则计算极限$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$。

分析：本题为减式不定式，可以通分用洛必达法则处理。然而由于同分后式子很长，直接使用洛必达法则的计算量非常大。结合等价无穷小变形的技巧可以减小计算量。

Proof. 极限$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$是$\infty-\infty$型不定式，可以直接通分计算

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x)}. \tag{54}$$

虽然极限$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x)}$是$\frac{0}{0}$型不定式，但是直接使用洛必达法则的计算量是不能承受的。我们首先使用等价无穷小的技巧有$x\sim\ln(1+x)$。另一方面注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

由此结合等价无穷小和洛必达法则

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x)}\\
=\;&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\text{（等价无穷小）}\\
=\;&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\text{（洛必达法则）}\\
=\;&\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}\text{（洛必达法则后对数项全部消失）}\\
=\;&\lim_{x\to 0}\frac{-1+0}{1+1}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

对于本题的解题技巧，我们总结目标是通过反复使用洛必达法则是难以处理的对数项$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$消失，由于直接对对数的积项$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x)$求导非常复杂，由此我们首先进行了一步等价无穷小代换。另一方面，当极限计算进行到第三行时，我们并没有贸然对繁分式$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$进行通分，因为单独存在的项$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$的导数很简单，但是如果乘上了别的项求导就会很复杂。

□

注解 5. 这里部分熟练的同学可能可以使用如下的等价无穷小

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left[1+\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)\right]\sim x+\sqrt{1+x^2}-1. \tag{56}$$

由此可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(x+\sqrt{1+x^2}-1\right)}. \tag{57}$$

模仿式(55)对式(57)进行两次洛必达法则也可以计算出极限，但是计算量要比给出的方法更大些。

题 3. 用洛必达法则计算极限$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

分析：本题带有变限积分项，直接处理变限积分项很难。注意到洛必达法则的求导运算，我们可以通过对变限积分项求导去除变限积分项。

Proof. 本题为∞^0型不定式，使用取对数的方法然后使用洛必达法则：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}\\
=\ &\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{\ln\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)}{x^2}\right)=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)}{x^2}\right)\\
=\ &\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{-1}}{2x}\right)\text{（使用一次洛必达法则）}\\
=\ &\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}(2x)^{-1}}{\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}dt}\right)\text{（变限积分求导简单，因此将变限积分单独放在分母）}\\
=\ &\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{2\mathrm{e}^{x^2}}\right)\text{（使用一次洛必达法则）}\\
=\ &\mathrm{e}.
\end{aligned}\tag{58}$$

□

题 4. 设函数$f(x)$在$x=a$处二阶可导，求证：

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)\tag{59}$$

分析：由于本题的极限也是一个不定式，我们也可以尝试使用洛必达法则。

Proof. 直接用洛必达法则

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}\\
=\ &\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}\text{（使用一次洛必达法则）}\\
=\ &\frac{1}{2}\left(\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}\right)\text{（代数变形凑出二阶导数定义的形式）}\\
=\ &f''(a).
\end{aligned}\tag{60}$$

□

注解 6. 本题我们只给出了$f(x)$在点$x=a$一点的二阶可导性，而$x=a$附近f的二阶导数不一定存在。使用在证明$\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}=f''(a)$时不能直接使用微分中值定理。

题 5. 设函数$f(x)$是$(0,+\infty)$的有界可导函数，且存在$a>0$使得$\lim_{x\to\infty}(af(x)-f'(x))$存在，求证$\lim_{x\to+\infty}f(x)$存在。

分析：洛必达法则的主要作用，是建立f相关的极限与f'相关的极限之间的关系。为了使用题目中条件$\lim_{x\to\infty}(af(x)-f'(x))$存在，我们构造辅助函数。

Proof. 构造辅助函数$F(x) = \mathrm{e}^{-ax}f(x)$和$G(x) = \mathrm{e}^{-ax}$，由于函数$f$有界，当$x \to +\infty$时$F(x)$和$G(x)$都是无穷小量。且我们有极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-ax}(af(x)-f'(x))}{-a\mathrm{e}^{-ax}} = \frac{1}{a}\lim_{x\to\infty}(af(x)-f'(x)). \tag{61}$$

由于极限$\lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{G'(x)}$收敛，用洛必达法则有

$$\lim_{x\to\infty}f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{G'(x)}, \tag{62}$$

也是收敛的极限。 □

题 6. 用泰勒公式计算极限$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\mathrm{e}^x-1)-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-1\right)}{\sin^4(3x)}$。

