多元函数微分学的应用讲义：习题版

谢彦桐

北京大学数学科学学院

2021.12.21

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。题型说明，基础题指方法非常标准的题目，综合题指方法标准但需要一些技术技巧的题目，进阶题指方法不常规的题目。

1　知识点理解

之前我们只学习了导数的计算，本节介绍的微分中值定理是导数最基本的应用。诸如高中数学最基本的概念：导数非负等价于单调递增，都是微分中值定理的推论。理解中值定理，不仅要理解叙述，也要从几何意义出发。

1.1　三类中值定理

对于三个中值定理，我们需要熟悉其叙述和证明，建议掌握Rolle定理和Lagrange定理的证明。

Rolle中值定理

Rolle中值定理是最基本的结论：如果$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，在开区间(a,b)可导，并且假定f在区间两个边界函数值相等即$f(a)=f(b)$，我们可以找到开区间(a,b)上的点ξ满足$f'(\xi)=0$。

Rolle定理的叙述很抽象，但是其几何意义很明显。例如图1的函数在区间端点a,b具有相同的函数值。假设有一个手持手电筒的小人，由点$(a,f(a))$出发，沿着f的图像走向点$(b,f(b)$，在行走的过程中，总有一刻手电筒光柱的方向是水平的，如果从函数f的变化趋势来看，对于满足$f(a)=f(b)$的函数，总有一点ξ，函数f在ξ的变化趋势不增不减。

Rolle定理的证明并不难，是值得大家掌握的。其核心是，假如f在闭区间$[a,b]$的

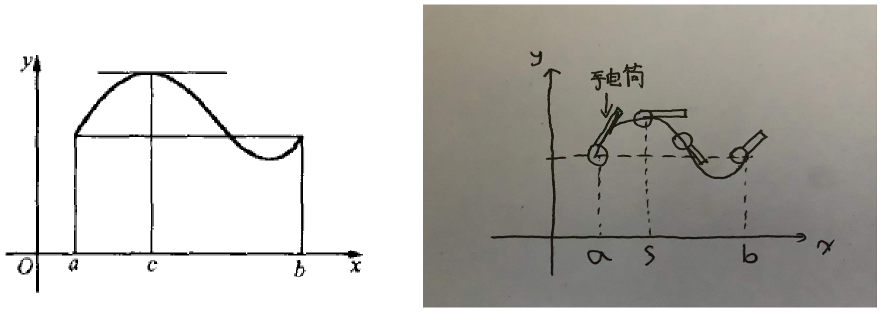

图 1: Rolle中值定理的几何性质示意图。

最值点ξ不在闭区间$[a,b]$的端点上，那么我们就可以说明$f'(\xi)=0$。严格证明如下：由于f在闭区间$[a,b]$连续，根据最值定理存在ξ和μ是f的最大值点和最小值点。我们不妨设ξ和μ是不同的点，否则f在$[a,b]$上恒为常数，Rolle定理就是显然的。由于$f(a)=f(b)$，所以ξ和μ不能同时是$[a,b]$的两个端点，那么不妨设最大值点$\xi\in(a,b)$。我们下面证明$f'(\xi)=0$。根据可导性，我们可以分别计算右导数

$$f'(\xi)=f'_+(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}, \tag{1}$$

和左导数

$$f'(\xi)=f'_+(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(\xi)-f(\xi-\Delta x)}{\Delta x}. \tag{2}$$

由于ξ是极大值点，所以当$\Delta x>0$有$\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\le 0$和$\frac{f(\xi)-f(\xi-\Delta x)}{\Delta x}\ge 0$，因此

$$f'(\xi)=f'_+(\xi)\le 0,\quad f'(\xi)=f'_(\xi)\ge 0. \tag{3}$$

所以$f'(\xi)=0$。

我们指出，在证明Rolle定理的同时，我们得到的副产品是极值的一阶必要条件（也称Fermat定理）：如果$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，在开区间(a,b)可导，设$\xi\in(a,b)$是f的一个极值点，那么$f'(\xi)=0$。我们在证明Rolle定理的过程中，就是首先证明了极值点ξ是区间的内点（即(a,b)中的点），然后得到$f'(\xi)=0$是Rolle定理需要的点。关于极值的严格定义，请见函数性质讲义。

