不定积分讲义

谢彦桐
北京大学数学科学学院

2021.11.9

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。题型说明，基础题指方法非常标准的题目，综合题指方法标准但需要一些技术技巧的题目，进阶题指方法不常规的题目。

目录

1 知识点整理

1.1 定积分相关概念辨析

本节主要讲解和辨析定积分的基本性质，以及收集与这些性质相关的解题技巧。定积分的本质是曲线线下面积的计算，本身与计算原函数的不定积分毫无关系，直到Newton和Leibniz提出以它们名字命名的定理以后，不定积分和定积分才成为一个整体。

定积分和黎曼和

考虑定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，其定义实质是“先分后积”，分是指将积分区间$[a,b]$分为

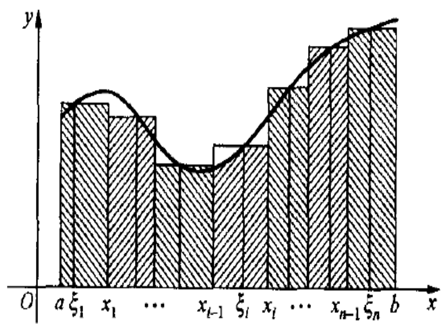

图 1: 定积分和黎曼和的示意图

足够多段

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_{n-1} < x_n = b. \tag{1}$$

积则是计算每一个以区间$[x_{i-1}, x_i]$为底的曲边梯形的面积，我们将面积近似为$f(\xi_i)(x_{i-1}-x_i)$，其中$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$。我们将这些曲边梯形面积求和，得到的和式称为**黎曼和**

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i). \tag{2}$$

定义区间划分的最大长为$\Delta = \max(x_i - x_{i-1})$，当$\Delta$趋于0，其实就是对分割逐渐加密的过程，也以曲边梯形的面积和近似着函数$f(x)$的线下面积，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i). \tag{3}$$

这里同学们可能有一个问题，在定义黎曼和的过程中，我们只要求划分的最大长Δ趋于0，并没有限制划分$\{x_i\}$的具体取法，也没有规定用于近似的函数值$f(\xi_i)$的点ξ_i的取法。对于不同划分$\{x_i\}$和点$\{\xi_i\}$的选取，会不会对黎曼和的收敛性造成影响呢？例如，区间$[x_{i-1}, x_i]$上$f(x)$的最大值$M_i = f(\xi_i^M)$和最小值$m_i = f(\xi_i^m)$之间差的过多，有没有可能导致黎曼和极限(3)在分别选取$\xi_i = \xi_i^M$和$\xi_i = \xi_i^m$时，计算的黎曼和差距过大使得极限(3)不收敛呢？实际上，这样的情况是可能出现的。这就涉及到可积性的概念，即并非每一个$f(x)$都是可以由黎曼和的极限(3)定积分的。我们称$f(x)$是**可积的**，如果黎曼和极限(3)是收敛的。当然，**我们可以证明连续的函数都是可积的**，我们可以直观地理解为，连续函数在区间$[x_{i-1}, x_i]$上的最大值和最小值的差通常不会太大。

最后我们介绍黎曼和在解题中的应用，主要是利用黎曼和的方法求极限。在式(3)中，我们知道了黎曼和的极限是定积分，但是我们一般只需要Newton-Leibniz公式就可以计算定积分的值而不需要黎曼和。因此，对于求和式的极限，如果我们能把它写成黎曼和的形式，那么其极限就是定积分的值。

例 1. 计算极限$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$

分析：我们知道黎曼和的形式是$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_{i-1}-x_i)$，我们一般都考虑等分情形，此时黎曼和$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}f(\xi_n)$。这类问题的重点是制造出求和式每一项$\frac{1}{n}f(\xi_n)$的形式。

Proof. 考虑$\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$，因此

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}=\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right). \tag{4}$$

其中$f(x)=\frac{1}{1+x}$。所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}=\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)|_0^1=\ln 2. \tag{5}$$

□

可积性和连续性

刚刚我们已经说明，并不是所有函数都可积，但是连续函数是可积的，更一般的，我们希望同学们不加证明的记忆下面三类可积函数，其中函数定义域均为$[a,b]$

1.连续函数。

2.单调函数。

3.在$[a,b]$上有界但是有且仅有有限个间断点或无定义的点的函数。

此外可积函数必须有界，无界函数都不可积。

我们简要介绍第三类。例如，函数$x\ln x$显然在点$x=0$没有定义，但是由于$\lim_{x\to 0+0}x\ln x=0$，所以函数$x\ln x$是$[0,1]$上的有界函数，且在$(0,1]$连续，在$x=1$处属于第一类间断点，因此我们判断$x\ln x$在$[0,1]$上可积，并且根据分部积分法不难计算$\int x\ln x\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$。类似地函数$\sin\frac{1}{x}$也在$x=0$处没定义，但是在$(0,1]$上有界且连续，在$x=0$处属于第二类间断点，因此$\sin\frac{1}{x}$在$[0,1]$可积，但是不连续，且我们计算不出积分$\int_0^1\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$的值。另一方面，函数$\frac{1}{x}$在$[0,1]$也只有$x=0$一个无定义的点，但是因为$\frac{1}{x}$无界，因此$\frac{1}{x}$在$[0,1]$不可积。

在学习定积分性质时我们也指出，对于积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$来说，改变$f(x)$在$[a,b]$上有限个点的值，是不影响$f(x)$的可积性的，这也侧面说明了，如果一个函数在大多数点都连续，仅仅在有限个点表现糟糕（间断）甚至没有定义，函数依然是可积的。更一般的，Lebesgue提出了如下更一般的定理（不要求掌握）

定理 1.1. *(Lebesgue)*设函数$f(x)$在$[a,b]$是有界函数，那么$f(x)$在$[a,b]$可积的充分必要条件是$f(x)$的间断点集“零测”。

零测指“测度为零”，其概念是复杂的，直观理解就是说间断点比较少，大多数点连续。而有界的集合都是零测集，这也说明了有界且间断点有限的函数是可积的。此

外，区间$[0,1]$上的有理数集是零测集。我们之前学习的Dirichlet函数和Riemann函数，前者在$[0,1]$每一点都不连续，后者在$[0,1]$中的有理点集间断，在无理点连续。因此，虽然Dirichlet函数和Riemann函数都是糟糕的病态函数，但是从连续性来看，Riemann函数只在少部分点很糟糕，所以Riemann函数可积；但是Dirichlet函数在每一个点都很糟糕，所以Dirichlet函数不可积。

注解 1. 感兴趣的同学可以尝试通过黎曼和的方法证明$\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$，其中$R(x)$是$[0,1]$上的*Riemann*函数。

