北京大学高等数学B习题课讲义：序列极限

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后修改：2022.9

1 知识点详解

想要深入理解序列极限理论，必须要从多个层面思考：首先是序列极限的严格$\varepsilon-N$定义，抽象的定义蕴含了深刻的数学逻辑；其次是如何用直观的语言理解序列极限的意义；最后是掌握求解序列极限的丰富方法。

1.1 极限的严格定义

我们首先写出序列极限的严格定义

定义 1.1. 考虑序列$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$，如存在一个实数l，使得对于$\forall\varepsilon>0$，总存在$N\in\mathbb{N}$，使得$|a_n-l|<\varepsilon$对于一切$N>n$成立，则称序列$\{a_n\}$**收敛**，实数l称为序列$\{a_n\}$的**极限**，记为$\lim_{n\to\infty}a_n=l$。

序列极限的严格定义使用了$\varepsilon-N$语言，但是一句话概括序列极限的概念是**"序列$\{a_n\}$的值向l聚拢"**。为了明确序列极限的定义，我们考虑如下几点：

1.如何判定序列的值a_n向l的聚拢呢？最好的方法是通过$|a_n-l|$的值，它相当于a_n的值与l的距离，如果$|a_n-l|$越小，自然a_n离l越近。

2.如图所示，给定$\varepsilon>0$，当a_n处在区间$(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$时，我们就认为$a_n$已经靠近了$l$。在序列极限的定义逻辑下，我们要求当$n$足够大时有$a_n\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$。

3.如何刻画n足够大这一条件呢？在序列极限的定义逻辑下，对于任意$\varepsilon>0$我们都询问何时a_n处在区间$(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$，并找到一个时刻$N$此后$a_n(n>N)$就完全进入区间$(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$中。由此$N$是依赖$\varepsilon$的，并且对于$\forall\varepsilon>0$我们都要找到时刻$N$才能证明序列收敛。

接下来的部分我们展示如何使用极限的定义证明极限

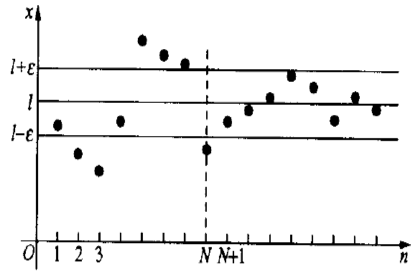

图 1: 序列极限收敛定义的示意图。

例 1. 使用定义证明极限$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}=0$。

分析：我们的核心思路时对每个ε寻找N，使得$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}-0\right|<\varepsilon$对$n>N$成立。为了分析不等式$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}-0\right|<\varepsilon$，我们通过式(1)将$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}-0\right|$适当放大，最终通过$\varepsilon$表达了符合条件的$N$。

Proof. **步骤1：叙述$\varepsilon-N$语言的命题** 我们只要证明，对于$\forall\varepsilon>0$，存在一个$N\in\mathbb{N}^*$（依赖ε）使得对于$\forall n>N$ 都有$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}-0\right|<\varepsilon$。换言之，**我们要对每一个$\varepsilon>0$找到属于它的$N$。**

步骤2：适当放大待估计的式子 为了使得$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}-0\right|<\varepsilon$对足够大的$n$成立，我们适当放大待估计的式子$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}-0\right|$，以方便我们寻找合适的$N$。由于

$$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}\right|<\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n}\right|<\left|\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right|,\tag{1}$$

此时为了$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}-0\right|<\varepsilon$成立，只需要使得$n$满足$\left|\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right|<\varepsilon$即可。

步骤3：写出N的表达式 这一步要根据第二步的估计式(1)，反解正整数N满足的条件。为了$\left|\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right|<\varepsilon$对一切$n>N$成立，取$N$满足$\left|\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}}\right|<\varepsilon$，即$N>\frac{1}{\varepsilon^3}$。由于$N$是正整数，我们令$N=\left[\frac{1}{\varepsilon^3}\right]+1$。

步骤4：完成$\varepsilon-N$语言命题结论 根据前面的分析，重写步骤1中的命题。我们取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon^3}\right]+1$，对于一切$n>N$有$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}-0\right|<\varepsilon$。原命题得证。

□

使用定义证明极限时，必须时刻把握证明的主旨思路：**对于每一个$\varepsilon>0$寻找符合条件的N。**

发散是收敛的反面，那么我们如何叙述序列发散的定义呢？收敛的定义依赖对每个$\varepsilon > 0$都存在N满足聚拢条件，反过来发散的定义便是存在某$\varepsilon > 0$使得满足聚拢条件的N不存在。发散严格定义是

