北京大学高等数学B习题课讲义：预备知识

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后修改:2022.9

1 知识点详解

本节包括课本1.1节和1.2节的内容以及一些涉及高中大学衔接的补充内容。课本1.1节和1.2节的内容大致可以分为实数、不等式和函数三个部分，我们融入一些补充内容依次详解。

1.1 实数和不等式

本节将从高等数学最基本的概念：实数的定义出发，在此过程中增加读者对高等数学论证逻辑的理解。

有理数和无理数

高中时的有理数是如何定义呢？最基本的定义是整数和小数统称有理数，这里的小数指的是有限小数和无限循环小数；相应的，不在此列的无限不循环小数就被定义为无理数；而有理数和无理数则统称为实数。

在高等数学的范畴里，整数和小数的划分定义并不够清楚，为了明确区分有理数和无理数，我们对有理数做出如下严格定义：称数r为有理数，如果可以将r表示为$r=\frac{p}{q}$，其中p,q是两个互素的整数。自然，不能写成$r=\frac{p}{q}$形式的数r则被称为无理数。在此定义下，我们很容易证明有理数最基本的性质：运算的封闭性。给定两个有理数，其加减乘除运算的结果依然是有理数，例如

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}=\frac{q_1p_2+p_1q_2}{q_1q_2}. \tag{1}$$

有理数作为可以表示为分式的数，其小数形式必然是有限小数或无线不循环小数，

因此上述有理数的丁哟分式与我们通俗理解的有理数是相洽的。利用有理数的定义，我们可以判别一个数是有理数或不是有理数：

例 1. 证明$\sqrt{3}$不是有理数。

分析：本例使用的是证非有理数的标准方法，即使用整除性分析的方法。

Proof. 使用反证法，如果$\sqrt{3}$是有理数，那么可以写成$\sqrt{3}=\frac{q}{p}$，其中p,q是互素的两个整数。那么代入化简

$$p^2=3q^2. \tag{2}$$

上述等式说明p^2是3的倍数，即$3|p^2$。然而3是素数，如果p^2是3的倍数就必须p是3的倍数。再根据p是3的倍数，就另存在整数l使得$p=3l$，代入得到

$$3l^2=q^2. \tag{3}$$

所以这说明q^2也是3的倍数，亦说明q是3的倍数。这退出了p,q都是3的倍数，即p,q具有公因子3，与p,q互素矛盾。综上所述，$\sqrt{3}$不是有理数。 □

有理数和无理数统称实数，这样的定义实际是有逻辑缺陷的，因为无理数的定义是非无理数的实数。实际上，高等数学范畴里的实数的定义是比较复杂的，需要依赖一些抽象的数学技巧，这里我们略去实数的严格定义。但是作为直观理解实数的方式，我们认为实数与数轴上的每一个点一一对应，并且实数盖满了整个数轴。显然，每一个有理数都是数轴上的点，但是数轴上也有如$\sqrt{3}$这样不属于有理数的点，因此有理数并没有盖满整个数轴，而是留下了一些空隙。而无理数则补充了有理数留下的这些空隙，使得实数盖满整个数轴。

那么有理数和无理数是如何排布在数轴上的呢。给定有理数r_1和r_2，任意验证$\frac{r_1+r_2}{2}$是大小介于r_1和r_2的有理数。从数轴上看，任意两个有理数位置之前也存在有理数。实际上，有理数和无理数在数轴上是**稠密排布的**。任意两个实数之间都可以找到有理数和无理数：

例 2. 设a,b是两个实数，满足$a<b$，求证有理数r_1和无理数r_2满足$a<r_1,r_2<b$。

分析：本题的结论是实数稠密性定理。结论说明有理数和无理数在数轴的排布都非常稠密，好比一碗粥里的水和米粒无法分开。

Proof. 先证明(a,b)之间存在有理数。我们分为两种情况：
A.若a是有理数或b是有理数：那么必然存在足够大的$m\in\mathbb{N}$使得$\frac{1}{m}<b-a$，进一步$a<a+\frac{1}{m}<b$为符合要求的有理数。对于b是有理数的情况，可以采用相同方法。

B.若a,b都是无理数：若存在一个整数r使$a<r<b$，那么命题已证；若不存在一个整数r使$a<r<b$，那么存在一个整数$k\in\mathbb{Z}$使得$k\le a<b\le k+1$。接着取足够大的n使得$\frac{1}{n}<b-a$，然后将$[k,k+1]$分成n部分：

$$\left\{[k+\frac{i-1}{n},k+\frac{i}{n}]\mid i=1,2,\cdots,n\right\}. \tag{4}$$

由于$b-a>\frac{1}{n}$，那么a和b不能处于上述n个闭区间中的同一个，也就是a和b一定处于两个不同的闭区间：设$k+\frac{i-1}{n}<a<k+\frac{i}{n}<b$，那么$k+\frac{i}{n}\in[a,b]$是有理数。（注：由于我们假定$a,b$是无理数，因此$a,b$一定不位于区间交界）