注解 1. 根据*Rolle*定理只能证明满足$f'(\xi)=0$的点在(a,b)中存在，通常无法判断其具体位置。且*Rolle*定理也无法统计满足$f'(\xi)=0$的点究竟有几个。

Lagrange中值定理

Lagrange中值定理的叙述是：如果$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，在开区间(a,b)可导，我们可以找到开区间(a,b)上的点ξ满足$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

Lagrange定理比起Rolle定理，不再需要$f(b)=f(a)$的条件，但是有类似的几何意义：例如图1的函数在区间端点a,b具定义。假设有一个手持手电筒的小人，由

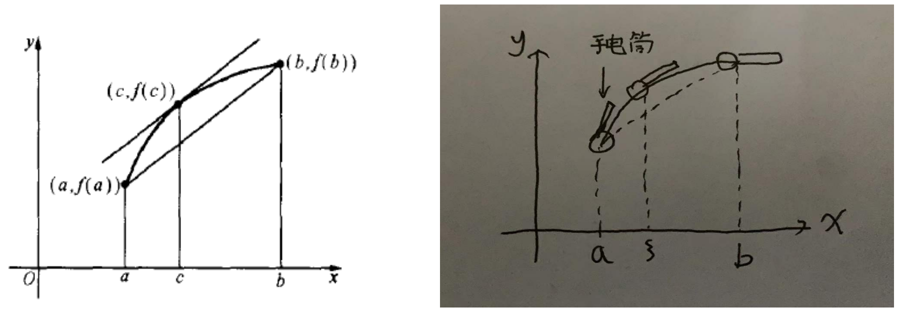

图 2: Lagrange中值定理的几何性质示意图。

点$(a, f(a))$出发，沿着f的图像走向点$(b, f(b)$，在行走的过程中，总有一刻手电筒光柱的方向平行于连接点$(a, f(a))$和$(b, f(b))$的直线。从变化率的角度看，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$代表f在区间$([a, b]$的平均变化率，而存在$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$说明存在一点$\xi$的瞬时变化率$f'(\xi)$等于平均变化率$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。对比图1和图2，如果我们将图2的坐标轴$XoY$旋转到与连接点$(a, f(a))$和$(b, f(b))$的直线平行，那么两个中值定理是等价的。

Lagrange定理的证明借助了Rolle中值定理和构造辅助函数，我们将这一证明留到后文介绍。

Cauchy中值定理

Cauchy中值定理的使用相对较少，其主要应用是证明洛必达法则。设两个函数$f(x), g(x)$在闭区间$[a, b]$连续，在开区间(a, b)可导，且$g'(x)$在(a, b)非零，我们可以找到开区间(a, b)上的点ξ满足$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。Cauchy中值定理的证明也是构造辅助函数使用Rolle定理，然而相关辅助函数的构造比较复杂，不做要求掌握。

1.2 中值定理的应用

本节主要介绍中值定理的各种直接应用。和单调性相关的方法我们将在后续学习函数性质章节时总结。

常函数的证明

在学习不定积分时我们曾经指出，如果函数$f(x)$有原函数$F(x)$，那么$f(x)$的所有原函数可以写成$F(x) + C$的形式，其中C是任意常数。这一论断的原因是，如果$F'(x) = g'(x) = f(x)$，那么差值导数$(F - G)'(x)$是恒为0的常函数。而利用Lagrange中值定理可以证明，如果一个函数的导数恒为0，那么这个函数一定是常值函数，所以$F - G$是恒为C的常值函数。

