函数极限讲义

谢彦桐

北京大学数学科学学院

2021.10.12

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。题型说明，基础题指方法非常标准的题目，综合题指方法标准但需要一些技术技巧的题目，进阶题指方法不常规的题目。

目录

1 知识点整理

本讲义内容为函数极限，如不加说明，使用自变量n的极限为序列极限，使用自变量x或y的极限为函数极限。

1.1 函数极限的直观认识、函数极限和序列极限的比较

与序列极限类似，函数极限也是通过抽象的$\varepsilon-\delta$语言定义的：

定义 1.1. 设$f(x)$在去心邻域$U_{\delta_0}(x_0)/\{x_0\}$定义，称$f(x)$在$x_0$处收敛于$a$，如果对$\forall\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，使得对一切满足$0<|x-x_0|<\delta$都有$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$。

函数极限讨论的是一个函数在一点x_0附近趋向于x_0时，函数$f(x)$的函数值的“聚拢”现象。特别地，序列极限可以看作特殊的函数极限，因为序列可以看作定义域为$\mathbb{N}^*$的函数并讨论参数$n\to\infty$的极限，因此许多情况下序列极限与函数极限的性质可以统一，如夹逼原理、四则运算、单调有界原理、超越复合运算等，这里不做赘述。

函数极限本身也具有许多序列极限不具有的特点，我们这里指出几点

1.单侧极限 直观来说，单侧极限考虑的是$f(x)$函数值从x_0一侧趋向于x_0的性质，分为左极限和右极限。函数极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$收敛的充分必要条件是左右极限均收敛且相等，即$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)$。特别地，左右极限都存在但不相等的情形，函数极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$发散。

2.趋向于∞的极限 ∞在数学上指无穷远点，虽然无穷远点不是一个数，但是我们可以考虑函数趋向于无穷远点时的极限。而无穷远点处的左右极限则分别为趋向$+\infty$和$-\infty$的极限。序列极限只有$n\to\infty$一种情况，对应于函数极限中$x\to+\infty$的单侧极限。

3.不含心性质 我们定义函数极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$时只要求函数的定义域是去心邻域$U_{\delta_0}(x_0)/\{x_0\}$，在点$x_0$处$f(x)$即使没有定义也不影响函数极限的定义。即使函数实际在x_0有定义，例如特殊极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$。任意改变$x_0$处的函数值也并不影响极限$\lim_{x\to x_0}f(x)$的行为。

4.关于换元 函数极限的换元方法虽然在课本上没有单独讨论，却大量存在于习题中。例如特殊极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$进行换元$y=\frac{1}{x}$，就可以得到新极限$\lim_{y\to\infty}y\sin\left(\frac{1}{y}\right)=1$。虽然大多数函数极限换元都是正确的，但是一般的极限换元法是比较麻烦的。对于高等数学B课程，只要求凭直觉考虑换元问题即可。例如当x趋于0时，y确实趋于∞，因此x趋于0时的极限信息与y趋于∞的极限信息确实等效。

我们已经了解函数极限收敛的情况，下面我们考虑一下什么样的函数是发散的，我们能不能用直观的语言描述什么样的函数发散呢？函数极限的发散一般分为两类，其一是我们熟悉的函数值“不聚拢”的情形，如函数$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$在$x_0=0$处极限不收敛，见课本图1.10。**这类情形可能伴随着函数值在x_0处的高频震荡，也有一些反例，如本讲义题7的反例**。了解这些不收敛的反例将有助于理解函数极限的性质。第二种情况则是左右极限均存在但是却不等，即“错位现象”。例如Gauss函数$f(x)=[x]$在$x_0=0$处不收敛，其左极限为-1，右极限则为0。

接下来我们介绍函数极限与序列极限的关系，主要是下述定理（本定理为课本47页定理5的加强版，同学们只掌握课本上的定理即可）

定理 1.1. 设$f(x)$在去心邻域$U_{\delta_0}(x_0)/\{x_0\}$定义，那么$\lim_{x\to x_0}f(x)=a$的充分必要条件

是，对于一切序列$\{x_n\}_{n\to\mathbb{N}^*}\subset U_{\delta_0}(x_0)/\{x_0\}$满足$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$都有$\lim_{x\to\infty}f(x_n)=a$。