再证明(a,b)之间存在无理数。利用之前的结论，我们可以取一个有理数r满足$\sqrt{2}a<\sqrt{2}b$。接下来$a<\frac{r}{\sqrt{2}}<b$，其中$\frac{r}{\sqrt{2}}$是无理数。若$\frac{r}{\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$，那么$\sqrt{2}=\frac{r}{\frac{r}{\sqrt{2}}}\in\mathbb{Q}$，这与事实相悖，因此$\frac{r}{\sqrt{2}}$是介于$a,b$的无理数。 □

最后，我们来讨论实数的性质。第一是运算的封闭性，实数的加减乘除仍然是实数；第二是实数的有序性，任意两个实数a,b的大小关系有且仅有三种：$a=b$，$a<b$或$a>b$；第三是包括交换律，结合律，分配律在内的运算性质；最后则是实数的完备性，其中完备性严格定义十分复杂，直观来说就是实数盖满了整个数轴没有空隙，在补充阅读部分我们会介绍实数完备性的一些表现方式，而后续许多定理的证明都要借用实数的完备性，届时我们会对实数的完备性加深理解。

绝对值和三角不等式

给定一个实数x，其绝对值的定义是

$$|x|=\begin{cases}x & ,x\ge 0,\\ -x & ,x<0.\end{cases} \tag{5}$$

根据上述定义，x的绝对值总是非负数。而绝对值的直观理解数轴上点x到原点的距离，在此基础绝对值$|x-y|$则可以理解为数轴上的点x和y的距离。**将绝对值理解为距离，是相当重要的数学思想。**

绝对值的性质蕴含许多不等式信息，我们总结如下

1.$|x|\ge 0$且$|x|=0$当且仅当$x=0$。

2.$|x|=|-x|$。

3.$|x|<y$当且仅当$-y<x<y$。

上述定理的证明都可以通过对绝对值取值分类完成，例如如果$|x|<y$，那么分两种情况：$x\ge 0$时$|x|<y$蕴含$0\le x<y$;$x<0$时蕴含$|x|<y$蕴含$-y<x<0$；综上$|x|<y$蕴含$-y<x<y$。

关于绝对值最重要的性质是下述**三角不等式**：

$$|x-y| \leq |x-z|+|y-z|. \tag{6}$$

上述不等式的证明可以通过对$|x-z|$和$|y-z|$的正负分类得到。由于绝对值的几何意义是数轴点的距离，因此上述不等式的集合意义上：对于数轴上三个点，点x和点z之间的距离加上点y和点z之间的距离之和大于等于点x和点y之间的距离。上述性质与平面三角形两边之和大于第三边的结论方程类似，只是三个点的分布从平面上的点退化为了数轴上的点（因此不等式可以取等）。这是上述不等式被称为三角不等式的主要原因。三角不等式在高等数学的证明题中非常常用。

平均值不等式

接下来介绍实数范畴下最为重要的不等式：平均值不等式。在高中范围内，我们主要学习的是二元的平均值不等式：给定实数a, b，它们的算术平均值$\frac{a+b}{2}$大于等于几何平均值$\sqrt{ab}$，即

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \tag{7}$$

上述二元平均值不等式的证明是非常简单的。

我们现在给出的平均值不等式是n元的平均值不等式：设有n个**正实数**$a_1, \cdots, a_n$（注：此前二元平均值不等式不要求a, b为正实数），定义它们的四种平均值：

1.调和平均值：$H_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$

2.几何平均值：$G_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}$

3.算术平均值：$A_n = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}$

4.平方平均值：$Q_n = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}}{n}$

这四种平均值的大小顺序为

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n, \tag{8}$$

其中每一个不等号取等的充要条件均为n个正实数相等。

平均值不等式的证明方法是通过数学归纳法或是排序不等式证明，这里就不赘述。我们需要提及，我们最常用的平均值不等式是$G_n \leq A_n$，即算术平均值不小于几何平均值，而另外两个不等号都是它的推论，所以当使用均值不等式证明时，通常要把我们需要证明的式子写成一个乘积不大于一个和式的形式。

利用平均值不等式可以证明许多重要的结论，我们仅举一例：

例 3. 设$n \in \mathbb{N}^*$，用平均值不等式证明$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$。

分析：为了利用平均值不等式证明，我们需要将左侧$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$化为一个乘积，右侧$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$化为一个和式，然后使用$G_n \leq A_n$证明。

Proof. 我们将$1+\frac{1}{n+1}$拆分为和式，然后使用平均值不等式：

$$1+\frac{1}{n+1}=n\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\geq(n+1)\times\left[\frac{1}{n^n(n+1)}\right]^{\frac{1}{n+1}}. \tag{9}$$

左右同算$n+1$次幂：

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\geq\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{10}$$

我们注意到，平均值不等式(9)不可能取等号。因为应用平均值不等式的对是n个$\frac{1}{n}$和一个$\frac{1}{n+1}$使用的。所以式(9)的大于等于号应该为大于号，就得到了题目所需的结论。 □

1.2 函数

高等数学是对现代数学的分支分析学的基础数学分析的介绍，数学分析的研究对象是以实数为定义域的函数。在我们给出了实数的定义后，我们将讨论函数这一经典数学概念的严格定义。