正因为大量不可积函数的存在，使得定积分（确切说是Riemann积分）在很多函数上不可积，在使用Riemann积分时有许多限制。因此数学家Lebesgue定义了以它名字命名的Lebesgue积分，比起Riemann积分，Lebesgue积分大大扩增了可积函数的范围，并且对于Riemann可积的函数，其Riemann积分的值与Lebesgue积分的值相同。在概率论等学科里，Lebesgue积分是必需品，而Riemann积分则会造成许多麻烦。

变限积分、原函数和Newton-Leibniz公式

这一节我们把重点回到原函数这一概念。我们之前曾提出，并不是每一个函数都存在原函数，但是连续函数一定存在原函数。如果$f(x)$在$[a,b]$连续，那么变限积分函数$F(x)=\int_a^x f(y)\mathrm{d}x$就是$f(x)$的一个原函数，即$F'(x)=f(x)$对一切$x\in[a,b]$成立。特别地，由于$F(a)=0$，并且对$F(x)$加减常数$C$得到的依然是$f(x)$原函数。

注解 2. 变限积分$F(x)=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y$是以$x$为自变量的函数，由于$x$出现在定积分上限，所以被积函数的自变量不能仍然使用x，即形如$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$的积分是错误的。

对于不连续的函数，原函数可能存在也可能不存在，但是上一节介绍的Darboux定理告诉我们，具有原函数的函数的间断点只能是第二类间断点。图2的韦恩图则表达了“具有原函数的函数”，“可积函数”，“连续函数”三者关系。特别地，我们的Newton-Lebniz公式（本讲义简称NL公式）为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a). \tag{6}$$

而使得NL公式成立的$f(x)$是连续函数，它位于韦恩图的交集，是既有原函数又可积的函数。

我们指出，“具有原函数的函数”，“可积函数”，“连续函数”三者关系的证明以及相关反例都超出我们的课程要求，我们只需要基本了解结论即可。这里我们给出三个反例函数f_1,f_2,f_3，说明可积但不存在原函数的函数、存在原函数但不可积的函数、

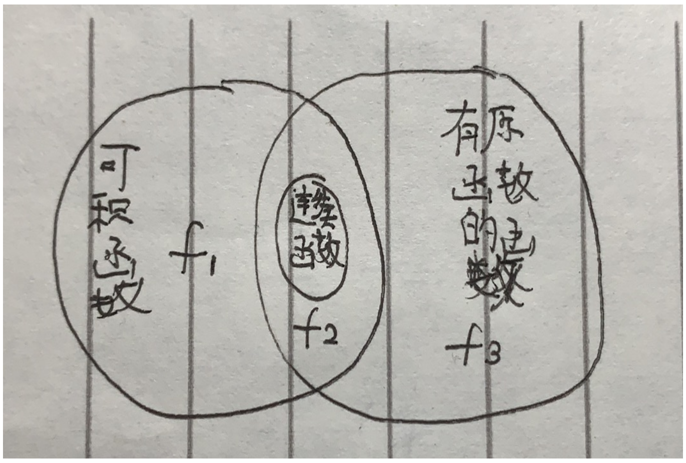

图 2: “具有原函数的函数”，“可积函数”，“连续函数”三者关系和三个反例函数f_1, f_2, f_3在韦恩图中的位置。

既有原函数又可积但不连续的函数都存在：函数f_1定义为

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0,1], \\ 1 & , x \in (1,2]. \end{cases} \tag{7}$$

函数f_1可积（间断点唯一）但不存在原函数；函数f_2和函数f_3定义为

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} f_3(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{8}$$

根据定义，f_2和f_3分别具有原函数

$$F_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} F_3(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{9}$$

因此函数f_3存在原函数F_3，但是因为f_3无界，因此f_3不可积；函数f_2存在原函数F_2，并且仅有间断点$x = 0$，同时f_2有界，因此f_2既存在原函数又可积，但是却不连续。

注解 3. 你可能对f_1没有原函数这一事实有些不能接受。用反证法，如果下述函数是f_1原函数

$$F_1(x) = \begin{cases} C & , x \in [0,1], \\ C + x - 1 & , x \in (1,2], \end{cases}$$

其中C为某给定常数。然而我们可以检验得到F_1在点$x = 1$不可导，左导数为*0*而右导数为*1*，因此不是f_1原函数。

最后我们来介绍变限积分求导的计算技巧

例 2. 计算$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}\mathrm{d}t$

分析：本题主要是利用$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$和复合函数求导的方法进行计算。此外，由于我们无法对上下限均为变限的积分进行计算，因此我们应首先进行代数变形。

Proof. 定义$F(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t^4+2}\mathrm{d}t$。我们显然有

$$\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}\mathrm{d}t=\int_0^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}\mathrm{d}t-\int_0^{x^3+1}\frac{\sin t}{t^4+2}\mathrm{d}t=F\left(2^x\right)-F\left(x^3+1\right). \tag{10}$$

根据$F'(x)=\frac{\sin x}{x^4+2}$，用复合函数求导法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\left(2^x\right)=F'\left(2^x\right)\cdot\left(3^x\ln 3\right)=\frac{3^x\ln 3\sin 2^x}{2^{4x}+2}. \tag{11}$$

同时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\left(x^3+1\right)=F'\left(x^3+1\right)\cdot\left(3x^2\right)=\frac{3x^2\sin\left(x^3+1\right)}{\left(x^3+1\right)^4+2}. \tag{12}$$

由此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}\mathrm{d}t=\frac{3^x\ln 3\sin 2^x}{2^{4x}+2}-\frac{3x^2\sin\left(x^3+1\right)}{\left(x^3+1\right)^4+2}. \tag{13}$$

□

定积分中值定理

我们知道对于抽象的函数$f(x)$，我们无法估计定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$具体的值，借助定积分中值定理，我们可以对定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值进行估计。因此定积分中值定理是定积分相关证明题中最重要的解题方法。

定积分中值定理分为两个版本：玩具版本和完整版本。我们课本上仅讲解了玩具版本，但是在许多往年题里都考察了完整版本的使用。玩具版本是指

定理 1.2. *(玩具版本)*设函数$f(x)\in C[a,b]$，那么存在$\xi\in[a,b]$满足

$$f(\xi)(b-a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

我们首先从几何上理解玩具版本。我们假定$f(x)\geq 0$，$f(x)$与$x=a,x=b,y=0$合在一起形成一块“木板”，如图3所示。如果我们用一根尺子，在与x轴平行的方向对齐板子（$f(x)$图像）最低点，在向最高点挪移的“连续”变化过程里，尺子以下的矩形面积$f(\xi)(b-a)$总有一刻和板子的面积一致。

