多元函数微分学讲义：习题版

谢彦桐

北京大学数学科学学院

2021.12.7

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。题型说明，基础题指方法非常标准的题目，综合题指方法标准但需要一些技术技巧的题目，进阶题指方法不常规的题目。

1 知识点理解

本章的主要研究对象是自变量为多维向量的函数，这些函数也可以看作有多个数值作为自变量的函数，为了方便起见我们一般以二元函数为例讨论，高维的情况也是一致的。我们本章的目的是将一元函数的极限、连续、导数、微分、泰勒公式和中值定理等理论推广到多元函数，因此学习时需要同学们将多元函数情形与一元函数情形对应，着重理解其异同。

为了理解二元函数的各种性质，我们首先从二元函数的自变量出发。对于二元函数$f(x,y)$，我们自然可以理解f有两个独立的自变量，**但是更多的时候我们则把$f(x,y)$看作是二维平面上的点来分析**。为了方便起见，我们称二元函数自变量的两种理解方式为**独立自变量视角**和**点视角**。二元微分学的概念中，偏导数是独立自变量视角的概念，而包括极限、连续、微分和泰勒公式在内的大多数概念都是点视角的。一般来说，以独立自变量视角考察二元函数只能得到函数单个自变量方向的信息，因此点视角包含的信息比独立自变量视角更多。

1.1 二元函数的极限和连续

按照学习一元微分学的步骤，我们首先学习二元极限问题的处理方法，然后定义二元函数的连续性。

二元函数极限的定义和理解

目标有两个：理解二元极限的定义、以二元极限为例体会一元函数和二元函数的

分析方法之不同。与此前类似，我们分别介绍二元极限的定义和理解方式。首先是二元极限严格定义：设$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某空心邻域有定义，称$f(x,y)$**在点**(x_0,y_0)**收敛于极限**A，如果对于$\forall\varepsilon>0$，都存在$\delta>0$，只要$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$就有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,\text{或}\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A. \tag{1}$$

我们发现，二元极限的$\varepsilon-\delta$定义的“轮廓”与一元极限是非常类似的，定义将二元函数的自变量看作平面上的点，研究函数在某点附近的函数值聚拢现象。唯一的不同点是，当我们刻画点(x,y)向(x_0,y_0)靠拢时，我们使用勾股定理定义了距离：

$$|(x,y)-(x_0,y_0)|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}. \tag{2}$$

我们在后续也会用符号$|\cdot|$表示平面点的距离。总结下来，二元函数是点视角的概念，通过勾股定理刻画点(x,y)向(x_0,y_0)的靠拢，而不是简单地使得两个自变量x,y分别先后向x_0,y_0靠近。

对于一元函数极限$\lim_{x\to x_0} f(x)$，极限收敛必需左极限与右极限不相等，即我们将点x从x_0的左侧或右侧接近x_0时，$f(x)$的极限必需相等。对于多元函数的极限，由于考虑对象是平面上的点，当我们使点(x,y)靠近点(x_0,y_0)时，接近的方式不只有从左接近和从右接近，点(x,y)可以从平面的上下左右各个方向，甚至沿着斜线接近点(x_0,y_0)。**要想保证二元极限**$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$**收敛，就必须使得点**$(x,y)$**由各个方向接近点**$(x_0,y_0)$**时得到的“单侧极限”都收敛**。因此，二元极限的收敛比起一元极限情形，条件要求更苛刻些。

综上所述，我们指出二元函数的两个重要特点：
1.二元函数$f(x,y)$的自变量虽然有两个，但是我们常常要将$f(x,y)$的自变量看成平面上的点(x,y)来讨论。
2.当我们考虑点(x,y)接近点(x_0,y_0)时，接近的过程可能来自点(x_0,y_0)周围的各个方向，自变量x,y在接近过程中并没有先后之分。

二元极限的计算技巧

计算极限一般不通过极限的定义，而是有专门的求解技巧，二元极限也不例外。这一部分旨在介绍二元极限的解题框架和计算技巧。

二元极限问题的麻烦之处在于，证明二元极限的收敛和发散的方法完全不同，所以我们必须首先判断我们要分析的极限是收敛还是发散，然后再选择对应的做法来计算极限值或证明极限发散。我们首先分为极限收敛和发散两种情形来介绍解题方法。

对于收敛的极限，处理方法大致有两种：**夹逼原理**和**整体分析法**。夹逼原理的做

法是，如果我们想证明$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，就设法对$|f(x,y)-A|$进行放缩：

$$0 \le |f(x,y)-A| \le r(x,y), \tag{3}$$

这里$r(x,y)$是形式简单因而收敛性容易判别的函数。如果$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} r(x,y)$收敛于0，就说明$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$。大多数使用夹逼法完成的题目，极限值$A$一般是0，因此放缩$|f(x,y)-A|=|f(x,y)|$并不难。如下述例题：

例 1. 分析二元极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+\sin y)\cos\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right)$。