函数的定义和表达方式

在介绍函数之前，我们需要明确更为基础的数学概念：映射。考虑两个集合E和F，集合之间的**映射**是指集合之间的一种对应关系，对于每一个$x\in E$映射f将其对应到$y\in F$，我们就记$y=f(x)$，然后元素$x\in E$称为映射的**原像**，元素$y\in F$称为映射的**像**。这种对应关系是“一对一”的，即一个原像只能对应一个像。集合E称为映射的**定义域**，集合F的子集

$$f(E)=\{f(x)\in F:x\in E\}, \tag{11}$$

称为映射的**像集**。如果映射f的像集$f(E)=F$，即每一个$y\in F$都是某原像$x\in E$的像，则称f是**满射**；如果映射f像集的每一个元素$y\in f(E)$，都存在唯一的原像$x\in E$满足$y=f(x)$，则称f是**单射**；如果一个集合是单射也是满射，我们称为**双射**，双射说明集合E和F有整齐的对应关系。

这里需要指明**一一对应**这一概念，一些教材将一一对应等同于单射，也有一些教材将一一对应等同于双射，需要读者在读书时着重区分。课本上将一一对应等同于单射。

在映射的基础上，**函数**定义为数集到数集的映射，因此函数也自然继承了映射的定义域概念，函数映射的原像称为**自变量**，函数映射的像成为**因变量**。这里需要指明“变量”的概念，因为我们通常将函数理解为变化的过程，随着自变量x在定义域变化，因变量$f(x)$也在像集中变化，因此才有了“变量”的名字。

下面的问题是，如何表达一个函数f呢？最为分别的方式是写出f的表达式，例如$y=\cos x$是定义在全体实数$\mathbb{R}$上的函数，将每一个实数对应为其余弦值；另一种比较

直观的方式则是绘制函数的图像，平面上的点可以显示定义域及定义域每一个自变量对应的因变量，其中$y=\cos x$的凸显如图所示。不过需要指出的是，每一个函数都可以写出其表达式，但是部分函数的图像是画不出来的，其中最重要的例子是我们马上就要提到的狄利克雷函数和黎曼函数。

函数的例子

我们接下来举出几种函数的例子：

1.常数函数 $y=c$，其中c是不依赖自变量变化的常数。常数函数的定义域是全体实数。

2.幂函数 $y=x^a$，其中a可以是一切实数；当a取部分值时，幂函数的定义域可能取不到全体实数，例如$a=\frac{1}{2}$时$y=\sqrt{x}$的定义域是$[0,+\infty)$，而$a=-1$时$y=\frac{1}{x}$定义域是$\{x\neq 0\}$。我们常用的幂函数考虑的是a为有理数的情形。

3.指数函数 $y=a^x$，其中底数$a>0$且$a\neq 1$。指数函数的定义域是全体实数。

4.对数函数 $y=\log_a x$，其中底数$a>0$且$a\neq 1$。对数函数的定义域是$(0,+\infty)$。

5.三角函数 包括$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$等函数。

6.反三角函数 包括$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$等函数。

上述六类函数被称为**基本初等函数**，由这些基本初等函数加减乘除或复合而成的函数称为**初等函数**。高等数学范畴里几乎所有的函数都是初等函数，但是有两个例外：狄利克雷函数和黎曼函数。

狄利克雷函数是在全平面定义的分段函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & ,x\in\mathbb{Q},\\ 0 & ,x\notin\mathbb{Q}.\end{cases} \tag{12}$$

虽然$D(x)$的因变量只取$0,1$两值，但是由于实数轴有理数和无理数的稠密排布，$D(x)$的图像是两条稠密却有间断的点，无法画出其详细图像。

黎曼函数是在$[0,1]$定义的分段函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & ,x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\text{且}x\in(0,1)\\ 0 & ,x\notin\mathbb{Q}\text{或}x=0,1.\end{cases} \tag{13}$$

黎曼函数和狄利克雷函数通常作为某些命题的反例出现。例如在后续学习定积分的过程中，我们将说明狄利克雷函数不能定义定积分，但是看似比狄利克雷函数更复杂的黎曼函数却可以定义定积分。

函数的性质和反函数

本节我们讨论具有一定性质的函数。首先是函数的奇偶性，这类函数假设定义域关

于0有界，即为$\mathbb{R}$或区间$[-a,a]$等。如果$f(x)=f(-x)$对一切x成立，称$f(x)$为**偶函数**；如果$-f(x)=f(-x)$对一切x成立，称$f(x)$为**奇函数**。偶函数表现为函数图像关于y轴对称，奇函数表现为函数图像关于原点中心对称。

接下来是有界性。设函数$f(x)$的定义域是D，如果存在$M\in\mathbb{R}$使得$f(x)<M$（或$f(x)>M$）对一切$x\in D$成立，称函数$f(x)$**有上界**（或**有下界**），其中M使是$f(x)$的一个**上界**（或**下界**）。如果一个函数既有上界又有下界，称该函数为**有界函数**。有界函数的另一种等价定义是，存在$M>0$使得$|f(x)|<M$对一切$x\in D$成立。

接下来是单调性。设函数$f(x)$的定义域是$[a,b]$（注：单调性一般不考虑异常定义域情形），如果对于任意$a\le x_1<x_2\le b$都有$f(x_1)\le f(x_2)$（或$f(x_1)\ge f(x_2)$），称函数$f(x)$**单调递增**（或**单调递减**）。如果将$f(x_1)\le f(x_2)$改为$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$**严格单调递增**。不难验证，严格单调递增的函数是单射。