定义 1.2. 考虑序列$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$，如对任意实数l，都存在某$\varepsilon > 0$，使得对$\forall N \in \mathbb{N}$，都存在$n > N$使得$|a_n - l| > \varepsilon$成立，则称序列$\{a_n\}$**发散**。

发散的直接理解仍然很复杂，我们不妨来看两个发散序列的例子，增强我们对于发散和收敛的直观理解：

1.序列$a_n = (-1)^n$，这一序列以-1和1交替，其序列值始终“震荡”，不会向任意点“聚拢”，因此是发散序列。

2.序列$b_n = \mathrm{e}^n$，这一序列的值不断增大并趋向无穷，不会向任意实数点聚拢，由此不收敛。

在上述两例中，序列a_n发散的原因是序列值反复震荡，这显然与收敛对应的聚拢性质不符。b_n的序列值并没有震荡，而是趋向了无穷。无穷并不是实数值，它是数轴无限延伸的点，在极限的理论中，我们称为**无穷远点**，数轴向正向前进的无穷远点记为$+\infty$，负向则记为$-\infty$。向b_n这种函数值趋向正无穷原点$+\infty$的序列我们也称为**广义收敛**序列。（注：广义收敛视为发散的一种情况）

广义收敛于$+\infty$的序列也被称为**无穷大量**，对应的收敛于0的序列被称为**无穷小量**。

1.2 计算序列极限的方法

在上一节我们学习了极限的定义，但是极限定义的$\varepsilon - N$语言特别复杂，我们不期望用$\varepsilon - N$语言计算各种极限。本节介绍一些脱离$\varepsilon - N$语言来计算极限的技巧，在解题中是格外重要的。

夹逼原理

夹逼原理是序列极限计算方法中最灵活的。

定理 1.1. 如果三个序列$\{a_n\}, \{b_n\}, \{\{c_n\}$满足

$$b_n \leq a_n \leq c_n, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

如果序列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$都收敛且极限同为实数l，那么$\{a_n\}$也收敛于l。

我们在此介绍夹逼原理三个最为典型的题目，以后做题可以以这三道题的解题思路为模板。

例 2. 证明极限$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mathrm{e}^n}=0$。

Proof. 对e^n用二项式展开定理，并且$[1+(\mathrm{e}-1)]^n$展开式的二次项

$$\mathrm{e}^n=[1+(\mathrm{e}-1)]^n\geq\frac{n(n-1)}{2}(\mathrm{e}-1)^2,\, n\geq 2,\, n\in\mathbb{N}^*. \tag{3}$$

由此

$$0\leq\frac{n}{\mathrm{e}^n}\leq\frac{2n}{n(n-1)(\mathrm{e}-1)^2}=\frac{2}{(\mathrm{e}-1)^2(n-1)},\, n\geq 2,\, n\in\mathbb{N}^*. \tag{4}$$

由于$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(\mathrm{e}-1)^2(n-1)}=0$，所以$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mathrm{e}^n}=0$。 □

例 3. 证明极限$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$。

Proof. 设$h_n=\sqrt[n]{n}-1$，那么$(1+h_n)^n=n$，对左式使用二项式定理并取其中n的二次项

$$\frac{n(n-1)}{2}h_n^2\leq(1+h_n)^n=n. \tag{5}$$

解得

$$h_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}},\, n\geq 2,\, n\in\mathbb{N}^*. \tag{6}$$

又$\sqrt[n]{n}>1$因此

$$0<h_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}},\, n\geq 2,\, n\in\mathbb{N}^*. \tag{7}$$

夹逼定理得证$\lim_{n\to\infty}h_n=0$。

□

例 4. 计算极限$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+\cdots+2021^n}$。

Proof. 对根号内不等估计

$$2021^n\leq 2^n+3^n+\cdots+2021^n\leq 2020\cdot 2021^n,\, n\in\mathbb{N}^*. \tag{8}$$

由此

$$2021\leq\sqrt[n]{2^n+3^n+\cdots+2021^n}\leq 2021\sqrt[n]{2020},\ n\in\mathbb{N}^*. \tag{9}$$

由于$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2020}=1$，由夹逼原理

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+\cdots+2021^n}=2021. \tag{10}$$

□

我们指出，在实际解题中，可以将$\{b_n\}$和$\{c_n\}$之一取成常数列。例如在例题2，我们通过式(4)使用夹逼原理，对应的b_n取为恒0常数列，而恒零常数列极限显然为0。总得来说，夹逼原理通常结合对序列的代数变形和不等估计，技巧是比较多变的，需要同学们通过做题积累。但是上述三道题是夹逼原理应用中最经典的。