Proof. 我们要证明这一极限收敛于0，因此

$$\left|(x+\sin y)\cos\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right)\right| \le |x+\sin y|. \tag{4}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时，函数x和$\sin y$极限都是0，显所以$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x+\sin y|=0$，由此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+\sin y)\cos\left(\frac{1}{|x|+|y|}\right)=0. \tag{5}$$

□

一些比较复杂的问题，需要我们在使用夹逼原理的同时使用一些代数变形技巧，其中最重要的是极坐标换元技巧，详见后续习题。

整体分析法则通常利用极限的特定形式，将二元极限转化为一元极限来处理。我们来看下面的例题

例 2. 分析二元极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|)^{|x|+|y|}$。

Proof. 我们换元$z=|x|+|y|$，当$(x,y)\to(0,0)$时显然有$z\to 0+0$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(|x|+|y|)^{|x|+|y|}=\lim_{z\to 0+0} z^z=1, \tag{6}$$

其中一元极限$\lim_{z\to 0+0} z^z$用洛必达法则不难计算。 □

下面我们讨论二元极限发散的证明，其方法是**多路径逼近法**。对于一元极限，如果左右极限不相等，就说明极限发散。推广到二元极限$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$，我们可以通过考察点$(x,y)$从不同路径向$(x_0,y_0)$收敛的过程，如果得到的极限不同，或是某一收敛过程极限发散，就说明二元极限不存在。

例 3. 分析二元极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5y^3}{x^8+y^8}$。

Proof. 考虑点(x,y)接近原点的过程，我们选择两种不同的方式：首先假设点(x,y)沿着x轴接近原点，即$y=0$代入二元极限，得到

$$I_1=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^8+0}=0. \tag{7}$$

其次，我们考虑点(x,y)沿直线$y=x$（即斜45度方向）接近原点，代入$y=z$得

$$I_2=\lim_{x\to 0}\frac{x^8}{x^8+x^8}=\frac{1}{2}. \tag{8}$$

特别地$I_1\neq I_2$，所以二元极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5y^3}{x^8+y^8}$发散。 □

总结得到二元极限问题的解题步骤：

1.设法猜测二元极限收敛或发散。

2.如果想证明二元极限收敛，可以通过夹逼原理和整体分析法。

3.如果想证明二元极限发散，可以通过多路径逼近法。

特别地，上述步骤的难度通常在于，我们没有固定方法可以从题目表明上判断二元极限究竟收敛还是发散。所以在分析二元极限时，一定要确保自己证明目标（收敛或发散）是正确的，如果长时间做不出来，可以考虑切换证明目标。

累次极限和全面极限

之前我们给出的二元极限也称为全面极限。我们介绍另外一种极限的定义方式：累次极限。函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的累次极限有两种：先x后y的累次极限

$$\lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0}f(x,y)\right]. \tag{9}$$

和先y后x的累次极限

$$\lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0}f(x,y)\right]. \tag{10}$$

注意到累次极限是由嵌套的的两个一元极限构成的，累次计算的计算步骤如下（以"先x后y"为例）：

1.固定$y\neq y_0$，计算关于x的极限$\lim_{x\to x_0}f(x,y)$，记为$A(y)$。

2.计算关于y的极限$\lim_{y\to y_0}A(y)$。

注解 1. 在累次极限的第一步计算时，我们不需要计算$y=y_0$时极限的值$A(y_0)=\lim_{x\to x_0}f(x,y_0)$，这是因为计算外层极限$\lim_{y\to y_0}A(y)$时并不依赖函数值$A(y_0)$。

显然，累次极限是独立自变量视角下的概念，全面极限是点视角下的概念。同样是使得(x,y)接近(x_0,y_0)，累次极限先让x接近x_0而后使y接近y_0，全面极限则让点(x,y)整体接近点(x_0,y_0)。由于视角的不同，**累次极限和全面极限的存在或值没有任何联系。**

累次极限存在可能全面极限不存在，全面极限存在可能累次积分不存在。因此计算累次极限问题，我们必须将累次极限的运算看作两次一元极限计算来求解。

计算累次极限，尤其是分段函数的累次极限是一类重要的题型：

例 4. 计算$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$在$(0,0)$的全面极限和累次极限。

Proof. 先计算全面极限，用夹逼原理：

$$\left|x\sin\frac{1}{y}\right|\leq |x|, \tag{11}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时$|x|\to 0$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0. \tag{12}$$

再计算累次极限，首先是“先x后y”的极限。对$y\neq 0$有

$$A(y)=\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}=0. \tag{13}$$

然后计算极限

$$\lim_{y\to 0} A(y)=\lim_{y\to 0} 0=0. \tag{14}$$

接着是“先y后x”的极限，对$x\neq 0$计算

$$B(x)=\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}=\text{发散}. \tag{15}$$