最后是反函数的概念，它与映射理论中的逆映射概念等同。给定定义域为D的函数$f(x)$，其像集为$f(D)\subset\mathbb{R}$。**反函数**是以像集$f(D)$为定义域的函数，它将每一个$y=f(x)\in f(D)$对应到$x\in D$，记为函数f^{-1}并满足$f^{-1}:f(x)\mapsto x$。实际上，反函数并不是对一切函数均有定义的，**反函数f^{-1}存在的充分必要条件是函数f为单射**。如果f不是单射，可能出现的情况是存在像集中的元素$y\in f(D)$存在两个原像x_1,x_2，亦即$f(x_1)=f(x_2)=y$，此时f^{-1}就必须将y同时对应到元素x_1,x_2，这种“一对二”的现象使得f^{-1}不再是映射，因此反函数的定义失效。

下面的例题介绍计算给定函数反函数的方法：

例 4. 计算函数$f(x)=\frac{2}{x}-\frac{x}{2}$的反函数，其中定义域$D=(0,+\infty)$。

分析：计算反函数f^{-1}首先要求出反函数的定义域$f(D)$，在此基础上给出$f(x)$到x的对应关系。

Proof. 当$x\in(0,+\infty)$时$f(x)$显然严格单调递减，由此得出像集$f(D)=(-\infty,+\infty)$。严格单调递减的函数是单射，由此反函数可以被定义。

对于给定的$y=f(x)=\frac{2}{x}-\frac{x}{2}$，求解反函数的实质是写出$x$关于$y$的表达式，由此得到以$y$为参数关于$x$的一元二次方程

$$x^2+2xy-4=0. \tag{14}$$

解得$x=-y\pm\sqrt{y^2+4}$，显然我们考虑的是$x>0$，因此反函数

$$f^{-1}(y)=-y+\sqrt{y^2+4}, \tag{15}$$

定义域$y\in(-\infty,+\infty)$。

为了统一记号，我们有时会将反函数的自变量名字也改为x，即$f^{-1}(x) = -x + \sqrt{x^2+4}$。 $\square$

三角函数的和差化积和积化和差公式

三角函数的公式，包括和差角公式、二倍角公式、诱导公式和万能公式都是高等数学课程默认读者已经熟练的。这里补充和差化积和积化和差公式。值得注意的是，和差化积和积化和差公式是不需要死记硬背的，要通过公式的本质理解公式。

首先是和差化积公式，其形式为：

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, &(16)\\
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, &(17)\\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, &(18)\\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. &(19)
\end{aligned}$$

从和差角公式的角度，和差化积的实质是将左侧关于x,y的三角函数拆成$\frac{x+y}{2}\pm+\frac{x-y}{2}$的形式，例如

$$\begin{aligned}
&\sin x + \sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)\\
&= \left(\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right) + \left(\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right)\\
&= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \qquad (20)
\end{aligned}$$

在记忆和差化积公式时，应当思考如何将左侧的三角函数的和差式拆分为关于$\frac{x+y}{2}$和$\frac{x-y}{2}$的三角函数式，拆分出的哪项被消去，另外一项就变成了我们需要的积。

此外是积化和差公式，也可以通过类似的方法理解为和差角公式的和差：

$$\begin{aligned}
\sin x\sin y &= -\frac{\cos(x+y)-\cos(x-y)}{2}, &(21)\\
\cos x\cos y &= \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}, &(22)\\
\sin x\cos y &= \frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2}, &(23)\\
\cos x\sin y &= \frac{\sin(x+y)-\sin(x-y)}{2}. &(24)
\end{aligned}$$

接下来我们来看一个积化和差公式在三角函数恒等式证明中的应用：

例 5. 证明恒等式$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$，并由此证明不等式$|\sum_{k=1}^{n}\cos kx| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$。

分析：本例借助积化和差将每一个$\cos kx$写成分母是差式的分式，并由此计算求和。本题的思路比较巧妙，但是结论是非常重要的，它说明形如$\sum_{k=1}^{n}\cos kx$的和式，虽然随着k的不同余弦值$\cos kx$符号各异，但是其和总是有界的。

Proof. 利用积化和差公式

$$\cos kx \sin\frac{x}{2} = \frac{\sin\left(\frac{(k+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(k-1)x}{2}\right)}{2}. \tag{25}$$

由于$x \neq 0$有

$$\cos kx = \frac{\sin\left(\frac{(k+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(k-1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{26}$$

根据不同的k求和

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{(k+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(k-1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{27}$$

由此可以得出不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \leq \frac{\left|\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}. \tag{28}$$

□

1.3 其他预备知识

本节将补充介绍一下高考数学中不过多涉及，但对高等数学十分重要的知识点。

裂项法

裂项法是使用于求和式计算的一种方法。例如经典的求和式计算

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}, \tag{29}$$

我们可以将求和式的每一项写成两项的差

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}. \tag{30}$$

我们注意到项$\frac{1}{(k-1)k}$加上的项和项$\frac{1}{k(k+1)}$减去的项相同，因此求和式可以相互抵消，因此

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \tag{31}$$

可以见到，裂项法的本质是将求和式的每一项裂解为两项相减，然后在求和式中使加减相消，使得求和式可以被计算。实际上，例题5的思路实际也是借助积化和差公式的裂项法：我们通过式(26)将项$\cos kx$裂解为两项之差，再通过式(27)加减抵消求和。