极限的四则运算和不定式的概念

对于两个收敛的序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，在一定条件下序列四则运算后的新序列的极限等于序列极限四则运算的结果。假定序列$a_n \to a$和$b_n \to b$，那么我们有$a_n \pm b_n \to a \pm b$，$a_n b_n \to ab$。假定$b \neq 0$还有$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$。利用四则运算计算极限是解决极限问题最基本的方法，如下述例题：

例 5. 计算极限$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-2}{n^2+1}$。

Proof. 我们首先进行代数变形

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}. \tag{11}$$

根据极限加法运算法则有

$$\lim_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2} = 2 \quad , \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n^2} = 1. \tag{12}$$

由此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 2. \tag{13}$$

□

然而如果序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的极限是某些取值，例如是0或∞（讨论广义收敛的情形），它们的四则运算序列的极限值是不确定的，这样的情况称为**不定式**。例如当$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的极限都是无穷大量，它们的商极限$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$的值不确定，如

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = 0, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = +\infty. \end{cases} \tag{14}$$

显然$n+1, \mathrm{e}^n, \sqrt{n}$都是无穷大量，但是它们于$n$作商的极限都是$\frac{+\infty}{+\infty}$型的极限，这些极限却具有不同的取值。可以说，不定式是使得我们不能简单地利用四则运算法则计算各种极限的本质难点，我们整个高数上册的内容都是在与不定式极限作斗争，包括著名的洛必达法则、泰勒公式等技巧都是为处理不定式发明的。

常见的不定式包括

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad (+\infty)+(-\infty), \quad 0\cdot\infty, \quad 1^\infty. \tag{15}$$

这里∞和0分别代表无穷大量序列和无穷小量序列。不过需要指出，并不是涉及∞的极限式都是不定式，例如

$$\frac{a}{\infty} = 0, \quad (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty, \tag{16}$$

上式中a代表一个以实数作为极限值的序列。我们指出，在式(15)的不定式中，存在含幂运算的不定式1^{∞}。我们将在下一节特殊极限部分着重说明。

此外，我们还可以证明，如果序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$收敛，那么序列通过指数、幂、三角函数等运算得到的新序列仍然收敛，并且新序列的极限等于序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$极限运算的结果。下述命题的证明需要借助连续性理论，不过我们提前给出：

1.设$a_n \to a$，$b > 0$，那么$b^{a_n} \to b^a$。

2.设$a_n \to a$，$b > 0$且$b \neq 1$，$a_n, a > 0$，那么$\log_b a_n \to \log_b a$。

3.设$a_n \to a$，$a_n, a > 0$，那么$(a_n)^b \to a^b$。

4.设$a_n \to a$，那么$\sin a_n \to \sin a$。

5.设$a_n \to a$和$b_n \to b$，其中$a_n > 0$，$a > 0$和b都是有限数，那么$(a_n)^{b_n} \to a^b$。

无穷大量的量级估计

量级估计法是一种直观分析无穷大量的比值不定式极限$\frac{\pm\infty}{+\infty}$的方法。

我们考虑五个无穷大量$a_n = n^n$，$b_n = n!$，$c_n = \mathrm{e}^n$，$d_n = n$，$e_n = \ln n$。虽然五个序列都广义收敛于$+\infty$，这五个序列趋于无穷的速度实际并不一致。通过图像的观察告诉我们，这五个序列向无穷发散的速度是递减的，其中a_n发散速度最快，e_n发散速度最慢。我们认为向无穷发散越快的无穷大量具有更高的量级，直观地我们可以总结下述量级估计：

$$\ln n \ll n^a \ll \mathrm{e}^n \ll n! \ll n^n, \tag{17}$$

其中符号$\ll$是“远大于”的意思。

那么，如何用极限的语言刻画“无穷大量趋于无穷的速度快慢比较”这一现象呢。之前我们证明了极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = 0. \tag{18}$$

这说明当n足够大时，线性无穷大量n相较指数无穷大量e^n很小，这体现了e^n的量级要大于无穷大量n。我们甚至还可以证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \ln n}{n^n} = 0 \tag{19}$$

即便分母是两个无穷大量相乘，但是终究比不过量级更大的无穷大量n^n的量级，三个臭皮匠也顶不过一个诸葛亮。

此外，我们可以证明多项式序列$\left\{n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0\right\}$是无穷大量，即一切最高次项系数为正数的多项式都是无穷大量。此外，次数越高的无穷大量的量级越高，我们总结为下述结论：考虑序列$x_n = n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$和$y_n =$

$n^j + b_{j-1}n^{j-1} + \cdots + b_1 n + b_0$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} 0 & ,j > k, \\ +\infty & ,k > j, \\ 1 & ,k = j. \end{cases} \tag{20}$$