所以累次极限$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$不存在。 □

注解 2. 在本例中，计算“先y后x”的累次极限时，固定x的极限$\lim_{y\to 0} f(x,y)$即不存在，这种情况我们规定累次极限$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$不存在。这一例题说明，全面极限以及两个累次极限的值毫无关系。

多元函数连续性

最后我们讨论二元函数的连续性，其定义是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0). \tag{16}$$

因此当我们要证明二元函数的连续时，需要证明的其实是二元极限(16)。所以二元连续是点视角下的概念。

例 5. 设$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，问$f$在点$(0,0)$是否连续？

Proof. 我们想讨论f在点$(0,0)$是否连续，实质是讨论极限

$$I=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}, \tag{17}$$

是否为0。下面讨论二元极限I：取$x=y$时

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \tag{18}$$

取$y=0$时

$$I=\lim_{x\to 0}0=0. \tag{19}$$

所以极限I是发散的，因此f在点$(0,0)$不连续。 □

1.2 偏导数和全微分

偏导数和全微分是本章的核心概念。简单来说，偏导数是二元函数独立自变量视角下的定义，全微分（简称“微分”）是二元函数点视角下的定义。因此偏导数只包含了单个方向的信息，而全微分包含了更多的，来自函数各个方向的信息。

偏导数

我们把二元函数$f(x,y)$看作两个独立自变量的函数，如果固定y，可以将$f(x,y)$看作只关于x的函数，并可以计算导数，记为$f(x,y)$关于自变量x的**偏导数**$\partial_x f$。用极限的语言定义是

$$\partial_x f(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{20}$$

显而易见，偏导数是独立自变量概念。$\partial_x f$代表的是给定y时x的变化率，刻画的是$f(x+\Delta x,y)$相较$f(x,y)$的变化，这一过程y是固定的。对于自变量y，也可以定义偏导数$\partial_y f$。值得一提的是，偏导数的符号是很多的，包括$\partial_x f,\frac{\partial f}{\partial x},f_x$等都表示偏导数。

偏导数的计算问题核心是搞清楚哪个变量是要求导的变量，哪个变量是固定的变量。一般来说，利用第二章学过的求导公式就可以计算偏导数。一些比较复杂的函数，如分段函数，则可能需要使用定义计算偏导数，详见下面两个例题：

例 6. 计算函数$f(x,y,z)=\left(\frac{2y}{z}\right)^x$的偏导数在$(1,2,1)$处的函数值。

Proof. 先计算$\partial_x f$，由于此时y,z是固定的，而x是自变量，因此函数$\left(\frac{2y}{z}\right)^x$的底数$\frac{2y}{z}$固定，所以是幂函数，因此

$$\partial_x\left(\frac{2y}{z}\right)^x=\ln\left(\frac{2y}{z}\right)\left(\frac{2y}{z}\right)^x. \tag{21}$$

所以$\partial_x f(1,2,1)=4\ln 4$。

再计算$\partial_y f$，由于x,z是固定的，所以函数$\left(\frac{2y}{z}\right)^x$的指数实际是固定的，因此

$$\partial_y\left(\frac{2y}{z}\right)^x = x\left(\frac{2y}{z}\right)^{x-1}\partial_y\left(\frac{2y}{z}\right) = \frac{2x}{z}\left(\frac{2y}{z}\right)^{x-1}. \tag{22}$$

所以$\partial_y f(1,2,1) = 2$。

最后计算$\partial_z f$，得到

$$\partial_z\left(\frac{2y}{z}\right)^x = x\left(\frac{2y}{z}\right)^{x-1}\partial_z\left(\frac{2y}{z}\right) = -\frac{2xy}{z^2}\left(\frac{2y}{z}\right)^{x-1}. \tag{23}$$

所以$\partial_z f(1,2,1) = -4$。 □

例 7. 设$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$，求$f$的两个偏导数。

Proof. 注意到f是分段函数，所以我们要根据(x,y)是否为$(0,0)$分别计算偏导数。当$(x,y) \neq (0,0)$时，我们可以使用一元函数求导公式计算偏导数

$$\partial_x f(x,y) = (\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}. \tag{24}$$

当$(x,y) = (0,0)$时，由于函数是分段定义的，我们使用定义求偏导数

$$\partial_x f(0,0) = \partial_x f(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \partial_x f(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{0-0}{\Delta x} = 0. \tag{25}$$

综合上述

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases} \tag{26}$$

同样计算得

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases} \tag{27}$$

□

我们指出，在计算偏导数$\partial_x f$在某点(x_0,y_0)的函数值$\partial_x f(x_0,y_0)$时，我们既可以直接计算出偏导数$\partial_x f(x,y)$表达式然后代入$(x,y) = (x_0,y_0)$，也可以首先代入$y = y_0$然后对一元函数$g(x) = f(x,y_0)$求导得到$g'(x_0) = \partial_x f(x_0,y_0)$。