例 6. 使用裂项的方法证明$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$。

分析：由于无法直接对k^3裂项，我们首先将k^3拆解为多项，然后使用裂项法。

Proof. 我们首先对求和式$\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)$裂项

$$(k-1)k(k+1) = \frac{1}{4}\left((k-2)(k-1)k(k+1) - (k-1)k(k+1)(k+2)\right). \tag{32}$$

由此裂项得

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}\left((n-1)n(n+1)(n+2) - (-1)\cdot 0 \cdot 1 \cdot 2\right) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}. \tag{33}$$

注意到

$$k^3 = (k-1)k(k+1) + k, \tag{34}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1) + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{35}$$

□

通常而言，裂项法的拆解思路是比较巧妙的，因此我们不要求同学可以对任何式子都能想出具体裂项方法。但是遇到求和式计算的题目，要记住将裂项法铭记于心。

数学归纳法

数学归纳法是一种证明数学命题的特殊框架。设命题Γ是关于一切自然数n成立的，例如例题6的等式$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$就是关于一切$n \in \mathbb{N}$成立的命题。数学归纳法并不要求我们对一切$n$直接证明命题$\Gamma$，而是使用一种“递推”证明的框架，转而求证下面两件事：

1.归纳起点 命题Γ对$n = 0$成立。

2.递推性质 如果命题Γ对$n = k$成立，那么它对$n = k + 1$也成立。

在数学归纳法的框架下，我们从命题Γ对$n = 0$成立成立出发，先得出命题Γ对$n = 1$成立，然后是对$n = 2$成立，以此类推得出命题Γ对一切自然数n成立。

数学归纳法的一种变种是如下的第二数学归纳法，它将常规数学归纳法的递推性质稍作修改：

2'.第二递推性质 如果命题Γ对$0 \le n \le k$成立，那么它对$n = k + 1$也成立。

第二数学归纳法推出$n = k + 1$时命题不止依赖$n = k$独立性质，而是依靠$n \le k$每一个n值的结论。

我们来看下面例题：

例 7. 使用数学归纳法证明$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$。

分析：相较裂项法，数学归纳法的证明可能给人一种“耍赖”的感觉，但是数学归纳法也是符合数学逻辑的。

Proof. 对于$n=1$等式显然成立。我们假设等式对$n=k$成立，即

$$\sum_{t=1}^{k} t^3 = \left(\sum_{t=1}^{k} t\right)^2 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}, \tag{36}$$

那么我们可以计算

$$\sum_{t=1}^{k+1} t^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}. \tag{37}$$

等式对$n=k+1$成立，因此递推性质成立。 □

排列组合和二项式定理

我们从排列组合开始介绍，首先要明确排列组合是一种计数方式。

首先来看两个例子。考虑1到9这九个自然数，可以组成多少个各位不同的三位数？我们考虑三位数的三维为$\overline{ABC}$，百位A可以取1到9任意自然数，因此有九种选法；**在假定A已经确定的情况下**，十位B可以取1到9任意自然数中除了被选定的A以外的任意一个，所以B有八种选法；最后来看个位A，在A,B都确定的情况下C有七种选法。将这些选法组合在一起，我们得出各位不同的三位数$\overline{ABC}$有$9\times 8\times 7$中选法。特别地，我们记

$$A_9^3 = 9\times 8\times 7 = 504, \tag{38}$$

为**九种选择的三元排列**，简称**排列**。一般地，对于$m\le n$，我们有排列的严格定义为

$$A_n^m = n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1). \tag{39}$$

第二个例子，我们考虑一个袋子里装有九个小球，分别写有1到9这九个自然数，我们连续抽出三个小球可能的结果有多少种？我们依然假设抽出的三个小球的序号依次为(A,B,C)，与上一例最大的不同，在于**抽出的顺序不受影响**，也就是说我们抽出的小球依次为$(1,2,3)$或$(1,3,2)$，结果都是序号为1到3的三个小球，两种情况必须视为一种；反观选取三位数$\overline{ABC}$的情形，由于三位数的个位十位百位具有相同的意义，因此$(1,2,3)$和$(1,3,2)$不能视为一种情形。处理这一例子，我们在算出(A,B,C)的选出可能有$A_9^3=504$种前提下，还需排除一些计算重复的情况：

以抽取序号为1到3的三个小球这种情况为例，对应的(A,B,C)的情况有六种，包括$(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)$，这相当于三种选择的三元排列，因此小球抽取的可能数要在$A_9^3=504$基础上除以$A_3^3=6$，记

$$C_9^3=\frac{A_9^3}{A_3^3}=\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}=84, \tag{40}$$

为**九种选择的三元组合**，简称**组合**。一般地，对于$m\leq n$，我们有组合的严格定义为

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)}{m\times(m-1)\times\cdots\times 1}. \tag{41}$$

排列组合的一个重要应用是二项式定理，它计算的是多项式$(x+y)^n$的展开式。多项式$(x+y)^n$的展开式包含许多关于x,y的n次单项式，如$x^n,x^{n-1}y$。二项式定理分析各单项式的系数，先把$(x+y)^n$写成连乘形式

$$(x+y)^n=(x+y)\times(x+y)\times\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{n\text{个}}\times(x+y). \tag{42}$$