完整的定积分中值定理如下：

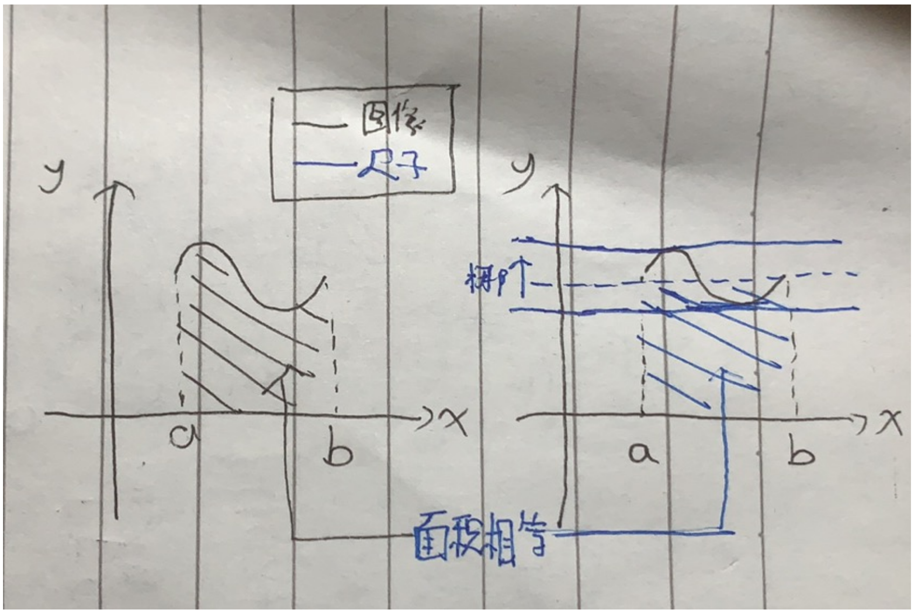

图 3: 定积分中值定理几何示意图

定理 1.3. （完整版本）设函数$f(x) \in C[a,b]$和$g(x) \in R[a,b]$，且$g(x)$在$[a,b]$区间内不变号（即非正或非负），那么存在$\xi \in [a,b]$满足

$$f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

考虑完整版本的中值定理，其变化实际上是为“木板”在x方向的不同位置上添加了不同“密度”$g(x)$，因此木板的总质量变为$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$。在此情况下，我们重复从最低点挪移尺子的过程，此时某一时刻尺子下的矩形质量是$f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，我们依然可以找到一刻矩形质量等于木板质量。

定积分中值定理在定积分相关证明题中大量出现，详见后续习题。

1.2 定积分的计算

定积分的计算方法主要包括分部积分法、换元法和对称法三种。其中分部积分法和换元法与不定积分情形比较类似，对称法则是定积分的特有方法且不依赖NL准则。相较不定积分，定积分的分部积分和换元法最大的区别是没有“凑微分”的语言，但是其目标实质是一样的。

分部积分法

这一部分与不定积分的情形基本相同，我们仅仅介绍迭代法的情形，我们将通过下面的例题介绍定积分分部积分法的细节：

例 3. 设m,n是自然数，设$m \geq 1$，计算$I(m,n) = \int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x$。

分析：我们模仿不定积分的情形，将$x^m\mathrm{d}x$凑入微分$\frac{\mathrm{d}(x^{m+1})}{m+1}$。

Proof. 不妨$n>0$，用分部积分法

$$\begin{aligned} I(m,n) &= \int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}\bigg|_0^1 - \frac{1}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}\left[(\ln x)^n\right]'\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}\bigg|_0^1 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{14}$$

注意到$\frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}\Big|_{x=1}=0$，但是$\frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}$在$x=0$无定义，我们以极限代替

$$\lim_{x\to 0+0} x^{m+1}(\ln x)^n = 0. \tag{15}$$

这一极限的计算可以通过量级估计分析，作为$0\times\infty$的不定式，x^{m+1}比$(\ln x)^n$具有更高的量级，因此$x^{m+1}(\ln x)^n$是一个无穷小量，严格的证明也可以使用洛必达法则。由此

$$I(m,n) = -\frac{n}{m+1}I(m,n-1) = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n}I(m,0). \tag{16}$$

由于$I(m,0)=\frac{1}{m+1}$，所以$I(m,n)=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$。 □

换元法

定积分的换元法是定积分部分最大的易错点，同学们需认真理解定积分换元的本质才可以避免在计算中犯错。不定积分的换元法仅仅是将自变量x替代为另一自变量y，但是定积分中被积函数的自变量x是在积分区间中取值的，因此换元所得的另一自变量y也应有范围，这是二者本质的不同。我们首先叙述定积分的换元法：

定理 1.4. 设函数$f(x)\in C[a,b]$，定义函数$x=\varphi(t):[\alpha,\beta]\to[a,b]$具有连续的导函数，满足$\varphi(\alpha)=a$和$\varphi(\beta)=b$，**且当$t$从$\alpha$增大为$\beta$时，$\varphi(t)$始终在区间$[a,b]$变化**。那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{17}$$

我们首先直观地了解上述定理，积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是考虑函数$f(x)$在x从a变化到b这一过程的“积累”。而换元法的实质是“另辟蹊径”，我们另选自变量t，t与x通过可微函数$\varphi(t)$关联。当t从α运动到β时，$x=\varphi(t)$也从a变化到b，因此我们就可以将以x为自变量的积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$等效为以t为自变量的积分“$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\mathrm{d}x$”，即用$f(\varphi(t))$的“积累”代替$f(x)$的“积累”。但是我们仍需要将微分$\mathrm{d}x$替换为$\mathrm{d}t$，这就需要微商运算$\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$，由此得到换元公式(17)。

根据上述分析，我们就理解到，换元公式(17)提出要求“当t从α增大为β时，$\varphi(t)$始终在区间$[a,b]$变化”是必须的，它保证了$f(\varphi(t))$在$[\alpha,\beta]$的“积累”确实等效覆盖了$f(x)$在$[a,b]$的“积累”。为了增加理解，我们看两个例题：

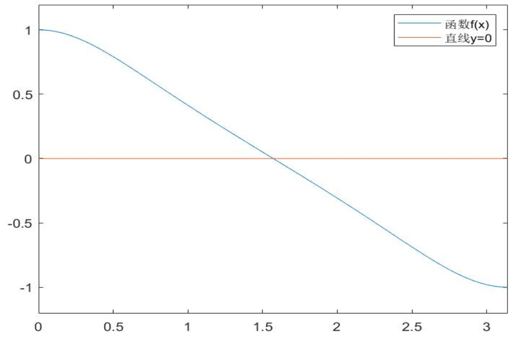

图 4: 被积函数$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+2\sin^2 x}}$的示意图

例 4. 计算定积分$\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+2\sin^2 x}}\mathrm{d}x$。

函数$\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+2\sin^2 x}}$图像如图4所示，显然有$f(x)+f(\pi-x)=0$，即关于轴$x=\frac{\pi}{2}$对称的点$x$和$\pi-x$的函数值相反，由此积分值$\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+2\sin^2 x}}\mathrm{d}x$显然为0。不过我们即将用一些不同的视角看这个积分。