这说明，高阶多项式具有更高的量级。

Proof. 证明仅以$k = j$为例，其余情况类似。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + a_{k-1}n^{-1} + \cdots + a_1 n^{-(k-1)} + a_0 n^{-k}}{1 + b_{k-1}n^{-1} + \cdots + b_1 n^{-(k-1)} + b_0 n^{-k}} = 1 \tag{21}$$

其中第一个等号是在分子分母同时除以n^k，第二个等号是极限的四则运算性质，n^{-k}等项极限是0。 □

e的特殊极限

e又称**自然常数**，作为一个无理数，看似名不见经传却常常被拿来当做对数的底数。其严格定义是通过序列极限

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \tag{22}$$

我们通过单调收敛原理证明右侧极限$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$收敛，但是并不知道右侧极限的值，所以我们定义了e作为该极限的值。由于e来自自然，所以以e为底的对数成为**自然对数**。

e的方法是计算序列极限和函数极限最核心的方法之一，一般来说需要函数极限理论才能吧e的方法说得更严格。本节我们仅简单介绍e的方法。e的方法讨论的是一类非常特殊的不定式1^∞，例如

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \\ \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty. \end{cases} \tag{23}$$

这说明1^∞的确是不定式。换一个角度理解，由于不定式$1^\infty = \exp(\infty \cdot \ln 1)$，而$0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$是不定式，因此也说明$1^\infty$是不定式。

e的方法是针对1^∞型极限的方法，**其实质是将待计算极限转化为$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$的形式**，我们来看两个例题：

例 6. 计算极限$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$。

分析：我们做出了取倒数的变形转化为$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$的形式的极限。

Proof. 考虑

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right). \tag{24}$$

由于$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\mathrm{e}$和$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=1$，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=\mathrm{e}. \tag{25}$$

利用四则运算性质得本题极限为e^{-1}。

□

例 7. 计算极限$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$。

分析：通过凑幂指数的方法，我们将本极限强行转化为$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$的形式。

Proof. 考虑如下代数变形

$$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}}. \tag{26}$$

考虑到$\frac{n^2}{n+1}\to+\infty$，我们可以有如下的夹逼原理

$$\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n^2}{n+1}\right]}\right)^{\left[\frac{n^2}{n+1}\right]}\leq\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\leq\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n^2}{n+1}+1\right]}\right)^{\left[\frac{n^2}{n+1}+1\right]}, \tag{27}$$

这里$[\cdot]$表示取整函数。我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}=\mathrm{e}. \tag{28}$$

另一方面$\frac{n+1}{n}\to1$，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}. \tag{29}$$

□

1.3 极限的几个重要性质

在通过上述诸多方法的实践，我们已经加深对极限这一概念的了解。这一节我们介绍极限的几个主要性质，这些性质相对抽象，但是理解它们有助于我们对极限的理解加深。初学者如果觉得过于困难，可以跳过本小节。

有限无关性

我们注意到极限的定义中，我们只需要$|a_n - l| < \varepsilon$对足够大的n成立。在此情况下，如果我们改变某收敛序列$\{a_n\}$的一项，该序列在足够多项以后的项是不改变的，仍然有$|a_n - l| < \varepsilon$对足够大的n成立，所以新序列依然收敛。例如序列$a_n = \frac{1}{n}$是收敛于0的序列，如果我们将$a_3 = \frac{1}{3}$改为某个很大的数，依然不改变新序列收敛于0，因为从第三项a_3以后的无穷多项才是决定序列敛散性的关键。

我们得出结论，**改变序列有限项的值，序列的敛散性不会改变。**这一结论使得我们在研究序列性质时，通常可以忽略序列的前有限项，只从后面开始讨论序列的敛散性，毕竟序列前面的有限项对序列的敛散性是没有影响的。例如在夹逼原理中，我们可以将$b_n \leq a_n \leq c_n$对一切n成立改为对某个$n > N$成立。

不等性质

设序列a_n和b_n均收敛，并且

$$a_n < b_n, \, n \in \mathbb{N}^*. \tag{30}$$

两个序列的极限有什么关系呢？直觉告诉我们a_n的极限是比b_n小的，但是这样的猜测并不准确。由式(30)我们可以推出

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n, \tag{31}$$

这一性质成为极限的不等性质。

显然，极限不等式(31)中添加的取等情形是必要的：例如$a_n = -\frac{1}{n}$和$b_n = \frac{1}{n}$满足$a_n < b_n$对一切n成立，但是它们具有相同的极限0。