对于分段函数而言，在特殊点的偏导数是需要使用定义计算的。如例7的f在$(0,0)$是单独定义的，因此在计算偏导数$\partial_x f(0,0)$时，我们必须写出定义的式子：

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}. \tag{28}$$

上述步骤一定不要省略，否则容易犯错。接着我们代入值$f(\Delta x,0) = f(0,0) = 0$（注：当$y = 0$时函数值总是0），就可以得到导函数的值$\partial_x f(0,0) = 0$。

高阶偏导数

我们注意到偏导数$\partial_x f$也是一个二元函数，因此我们可以讨论$\partial_x f(x,y)$的连续性和$\partial_x f(x,y)$的导数。偏导数$\partial_x f$的导数被称为**二阶偏导数**，记为$\partial_{xx} f$和$\partial_{xy} f$，其中形如$\partial_{xy} f$的对不同自变量求偏导数得到的二阶偏导数被称为**混合偏导数**。依次类推还可以得到高阶偏导数。与一元函数类似，我们称具有更高阶导数的函数具有更高的光滑性。

二阶偏导数的计算本身难度不大，**其核心是先算出一阶偏导数的表达式然后再对指定自变量求偏导**。关于混合偏导数有一个有趣的结论：如果二元函数$f(x,y)$的两个混合偏导数在区域D存在且连续，那么两个混合偏导数$\partial_{xy} f = \partial_{yx} f$在$D$成立。这也使得我们在研究混合偏导数时，不需关心先对f的哪个自变量求导，只要f有足够的光滑性，那么f的两个混合偏导数是一致的。

全微分

我们指出过，偏导数和高阶偏导数都是独立自变量意义下的概念，因此偏导数和高阶偏导数都只能体现$f(x,y)$固定一个自变量时另一自变量的变化率。如果想收集点(x,y)靠近点(x_0,y_0)时$f(x,y)$的整体变化率，仅仅体现单个方向变化的偏导数远远不够。接着我们引入全微分。

回忆一元全微分，我们的想法是化曲为直，即希望

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{29}$$

其中A是待定常数，$A\Delta x$是f在点x_0的微分，它是对f的变化值Δf的近似，近似误差是高阶无穷小量$o(\Delta x)$。

对二元函数使用微分的**化曲为直**思想，就可以用二元线性函数$A\Delta x + B\Delta y$去近似变化值$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$，其中$A,B$是待定常数。用严格的数学语言叙述：如果$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$某邻域里有定义，并且存在实数$A,B$使得

$$\Delta u = u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0), \tag{30}$$

其中$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$。那么称二元线性函数$A\Delta x + B\Delta y$为$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$的**全微分**，此时$f$在点$(x_0,y_0)$**可微**。为了方便起见，我们一般将全微分记做

$$\mathrm{d}u = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y. \tag{31}$$

当题目需要我们计算全微分时，结果就是形如式(31)的形式。

注解 3. 需要特别注意的是，全微分也是一个$\rho \to 0+0$的“极限行为”，o符号用极限语言叙述是$\lim_{\rho\to 0+0} \frac{1}{\rho}\left(\Delta f - A\Delta x + B\Delta y\right) = 0$，我们不能简单地断言$\Delta f$和$A\Delta x + B\Delta y$相等。

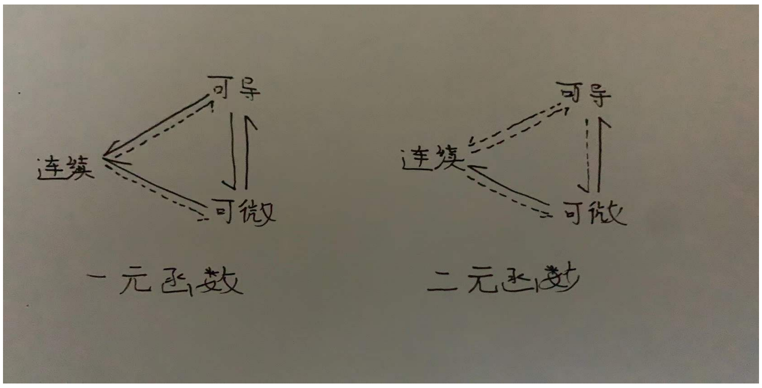

图 1: 图片展示了一元函数的可微、可导、连续三个概念的关系和二元函数的可微、可偏导、连续三个概念的关系。图中的实线箭头代表可以推出，例如一元情形可微可以推出连续；图中的虚线代表无法推出或需要增补其他条件才可以推出，如一元情形连续一般推不出可微。

最后我们讨论全微分的计算，即需要求出待定常数A, B。这个任务看起来很复杂，实际并非如此，因为我们有下述结论：如果f在点(x_0, y_0)可微，那么f在点(x_0, y_0)的偏导数一定存在，并且全微分满足

$$\mathrm{d}f = \partial_x f(x_0, y_0)\mathrm{d}x + \partial_y f(x_0, y_0)\mathrm{d}y. \tag{32}$$