定理1.1的直观意义是，当函数极限收敛时，$f(x)$在x_0的函数值总是“聚拢”的，因此单独看邻域里的序列$\{x_n\}$，其函数值$f(x_n)$总要随着函数收敛的大趋势收敛。**上述定理的主要应用有两个，一是借助函数极限计算一些序列极限，二是证明函数极限发散，例题可参见课本47页例8。**

1.2 不定式极限计算

在序列极限中我们介绍了无穷大量和无穷小量量级的概念，由于无穷大量和无穷小量的存在，使得我们存在一些极限是不能通过极限四则运算法则计算的，例如特殊极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$。在极限不定式中，有三类不定式是最为常见的，即$\frac{\infty}{\infty}$，$\frac{0}{0}$和$1^\infty$。其中不定式$\frac{\infty}{\infty}$可以通过判别无穷大量量级计算，不定式$1^\infty$可以通过e的方法计算，不定式$\frac{0}{0}$则通常通过等价无穷小方法计算。

函数极限的无穷大量的量级比较法与序列极限的情形比较类似，我们这里就不再赘述了。我们主要讨论e的方法和等价无穷小方法。

1.2.1 e的方法

在序列极限单元中我们介绍了特殊极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}. \tag{1}$$

实际上我们可以推广出关于e的函数极限（见课本49页例9）

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}. \tag{2}$$

函数极限(2)相比序列极限(1)的主要区别，在于函数极限(2)实际是一个双边极限。换言之当x逐渐减小趋于$-\infty$时，函数值$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$也应趋于e。特别地，极限(2)也可以写成下述形式

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=\mathrm{e}. \tag{3}$$

实际上极限(3)就是将极限(2)做换元$y=\frac{1}{x}$。对于部分题目，极限(3)的形式更适合解题。

与序列极限的情形类似，函数极限的e的方法实质上也是将待计算极限的函数值向e的极限(2)或(3)靠拢，然后计算多余的指数的极限。考虑下述例题。

例 1. 计算极限$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3}$。

Proof. 将极限如下变形

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right]^{\frac{x-3}{x-1}}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x-1}}=\mathrm{e}. \tag{4}$$

□

1.2.2 等价无穷小方法

等价无穷小方法方法是不定式解题中计算最简便、效果最显著的计算方法。我们曾经讨论过无穷大量的量级，实际上对于两个无穷小量而言我们也可以讨论其量级关系。如不加说明，本小节我们只考虑$x\to 0$的情形。首先是关于无穷小量阶的定义

定义 1.2. 设$f(x)$和$g(x)$是两个无穷小量，称$f(x)$是比$g(x)$更高阶的无穷小量，如果$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，记为$f(x)=o(g(x))$；称$f(x)$是与$g(x)$同阶的无穷小量，如果$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$，其中参数$A\in\mathbb{R}/\{0\}$；称$f(x)$是与$g(x)$等价的无穷小量，如果$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，记为$f(x)\sim g(x)$。

例如当$x\to 0$时x^2是比x更高阶的无穷小量，其特点是x^2比x收敛于0的速度更快。而无穷小量$\sin x$和x便是等价的无穷小量。无穷小量$\sin x$和$2x$是同阶的无穷小量，我们可以通过乘系数的方式将同阶的无穷小量化为等价的无穷小量。

以下无穷小量关系需要同学们牢记：

1.三角函数 $\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\tan x\sim x$。

2.对数和指数 $e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$。在此基础还有推论$a^x-1\sim x\ln a$，其中$a>1$。

3.反三角函数 $\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$。

4.其他 设参数$a\in\mathbb{R}$，$(1+x)^a-1\sim ax$。

其中等价无穷小$(1+x)^a-1\sim ax$可能不好理解，我们举例

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}, \tag{5}$$

因此无穷小量$\sqrt{1+x}-1$与无穷小量$\frac{x}{2}$等价。其余的几个无穷小量是直观切容易验证的。

关于等价无穷小的使用我们考虑下述例题

例 2. 计算极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x^2\right)}{3(\tan x)^2}$。