计算$(x+y)^n$的展开式的标准方法是将n项乘开，这样直接计算是过于麻烦的。但是我们可以看到，展开式的项x^n系数一定是1，因为只有当乘式中每一项乘数均为x式展开式才能呈现x^n。借助这样的视角，我们可以把展开式问题看出排列组合问题：对于单项式x^my^{n-m}，其乘数中有m项选择了x而$n-m$项选择了y，每一种符合要求的选择都会为x^my^{n-m}的系数贡献1。在n个乘式中选择m个乘式乘x，这是一个组合问题，选择的可能性为C_n^m种，由此单项式x^my^{n-m}的系数为C_n^m。总结为下述二项式展开定理

$$(x+y)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^mx^my^{n-m}. \tag{43}$$

取$y=1$时我们也有二项式展开的简单形式

$$(1+x)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^mx^m. \tag{44}$$

2 扩展延伸

2.1 扩展题概览

部分扩展延伸题难度较大综合性较强，请结合个人情况选择性阅读。

- 扩展习题1：中等难度，证非有理数的有趣技巧。
- 扩展习题2：中等难度，裂项法的应用。
- 扩展习题3：中等难度，三角函数与数形结合综合题。
- 扩展习题4：中等难度，反函数综合题。

2.2 扩展习题

题 1. 证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}$不是有理数。

分析：除了使用定义证明非有理数，本题借助了有理数运算的封闭性质完成证明。

Proof. 设$r=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，平方得到$r^2=5+2\sqrt{6}$。

我们用定义的方法证明$\sqrt{6}$不是有理数：如果$\sqrt{6}$是有理数，即存在互素正实数p,q使得$\sqrt{6}=\frac{p}{q}$，那么

$$p^2=6q^2. \tag{45}$$

得知p是偶数，且p是3的倍数，由此p是6的倍数。写出$p=6t$，得到

$$6t^2=q^2, \tag{46}$$

由此同样有q是6的倍数，这与p,q互素矛盾。

由于$\sqrt{6}$不是有理数，那么$r^2=5+2\sqrt{6}$不是有理数，所以$r=\sqrt{2}+\sqrt{3}$不是有理数：因为如果r是有理数会推导r^2是有理数。 □

题 2. 求与$\sum_{k=1}^{2022}\frac{(k-1)2^k}{(k+1)!}$最接近的正整数

分析：这道题的裂项想法本身过于巧妙，希望同学们掌握裂项的思想。

Proof. 我们考虑如下对$\frac{(k-1)2^k}{(k+1)!}$裂项；

$$\frac{(k-1)2^k}{(k+1)!}=\frac{2^k}{k!}-\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}, \tag{47}$$

将上面的式子连加得

$$\sum_{k=1}^{2022}\frac{(k-1)2^k}{(k+1)!}=\frac{2^1}{1!}-\frac{2^{2023}}{2023!}=2-\frac{2^{2023}}{2023!}. \tag{48}$$

注意到2^{2023}是2023个2相乘，2023!是前2023个自然数相乘，因而后者比前者要大很多，所以与$\sum_{k=1}^{2018}\frac{(k-1)2^k}{(k+1)!}$最接近的整数是2。 □

题 3. 求对于实数x，$2\sqrt{5-4\cos x}+\sqrt{6+4\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ 的最小值。

分析：本题介绍了利用三角函数几何意义计算函数极值的方法。

Proof. 我们首先对本题的目标函数做化简，其中利用了$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$的性质：

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{5-4\cos x} + \sqrt{6+4\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} \\ = \quad & 2\sqrt{5-4\cos x} + 2\sqrt{\frac{3}{2}+\cos x - \sin x} \\ = \quad & 2\sqrt{(\cos x - 2)^2 + \sin^2 x} + 2\sqrt{\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2}. \end{aligned} \tag{49}$$

用$(\cos x, \sin x)$表示单位圆（直角坐标系上以原点为圆心1为半径的圆称为单位圆），那么表达式$\sqrt{(\cos x-2)^2+\sin^2 x}$表示点$(\cos x, \sin x)$到点$(2, 0)$的距离，而表达式$\sqrt{\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2}$表示点$(\cos x, \sin x)$到点$(-0.5, 0.5)$的距离，那么根据数形结合的方法，使

$$\sqrt{(\cos x-2)^2+\sin^2 x} + \sqrt{(\cos x+\frac{1}{2})^2+(\sin x-\frac{1}{2})^2} \tag{50}$$

函数值极小的$(\cos x, \sin x)$一定位在经过$(2, 0)$和$(-0.5, 0.5)$的线段与单位圆的交点上，由此函数的最小值是点$(2, 0)$到点$(-0.5, 0.5)$的距离$\frac{\sqrt{26}}{2}$，那么原题最小值$\sqrt{26}$。 □