由此当题目需要我们计算全微分(31)时，我们只需要计算两个偏导数即可。

例 8. 计算函数$f(x, y, z) = \left(\frac{2y}{z}\right)^x$的在$(1, 2, 1)$处的全微分。

Proof. 我们之前已经计算出$\partial_x f(1, 2, 1) = 4\ln 4$，$\partial_y f(1, 2, 1) = 2$，$\partial_z f(1, 2, 1) = -4$，根据(31)得

$$\mathrm{d}f = 4\ln 4\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y - 4\mathrm{d}z. \tag{33}$$

□

偏导数、全微分和连续的关系

这一节我们数讨论二元函数连续、可求偏导和可微三个性质的关联和蕴含关系。相较一元函数可微和可导等价，二元函数的可微与可导完全不同，因此导致情况复杂些。

对于二元函数$f(x, y)$，偏导数是独立自变量视角下的结果，包含单向信息，全微分是点自变量视角下的结果，包含全局信息，因此全微分比偏导数包含更多的信息。因此很容易理解，f在某点可微是比可偏导（简称“可导”，一般指两个偏导数都存在）更强的结论，因此可微是可导充分不必要条件。如果再考虑f的连续性，我们自然不能期望连续性可以推出可导或可微。连续也是一个点自变量视角的概念，包含全局信息，所

以仅仅包含单向信息的可导性自然也不能推出连续，但是同样具有全局信息的可微性就可以推出可导。我们将三者的详细关系在图1展示。

虽然可偏导推不出可微，但是如果在偏导数的基础上加上一些条件，却能从可导推出可微：如果$f(x,y)$在点(x_0,y_0)某邻域里有定义，并且两个偏导数$\partial_x f(x,y)$和$\partial_y f(x,y)$在邻域中存在且在点(x_0,y_0)连续，那么f在点(x_0,y_0)可微。于是当题目要求我们证明f在某点可微时，我们的目标是证明各个偏导数在该点连续。

下面我们着重讨论证明函数不可微的方法，首先由于可微性蕴含连续性，因此如果f在某点不连续就一定不可微：

例 9. 设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，问$f$的偏导数在点$(0,0)$是否连续？$f$在点$(0,0)$是否可微？

Proof. 结合例7的计算结果计算。验证$\partial_x f$在点$(0,0)$的连续性，相当于验证极限

$$I=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y(y^2-x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0, \tag{34}$$

是否成立。由此问题转化为一个二元极限问题：取$x=y$时

$$I=\lim_{x\to 0}0=0, \tag{35}$$

取$x=0$时极限

$$I=\lim_{y\to 0}\frac{y^3}{y^4}=\infty. \tag{36}$$

由此二元极限I是发散的，于是$\partial_x f$在点$(0,0)$不连续。同理可推$\partial_x f$和$\partial_y f$在点$(0,0)$都不连续。

虽然$\partial_x f$和$\partial_y f$在点$(0,0)$都不连续，这不能说明f在$(0,0)$不可微。但是我们知道$f(x,y)$在点$(0,0)$不连续，由于可微性蕴含着连续性，所以f在$(0,0)$不可微。 □

在讲义的习题中，我们还会给出通过微分的定义和反证法证明不可微的方法。

梯度

接下来我们定义函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的**梯度**，指二维向量

$$\mathrm{grad} f\mid_{(x_0,y_0)}=\left(\partial_x f(x_0,y_0),\partial_y f(x_0,y_0)\right). \tag{37}$$

梯度的意义是函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)附近上升最快方向。如果f可微，那么函数f上升量

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx\left(\partial_x f(x_0,y_0),\partial_y f(x_0,y_0)\right)\cdot(\Delta x,\Delta y). \tag{38}$$

固定向量$(\Delta x, \Delta y)$的长度，当选择向量$(\Delta x, \Delta y)$平行于梯度向量$\mathrm{grad} f \mid_{(x_0,y_0)}$时，上升量$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$最大。这是因为为了使内积$(\partial_x f(x_0,y_0), \partial_y f(x_0,y_0)) \cdot (\Delta x, \Delta y)$最大，需要夹角的余项值最大，即夹角为0度。

例 10. 求函数$f(x,y,z) = \left(\frac{2y}{z}\right)^x$在点$(1,2,1)$下降最快的方向对应的单位向量。

Proof. 根据分析，下降最快的方向是负梯度方向，即

$$-\mathrm{grad} f \mid_{(1,2,1)} = (-4\ln 4, -2, 4). \tag{39}$$

由于我们要求该方向的单位向量，计算出模长$\left|\mathrm{grad} f \mid_{(1,2,1)}\right| = 2\sqrt{4\left(\ln 4\right)^2 + 5}$，所以下降最快方向

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{4\left(\ln 4\right)^2 + 5}}(-2\ln 2, -1, 2). \tag{40}$$