Proof. 不难验证等价无穷小关系$\sin\left(2x^2\right)\sim 2x^2$，结合$\tan x\sim x$，我们可以改写上述极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x^2\right)}{3\left(\tan x\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(2x^2\right)}{2x^2}\cdot\frac{2x^2}{3x^2}\cdot\frac{3x^2}{3(\tan x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}. \tag{6}$$

$\square$

实际上，式(6)的恒等变形可以形式地看作将原极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3(\tan x)^2}$分子中的项$\sin\left(2x^2\right)$替换为等价无穷小量$2x^2$，将分母中的项$3(\tan x)^2$替换为等价无穷小量$3x^2$。因此极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3(\tan x)^2}$与极限$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3x^2}$一样，均为$\frac{2}{3}$。

特别警告，等价无穷小变换只能在乘积式进行，因为其本质是式(6)中乘一项除一项的运算，而非直接的“替代”。我们来看如下的例子

例 3. 计算极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$。

Proof. 进行如下变形

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}. \tag{7}$$

$\square$

一种错误的做法是，根据等价无穷小关系$\sin x\sim\tan x\sim x$，直接将极限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$分子中的$\sin x$和$\tan x$都替换为$x$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0. \tag{8}$$

式(8)错误的原因是，虽然$\sin x\sim\tan x\sim x$，但是等价无穷小关系不能做减法，$\sin x-\tan x$也是一个无穷小量。而在正确的解答中我们明白$\sin x-\tan x$是与$-\frac{x^3}{2}$等价的“高阶”无穷小量。

最后我们指出e的方法本质上可以与等价无穷小方法等效化，我们以例1为例解释

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\exp\left[(x-3)\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\right], \tag{9}$$

其中符号$\exp(a)=\mathrm{e}^a$。由于$x\to+\infty$时$\frac{1}{x-1}$是无穷小量，所以有等价无穷小关系

$$\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\sim\frac{1}{x-1}, \tag{10}$$

于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3}=\exp\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x-1}\right]=\mathrm{e}. \tag{11}$$

1.2.3 洛必达法则简介

洛必达法则是计算不定式$\frac{\infty}{\infty}$和$\frac{0}{0}$极限最古典的方法，但是缺点是通常伴随大的计算量，而且很多时候并不有效，我们简要介绍。在期中考试中，由于我们没有学洛必达法则，如果使用洛必达法则计算错误或弄错了洛必达法则的使用条件，是得不到过程分的，故请谨慎使用。

我们简要介绍洛必达法则的思想（注：下述并不是严格的结论，想看洛必达法则严格结论请看课本）。考虑$\frac{\infty}{\infty}$和$\frac{0}{0}$型不定式极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$，这里$x_0$可以是实数或无穷远点，并且$f(x)$和$g(x)$均可导，并且满足$g'(x_0)\neq 0$和$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$收敛，那么

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{12}$$

特别地，加入极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$发散，通常不能说明极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$发散。

2 解题方法整理

计算函数极限的方法：

- $\delta-\varepsilon$语言
- 量级估计法
- e的方法
- 等价无穷小方法

3 习题

题 1. 回答下列问题

1.用$\varepsilon-\delta$语言证明$\lim_{x\to 0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$。

2.证明$\lim_{x\to 0+0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$不存在。

分析 本题讨论的函数$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$以及类似的$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$，是非常经典的病态函数，其在$x=0$以外点均有定义。在$x=0$处，极限$\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$和$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$发散，但是乘上无穷小量$x$后之后有$\lim_{x\to 0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$。在后续学习导数中，我们好会研究这个病态函数的性质。

Proof. **1.**我们首先整理命题，对于$\forall\varepsilon>0$，要找一个$\delta>0$，使得对一切$0<|x|<\delta$都有

$$\left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon. \tag{13}$$

由于$\left|x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|<|x|$，只要取$\delta<\varepsilon$，就可以保证式(13)对一切$0<|x|<\delta$成立。

2.证明函数极限发散主要是通过课本47页的定理5。取两个收敛于0的序列$x_n=\frac{1}{2n\pi}$和$y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$。那么有$\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)=1$和$\cos\left(\frac{1}{y_n}\right)=-1$。根据课本47页定理5，如果$\lim_{x\to 0+0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$收敛就蕴含着$\lim_{x\to 0+0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{y_n}\right)$，这导出矛盾。 □