题 4. 求参数a, b使得函数$f(x) = \ln(a + b\mathrm{e}^x)$的反函数为自身。

分析：反函数为自己的函数，除了函数与其反函数对应关系相同外，我们还要保证函数和其反函数具有相同的定义域，因为函数的组成要素除了对应关系还有定义域。

Proof. 设f的定义域是D。如果f的反函数是自身，即$f = f^{-1}$，根据反函数定义有

$$f(f(x)) = x, \forall x \in D. \tag{51}$$

代入得到

$$\ln\left[a + b\mathrm{e}^{\ln(a+b\mathrm{e}^x)}\right] = x, \forall x \in D. \tag{52}$$

化简得到

$$(1-b^2)\mathrm{e}^x = a(b+1), \forall x \in D, \tag{53}$$

是关于e^x的一元一次方程，为了方程对一切定义域里的x成立，必须$b^2 = 1$且$a(b+1) = 0$，这里就可以分情况讨论：

1.如果$b = 1$，那么必须$a = 0$，此时$f(x) = x$，函数f和f^{-1}的定义域都是$\mathbb{R}$。

2.如果$b = -1$，还需要验证f与f^{-1}是否具有一致的定义域。为了f定义域不是空集，必须$a > 0$。对于一个$a > 0$，$f(x)$写作

$$f(x) = \ln(a - \mathrm{e}^x), \tag{54}$$

定义域$D = (-\infty, \ln a)$，而像集$f(D)$也是$(-\infty, \ln a)$，而$f(D)$正是f^{-1}的定义域。

综上参数有另类取值：$b = 1, a = 0$或$b = -1, a > 0$。 □

3 补充阅读

补充阅读主要着力于介绍更现代数学观点下的微积分概念，供感兴趣的读者参考。

3.1 自然数的定义和Peano's axioms

“道生一，一生二，二生三，三生万物”。在我们出生的时候，本不知道这个世界有“数”的概念，后来我们通过数数，知道了这个世界上有从0开始的自然数。小学时我们知道了还有负数，为此我们对数的理解扩展到相反数。后来我们认识到有理数，它的定义是互素整数的商。而今天的高等数学课大家有认识到了实数，从数轴上来说，实数中的“无理数”添补了“有理数”留下的空隙。

从严格的数学角度，自然数从无到有也依赖于下述严格定义：

定义 3.1. *(Peano's axioms)自然数通过以下五条公理定义：*
1. *存在一个自然数0。*
2. *对任意自然数a存在其后继数a^*。*
3. *0不是任何自然数的后继数。*
4. *如果a和b的后继数都是c，那么$a = b$。*
5. *设S是自然数的一个子集，满足$0 \in S$以及对任意$a \in S$均有其后继数$a^* \in S$，那么$S = \mathbb{N}$。*

Peano's axioms定义自然数为以0起点通过后继数反复相连得到的一个“链”。也正因如此，我们可以利用数学归纳法的递推思想证明对一切自然数都成立的命题。

在如此抽象的自然数系统下如何形成运算法则呢？Peano将自然数的加法运算定义为两个自然数到一个自然数的映射$+ : a, b \mapsto a + b$。即对两个数a, b存在和$a + b$作为映射的像。加法运算满足下述两条法则：
1. $0 + m = m$对一切$m \in \mathbb{N}^*$成立。
2. $n^* + m = (n + m)^*$对一切$n, m \in \mathbb{N}^*$成立。

仅用上述两条性质，我们可以证明$1 + 1 = 2$：

$$1 + 1 = 0^* + 1 = (0 + 1)^* = 1^* = 2. \tag{55}$$

根据自然数，很容易定义全体整数。从整数，我们也可以有理数。从抽象代数上看，有理数是整数环的分式扩张域。我们见到，想严格定义最基本的数学概念有理数的定义，也依赖了抽象的公理。

3.2 从有理数到实数

从有理数到实数的过程是复杂的，其基本思路都是通过“填满”有理数在数轴上留

下的“间隙”。这里我们简要给出两种从有理数定义实数的方式。

Dedekind分割原理

Dedekind分割的主要思路是用集合表达实数，有集合的运算表达实数的运算。具体思路依赖有理数集$\mathbb{Q}$是的Dedekind分割(S,T)，定义是

定义 3.2. 称有理数集$\mathbb{Q}$的子集合组(S,T)为一组***Dedekind*分割**，如果满足如下三个条件：
1.S,T都不是空集。
2.$\mathbb{Q}=S\cup T$。
3.对于$\forall x\in S$和$\forall y\in T$都有$x<y$。由此自然有S,T不交。
其中S被称为**左集**，T被称为**右集**。

直观来看，Dedekind分割将$\mathbb{Q}$分为大小两部分，也即将数轴劈分为左右两段：左集数较小而右集数较大。

接下来，我们按照左右集的特性将Dedekind分割分为三类：
1.S中存在最大有理数，T中不存在最小有理数，例如$S=\{x\leq 2\},T=\{x>2\}$。
2.S中不存在最大有理数，T中存在最小有理数，例如$S=\{x<2\},T=\{x\geq 2\}$。
3.S中不存在最大有理数，T中也不存在最小有理数，例如$S=\{x^2\leq 2\}\cup\{x\leq 0\},T=\{x^2>2\}\cup\{x\geq 0\}$。

显然前两种情况Dedekind分割刚好划分在数轴的有理数点2上，只是两种情况中2分别位于左集和右集，我们称这两种情况为**有理分割**，切分点2则称为**中介点**。第三种情况虽然也是Dedekind分割，只是切分的中介恰好不在有理数点上（由于我们现在尚未引入无理数的概念，这样的分割便处于有理数的空隙间），因此不存在中介点。我们称第三章Dedekind分割为**无理分割**。