在本节中，当我们想证明某函数$f(x)$是定义域上的常值函数时，我们只需要证明f'是恒为0的常值函数即可。

例 1. 设$f(x)$和$g(x)$都在(a,b)可导，其中$g(x) \neq 0$和$f(x)g'(x) = f'(x)g(x)$对一切$x \in (a,b)$成立，求证：存在$k \in \mathbb{R}$使得$f(x) = kg(x)$对一切$x \in (a,b)$成立。

Proof. 本题的结论是希望我们证明函数$T(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$是一个常值函数，由此计算导数

$$T'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0, \quad \forall x \in (a,b). \tag{4}$$

所以$T(x)$是常值函数。 □

分析零点个数

根据Rolle定理，假如$a < b$是可导函数f的两个零点，即$f(a) = f(b) = 0$，那么存在$\xi \in (a,b)$使得$f'(\xi) = 0$，即f'一定也存在至少一个零点。由此Rolle定理可以分析函数与其导函数零点个数的关系。

例 2. 求证：方程$2^x + 2x^2 + x - 1 = 0$至多只有两个根。

Proof. 定义

$$f(x) = 2^x + 2x^2 + x - 1. \tag{5}$$

我们用反证法，假设f存在至少三个零点$a < b < c$，那么Rolle定理告诉我们存在$\xi \in (a,b)$和$\mu \in (b,c)$是函数f'的零点，其中

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + 4x + 1. \tag{6}$$

即$f'(\xi) = f'(\mu) = 0$。再用Rolle定理，存在点$\lambda \in (\xi, \mu)$是f''的零点，其中

$$f''(x) = 2^x (\ln 2)^2 + 4. \tag{7}$$

另一方面，由于$2^x > 0$，所以$f''(x) > 0$对任意实数x成立。由此f''不存在零点。这与我们由Rolle定理推出的结论矛盾。所以方程$2^x + 2x^2 + x - 1 = 0$至多只有两个零点。 □

计算极限

由Lagrange中值定理可得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{8}$$

对于一些求极限问题，我们可以通过Lagrange中值定理化简极限。

例 3. 计算极限$\lim_{n\to\infty} n\left[\arctan\left(\ln(n+1)\right)-\arctan\left(\ln(n)\right)\right]$。

Proof. 由于函数$f(x)=\arctan x$是可导的函数，根据Lagrange中值定理，存在点$\xi_n\in(\ln(n),\ln(n+1))$满足

$$\arctan\left(\ln(n+1)\right)-\arctan\left(\ln(n)\right)=\frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{1+\xi_n^2}. \tag{9}$$

特别注意参数ξ_n是依赖n的，虽然我们不知道ξ_n具体值，但是我知道他的范围是$\xi_n\in(\ln(n),\ln(n+1))$。

代入化简计算

$$n\left[\arctan\left(\ln(n+1)\right)-\arctan\left(\ln(n)\right)\right]=\frac{1}{1+\xi_n^2}\cdot\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right). \tag{10}$$

注意到$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$（取$x=\frac{1}{n}$转化为函数极限可证），所以

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\arctan\left(\ln(n+1)\right)-\arctan\left(\ln(n)\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n^2}\cdot\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n^2}. \tag{11}$$

由于$\xi_n\in(\ln(n),\ln(n+1))$，所以$\lim_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$，所以本题极限是0。 □

不等式的证明

与Lagrange定理在极限的应用类似，当我们想证明的不等式具有形如(8)的形式时，我们也可以通过Lagrange中值定理变形化简要证明的不等式：

例 4. 设$0<a<b$，证明不等式$(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)\le(1+a+b)\ln(1+a+b)$。