视角1：从NL公式出发 我们首先计算不定积分

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+2\sin^2 x}}\mathrm{d}x \quad &\overset{t=\sin x}{=\!=\!=} \quad \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=\ln\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)+C\\ &= \quad \ln\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+\sin x\right)+C.\end{aligned}\tag{18}$$

显然函数$F(x)=\ln\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+\sin x\right)$是$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+2\sin^2 x}}$在$[0,\pi]$上一个原函数。由NL公式

$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+2\sin^2 x}}\mathrm{d}x=\ln\left(\sqrt{1+\sin^2 x}+\sin x\right)\Big|_0^\pi=0.\tag{19}$$

视角2：从定积分换元法出发 根据不定积分的分析，我们希望使用定积分换元法计算这一问题。如果直接套用公式(17)，并选择换元关系$t=\sin x$，由于$\sin\pi=\sin 0=0$，很容易错误地得到下述式子

$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+2\sin^2 x}}\mathrm{d}x=\int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}.\tag{20}$$

实际上上述换元法的使用方式是错误的。因为根据换元法的要求，我们必须要求x从0到π变化时，$t=\sin x$在$[\sin 0,\sin\pi]=\{0\}$变化，即只能取0，这显然是错误的换元。实际上，当x从0到π变化，虽然t的“起点”和“终点”都是0，但是其变化过程是先由0变化到1（$t=\frac{\pi}{2}$时）然后回到0，而不是在0“原地不动”。因此正确的换元法应

该取如下分段：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 2\sin^2 x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}. \tag{21}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 2\sin^2 x}}\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}. \tag{22}$$

在$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$和$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$用换元法，得到的关于$t$的积分被积函数一致但上下限相反，分别代表了$t$从0变为1和$t$从1回到0过程，由此$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x+2\sin^2 x}}\mathrm{d}x = 0$。

例 5. 计算定积分$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$。

这一积分是我们在不定积分部分学过的，我们可以做如下换元

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)+C. \tag{23}$$

有些同学想通过NL公式直接计算

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= -\sqrt{2}\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

这将得到$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x < 0$这一荒谬结论。

当我们仔细还原后会发现，我们找到的所谓“原函数”$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$在点$x=0$根本就没有定义，也就是说$F(x)$根本就不是$\frac{1+x^2}{1+x^4}$在$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$每一个点的原函数。对于不定积分运算(23)，我们可以包容结果又这样一个断点$x=0$，但是对于需要严格地使用NL公式的定积分运算而言，断点$x=0$不能被接受。**由此建议同学们不要采用不定积分换元法做定积分，避免不必要的错误。**

我们接下来严格地考虑定积分换元法。当x从$-\frac{1}{2}$运动到$\frac{1}{2}$时，变量$y = x - \frac{1}{x}$，y从$\frac{3}{2}$出发运动到$+\infty$，再由$-\infty$运动到$-\frac{3}{2}$，由此

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x &= \int_{\frac{3}{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^2+2} + \int_{-\infty}^{-\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{y^2+2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{+\infty} + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\Bigg|_{-\infty}^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) - \arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\right). \end{aligned} \tag{25}$$

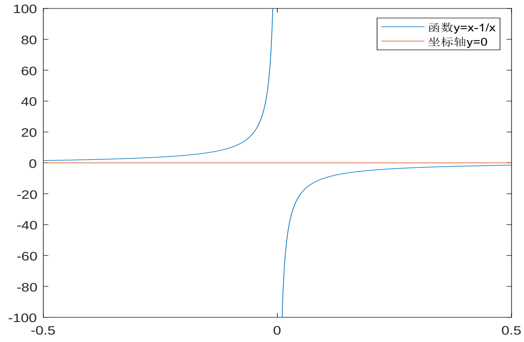

图 5: 换元函数$y=x-\frac{1}{x}$的示意图

这里涉及到上限或下限为∞的积分，我们仅仅引入形式运算，在使用NL公式时计算

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}. \tag{26}$$

对称法

对称法是考试的必考知识点，其适用范围通常是一些被积函数不存在原函数的定积分，由此无法使用NL公式及相关方法计算此定积分。对称性最简单的情况，是课本上讨论的奇函数$f(x)$在$[-a,a]$上定积分为0的事实。我们直接看一个例题熟悉这种方法。

例 6. 计算定积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$。

Proof. 这一被积函数的原函数不能写成初等函数的形式，我们用换元法。我们进行下述计算

$$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)=\ln 2-\ln(1+\tan x). \tag{27}$$

整理得$f(x)+f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2$。

结合图6，关于直线$x=\frac{\pi}{8}$对称的两个点x与$\frac{\pi}{4}$上函数值和为$\ln 2$，亦即函数值关于$f(x)$与$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$关于直线$y=\frac{\ln 2}{2}$对称。综上，函数$\ln(1+\tan x)$的图像关于点$(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2})$中心对称。由此，函数$\ln(1+\tan x)$与直线$y=\frac{\ln 2}{2}$夹出的在对称中心$(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2})$左上和右下的两部分面积相等，由此

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\ln}{2}=\frac{\pi\ln 2}{8}. \tag{28}$$

□

我们可以看到，计算积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$的过程不依赖被积函数的原函数或NL公式，只依赖了被积函数关于$(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2})$的中心对称性，将计算复杂函数线下面积转换为计算简单的矩形。

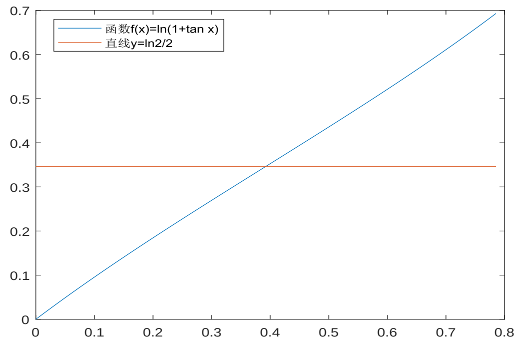

图 6: 函数$f(x)=\ln(1+\tan x)$的图像

我们使用对称法时，核心是寻找被积函数的对称关系，如本题$f(x)+f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2$意味着图像关于点$(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2})$中心对称。为寻找到这样的对称关系，我们通常可以从尝试计算函数值$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$入手。对于一般的积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，则通常考察关于积分区间中垂线$x=\frac{a+b}{2}$的两个点$f(a+b-x)$和$f(x)$的关系着手，尝试用$f(x)$表示$f(a+b-x)$。