在Dedekind的实数体系下，有理数的每一种Dedekind分割对应一个实数，有理分割对应有理数而无理分割对应无理数。部分同学可能会迷惑，现在的实数好像不是一个数而是一组集合。因此，Dedekind在Dedekind分割上引入了诸多算术概念：
1.称分割(S_1,T_1)和(S_2,T_2)相等，如果$S_1=S_2$。
2.称分割(S_1,T_1)小于(S_2,T_2)，如果$S_1\subsetneqq S_2$。
3.设分割(S_1,T_1)和(S_2,T_2)的加法运算结果是分割(S,T)，其定义为

$$S=\{x+y:x\in S_1,y\in S_2\},\tag{56}$$

注意S_1和S_2本身都是有理数的子集，而有理数的加法运算是已经有定义的。

柯西列

Dedekind分割的定义依赖了有理数的大小关系，因此难以推广到更抽象的算术系统。柯西列则是另一种从有理数推广实数的方法，我们首先给出柯西列的定义：

定义 3.3. 称有理数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$为**柯西列**，如果对于$\forall \varepsilon > 0$均存在$N \in \mathbb{N}^*$，使得$|a_n - a_m| < \varepsilon$对于一切$m, n > N$均成立。

我们举个直观的例子，考虑练习射箭的过程，我们希望通过反复训练使得箭可以正中靶心，然而一开始我们总是不熟练的，会射出偏离靶心的结果。随着练习次数的增加，箭离靶心越来越近，同时每两次射击的结果也离的越来越近。我们设a_n为第n次射击的结果，随着射击的推移，我们可以找到一个时刻N，当次数$n, m > N$以后，两次射击的结果a_n, a_m已经十分接近了，此时射击结果序列$\{a_n\}$就是一个“柯西列”。而射击的结果向着一个靶心，而柯西列的函数值也自然向着一个点聚拢。例如有理数柯西列$a_n = \frac{1}{10^n}$，其值便向0聚拢；而根据无理数$\sqrt{2}$的无限不循环小数展开定义逼近$\sqrt{2}$的有理数柯西列：

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1.4, \quad a_2 = 1.41, \quad a_3 = 1.414, \cdots \tag{57}$$

由此可见，虽然柯西列是有理数列，但是柯西列聚拢向的点可以是有理点也可以不是有理点。于是我们就将有理数柯西列对应到实数。

3.3 实数的完备性

我们在知识点详解部分曾经指出了实数的多种性质，其中运算封闭性、有序性和各类运算性质是比较好理解的。实数的完备性则是实数另一条重要性质，但是完备性的严格定义是比较复杂的，我们只从直观的角度理解完备性。直观来说，完备性说明实数可以将数轴每一个点填满，从实数的Dedeking分割原理可以显见诸多Dedekind分割使得我们可以在实数轴任意点定义实数。

实际上，虽然我们无法给出实数完备性的严格定义，但是实数完备性却可以在诸多方面表现出重要的数学现象，这就是著名的实数五大定理：

1.确界存在原理

2.闭区间套定理

3.有限覆盖定理

4.Weierstrass极限点原理

5.柯西收敛准则

这五个定理是实数完备性在各个角度的表现形式，五个定理也是等价的。本节我们介绍确界存在原理。

在此之前我们明确确界的概念：考虑某个有上界的集合，其上界必然是不唯一的，其上确界就定义为最小的上界。然而确界的严格定义是依赖ε语言的，这类ε语言是属于高等数学特有的语言，虽然严谨但不直观。

定义 3.4. 考虑实数集A，其上确界M（或下确界m）的定义是如下两条：
1.M是A一个上界（m是A一个下界）。
*2.*对于$\forall\varepsilon > 0$都存在一个$x \in A$使得$x > M - \varepsilon$（或$x < m + \varepsilon$）。
上确界记为$M = \sup(A)$（或下确界记为$m = \inf(A)$）。

在上述定义的框架下说明，由于$M - \varepsilon$都不是A的上确界，由此上界M就成为A最小的一个上界，即上确界。因此抽象的ε语言也说明了上确界是最小的上界。另外当集合A不存在上界时，补充定义上确界为$+\infty$。

在此情况下，确界存在原理说明了实数的如下性质

定理 3.1. 任意实数集都存在实上确界和实下确界。

确界存在原理可以通过实数的完备性证明。

确界存在原理从何种方面体现了实数的完备性呢？我们假定A是有界实数集，我们希望寻找A的最小上界，即上确界。我们采用动态寻找的方法，假定M是A的一个上界，我们逐渐将M减小，并验证得数是否仍为A的上界；这就好比我们有一把尺子，它又M处出发并逐渐向数轴负方向平移，知道与集合A中的点相交便得到A的上确界。这样寻找上确界的想法看似是完美的，但是会遇到一个问题：当某一刻真的在数轴上找到了最小的上界，该点对应的会不会不是实数？由于实数完备性告诉我们，数轴每一个点都对应了实数，所以这样“推尺子”的方法才一定能找到集合A的“边界”，即上确界。