Proof. 构造函数$f(x)=(1+x)\ln(1+x)$，那么我们要证明的不等式相当于

$$f(a)+f(b)\le f(a+b). \tag{12}$$

用Lagrange定理，存在$\xi\in(b,a+b)$使得

$$f(a+b)-f(b)=af'(\xi)=a(1+\ln(1+\xi)). \tag{13}$$

由于$\xi>b>a$，所以

$$a(1+\ln(1+\xi))>a+a\ln(1+a)\ge\ln(1+a)+a\ln(1+a)=f(a), \tag{14}$$

其中第二个不等号是应用了$a\ge\ln(1+a)$的结论，这是课本例题的结果。 □

注解 2. 本题如果对$f(a+b)-f(a)$使用*Lagrange*定理将无法得到结论，这是需要注意的。

1.3 存在性问题和辅助函数的构造

我们常常遇到这样的习题，给定一个定义在$[a,b]$上的函数$f(x)$，我们希望证明存在$\xi\in(a,b)$使得$f'(\xi)$满足相应的性质。这类存在性问题的做法是通过构造辅助函数和使用Rolle中值定理的方法。Lagrange定理的证明便是一例。

我们想证明存在$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，我们转而构造另外的函数

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \tag{15}$$

我们称g为辅助函数。显然$g(x)$在闭区间$[a,b]$连续，在开区间(a,b)可导。相较于原本的f，辅助函数g最大的特点是$g(a)=g(b)$，因此我们可以对辅助函数g使用Rolle定理。根据Rolle定理，存在点$\xi\in(a,b)$使得$g'(\xi)=0$，然后根据辅助函数g的表达式有

$$g'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{16}$$

由此可以总结，我们要证明$f(x)$相关的存在性问题，我们需要构造一个合适的辅助函数g，它满足$g(a)=g(b)$，从而使用Rolle中值定理得到ξ满足$g'(\xi)=0$。然后通过$g'(\xi)=0$这一结论得到题目要求的结论。

我们指出，辅助函数g的构造是很有难度的，例如Lagrange定理证明中的辅助函数的构造就很不显然。一般来说，我们希望构造的辅助函数g具有如下特点
1.$g(a)=g(b)$。
2.$g'(\xi)=0$可以推导出题目要求的结论。
由此我们通常可以从题目要求的式子出发，构造g使得$g'(\xi)=0$蕴含题目想要我们证明的结论。

例 5. 设函数$f(x)$在$[a,b]$一阶可导，在(a,b)二阶可导，满足$f(a)=f(b)=0$和$f'(a)f'(b)>0$，求证：
1.存在$c\in(a,b)$使得$f(c)=0$。
2.存在$d\in(a,b)$使得$f'(d)=f''(d)$。
3.存在$e\in(a,b)$使得$f''(e)=f(e)$。

Proof. **1.**此结论可以直接使用连续函数的介值定理证明。由$f'(a)f'(b)>0$，不妨设$f'(a),f'(b)>0$，根据导数的定义有

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}>0, \tag{17}$$

和

$$f'(b)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(b)-f(b-\Delta x)}{\Delta x}>0. \tag{18}$$

由于式(17)极限为正，根据函数极限的有界性，存在$\delta > 0$，使得$\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta} > 0$，因此$f(a+\delta) > f(a) = 0$。同理，根据极限(18)，也存在$\gamma > 0$使得$f(b-\gamma) < f(b) = 0$。由此我们找到了$a < a+\delta < b-\gamma < b$满足$f(a+\delta) > 0 > f(b-\gamma)$。根据$f$的连续性，存在$c \in (a+\delta, b-\gamma) \subset (a,b)$使得$f(c) = 0$。

2.我们想要构造辅助函数F，使得我们可以得到形如$f'(x) = f''(x)$的式子。构造

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x} f'(x). \tag{19}$$

求导得

$$F'(x) = \mathrm{e}^{x}(-f'(x) + f''(x)). \tag{20}$$

于是我们想证明存在$f'(d) = f''(d)$，就只需要证明$F'(d) = 0$。这就是辅助函数F构造的妙处。

我们希望对F用Rolle定理。首先，函数f存在三个零点$a < c < b$，根据Rolle定理，存在点$\xi \in (a,c)$和$\mu \in (c,b)$是f'的零点，即$f'(\xi) = f'(\mu) = 0$。于是ξ和μ也是F的零点，即$F(\xi) = F(\mu) = 0$，再由Rolle定理，存在$d \in (\xi,\mu)$使得$F'(d) = 0$，此时$f(d) = f''(d)$。