另一方面，考虑从不等式$a < b$可以推出$a + 1 < b + 1$和$-a > -b$一样，实际是在不等式$a < b$两侧进行了加法和乘法运算。从式(30)对序列每一项都成立推导式(31)的过程好比在式(30)左右两侧添加了两个极限符号$\lim_{n\to\infty}$，在这样一种视角下极限运算$\lim_{n\to\infty}$就好比是对序列进行的一种“运算”：极限将每个收敛序列对应到一个实数作为极限，极限保持序列的大小关系。

初学者学习不等关系常犯的错误，是由$a_n \leq b_n$对一切n成立直接推出式(31)，这一推导过程是不正确的：因为当a_n或b_n不收敛时，我们无法得出它们极限的信息。因此由(30)推出(31)的过程要在序列a_n和b_n均收敛的前提下进行。

子列性质

考虑序列$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$，其**子列**是指依然抽取的无穷多项$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$得到的序

列，其中$n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k \cdots$，简记为$\{a_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$。如果$\{a_n\}$收敛，子列作为抽取的部分项自然也收敛，并且收敛于相同的极限。

这一结论的逆否命题十分有用：即如果某序列存在两个子列收敛到不同的极限，那么该序列发散。这一结论被用于序列发散的证明：

例 8. 设$x_n = (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$，证明序列$\{x_n\}$发散。

Proof. 考虑$\{x_n\}$两个子列：

$$x_{8k} = (1+\frac{1}{n})^n \to \mathrm{e}. \tag{32}$$

和

$$x_{8k+1} = -(1+\frac{1}{n})^n + \frac{1}{\sqrt{2}} \to -\mathrm{e} + \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{33}$$

序列$\{x_n\}$有两个收敛到不同数的子列，所以序列$\{x_n\}$发散。 □

1.4 几个重要命题

在讨论过关于极限的多种计算方法后，我们补充一些和极限有关的定理。这些定理虽然不能直接计算具体的极限，却也有着很重要的作用。

单调收敛准则

单调收敛准则是判定一类序列收敛性的方法，与此前的夹逼法则不同，单调收敛准则只能判定序列收敛不能求出序列极限的具体值：

定理 1.2. 有上界的单调递增序列收敛；有下界的单调递减序列收敛。

我们给出单调收敛准则的直观理解：一个序列发散的两种情况，一种是如$a_n = (-1)^n$一般的“震荡”序列，另一种是如$b_n = \mathrm{e}^n$一般向无穷发散的序列；点点收敛准则否定了两种可能，单调性确保了序列不“震荡”，有界性确保了序列不能发散向无穷，由此序列只能收敛。

单调收敛准则是实数完备性的一种体现，其证明依赖确界存在原理，我们在补充内容再具体展开。

在实际解题中，有一类问题考虑递推序列的极限，常常可以借助单调收敛准则解：

例 9. 设序列$\{x_n\}$满足$x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$，证明极限$\lim_{n\to\infty} x_n$存在并求出极限的值。

分析：本题的序列$\{x_n\}$是通过抽象的递推式给出的，这类问题的解题技巧一般都是先通过单调收敛原理证明序列$\{x_n\}$收敛，然后再计算极限的值。证明递推序列$\{x_n\}$单

调递增的基本方法是做差法和做商法（即证明$x_{n+1}-x_n>0$或$\frac{x_{n+1}}{x_n}>1$），过程中可能通常辅以数学归纳法辅助证明。

Proof. 我们为了对序列$\{x_n\}$证明单调有界原理，需要证明序列$\{x_n\}$单调递增且有上界。

先证明$\{x_n\}$是单调递增的。做差得到

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1+x_n-x_n^2}{1+x_n}, \tag{34}$$

因此如果证明$1+x_n-x_n^2>0$即可证明序列递增，这需要我们证明$x_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

为此我们先证明x_n有上界$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，使用数学归纳法证明$1<x_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。显然$1<x_1<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。若$x_k<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，由于函数$y=\frac{x}{1+x}$是单调递增的，那么

$$0<\frac{x_k}{1+x_k}<\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \tag{35}$$

那么

$$1<x_{k+1}=1+\frac{x_k}{1+x_k}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{36}$$

归纳法证毕。

结合上面的结论，序列$\{x_n\}$单调递增且有上界，因此其极限存在。设$\lim_{n\to\infty}x_n=l$，下面我们着力于求解极限l。等式

$$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}, \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{37}$$

由于$\{x_n\}$收敛，等式(37)两侧都有极限，因此他们的极限必定是相同的。对等式(37)两侧取极限，由于$x_n\to l$，根据极限四则运算

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{1+x_n}\right)=1+\frac{l}{1+l}\quad,\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=l. \tag{38}$$