题 2. 回答下列问题

*1.*证明$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0$，其中参数$a>1$，$k\in\mathbb{N}^*$。

*2.*问极限$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)\sqrt{x}}{\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)\arctan(5x)}$是否存在，如存在请计算极限的值，不存在请证明。

分析 本题主要展示了函数极限和量级有关的现象，例如第一个结论告诉我们当$x\to+\infty$时，a^x发散到∞的速度比x^k依然快得多。

Proof. **1.**为了证明，我们寻求放大待估计的量$\left|\frac{x^k}{a^x}\right|$，根据二项式定理当$x\geq k+1$时有

$$a^x=(1+(a-1))^{[x]}\geq\frac{[x]\cdot([x]-1)\cdots([x]-k)}{(k+1)!}(a-1)^k. \tag{14}$$

由此

$$0<\frac{x^k}{a^x}<\frac{x^k}{[x]\cdot([x]-1)\cdots([x]-k+1)}\cdot\frac{(k+1)!}{([x]-k)(a-1)^k}. \tag{15}$$

由于k是固定的，因此有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{[x]\cdot([x]-1)\cdots([x]-k+1)}=1. \tag{16}$$

另一方面我们还有$\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+1)!}{([x]-k)(a-1)^k}=0$，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{[x]\cdot([x]-1)\cdots([x]-k+1)}\cdot\frac{(k+1)!}{([x]-k)(a-1)^k}=0. \tag{17}$$

对式(15)用夹逼原理即可证明。

2.我们分别考虑各项。当$x\to+\infty$时有$\lim_{x\to+\infty}\arctan(5x)=\frac{\pi}{2}$，而$\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)$以及$\sqrt{x}$是无穷大量，我们知道$\sqrt{x}$具有更高的量级，因此$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)\arctan(5x)}=+\infty$，而三角函数$\sin\left(x^2\right)$则发散，但是是有界的。由此我们把极限拆成两个部分的乘积

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)\sqrt{x}}{\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)\arctan(5x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x}}{\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)\arctan(5x)}\cdot\sin\left(x^2\right)\right]. \tag{18}$$

由于$\sin\left(x^2\right)$在$[-1,1]$震荡，使得乘积式$\frac{\sqrt{x}}{\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)\arctan(5x)}\cdot\sin\left(x^2\right)$有时为0，有时很大，使得极限发散。严格来写，我们选择无穷大量序列$x_n=\sqrt{n\pi}$和$y_n=\sqrt{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$。我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x_n}}{\ln\left(1+x_n^{\frac{3}{2}}\right)\arctan\left(5x_n\right)}\cdot\sin\left(x_n^2\right)\right]=0. \tag{19}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{y_n}}{\ln\left(1+y_n^{\frac{3}{2}}\right)\arctan(5y_n)}\cdot\sin\left(y_n^2\right)\right]=+\infty. \tag{20}$$

根据课本47页定理5知极限发散。 □

题 3. 使用e的特殊极限计算：

1.$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3}$

2.$\lim_{x\to0}\left(\frac{x\mathrm{e}^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

分析 本题的两个小问都是1^∞的不定式极限，这类问题的通法是e的方法。

Proof. **1.**见前面的例题。

2.进行变形

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{x\mathrm{e}^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to0}\left(1+\frac{x\mathrm{e}^x-x\pi^x}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{x\mathrm{e}^x-x\pi^x}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{x\pi^x+1}{x(\mathrm{e}^x-\pi^x)}}\right]^{\frac{\mathrm{e}^x-\pi^x}{x(x\pi^x+1)}}\\ &= \exp\left[\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\pi^x}{x(x\pi^x+1)}\right].\end{aligned} \tag{21}$$

其中第三个等号成立依赖$\frac{x\mathrm{e}^x-x\pi^x}{x\pi^x+1}$是无穷小量。

接下来由于$\lim_{x\to0}(x\pi^x+1)=1$，因此

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\pi^x}{x(x\pi^x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\pi^x}{x}. \tag{22}$$

结合等价无穷小关系有

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\pi^x-1}{x}=\ln\pi. \tag{23}$$