分析：本题可以通过等价无穷小变换，将极限化为(40)的形式。借助换元法，计算分子的局部泰勒公式。

Proof. 用等价无穷小关系$\sin(3x)\sim 3x$，化简极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-1\right)}{\sin^4(3x)} = \frac{1}{81}\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-1\right)}{x^4}. \tag{63}$$

下面计算分子的泰勒展开，由于$\sin x$是无穷小量有

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{\sin x}-1 \\
= \ & \sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{6}+\frac{\sin^4 x}{24}+o(\sin^4 x)\text{（注意到}o(x^4)=o(\sin^4 x)\text{）} \\
= \ & \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^2)\right)^2}{2}+\frac{\left(x+o(x^2)\right)^3}{6}+\frac{\left(x+o(x^2)\right)^4}{24}+o(x^4) \\
= \ & \left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{6}\right)+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4) \\
= \ & x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4).
\end{aligned} \tag{64}$$

另一方面e^x-1也是无穷小量

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\mathrm{e}^x-1\right) \\
= \ & \left(\mathrm{e}^x-1\right)-\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^x-1\right)^3+o\left(\left(\mathrm{e}^x-1\right)^4\right)\text{（注意到}o(x^4)=o\left(\left(\mathrm{e}^x-1\right)^4\right)\text{）} \\
= \ & \left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^3+o(x^4) \\
= \ & \left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right)-\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{4}\right)+o(x^4) \\
= \ & x+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^4}{24}+o(x^4).
\end{aligned} \tag{65}$$

由此

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{81}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\mathrm{e}^x-1\right)-\left(\mathrm{e}^{\sin x}-1\right)}{x^4}\\
=\ &\frac{1}{81}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^4}{24}+o(x^4)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)}{x^4}=-\frac{1}{972}. \qquad (66)
\end{aligned}$$

□

题 7. 用泰勒公式计算极限$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{7}{4}}(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x})$。

分析：使用泰勒公式计算的极限是$x\to 0$的，我们首先换元$y=\frac{1}{x}$，得到的关于y的极限具有(40)形式。

Proof. 我们首先换元$y=\frac{1}{x}$得到

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{7}{4}}(\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-2\sqrt[4]{x}) &= \lim_{y\to 0+0}y^{-\frac{7}{4}}\left(\sqrt[4]{\frac{1}{y}+1}+\sqrt[4]{\frac{1}{y}-1}-2\sqrt[4]{\frac{1}{y}}\right)\\
&= \lim_{y\to 0+0}\frac{\sqrt[4]{y+1}+\sqrt[4]{1-y}-2}{y^2}. \qquad (67)
\end{aligned}$$

写出分子的局部泰勒公式，余项$o(y^2)$：

$$\sqrt[4]{y+1}=1+\frac{y}{4}-\frac{3y^2}{32}+o(y^2), \qquad (68)$$

以及

$$\sqrt[4]{1-y}=1-\frac{y}{4}-\frac{3y^2}{32}+o(y^2). \qquad (69)$$

由此

$$\lim_{y\to 0+0}\frac{\sqrt[4]{y+1}+\sqrt[4]{1-y}-2}{y^2}=\lim_{y\to 0+0}\frac{-\frac{3}{16}y^2+o(y^2)}{y^2}=-\frac{3}{16}. \qquad (70)$$

□

题 8. 设$y=x^2\ln(1+x)$,求$y^{(2021)}(0)$。

分析：期末考试中计算高阶导数的问题一般都通过泰勒公式计算，写出$y=x^2\ln(1+x)$的在$x=0$处的局部泰勒公式并计算其2021次系数。

Proof. 写出$y=x^2\ln(1+x)$的局部泰勒公式，根据$\ln(1+x)$的局部泰勒公式：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right), \qquad (71)$$

计算得

$$x^2\ln(1+x)=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{n}+o(x^{n+2}), \qquad (72)$$

注意到泰勒多项式的2021次系数为$\frac{1}{2019}$，由此$\frac{y^{(2021)}(0)}{2021!}=\frac{1}{2019}$，因此$y^{(2021)}(0)=\frac{2021!}{2019}$。

□

注解 7. 本题也可以使用*Leibniz*公式计算；相较直接研究高阶导数的性质，泰勒公式可以进行乘法、换元等多种运算，通过泰勒公式研究高阶导数非常方便；但是需要注意，泰勒多项式只能给出函数在一点的高阶导数值，不能给出函数在区间每一点的高阶导数值。

题 9. 写出函数$y = \frac{1}{1+x+x^2}$，写出y在$x = 0$和$x = -\frac{1}{2}$处的局部泰勒公式，并由此计算高阶导数$y^{(m)}(0)$和$y^{(m)}(-\frac{1}{2})$，其中$m \in \mathbb{N}^*$。