□

方向导数

偏导数研究的是$f(x,y)$在固定y时自变量x的导数，相当于研究$f(x,y)$在平行于x轴方向的变化率。我们希望将偏导数的概念延伸到$f(x,y)$在任意直线方向的变化率，就有了**方向导数**的概念：设$\mathbf{n} = (a,b)$是二维平面上的一个**单位向量**，那么f在(x_0,y_0)处关于$\mathbf{n}$方向的方向导数定义为

$$\partial_{\mathbf{n}} f = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+ta, y_0+tb) - f(x_0,y_0)}{t}. \tag{41}$$

方向导数相当于考虑$(x,y) = (x_0+ta, y_0+tb)$沿着$\mathbf{n}$方向接近(x_0,y_0)时，函数值的变化率。不过必须注意，代表方向的向量$\mathbf{n}$只允许是单位向量。

方向导数的计算可以通过偏导数的内积运算简单得到：

$$\partial_{\mathbf{n}} f = (\partial_x f(x_0,y_0), \partial_y f(x_0,y_0)) \cdot \mathbf{n}. \tag{42}$$

例 11. 求函数$f(x,y,z) = \left(\frac{2y}{z}\right)^x$在点$(1,2,1)$下降最快的方向的方向导数。

Proof. 我们即计算方向$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{4(\ln 4)^2+5}}(-2\ln 2, -1, 2)$的方向导数，根据(42)得

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{n}} f(1,2,1) &= \frac{1}{\sqrt{4\left(\ln 4\right)^2+5}}(-2\ln 2, -1, 2)\cdot(4\ln 4, 2, -4) \\ &= -2\sqrt{4\left(\ln 4\right)^2+5}. \end{aligned} \tag{43}$$

□

1.3 复合函数的偏导数

对于大多数有显表达式的函数，我们都可以通过一元函数的导数计算公式直接计算其偏导数。而对于没有表达式的函数，我们则需要借助复合函数偏导数的计算公式：链式法则。

链式法则

在介绍链式法则之前，我们首先思考导数是什么呢？导数刻画的是函数的一种特性：因变量关于自变量的变化速率。由此**导数也是函数**，求导实际是把一个函数$f(x)$转化成为另一个$f'(x)$的变换。例如通过求导变换就将函数$y=x^2$变换为新函数$y=2x$。对二元函数$f(x,y)$，偏导数也应该是关于x,y的函数。

同一个因变量的变化可能与不同的自变量有关，这就会产生**复合函数**。例如我们有函数$z=y^2$，自变量y本身又有依赖x的关系$y=x^2$。因此z除了和y有对应关系，和x也有对应关系$z=(x^2)^2$。当我们研究z对x的导数时，就需要借助复合函数的求导法则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}=2y\cdot 2x=4x^3. \tag{44}$$

式(44)是一元求导链式法则，它告诉我们，**要想计算因变量z对“隐藏”的内在自变量x的变化率（即导数），需要我们将z对y的变化率和y对x的变化率作用在一起**。但是$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$是关于自变量$x$的函数，由此我们将$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$和$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$乘在一起，最终还需要转化为关于自变量$x$的函数。

我们回归二元函数。设因变量z与自变量u,v有对应关系$z=f(u,v)$，而自变量u,v还与另外的自变量x,y有依赖关系$u=u(x,y)$和$v=v(x,y)$。如果我们关心z对u,v的变化率，那就只需要计算f的偏导数即可。如果我们关心z对x,y的导数，我们就必须将z对u,v的变化率和u,v对x,y的变化率作用起来，得到了一个“虚猧”的二元函数链式法则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{46}$$

上述“链式法则”虽然很简洁，但是我们必须强调偏导数是函数。所以偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$是关于$x,y$的二元函数，所以右侧项的每一项也要写成关于$x,y$的二元函数。因此可以将链式法则(45)-(46)写成带自变量的更完整形式的链式法则：

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y), \tag{47}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \tag{48}$$

接下来我们通过例题来熟悉链式法则：

例 12. 考虑函数$z=f(u,v)$其中$u=\mathrm{e}^x, v=y\sin x$，计算$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

Proof. 利用链式法则计算

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x, y\sin x)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x, y\sin x)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \\
&= \mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x, y\sin x)+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x, y\sin x). \qquad (49)
\end{aligned}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x, y\sin x)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x, y\sin x)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\
&= \sin x\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x, y\sin x). \qquad (50)
\end{aligned}
$$

□

复合函数二阶导数的计算

如果我们再去求z关于x,y的二阶偏导数，就是对偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$再求一次偏导数。$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$是关于$x,y$的二元函数，形式如(47)-(48)所示，具有复合函数的形式，因此需要我们仍然对式(47)-(48)使用链式法则。

不少同学在计算复合函数二阶导数遇到的问题，是无法理解如何对(45)-(46)中形如$\frac{\partial f}{\partial u}$的式子求导。但是我们必须明白，偏导数$\frac{\partial f}{\partial u}$也是函数，带自变量的形式由式(47)-(48)给出。