1.3 利用定积分的方法计算几何问题

利用定积分计算几何问题的基本框架分为“画图-写出曲线方程-根据公式写出积分-计算定积分”，在“根据公式写出积分”一步时，我们需要额外关注积分上限和积分下限的确定，这一点是容易犯错的。在“写出曲线方程”一步，需要根据曲线特点和计算目标选择使用何种方程。

三类方程简介

另外，由于曲线不一定是函数，我们计算几何问题使用的曲线方程一般分为三种：一般方程、参数方程，极坐标三种，我们分别以单位圆$x^2+y^2=1$的上半圆为例介绍。特别注意，**讨论曲线方程时必须注意自变量的定义域**。

1.一般方程$y=f(x)$，自变量x的取值范围$[a,b]$，此时曲线是一个函数。以椭圆上半圆为例，一般方程$y=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$，取值范围即椭圆长轴$[-1,1]$。

2.参数方程$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$，自变量$t\in[\alpha,\beta]$。参数方程能刻画的曲线是最丰富的，且对于同一曲线参数方程常常不唯一。以单位椭圆上半圆为例，参数方程$\begin{cases}x(t)=\cos t,\\ y(t)=\sin t,\end{cases}$，取值范围使得$y\geq 0$，因此$t\in[0,\pi]$。

3.极坐标$r=r(\theta)$，其中默认$r\geq 0$，自变量$\theta\in[\alpha,\beta]$。显然极坐标对应参数方

程$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta, \\ y = r(\theta)\sin\theta. \end{cases}$。以单位椭圆上半圆为例，极坐标方程$r=1$，其中$\theta\in[0,\pi]$。

不同的曲线，合理地选择适合的方程可以减小计算量。例如对椭圆来说，参数方程就是最方便的，而极坐标方程却很麻烦。

定积分算几何公式整理

曲线弧长

用一般方程算弧长：$s=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$。

用参数方程算弧长：$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t$。

用极坐标方程算弧长：$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta$。

旋转体的体积和侧面积

用一般方程算旋转体体积：$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$。

用一般方程算侧面积：$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$。

用参数方程算侧面积：$S=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t$。

用极坐标方程算侧面积：$S=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta$。

平面图形的面积

用一般方程计算两个曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$夹出图形面积：$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$，其中积分上下限$a,b$需要由图形决定。

用极坐标计算图形面积：$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$。

理解积分：以弧长公式为例

部分同学可能直接记忆了上面九个公式，我们这一节通过定积分的原理为大家讲解弧长公式的推导，辅助记忆的同时为大家加深对积分的理解。当然你也可以不阅读这一段选择直接记忆上述公式。

我们熟悉定积分的定义是“先分后积”，先将积分区间分解为小区间，然后依次计算曲边梯形面积。**而几何问题的计算同样是“先分后积”的思想，因此可以与定积分等效化。**例如，计算曲线L的弧长，我们可以把L分为许多小弧长微元$\mathrm{d}s$，然后再把这些弧长微元组合起来，即

$$s(L)=\int_L 1\mathrm{d}s\approx\sum_{j=1}^n(\mathrm{d}s), \tag{29}$$

我们为了把弧长微元简化为定积分的形式，由于弧长微元足够小，故使用勾股定理

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}. \tag{30}$$

对于一般方程、参数方程、极坐标方程，我们需要分别将弧长公式(29)中的弧长微元$\mathrm{d}s$写成关于微分$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}t$或$\mathrm{d}\theta$的表达式。对于一般方程，我们有

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \cdot \mathrm{d}x = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\mathrm{d}x. \tag{31}$$

将(31)代入(29)就得到一般方程的弧长公式

$$s(L) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x, \tag{32}$$

其中a, b是一般方程的定义域上下限。另一方面，我们用参数方程微分$\mathrm{d}t$表示弧长微元$\mathrm{d}s$有

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \cdot \mathrm{d}t. \tag{33}$$

将(33)代入(29)就得到参数方程的弧长公式

$$s(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t, \tag{34}$$

最后考虑极坐标方程，将极坐标方程写成参数方程

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}(r(\theta)\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}(r(\theta)\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} \cdot \mathrm{d}\theta = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} \cdot \mathrm{d}\theta. \tag{35}$$

将(35)代入(29)就得到参数方程的弧长公式

$$s(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta. \tag{36}$$

2 习题

题 1. 计算求极限$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}$

分析：本题为乘积式积分，为了创造出黎曼和的形式，我们首先取对数。

Proof. 取对数

$$\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right]. \tag{37}$$

由黎曼和近似有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right] = \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = [(x+1)\ln(x+1) - x]|_0^1 = 2\ln 2 - 1. \tag{38}$$

取指数得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}=\mathrm{e}^{2\ln 2-1}=\frac{8}{\mathrm{e}}. \tag{39}$$

□

题 2. 计算定积分$\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$。

分析：本题为思路明确的三角换元法题目，还要涉及递推定积分$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$的计算，是具有综合性的习题。

Proof. 首先显然$x^4\sqrt{1-x^2}$是偶函数，因此

$$\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x. \tag{40}$$

接着进行三角换元$x=\sin t$

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\mathrm{d}t. \tag{41}$$

利用分部积分递推的方法我们可以计算$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$。假定$n\geq 2$用分部积分：

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\\
&= -\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x\\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\left(1-\cos^2 x\right)\mathrm{d}x\\
&= (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,
\end{aligned} \tag{42}$$

由此$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$。结合$I_0=\frac{\pi}{2}$和$I_1=1$。由迭代法则得$I_4=\frac{3}{16}\pi$以及$I_6=\frac{5}{32}\pi$。于是

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=I_4-I_6=\frac{\pi}{32}. \tag{43}$$

□

注解 4. 本题在第一步做了对称性化简(40)，这样的化简使得积分区间由$[-1,1]$缩短为$[0,1]$。这样的化简对本题虽不是必要，但是通常可以降低计算错误的几率，因为x为负时可能开根号需要写绝对值。建议在可以通过偶函数等对称性化简时尝试形如(40)的化简。

注解 5. 关于积分$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$，我们实际还可以归纳如下

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2} & ,k\text{是偶数},\\ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} & ,k\text{是奇数}.\end{cases} \tag{44}$$

这一结论在下册的高数课程中非常重要，我们必须牢记推导方法。

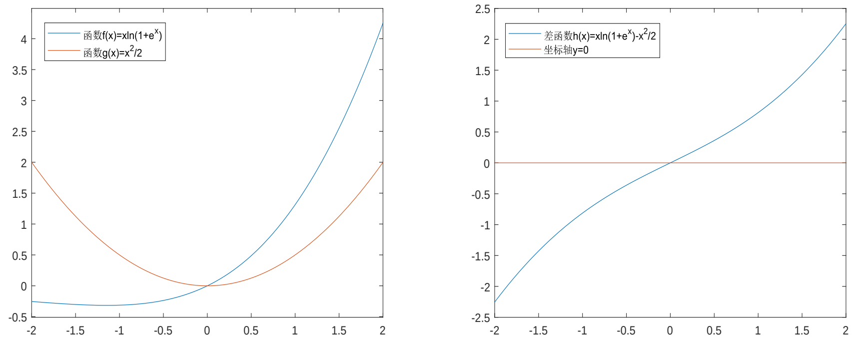

图 7: 左图：函数$y=x\ln(1+\mathrm{e}^x)$与函数$y=\frac{x^2}{2}$的图像；右图：左图二函数差值$y=\ln(1+\mathrm{e}^x)-\frac{x^2}{2}$的图像。