3.我们这次希望构造辅助函数G，使得我们可以得到形如$f(x) = f''(x)$的形式。构造

$$G(x) = \mathrm{e}^{-x}(f(x) + f'(x)). \tag{21}$$

那么得到

$$G'(x) = \mathrm{e}^{-x}(f'(x) + f''(x) - f(x) - f'(x)) = \mathrm{e}^{-x}(f''(x) - f(x)). \tag{22}$$

由此我们只要得到$G'(e) = 0$就可以证明$f(e) = f''(e)$。

为了研究G'零点的存在性，我们首先需要讨论G的零点。由此我们先构造函数

$$H(x) = \mathrm{e}^{x} f(x). \tag{23}$$

根据条件，H有三个零点$a < c < b$。考虑导函数

$$H'(x) = \mathrm{e}^{x}(f(x) + f'(x)). \tag{24}$$

因此H'有两个零点$\alpha \in (a,c)$和$\beta \in (c,b)$。于是

$$f(\alpha) + f'(\alpha) = f(\beta) + f'(\beta) = 0 \tag{25}$$

由此可得α和β也是函数G的零点，所以存在$e \in (\alpha,\beta)$使得$G'(e) = 0$。 $\square$

注解 3. 我们指出辅助函数的构造需要大量的经验积累，在高等数学课程的层次我们一般不要求构造很复杂的辅助函数。

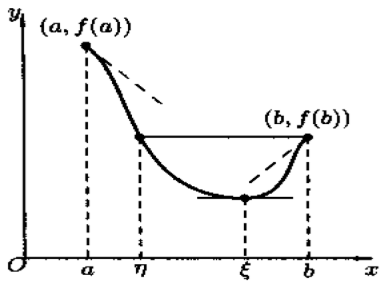

图 3: Darboux定理的证明示意图

1.4 补充：Darboux定理

这一部分证明使用了关于极值性质的Fermat定理，对于极值不熟悉的同学可以参加函数性质讲义。

我们曾经证明过连续函数的介值定理，即在闭区间$[a,b]$上连续的函数f，不妨设$f(a) < f(b)$，那么对于任意$f(a) < \eta < f(b)$，都存在$c \in (a,b)$使得$f(c) = \eta$。介值性是函数连续最直观的性质，它说明函数的“图像连续”，即当$f(x)$由$f(a)$变化到$f(b)$时，函数值总能经管任意一个点η介于$f(a)$和$f(b)$之间。

对于在$[a,b]$上可导的函数f，我们自然不能期望f'也是连续的。但是Darboux定理告诉我们，基本f'不连续，它也具有类似连续函数的性质：介值性。Darboux定理的内容是：对于定义在闭区间$[a,b]$的导函数f'，妨设$f'(a) < f'(b)$，那么对于任意$f'(a) < \eta < f'(b)$，都存在$c \in (a,b)$使得$f'(c) = \eta$。作为Darboux定理的推论，我们很容易看到并非每一个函数都可以作为另一个函数的导函数，即并非每个函数都具有原函数，如果一个函数不具有介值性，那么它没有原函数。

我们下面证明Darboux定理：我们不妨先证明简单的情况，设$f'(a) < 0 < f'(b)$，我们证明存在$c \in (a,b)$使得$f'(c) = 0$。根据导数的定义

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} < 0, \tag{26}$$

和

$$f'(b) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(b) - f(b-\Delta x)}{\Delta x} > 0. \tag{27}$$

由于式(26)极限为负，根据函数极限的有界性，存在$\delta > 0$，使得$\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta} < 0$，因此$f(a+\delta) < f(a) = 0$。同理，根据极限(27)为正，也存在$\gamma > 0$使得$f(b-\gamma) < f(b) = 0$。由此可见函数$f$的极小值必然在开区间$(a,b)$取到。设极小值点为$c$，根据Fermat定理$f'(c) = 0$。