因此$\frac{l}{1+l}=l$，解得$l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

初学者常常难以理解本题计算极限l的过程。首先，我们是先证明了序列存在极限l然后再计算l的，所以我们可以证明等式(37)两侧均收敛并可以对(37)两侧取极限。这一计算过程形式上好像是假设了“$x_{n+1}=x_n$”，但是其本质却是依赖了等式(37)两侧均收敛且极限相同的性质，并通过$\{x_n\}$的极限y表达等式(37)两侧极限。 □

柯西命题

柯西命题是下述关于极限的命题

定理 1.3. 如果序列$\{a_n\}$收敛于l，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}=l. \tag{39}$$

柯西命题的结论是很好理解的：假如序列$\{a_n\}$向l聚拢，那么$\{a_n\}$前n项平均值的极限$\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}$自然也会收敛到$l$。然而平均值收敛到$l$的速度比$a_n$更慢，因为平均值蕴含着前$n$项全部的信息。

柯西命题的证明是高等数学课程范围内需要掌握的$\varepsilon-N$语言证明题的难度极限，学会柯西命题的证明对理解$\varepsilon-N$语言非常有益。初学者可以忽略柯西命题的证明。

Proof. 我们模仿$\varepsilon-N$语言证明极限的思路，首先重新叙述命题：对于$\forall\varepsilon>0$，我们希望找到一个$n\in\mathbb{N}^*$使得

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}-l\right|=\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k-l)}{n}\right|<\varepsilon. \tag{40}$$

通过三角不等式可以放大(40)中的待估计项$\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k-l)}{n}\right|$，我们只需满足

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k-l)}{n}\right|\le\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k-l|\right)<\varepsilon, \tag{41}$$

就可以使得(40)成立。剩下的内容就是根据ε存在N，使得式(41)对一切$n>N$成立。

先分析思路。我们注意到，式(41)中间式子的形式是n个绝对值项$\{|a_k-l|\}_{k=1}^{n}$的平均值。由于我们知道$\lim_{n\to\infty}a_n=l$，因此当m足够大时绝对值$|a_m-l|$一定足够小。由此我们可以将n个绝对值项$\{|a_k-l|\}_{k=1}^{n}$分成两部分，前M项$\{|a_k-l|\}_{k=1}^{M}$是坏项绝对值不受控制，但后面$n-M$项$\{|a_k-l|\}_{k=M+1}^{n}$是好项，每一项绝对值都很小，并将前面M个“糟糕”的项的平均值“拉回”ε以下。

接着叙述严格证明。由于$\lim_{n\to\infty}a_n=l$，我们取$M\in\mathbb{N}^*$，对一切$m>M$都有$|a_m-l|<\frac{\varepsilon}{2}$，由此，对$n>M$有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k-l|\right) &\le \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{M}|a_k-l|\right)+\frac{1}{n}\left(\sum_{k=M+1}^{n}|a_k-l|\right)\\ &\le \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{M}|a_k-l|\right)+\frac{(n-M)\varepsilon}{2n}\\ &\le \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{M}|a_k-l|\right)+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned} \tag{42}$$

注意到M以及$\sum_{k=1}^{M}|a_k-l|$是由ε觉得的。因此我们只要取

$$n>\frac{\varepsilon}{2\left(\sum_{k=1}^{M}|a_k-l|\right)}. \tag{43}$$

就可以使得式(41)成立。

因此取

$$N = \max\left\{\left[\frac{\varepsilon}{2\left(\sum_{k=1}^{M}|a_k-l|\right)}\right]+1, M\right\}, \tag{44}$$

对一切$n>N$都有式(41)成立。命题得证 □

2 扩展延伸

2.1 扩展题概览

扩展延伸题部分难度较大，建议根据题目内容选择性阅读。

- 扩展习题1：简单难度，和式型极限的各种技巧。
- 扩展习题2：简单难度，极限相关例题的简单变形。
- 扩展习题3：简单难度，利用递推式的方法证明序列发散。
- 扩展习题4：中等难度，结合题目特点使用夹逼原理证明极限。
- 扩展习题5：困难难度，利用二项式展开和极限的不等性质证明极限问题。
- 扩展补充题1：简单难度，柯西命题的直接应用。
- 扩展补充题2：简单难度，极限相关例题的简单变形。
- 扩展补充题3：中等难度，利用单调收敛原理计算极限。
- 扩展补充题4：中等难度，极限定义的证明和理解。
- 扩展补充题5：中等难度，使用递推式的方法分析极限。

2.2 扩展习题

题 1. 计算以下和式型极限

1.$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$。

2.$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n}$。

3.$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$。

4.$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2n+k)(2n+k+1)}$。

分析：求和式或求积式极限是序列极限问题中的一类常考题，其做法主要有三种：裂项法、放缩法、黎曼和法。裂项法如**1**、**2**小问，它将求和式的值直接通过裂项法算出来然后求极限；放缩法如**3**、**4**问，通过对求和式项的放缩寻求夹逼原理解决；黎曼和法我们将在定积分一节介绍。由于求积式取对数就可以得到求和式，因此求积式极限与求和式解法一样。