例 13. 考虑函数$z=f(u,v)$其中$u=\mathrm{e}^x, v=y\sin x$，计算$\frac{\partial^2}{\partial x^2}z$。

Proof. 我们需要对式(49)再对x求一次偏导数。式(49)中形如$\mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x, y\sin x)$的项，可以看作乘积函数来求导：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) \\
= {} & \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x, y\sin x)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x, y\sin x)\right] \\
= {} & \mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x, y\sin x)+\mathrm{e}^x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x, y\sin x)\right]-y\sin x\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x, y\sin x) \\
& +y\cos x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x, y\sin x)\right] \\
= {} & \mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{e}^x, y\sin x)+\mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^x\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\mathrm{e}^x, y\sin x)+y\cos x\frac{\partial^2 f}{\partial uv}(\mathrm{e}^x, y\sin x)\right] \\
& -y\sin x\frac{\partial f}{\partial v}(\mathrm{e}^x, y\sin x)+y\cos x\left[\mathrm{e}^x\frac{\partial^2 f}{\partial vu}(\mathrm{e}^x, y\sin x)+y\cos x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(\mathrm{e}^x, y\sin x)\right] \\
= {} & \mathrm{e}^x\frac{\partial f}{\partial u}+\mathrm{e}^{2x}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+y\cos x\mathrm{e}^x\frac{\partial^2 f}{\partial uv}-y\sin x\frac{\partial f}{\partial v}+y\cos x\mathrm{e}^x\frac{\partial^2 f}{\partial vu}+y^2\cos^2 x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \qquad (51)
\end{aligned}
$$

□

2 习题归类

下面总结本章经典题型，这些题型的解法都在对应章节可以找到

1.二元极限的分析：包括收敛和发散两种情况的讨论方法，有时需要结合极坐标换元技巧。

2.累次极限的计算：计算两次一元极限。

3.二元函数连续性的分析：通过讨论极限(16)。

4.偏导数的计算：常规函数使用一元求导法则可得，分段函数则需要在特殊点用定义计算。

5.高阶偏导数的计算：对偏导数继续求偏导数。

6.全微分的计算：计算偏导数然后写成(32)的形式。

7.可微性分析：证明函数可微通过偏导数的连续性；证明函数不可微可以通过证明函数不连续、或是使用定义和反证法。

8.梯度的计算：计算偏导数然后写成(37)的形式。

9.方向导数的计算：计算偏导数然后写成(42)的形式。

10.复合函数偏导数的计算：应用链式法则。

11.复合函数二阶偏导数的计算：应用链式法则，重在对链式法则的理解，关注式(47)-(48)。

3 习题

题 1. 讨论二元极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$。

分析：针对含三角函数sin的二元极限问题，常用的放缩是$|\sin x| \leq |x|$或$|\sin x| \leq 1$。在放缩的过程中还要结合极坐标换元的方法：使用换元关系

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \end{cases} \quad r \in [0,+\infty), \theta \in [0,2\pi). \tag{52}$$

在极坐标意义下，$(x,y)\to(0,0)$时的极限相当于$r\to 0+0$，对于极角θ则并无限制。因此使用极坐标换元可以将关于x,y的二元极限转化为关于r的一元极限。

Proof. 二元极限的第一步是猜测结论，我们希望证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2} = 0. \tag{53}$$

使用放缩法，很容易得到

$$\left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|. \tag{54}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时，看起来x^3+y^3是比x^2+y^2高阶的无穷小量，因此猜测

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0. \tag{55}$$

然而这一极限想严格说明需要极坐标换元的方法：将极坐标换元(52)代入得到

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=|r(\sin^3\theta+\cos^3\theta)|\le 2|r|. \tag{56}$$

结合两步放缩得到

$$\left|\frac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\le 2|r|, \tag{57}$$

在极坐标意义下，$(x,y)\to(0,0)$时的极限相当于$r\to 0+0$，所以本题极限为0。 □

题 2. 讨论二元极限$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-|x|-|y|}$。

分析：本题同样是极坐标换元的应用，$(x,y)\to(\infty,\infty)$在极坐标意义下就是$r\to+\infty$，与极角θ无关。

Proof. 当$(x,y)\to(+\infty,+\infty)$时，$\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}$是指数级衰减的，因此直观地认为极限应该是0。我们借助极坐标换元说清楚这件事

$$\left|\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}\right|=\left|r^2e^{-r(|\cos\theta|+|\sin\theta|)}\right|, \tag{58}$$

根据辅助角公式

$$|\cos\theta|+|\sin\theta|\ge 1, \tag{59}$$

因此

$$\left|\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(|x|+|y|)}\right|\le r^2e^{-r}. \tag{60}$$