题 3. 用对称性计算积分

1.$\int_{-2}^{2} x\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$

2.$\int_{-1}^{1} \frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$

Proof. **1.**设$f(x)=x\ln(1+\mathrm{e}^x)$。为寻找对称性，计算

$$f(-x)=-x\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)=-x\left[\ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right)+\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right]=x^2-f(x). \tag{45}$$

由此得关系式$f(x)+f(-x)=x^2$。乍看此式找不到f任何对称性，但是结合图7我们发现，对于相反的两个点x与$-x$，函数f在x处多出$\frac{x^2}{2}$的部分和f在$-x$处少于$\frac{x^2}{2}$部分一样多。换言之，函数$g(x)=x\ln(1+\mathrm{e}^x)-\frac{x^2}{2}$是奇函数，如图7所示。亦即

$$f(x)-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}-f(-x). \tag{46}$$

从几何上看，函数$f(x)=x\ln(1+\mathrm{e}^x)$与$y=\frac{x^2}{2}$夹出的两部分（右上和左下）面积一样大，我们可以把右上部分挪到左下计算，即

$$\int_{-2}^{2} x\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{8}{3}. \tag{47}$$

2.本题被积函数虽没有对称性，但是考虑积分$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\arcsin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$，被积函数$\frac{x^2\arcsin x}{1+x^2}$是奇函数，由此

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\arcsin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0. \tag{48}$$

由此

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=(x-\arctan x)|_{-1}^{1}=2-\frac{\pi}{2}. \tag{49}$$

□

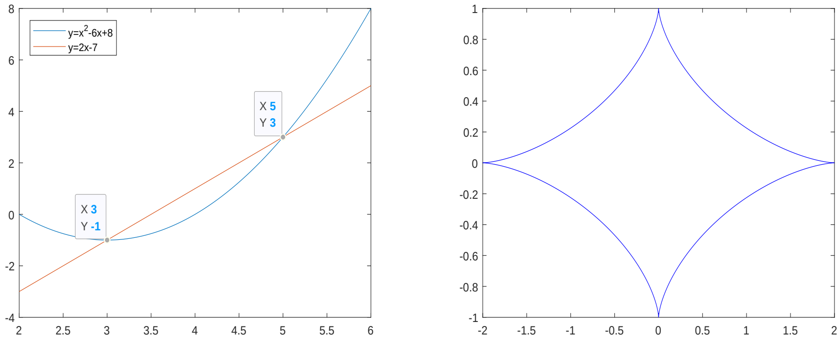

图 8: 题4的示意图。左图：两条曲线$y=x^2-6x+8$与$y=2x-7$；右图：封闭曲线$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$，其中假定$a=2,b=1$。

题 4. 用定积分求解几何问题

1.求曲线$y=x^2-6x+8$与曲线$y=2x-7$所围图形面积。

2.求曲线$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$长，其中$a>0,b>0$。

分析：做定积分解几何问题，必须严格遵从"画图-写出曲线方程-根据公式写出积分-计算定积分"四步。我们在图8中展示本题的两个示意图。

Proof. **1.**本题的曲线方程是已经给出的，两个交点坐标$(3,-1)$和$(5,2)$。由此我们计算

$$S=\int_3^5\left(2x-7-x^2+6x-8\right)=\int_3^5\left(-x^2+8x-15\right)=\frac{4}{3}. \tag{50}$$

2.用一般方程直接计算曲线长显然很复杂，我们首先根据曲线方程可以给出参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=b\sin^3 t, \end{cases}, \tag{51}$$

其中$t\in[0,2\pi)$。注意到图像是在四个象限对称的，我们只需要计算第一象限的部分，代入参数方程的曲线长公式：

$$\begin{aligned} s(L) &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(3a\cos^2 t\sin t\right)^2+\left(3b\sin^2 t\cos t\right)^2}\mathrm{d}t \\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t\right)}\mathrm{d}t \\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{52}$$

解决上述微分最直接的相反便是凑微元$\cos t\mathrm{d}t=\mathrm{d}\sin t$，用换元$z=\sin t$有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^1 z\sqrt{a^2+\left(b^2-a^2\right)z^2}\mathrm{d}z. \tag{53}$$

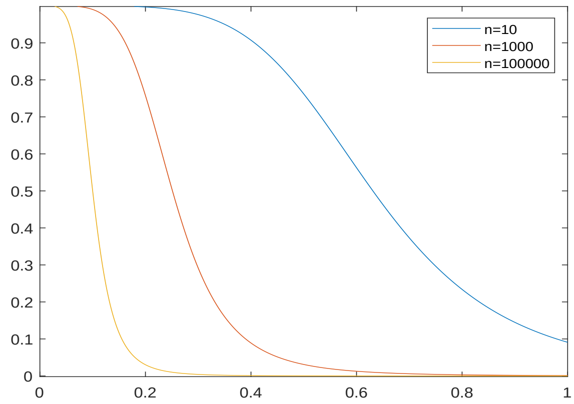

图 9: 函数$y=\frac{1}{1+nx^5}$在$n=10,1000,100000$时，在$x\in[0,1]$的示意图。

接下来的分析要分为$b\neq a$和$b=a$讨论，我们只讨论$b\neq a$的情形，另一种情况答案一致。注意到式(53)仍可以凑微分，我们用换元$w=z^2$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 z\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\,z^2}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(a^2+\left(b^2-a^2\right)w\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{3\left(b^2-a^2\right)}\left(a^2+\left(b^2-a^2\right)w\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \\
&= \frac{1\left(b^3-a^3\right)}{3\left(b^2-a^2\right)}. \qquad (54)
\end{aligned}
$$

结合(52)有

$$
s(L)=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=\frac{4\left(a^2+b^2+ab\right)}{a+b}. \qquad (55)
$$

□

题 5. 计算下列极限

1.$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}$。

2.$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\int_0^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$。

分析：本题两个小问都是与定积分有关的极限问题，并且都不能简单地通过算出积分计算。第一问使用分段放缩的方法结合$\varepsilon-N$语言，第二问则采用分部积分。希望同学们可以从两个题目学到一些在不能求解定积分具体值时估算积分大小的方法。