分析：我们需要分别写出$y = \frac{1}{1+x+x^2}$在$x = 0$和$x = -\frac{1}{2}$处局部泰勒公式，其中在计算$x = -\frac{1}{2}$的处的泰勒公式时时，建议先换元$t = x + \frac{1}{2}$，转化为一个$t = 0$处带Maclaurin余项的泰勒公式。

Proof. 首先考虑$x = 0$处的泰勒公式，进行代数变形

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3}, \tag{73}$$

结合$\frac{1}{1-x}$的泰勒公式，可以写出$\frac{1}{1-x^3}$的泰勒公式

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{3n} + o(x^{3n+2}), \tag{74}$$

由此

$$\begin{aligned} (1-x)\cdot\frac{1}{1-x^3} &= (1-x)\left(1 + x^3 + x^6 + \cdots + x^{3n} + o(x^{3n+2})\right) \\ &= 1 - x + x^3 - x^4 + \cdots + x^{3n} - x^{3n+1} + o(x^{3n+2}). \end{aligned} \tag{75}$$

根据泰勒公式的系数可以计算高阶导数：当$m = 3n$时有$\frac{f^{(m)}(0)}{m!} = 1$，因此$f^{(m)}(0) = m!$；当$m = 3n+1$时有$\frac{f^{(m)}(0)}{m!} = -1$，因此$f^{(m)}(0) = -m!$；当$m = 3n+2$时有$\frac{f^{(m)}(0)}{m!} = 0$，因此$f^{(m)}(0) = 0$。

另一方面，求$x = -\frac{1}{2}$处的泰勒公式，为此换元$t = x + \frac{1}{2}$。进行代数变形

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{4}{3}t^2\right)^{-1}, \tag{76}$$

接着计算

$$\left(1 + \frac{4}{3}t^2\right)^{-1} = 1 - \frac{4}{3}t^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 t^4 + \cdots + (-1)^n\left(\frac{4}{3}\right)^n t^{2n} + o(t^{2n+1}). \tag{77}$$

由此$y = \frac{1}{1+x+x^2}$在$x = -\frac{1}{2}$处局部泰勒公式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3\left(x + \frac{1}{2}\right)^4 \cdots + \\ +(-1)^n\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\left(x + \frac{1}{2}\right)^{2n} + o\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right). \end{aligned} \tag{78}$$

根据泰勒公式的系数可以计算高阶导数：当$m=2n$时$\frac{f^{(m)}(-\frac{1}{2})}{m!}=(-1)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m}{2}+1}$，因此$f^{(m)}(-\frac{1}{2})=(-1)^{\frac{m}{2}}m!\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{m}{2}+1}$；当$m=2n+1$时有$\frac{f^{(m)}(-\frac{1}{2})}{m!}=0$，因此$f^{(m)}(-\frac{1}{2})=0$。 □

题 10. 设$f(x)$在$x=0$某邻域二阶可导，且极限$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$。计算函数值$f(0),f'(0),f''(0)$。

分析：本题是有关泰勒公式的综合题，由于极限$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$是$1^\infty$型不定式，我们考虑凑e的方法。

Proof. 我们首先取对数得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}=\ln(\mathrm{e}^3)=3. \tag{79}$$

由于分母x是无穷小量，为了极限$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)}{x}$为有限值，必须$\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)$也是无穷小量，即

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=1, \tag{80}$$

这意味着$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$。同理分母$x$是无穷小量，为了极限$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$为有限值，必须$\lim_{x\to 0}f(x)=0$，根据$f$的连续性有$f(0)=0$。

由于$f(0)=0$，那么极限$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$是$1^\infty$型不定式，我们考虑凑e的方法：

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{x^2+f(x)}}\right]^{\frac{x^2+f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}^3, \tag{81}$$

由此极限

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x^2}\right)=3, \tag{82}$$

亦即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=2. \tag{83}$$

我们接下来通过极限(83)来计算f的导数。代入f的二次泰勒公式：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(0)}{x}+\frac{f''(0)}{2}\right)=3. \tag{84}$$

由于极限$\lim_{x\to 0}\frac{f'(0)}{x}$是有限值，因此$f'(0)=0$，同时说明$\frac{f''(0)}{2}=3$，级$f''(0)=6$。 □

注解 8. 部分同学可能会通过对式(83)使用洛必达法则的方法计算极限，这种方法是错误的，主要原因是：其一，洛必达法则要求分子函数$f(x)$在*0*的一个邻域都可导，而题目只给出了$f(x)$在*0*一点的可导性；第二，即便我们使用了洛必达法则，也不能推出极