对于更一般的情况$f'(a) < \eta < f'(b)$，我们可以通过讨论$F(x) = f(x) - \eta x$，由于$F'(a) < 0 < F'(b)$，所以存在$c \in (a,b)$使得$F'(c) = f'(c) - \eta = 0$即为所求。

注解 4. 我们指出，*Darboux*定理的证明格式实际与*Rolle*定理非常类似：即首先确定函数f的极值点位于区间(a,b)内而不再边界点上，然后根据极值点导数为*0*的特性确定极值点就是我们需要的点。

2 习题

题 1. 定义函数$F(x)=(x-a)^n(x-b)^n$，其中$n\in\mathbb{N}^*$，实数$a<b$，定义$f(x)=F^{(n)}(x)$，证明$f(x)$在(a,b)中至少存在n个互不相同的根。

分析：本题是使用Rolle定理分析零点的类型，旨在通过Rolle定理找到$f(x)$在(a,b)中至少存在n个不同零点。

Proof. $n=1$的情形是显然的，我们不妨考虑$n\geq 2$。

首先$F(x)$具有零点a,b，使用根据Rolle定理，$F'(x)$存在零点$\xi\in(a,b)$。到这里看似无法使用Rolle定理继续确定F''的零点了，但是我没注意到

$$F'(x)=(n-1)(x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}(2x-a-b), \tag{28}$$

使用a,b也是F'的零点。于是我们找到了F'的三个不同的零点a,ξ,b。继续推导出F''在(a,b)上至少存在两个零点。

注意到，只要$k<n$，根据Leibniz公式有

$$F^{(k)}(x)=\sum_{j=0}^{k}\left[(x-a)^n\right]^{(j)}\left[(x-b)^n\right]^{(k-j)}. \tag{29}$$

注意到$[(x-a)^n]^{(j)}$和$[(x-b)^n]^{(k-j)}$依然是关于$x-a$和$x-b$的多项式。使用对于F的小于n次的任意阶导数，a,b依然是零点。

我们仿照上述方法，F'存在包括a,b的三个零点，于是F''存在包括a,b的四个零点，以此类推，$F^{(n-1)}$存在包括a,b的$n+1$个零点。注意到由于a,b不再是$F^{(n)}$的零点，我们用Rolle定理可以推出$F^{(n)}$存在至少n个零点。 □

题 2. 设$f(x)$在(a,b)可导，且对于任意$x_0\in(a,b)$，极限$\lim_{x\to x_0}f'(x)$都存在，证明$f'(x)$在(a,b)连续。

分析：本题主要讨论f'的性质，解题方法是直接使用Darboux定理，除此之外并没有很好的做法。

Proof. 我们用反证法，假定f'在$x_0\in(a,b)$处不连续。由于极限$\lim_{x\to x_0}f'(x)$存在，使用x_0必然是f'的可去间断点。

令$y = \lim_{x\to x_0} f'(x)$，那么$y \neq f(x_0)$。我们不妨设$y > f(x_0)$，并且取足够小的$\varepsilon > 0$使得$y > f(x_0) + \varepsilon$。根据极限的定义，存在$\delta > 0$，当$0 < |x - x_0| \leq \delta$时总有$|f(x) - y| < \varepsilon$。

我们在区间$[x_0 - \delta, x_0]$使用Darboux定理，考虑f'在区间端点的函数值为$f(x_0 - \delta) > y - \varepsilon > f(x_0)$的，因此$f'$在区间$(x_0 - \delta, x_0)$的函数值必须遍历介于$f(x_0)$和$f(x)$之间的每一个值。然而我们注意到，对每一个$x \in (x_0 - \delta, x_0)$都有$f(x) > y - \varepsilon$，所以$f'$在$[x_0 - \delta, x_0)$的函数值只能取大于$y - \varepsilon$的值，取不到$(f(x_0), y - \varepsilon)$之间的值，推出矛盾。 □

注解 5. 实际上，我们还可以证明更强的结论：如果导函数f'存在间断点，那么该间断点必须是第二类间断点，不可能是可去间断点或跳跃间断点。