Proof. **1.**结合图9，我们发现随着n变大，函数$y=\frac{1}{1+nx^5}$从$y(0)=1$开始，趋向于0的速度越来越快。因此我们希望证明$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}=0$。我们注意到$y=\frac{1}{1+nx^5}$的图像在$[0,1]$大致可以分为两段：其一是在$[0,\delta]$，其中$\delta$通常很小，此时$y=\frac{1}{1+nx^5}$的函数值大致仍等于1；其二是$[\delta,1]$，此时$y=\frac{1}{1+nx^5}$快速向0下降（并不是收敛到0）。依据这样的理解，我们结合$\varepsilon-N$语言证明$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}=0$。

对$\forall\varepsilon>0$，我们希望找到一个N，使得$n>N$时有$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}<\varepsilon$（注：积分值是正数）。我们首先取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，并在$[0,\delta]$和$[\delta,1]$两部分分别讨论积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}$。首先

$$\int_0^\delta\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}\le\int_0^\delta 1\mathrm{d}x=\delta=\frac{\varepsilon}{2}. \tag{56}$$

其次

$$\int_\delta^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}\le\int_\delta^1\frac{\mathrm{d}x}{nx^5}=-\frac{1}{4n}\frac{1}{x^4}\bigg|_\delta^1=\frac{1}{4n}-\frac{1}{4n\delta^2}\le\frac{1}{4n}. \tag{57}$$

因此我们得到对积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}$的估计

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{4n}. \tag{58}$$

此时我们再取$N=[\frac{1}{2\varepsilon}]+1$，当$n>N$时有$\frac{1}{4n}<\frac{\varepsilon}{2}$，由此$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}<\varepsilon$。结合极限的定义，我们证明了$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}=0$。

2.本题显然不能使用洛必达法则。我们用分部积分法处理分母的积分

$$\begin{aligned}\int_0^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t &= \int_0^x t^2\cdot\left(\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^x t^2\cdot\left(\cos\frac{1}{t}\right)'\mathrm{d}t\\ &= t^2\cos\frac{1}{t}\bigg|_0^x-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\ &= x^2\cos\frac{1}{x}-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{59}$$

那么分别计算有

$$\lim_{x\to0+0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=0. \tag{60}$$

此外由于

$$\left|\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right|\le\int_0^x\left|t\cos\frac{1}{t}\right|\mathrm{d}t\le\int_0^x t\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}. \tag{61}$$

由夹逼原理

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}=0. \tag{62}$$

因此

$$\lim_{x\to0+0}\frac{1}{x}\int_0^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\lim_{x\to0+0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}=0 \tag{63}$$

□

题 6. 设I是一个开区间，$f(x)\in C(I)$，设$a,b\in I$且$a<b$求证：

$$\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=f(b)-f(a). \tag{64}$$

分析：本题一定不可以用如下的方法做：

$$\lim_{h\to0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\mathrm{d}x=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a). \tag{65}$$

原因有两个：首先f仅仅连续，不能保证导数$f'(x)$存在；其次，**没有任何理论保证求极限操作和求定积分操作可以交换次序**，即对一般的$f(x,h)$，我们不能保证

$$\lim_{h\to h_0}\int_a^b f(x,h)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\lim_{h\to h_0}f(x,h)\right]\mathrm{d}x, \tag{66}$$

成立。实际上，如果需要保证积分和极限操作可以换序，依赖下学期要学的概念“一致收敛”。

Proof. 我们对积分进行变形

$$\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{f(x+h)}{h}\mathrm{d}x-\int_a^b\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x, \tag{67}$$

为了进一步化简，我们对上面的第一个积分式做换元$y=x+h$使得两个积分式的被积函数一致

$$\int_a^b\frac{f(x+h)}{h}\mathrm{d}x\overset{y=x+h}{=\!=\!=\!=}\int_{a+h}^{b+h}\frac{f(y)}{h}\mathrm{d}y, \tag{68}$$

由于式(67)两个积分式被积函数相同，我们可以重新计算他们的差

$$\begin{aligned}&\int_a^b\frac{f(x+h)}{h}\mathrm{d}x-\int_a^b\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x\\=&\int_{a+h}^{b+h}\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x-\int_a^b\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x\\=&\left[\int_b^{b+h}\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x+\int_{a+h}^b\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x\right]-\left[\int_a^{a+h}\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x+\int_{a+h}^b\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x\right]\\=&\int_b^{b+h}\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x-\int_a^{a+h}\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{69}$$

接下来使用积分中值定理，对于每一个h，都存在$\xi_1,\xi_2\in I$使得

$$\int_b^{b+h}\frac{f(x)}{h}dx=h\cdot\frac{f(\xi_1)}{h}=f(\xi_1)\quad,\int_a^{a+h}\frac{f(x)}{h}dx=h\cdot\frac{f(\xi_2)}{h}=f(\xi_2), \tag{70}$$

其中$\xi_1\in[b,b+h],\xi_2\in[a,a+h]$。代入得到

$$\int_a^b\frac{f(x+h)}{h}\mathrm{d}x-\int_a^b\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x=f(\xi_1)-f(\xi_2). \tag{71}$$

此时我们考虑极限$h\to 0$，根据连续性的定义我们知道$\lim_{x\to b}f(x)=f(b)$。考虑到$\xi_1\in[b,b+h]$有$\lim_{h\to 0}\xi_1=b$，进一步$\lim_{h\to 0}f(\xi_1)=f(b)$。同理$\lim_{h\to 0}f(\xi_2)=f(a)$，亦即

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0}[f(\xi_1)-f(\xi_2)]=f(b)-f(a). \tag{72}$$

□

注解 6. 处理被积函数是分式的积分$\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x$时，用形如式(67)和(68)的变形，可以将积分转化为更简单的两个分式的差$\int_b^{b+h}\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x-\int_a^{a+h}\frac{f(x)}{h}\mathrm{d}x$。这种代数变形技巧是定积分证明题相当常见的。

题 7. 设$f(x)$在$[0,1]$有连续的导函数，求证对于一切$x\in[0,1]$都有

$$|f(x)|\le\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t+\int_0^1\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t. \tag{73}$$

并求使得不等式对所有$x\in[0,1]$都取等的$f(x)$。

分析：由于本题两个积分的值无法计算出来，我们用积分中值定理的方法将积分的值表述出来。

Proof. 根据积分中值定理，由于$|f|$的连续性，存在$\xi\in[0,1]$使得

$$\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t=|f(\xi)|. \tag{74}$$

因此我们只要证明，对一切$x\in[0,1]$都有

$$|f(x)|-|f(\xi)|\le\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t. \tag{75}$$

我们首先讨论$\xi\ge x$的情况。由于被积函数$|f'(t)|$是正的，因此

$$\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t\ge\int_x^\xi|f'(t)|\mathrm{d}t\ge\left|\int_x^\xi f'(t)\mathrm{d}t\right|=|f(x)-f(\xi)|. \tag{76}$$