由此

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\pi^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\pi^x-1}{x}=1-\ln\pi. \tag{24}$$

综上$\lim_{x\to0}\left(\frac{x\mathrm{e}^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{1-\ln\pi}=\frac{\mathrm{e}}{\pi}$。 □

题 4. 设$a_1,\cdots,a_p$是p个正实数，满足$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_p$。计算下面两个极限，并对比其区别

1.$\lim_{x\to0+0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}$

2.$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}$

分析 本题两问形式上类似，但是第一问是1^∞型不定式，第二问则与夹逼原理经典问题类型相似。

Proof. **1.**进行变形

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to0+0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}\\
=&\lim_{x\to0+0}\left[1+\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}-1\right)\right]^{\frac{1}{x}}\\
=&\lim_{x\to0+0}\left(\left[1+\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}-1\right)\right]^{\frac{p}{\left(a_1^x-1\right)+\left(a_2^x-1\right)+\cdots+\left(a_p^x-1\right)}}\right)^{\frac{\left(a_1^x-1\right)+\left(a_2^x-1\right)+\cdots+\left(a_p^x-1\right)}{px}}\\
=&\exp\left[\lim_{x\to0+0}\frac{\left(a_1^x-1\right)+\left(a_2^x-1\right)+\cdots+\left(a_p^x-1\right)}{px}\right].
\end{aligned}\tag{25}$$

根据等价无穷小性质有

$$\lim_{x\to0+0}\frac{a_j^x-1}{x}=\ln\left(a_j\right),\quad j=1,2,\cdots,p.\tag{26}$$

由此$\lim_{x\to0+0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{\sum_{j=1}^{p}\ln\left(a_j\right)}{p}}=\sqrt{\prod_{j=1}^{m}a_j}$。

2.用夹逼原理

$$\frac{a_1}{p^{\frac{1}{x}}}=\left(\frac{a_1^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}\le\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}\le\left(\frac{pa_1^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}=a_1.\tag{27}$$

由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_1}{p^{\frac{1}{x}}}=a_1.\tag{28}$$

因此本题极限为a_1。 □

题 5. 已知$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$，计算参数$a,b$的所有可能取值。

分析 本题的形式为分析$\sqrt{x^2-x+1}$的量级，减去其减去一个线性函数$ax+b$以后只剩下无穷小量。方法上看，处理根式问题最好的方法为分子有理化。在理解本题时，应首先体会本题的量级估计技巧，再去思考严格证明。

Proof. 进行分子有理化

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-a^2\right)x^2-(1+2ab)x+\left(1-b^2\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}.
\end{aligned}\tag{29}$$

注意到分子和分母都是无穷大量，为了极限为0分母的量级理应吧分子更大。而分子是量级不大于x的无穷大量，因此为了分子量级更小就必须有$1-a^2=1+2ab=0$。严格写出上述推断为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-a^2\right)x^2-(1+2ab)x+\left(1-b^2\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-a^2\right)x-(1+2ab)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}}. \tag{30}$$

其中分母极限$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}=1+a$，因此为了式(30)为无穷小量就必须$1-a^2=1+2ab=0$，得到$a=1,b=-\frac{1}{2}$或$a=-1,b=\frac{1}{2}$。

由于我们在推到过程中只断言了分母的量级不大于x，我们还需要把得到的解带回去验算。实际上利用分子有理化的方法，当$a=-1,b=\frac{1}{2}$有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}\right)=+\infty. \tag{31}$$

经过验证只有$a=1,b=-\frac{1}{2}$合理。 □

题 6. 使用等价无穷小方法计算下列极限，特别地，禁止使用洛必达法则

1.$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$

2.$\lim_{x\to1}\tan\left(\frac{\sin\pi x}{4(x-1)}\right)$

3.$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$，其中参数$a>0$

4.$\lim_{x\to0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}$

分析 本题使用等价无穷小方法，应注意思考如何使用等价无穷小方法减小计算量。此外等价无穷小方法一般在$x\to0$时使用比较方便，因此使用等价无穷小时可以先换元到$x\to0$的情况。

Proof. **1.**见例题3。

2.我们计算$\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{4(x-1)}$，首先换元$y=x-1$得