限$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=2$，事实上，还有极限$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}$发散的可能。我们使用泰勒公式而不是洛必达法则处理式(83)，可见泰勒公式对于函数f性质的剖析是更强的，洛必达法则容易破坏函数本身的结构。

题 11. 设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，满足$f(0)=f(1)$，如果$|f''(x)|\le 2$在$[0,1]$成立，那么$|f'(x)|\le 1$在$[0,1]$成立。

分析：本题是标准的泰勒公式相关的证明题。通过泰勒公式我们可以建立f,f',f''的关系。由于我们最了解f在$0,1$两点的信息，我们在点$x\in(0,1)$写出$f(0)$和$f(1)$的带Lagrange余项泰勒公式。

Proof. 设$x\in(0,1)$，在x处写出$f(0)$和$f(1)$的带Lagrange余项泰勒公式

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x)^2, \tag{85}$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2, \tag{86}$$

其中$\xi_1\in(0,x)$以及$\xi_2\in(x,1)$。由于$f(0)=f(1)$，我们将上述两个式子相减

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2\right], \tag{87}$$

根据条件，f''在任一点的函数值的绝对值都不大于2，所以

$$\begin{aligned}|f'(x)| &\le \frac{x^2}{2}|f''(\xi_1)|+\frac{(1-x)^2}{2}|f''(\xi_2)|\\ &\le x^2+(1-x)^2\le 1.\end{aligned} \tag{88}$$

□

题 12. 设函数$f(x)$在a某个邻域二阶导连续，根据拉格朗日中值定理

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+h\theta(h)), \tag{89}$$

其中$\theta(h)\in(0,1)$是依赖h的参数。求证$\lim_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{2}$。

分析：根据Lagrange中值定理，我们知道存在$\xi\in(x,x+h)$使得$f'(\xi)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$，取依赖$h$的参数$\theta(h)\in(0,1)$使得$\xi=a+\theta(h)h$，由此式(89)成立。但是仅从中值定理出发，我们只知道$\theta(h)$存在，并不知道$\theta(h)$的值以及关于$\theta(h)$的其他信息。如果我们将条件由f一阶可导（使用Lagange中值定理）加强到二阶可导（使用带Lagrange余项的泰勒公式），将可以得到关于$\theta(h)$的极限信息。

Proof. 我们写出点a处带Lagrange余项的二次泰勒公式

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a+\xi(h)), \tag{90}$$

其中$\xi(h) \in (0,1)$是依赖h的参数。代入式(89)并消去h得

$$f'(a+\theta(h)h) - f'(a) = \frac{h}{2} f''(a+\xi(h)). \tag{91}$$

根据二阶导数的定义

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(a+\theta(h)h) - f'(a)}{h\theta(h)} = f''(a). \tag{92}$$

代入式(91)得

$$\lim_{h\to 0} \frac{f''(a+\xi(h))}{2\theta(h)} = f''(a). \tag{93}$$

由于二阶导连续，同时$a < a+\xi(h)h < a+h$，使用

$$\lim_{h\to 0} f''(a+\xi(h)) = f''(a). \tag{94}$$

结合式(93)得

$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \frac{1}{2}. \tag{95}$$

□

题 13. 设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$二阶可导，如果函数$f(x)$和$f''(x)$在$\mathbb{R}$都有界，那么函数$f'(x)$也有界。

分析：本题是泰勒公式经典习题。我们通过两次使用泰勒公式的途径，用f和f''表示f'。

Proof. 我们首先设存在正实数M_0, M_2是f和f''的界

$$|f(x)| < M_0, \quad |f''(x)| < M_2. \tag{96}$$

任取$x \in \mathbb{R}$，我们写出$f(x+1)$和$f(x-1)$在x处带Lagrange余项的二阶泰勒公式：

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2} f''(\xi_1), \tag{97}$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2} f''(\xi_2). \tag{98}$$

其中$\xi_1 \in (0,x)$以及$\xi_2 \in (x,1)$。将两式相减，可以用f和f''表出f'：

$$f'(x) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2} - \frac{f''(\xi_1) - f''(\xi_2)}{4}. \tag{99}$$

由三角不等式

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\le \frac{|f(x+1)| + |f(x-1)|}{2} + \frac{|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|}{4} \\ &\le M_0 + \frac{M_2}{2}. \end{aligned} \tag{100}$$

由于上述估计可以对任意$x \in \mathbb{R}$进行，所以f'有界。 □