再根据三角不等式有

$$\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t\ge|f(x)-f(\xi)|\ge|f(x)|-|f(\xi)|. \tag{77}$$

对于$\xi<x$的情况证明方法只需调换一下积分上下限。

如果希望不等式对一切$x\in[0,1]$均取等，我们发现右端的积分式$\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t+\int_0^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t$与$x$无关，此时仍取等说明$f(x)$为常值函数。设$f(x)\equiv C$，不等式化为

$$C\le\int_0^1|C|dt, \tag{78}$$

因此对一切非负常值函数，均符合要求。 □

注解 7. 我们指出**三角不等式**在本题证明里发挥的作用。三角不等式是指$|A+B|\le|A|+|B|$，其中$A,B\in\mathbb{R}$。另一种三角不等式是差式的形式$|A-B|\ge||A|-|B||$。三角不等式在高等数学最常见的应用，是我们想估计式$|A-B|$时，直接难以估计，就寻找跳板：

$$|A-B|\le|A-C|+|B-C|, \tag{79}$$

然后分别估计式$|A-C|$和$|B-C|$。此外，很多和绝对值有关的证明题，做题人直觉容易得出结论的正确性，可是却不能写严格，这时借助“三角不等式”这一简单易懂的结论，可以将复杂的绝对值分类讨论快速说清楚。

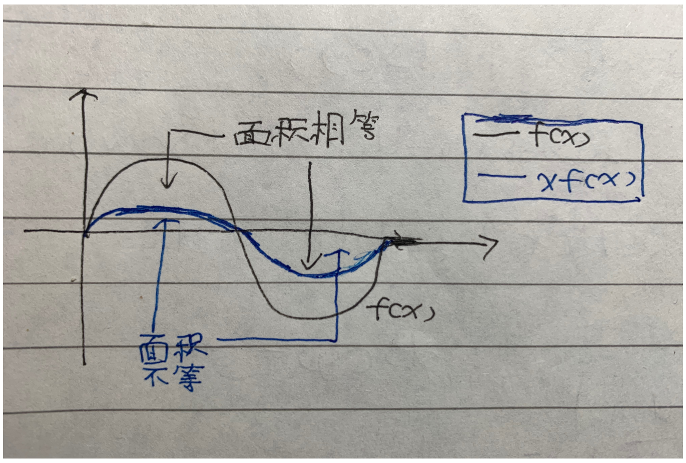

图 10: 假定函数$f(x)$有且仅有一个零点时，函数$f(x)$和$xf(x)$图像的示意图。

题 8. 设$f(x)$是$[0,1]$的连续函数，并且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{80}$$

求证$f(x)$在$[0,1]$至少有两个零点。

分析：根据$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$结合积分中值定理，很容易知道$f$在$[0,1]$必存在一个零点，我们反设$f$零点唯一，则图像如图10所示。此时$f(x)$在$x$轴以上和以下两部分面积必然要相等，则自然造成了函数$xf(x)$在x轴以上和以下两部分面积不相等，导致$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 0$不成立。我们将把这段分析写成严格的叙述。本题还有一种比较巧妙的方法。

Proof. **方法1:** 根据$\int_0^1 f(x)dx = 0$和积分中值定理，存在$\xi \in [0,1]$使得$f(\xi) = 0$。我们使用反证法，假如ξ是$[0,1]$上的唯一零点，因此不妨

$$\begin{cases} f(x) > 0 \quad , \quad x \in [0,\xi), \\ f(x) < 0 \quad , \quad x \in (\xi,1]. \end{cases} \tag{81}$$

因此根据题设我们有

$$\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x + \int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{82}$$

我们首先排除$\xi = 0$的可能，如果0是$f(x)$在$[0,1]$唯一零点，那么$\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x = 0$，进一步$\int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$。考虑到$f(x) < 0$对一切$x \in (\xi,1]$成立，这说明$\int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$不可能成立。因此$\xi \neq 0$。同理$\xi \neq 1$。

此时根据$f(x)$的符号，我们分别有

$$\begin{cases} xf(x) < \xi f(x), \quad x \in (0,\xi), \\ xf(x) < \xi f(x), \quad x \in (\xi,1). \end{cases} \tag{83}$$

再根据$\int_0^1 xf(x)ddx = 0$得到

$$\int_0^\xi xf(x)\mathrm{d}x < \xi\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x = -\xi\int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x < -\int_\xi^1 xf(x)\mathrm{d}x. \tag{84}$$

这说明$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x < 0$，与题设矛盾。因此$f$在$[0,1]$不可能有且仅有一个零点，即至少有两个零点。

方法2 依然假设$f(x)$在$[0,1]$有且只有一个零点ξ，并且不妨设f的正负关系如式(81)。那么

$$\int_0^1 (x-\xi)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x - \xi\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{85}$$

而考虑到ξ是$f(x)$唯一零点，也是的一次多项式$x-\xi$的唯一零点，那么函数$(x-\xi)f(x) < 0$对每一个$x \neq \xi$都成立，因此

$$\int_0^1 (x-\xi)f(x)\mathrm{d}x < 0. \tag{86}$$

这与式(85)形成矛盾。 □

注解 8. 实际本题应用了如下直观但并非显然的结论：如果$f(x)$和$g(x)$都是$[a,b]$上的连续函数，且$f(x) < g(x)$对一切$x \in [a,b]$成立，那么$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。利用连续性的性质即可证明，如果$f$或$g$不连续这一结论可能不成立。

题 9. 设$f(x)$是$[0,2\pi]$的连续函数，求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x. \tag{87}$$

分析：本题依然涉及对积分$\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x$的估计，当$n$很大时，项$\sin nx$的存在使得被积函数是高频震荡的。为此我们使用分段的方法，同时结合积分中值定理（完整版本进行证明。

Proof. 根据$\sin nx$的周期将区间$[0,2\pi]$划分，并使用完整版的积分中值定理

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^n \int_{(2(k-1)\pi)/n}^{(2k\pi)/n} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\int_{(2(k-1)\pi)/n}^{(2k\pi)/n} |\sin nx|\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{88}$$

其中$\xi_k \in [\frac{(2k-2)\pi}{n}, \frac{2k\pi}{n}]$。注意到积分

$$\int_{(2(k-1)\pi)/n}^{(2k\pi)/n} |\sin nx|\mathrm{d}x \xlongequal{y=nx} \frac{1}{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} |\sin y|\mathrm{d}y = \frac{4}{n}. \tag{89}$$

由此

$$\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \frac{4}{n} f(\xi_k) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n \frac{2\pi}{n} f(\xi_k) \to \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x, \tag{90}$$

最后一个极限式使用了黎曼和的定义。 □