Proof. **1.**考虑裂项

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\sqrt{k(k+1)}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}. \tag{45}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 1. \tag{46}$$

2.本题虽然是求积式，我们也可以用裂项法

$$\begin{aligned}\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n} &= \frac{1}{\sin\frac{1}{2^n}}\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left(\cos\frac{1}{2^n}\sin\frac{1}{2^n}\right)\\ &= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2^n}}\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\left(\cos\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{1}{2^{n-1}}\right)\\ &\cdots\\ &= \frac{\sin 1}{2^n\sin\frac{1}{2^n}}.\end{aligned} \tag{47}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=1 \tag{48}$$

由此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 1}{2^n\sin\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\sin 1\cdot\frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\sin 1. \tag{49}$$

3.本题属于无法进行裂项的求和式，我们使用放缩和夹逼原理。注意到

$$2+\frac{2}{n}=\frac{1}{n}\cdot(2n+2)>\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{1}{n+1}\cdot(2n+2)=2. \tag{50}$$

用夹逼原理，可知所求极限为2。

4.对分子用放缩

$$\frac{n(5n+1)}{2}=\sum_{k=1}^{n}(2n+k)\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2n+k)(2n+k+1)}\le\sum_{k=1}^{n}(2n+k+1)=\frac{n(5n+3)}{2}. \tag{51}$$

由此

$$\frac{n(5n+1)}{2n^2}\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2n+k)(2n+k+1)}\le\frac{n(5n+3)}{2n^2}. \tag{52}$$

由此$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2n+k)(2n+k+1)}=\frac{5}{2}$。 □

题 2. 计算下列极限

1.$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$。

2.$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n+2}-3\sqrt{n+3}\right)$。

3.$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right)$。

4.$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\sum_{k=3}^{2021}k^n\right)$。

分析：本题的四问都是在经典例题上做修改得到的。需格外注意这些问题的解题技巧。

Proof. **1.**在例题中我们曾通过放缩

$$0\le\sqrt[n]{n}-1\le\sqrt{\frac{2}{n-1}},\tag{53}$$

证明了极限$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=0$。但是这样的估计不足以计算$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$，因为

$$0\le\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\le\sqrt{\frac{2n}{n-1}},\tag{54}$$

而$\sqrt{\frac{2n}{n-1}}$的极限却不是0，因此夹逼原理不能使用。这需要我们对$\sqrt[n]{n}-1$做更严格的估计。我们依然令$h_n=\sqrt[n]{n}-1$，取$(1+h_n)^n=n$左侧的三次项

$$n=(1+h_n)^n\ge\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h_n^3,\tag{55}$$

由此

$$h_n\le\sqrt[3]{\frac{6}{(n-1)(n-2)}}.\tag{56}$$

进一步

$$0\le\sqrt{n}h_n\le\sqrt[3]{\frac{6n^{\frac{3}{2}}}{(n-1)(n-2)}}.\tag{57}$$

注意到次数更高的多项式具有更高的量级，由此$\sqrt[3]{\frac{6n^{\frac{3}{2}}}{(n-1)(n-2)}}\to0$。这说明$\sqrt{n}h_n\to0$。可见，**通过在式(55)左侧取更高次的项，我们得到了对h_n的更严格的估计。**

2.在课本上我们讨论过经典极限$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$，解题方法是**根式有理化**，即代数变形

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0.\tag{58}$$

我们指出根式有理化在求解极限和积分中都非常重要，例如本题也可以使用有理化的方法解答。注意到

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}+2\sqrt{n+2}-3\sqrt{n+3}&=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}\right)+2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}\right)\\&=-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}-\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}.\end{aligned}\tag{59}$$

由此

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n+2}-3\sqrt{n+3}\right)\\
=\ &\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}-\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}\right)=-1-1=-2. \qquad (60)
\end{aligned}
$$

3.我们注意到sin内部$\pi\sqrt{4n^2+1}\to+\infty$，即便如此由于极限$\lim_{n\to\infty}\sin n$震荡而不存在，我们不能简单的通过计算sin内部计算本极限。

本题的方法为经典方法。根据正弦函数的周期性

$$
\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right)=\sin\left[\pi\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)\right]=\sin\frac{\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}, \qquad (61)
$$