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{4(x-1)}=\lim_{y\to0}\frac{\sin(\pi y+\pi)}{4y}=\lim_{y\to0}\frac{-\sin\pi y}{4y}=\lim_{y\to0}\frac{-\pi y}{4y}=-\frac{-\pi}{4}. \tag{32}$$

由此$\lim_{x\to1}\tan\left(\frac{\sin\pi x}{4(x-1)}\right)=-1$。

3.本题为序列极限，我们将其改写为函数极限计算。换元$x=\frac{1}{n}$计算

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\lim_{x\to0+0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{33}$$

4.本题因为分子根号的存在难以直接使用等价无穷小，应首先进行分式有理化。

$$\lim_{x\to0+0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to0+0}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to0+0}\frac{1-\cos x}{2x(1-\cos\sqrt{x})}, \tag{34}$$

这里使用了$\lim_{x\to 0+0} 1+\sqrt{\cos x}=2$。

根据等价无穷小关系$1-\cos x\sim \frac{x^2}{2}$和$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{x}{2}$得

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1-\cos x}{2x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{x^2}{2}}{2x\cdot\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}. \tag{35}$$

□

题 7. 判断以下命题正误，若正确请证明，不正确给出反例，其中$f(x)$是在全体实数定义的函数

1.若对任意$a\in\mathbb{R}$均有$\lim_{n\to\infty} f(n+a)=0$，则必有$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$。

2.若对任意$a\in\mathbb{R}$均有$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{a}{n}\right)=0$，则必有$\lim_{x\to 0} f(x)=0$。

分析 本题的两个命题都是不一定成立的，反例的构造对于初学者来说可能有些晦涩。选择这道题的主要目的是让大家更直观的体会函数极限的性质，即便从许多序列$\{f(n+a)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$来看函数值收敛，也无法保证整体函数值的收敛。我们可以由函数极限收敛导出序列极限收敛，但很难从序列极限收敛“管中窥豹”得到函数极限收敛。

Proof. **1.**构造反例

$$f(x)=\begin{cases}1\quad, & x=n+\frac{1}{n},\quad n\in\mathbb{N}^*/\{1\},\\ 0 & \text{其他情况}.\end{cases} \tag{36}$$

也就是说f只在形如$x=n+\frac{1}{n}$的点值为1，其余为0。对于每一个$a\in\mathbb{R}$，点$\{n+a\}_{n\in\mathbb{N}^*}$至多只包含一个值为1的点，其余点值总为0，所以$\lim_{n\to\infty} f(n+a)=0$。而序列$\left\{n+\frac{1}{n}\right\}$趋于$+\infty$，且$\lim_{n\to+\infty} f\left(n+\frac{1}{n}\right)=1$，因此$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$不成立。

2.构造反例

$$f(x)=\begin{cases}1\quad, & x=\frac{1}{n\sqrt[n]{2}},\quad n\in\mathbb{N}^*,\\ 0 & \text{其他情况}.\end{cases} \tag{37}$$

也就是说f只在形如$x=\frac{1}{n\sqrt[n]{2}}$的点取1，其中p是素数，其余取0。利用相同的方法显然有$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$不成立。但是对于序列$\left\{\frac{a}{n}\right\}$，其中至多只包含一个形如$x=\frac{1}{n\sqrt[n]{2}}$的数，若不然设存在

$$\frac{a}{m_1}=\frac{1}{n_1\sqrt[n_1]{2}},\quad \frac{a}{m_2}=\frac{1}{n_2\sqrt[n_2]{2}}, \tag{38}$$

除法得

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{n_2}{n_1}\cdot 2^{\frac{1}{n_2}-\frac{1}{n_1}}. \tag{39}$$

由于$m_1,m_2,n_1,n_2\in\mathbb{N}^*$且$n_1\neq n_2$，因此有$2^{\frac{1}{n_2}-\frac{1}{n_1}}$是无理数，矛盾。因此序列$\left\{\frac{a}{n}\right\}$，其中至多只包含一个形如$x=\frac{1}{n\sqrt[n]{2}}$的数，故$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{a}{n}\right)=0$。 □

题 8. 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，设$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$，那么对于每个$a>0$都有$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(ax)}{f(x)}=1$。