这里使用了根式有理化变形。由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=0$，因此本题极限为0。

4.本题多个数的n次方求和的形式类似于**例4**，我们模仿**例4**的方法进行放缩：

$$
\ln 2021=\frac{\ln\left(2021^n\right)}{n}\le\frac{1}{n}\ln\left(\sum_{k=3}^{2021}k^n\right)\le\frac{\ln\left(2019\cdot 2021^n\right)}{n}=\frac{\ln 2019}{n}+\ln 2021. \qquad (62)
$$

根据夹逼原理可得本极限为$\ln 2021$。特别地，我们对本题极限取指数

$$
\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\sum_{k=3}^{2021}k^n\right)\right)=\sqrt[n]{\sum_{k=3}^{2021}k^n}, \qquad (63)
$$

即与**例4**一致。 □

题 3. 证明序列$y_n=\tan n$发散。

分析：本题介绍另一种证明序列发散的思路，是将y_n转化为递推序列的形式。

Proof. 序列y_n具有通项公式：

$$
y_{n+1}=\tan(n+1)=\frac{\tan 1+y_n}{1-\tan 1 y_n}. \qquad (64)
$$

假设y_n收敛于实数Y，则对通项公式(64)取极限，根据极限的四则运算性质得到

$$
Y=\frac{\tan 1+Y}{1-\tan 1Y}. \qquad (65)
$$

得到$Y^2=-1$，与Y是实数矛盾。

□

题 4. 设x_n是方程$x+x^2+\cdots+x^n=1$在$(0,1)$唯一的根，证明$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$。

分析：根据多项式$y=x+x^2+\cdots+x^n$的单调性，可知根x_n在$(0,1)$唯一，并且完成对x_n的夹逼估计。

Proof. 定义函数$f(x) = x + x^2 + \cdots + x^n$，显然$f(x)$在$(0,1)$单调，并且$f(x_n) = 1$。我们对$x_n$做夹逼估计。

首先证明$x_n > \frac{1}{2}$，这是因为$f(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2^n} < 1 = f(x_n)$，根据单调性有$x_n > \frac{1}{2}$；接着我们希望寻找$x_n$的上界，我们证明$x_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}$，那么

$$
\begin{aligned}
f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)^n \\
&> \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 = f(x_n). \qquad (66)
\end{aligned}
$$

由此

$$\frac{1}{2} < x_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*. \qquad (67)$$

由夹逼原理知$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$。 □

题 5. 求证$\mathrm{e} = 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$。

分析：关于自然常数e，我们所了解的也只有其定义$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$，我们的分析也将围绕着这一极限出发。这一定理的证明有着很强的“数学分析”味道，特别是将“取极限”当成了一种保不等关系的运算。

Proof. 对$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$考做二项式展开并带入组合数的定义得

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{1 \cdot 2 \cdots n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{n}{n} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{1}{n}. \qquad (68)
\end{aligned}
$$

如果将(68)右侧的分数$\frac{k}{n}$均放缩到1我们有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}. \qquad (69)$$

对于不等式(69)，我们左右两侧取$n \to \infty$，根据序列极限保序性质得到

$$\mathrm{e} \leq 1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}. \qquad (70)$$

另一方面，我们取某个$m < n$，并在二项式展开(68)的考虑前m项：

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{n}{n} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + \cdots + \frac{1}{m!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-m+1}{n}. \qquad (71)$$

考虑m固定，在式(71)两侧取$n \to \infty$，对于给定m有极限$\lim_{n\to\infty} \frac{n-m+1}{n} = 1$

$$\mathrm{e} \geq 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \quad , \forall m \in \mathbb{N}^*. \qquad (72)$$

对n取极限的式子(72)对一切m均成立，可以再取$m\to\infty$

$$\mathrm{e} \geq 1+\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}. \tag{73}$$

结合式(72)和(73)，我们得证本题。

□

2.3 扩展补充题

补 1. 用柯西命题计算或证明

1.设序列$\{a_n\}$满足$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=A$，那么$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=A$。

2.设正序列$\{a_n\}$满足$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=A$，那么$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$。

3.求极限$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$。

补 2. 计算下列极限

1.$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$。

2.$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{2n+1}$。

3.$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$。

4.$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$。

补 3. ***2021秋季期中考试.*** 设$x_1>0$，且对一切$n\in\mathbb{N}^*$有$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$，求证$\lim_{n\to\infty}x_n$存在并求极限的值。

补 4. 考虑序列$\{a_n\}$，定义$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，回答下列问题

1.如果S_n收敛，证明$\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

2.如果$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，是否一定有$\lim_{n\to\infty}S_n$收敛？

补 5. 定义*Fibonacci*数列$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$对一切$n\in\mathbb{N}^*$成立，且$F_0=F_1=1$，设$x_n=\frac{F_n}{F_{n+1}}$，问序列$\{x_n\}$是否收敛，如收敛请计算极限，如发散说明理由。