而$\lim_{r\to+\infty}r^2e^{-r}=0$，因此本题极限为0。 □

题 3. 讨论二元极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$。

分析：本题是发散极限的问题，但是在选择收敛路径时，任意的直线收敛路径$y=kx$都会推出极限是0。这里涉及到选择收敛路径为抛物线的技巧。

Proof. 使用多路径逼近法，首先取$y=x$，即(x,y)沿直线$y=x$接近$(0,0)$的情形，此时

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^4+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2+1}=0, \tag{61}$$

特别地，对本题极限代入任意$y=kx$，其中k是常数（即(x,y)沿斜率是k的直线接近$(0,0)$），得到的极限均为0。这是你可能猜测本题的二元极限是收敛的而非发散

的，然而我们可以考虑下面的情形：取$y=x^2$，此时(x,y)沿开口向上抛物线$y=x^2$接近$(0,0)$，这是有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \tag{62}$$

由此找到收敛于两个不同值的两条收敛路径。所以本题极限发散， □

题 4. 计算偏导数$f(x,y)=x^{x^y}$。

分析：本题是指数和底数都带自变量的求导问题，应模仿第二章的求导方法取对数计算。

Proof. 计算$\partial_x f$时，固定y，此时x^{x^y}的指数x^y和底数x都与求导自变量x有关，所以取对数求导

$$\begin{aligned}\partial_x\left(x^{x^y}\right) &= \partial_x\left(\mathrm{e}^{x^y\ln x}\right)=\mathrm{e}^{x^y\ln x}\left[yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}\right]\\ &= x^{x^y}x^{y-1}(y\ln x+1).\end{aligned} \tag{63}$$

计算$\partial_y f$时，固定x，此时x^{x^y}只有指数x^y与求导自变量y)有关，所以按照指数函数的复合函数求导

$$\partial_y\left(x^{x^y}\right)=x^{x^y}\ln x\partial_y\left(x^y\right)=x^{x^y}x^y(\ln x)^2. \tag{64}$$

□

题 5. 计算偏导数$f(x,y)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

分析：本题在技巧上并无特别之处，但是要注意在涉及根号的运算时，$\sqrt{y^2}=|y|$而不是直接为y。

Proof. 计算$\partial_x f$，将y固定

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{y^2}}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \frac{y\mathrm{sgn}(y)}{x^2+y^2},\end{aligned} \tag{65}$$

其中$\mathrm{sgn}(y)=\frac{y}{|y|}$是$y$的符号函数，当$y$取正值$\mathrm{sgn}(y)=1$，当$y$取负值$\mathrm{sgn}(y)=-1$。

同理计算得

$$\partial_y f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)=\frac{-x\,\mathrm{sgn}\,y}{x^2+y^2}. \tag{66}$$

□

题 6. 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$，证明$\partial_{xy}f(0,0)\neq\partial_{yx}f(0,0)$。

分析：本题是分段函数偏导数计算方法的综合应用。本题也说明了∂_{xy}和∂_{yx}不总相等，要求两个混合偏导数相等是需要条件的。

Proof. 我们首先计算偏导数$\partial_x f(x,y)$：当$(x,y)\neq(0,0)$时有

$$f(x,y)=\frac{\left(x^2-y^2\right)xy}{x^2+y^2}. \tag{67}$$

固定y后可以通过一元导数计算公式得到偏导数

$$\partial_x f(x,y)=y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \tag{68}$$

当$(x,y)=(0,0)$时，f的函数值是分段定义的，我们必须使用定义计算偏导数

$$\partial_x f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0. \tag{69}$$

根据对(x,y)是否为$(0,0)$的情形分类，得到偏导数的表达式

$$\partial_x f(x,y)=\begin{cases}y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{70}$$

同理可得

$$\partial_y f(x,y)=\begin{cases}x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \tag{71}$$

然后分别计算$(0,0)$处的混合偏导数

$$\partial_{xy}f(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\partial_x f(0,\Delta y)-\partial_x f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y\cdot\frac{-(\Delta y)^4}{(\Delta y)^4}-0}{\Delta y}=-1 \tag{72}$$

以及

$$\partial_{yx}f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\partial_y f(\Delta x,0)-\partial_y f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot\frac{(\Delta x)^4}{(\Delta x)^4}-0}{\Delta x}=1. \tag{73}$$

如果探索两个混合偏导数的原因，是函数$\partial_{xy}f$和$\partial_{yx}f$在$(0,0)$点不连续，有兴趣的同学可以尝试，这里略去证明。 □

题 7. 设$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，计算$\partial_x f(0,0)$和$\partial_y f(0,0)$，由此说明f在点$(0,0)$不可微。

分析：本题是证明函数不可微的典型问题：反证法假设f在$(0,0)$可微，并计算出$\partial_x f(0,0)$和$\partial_y f(0,0)$，再代入微分的定义当$(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$有

$$f(\Delta x, \Delta y) = f(0,0) + \partial_x f(0,0)\Delta x + \partial_y f(0,0)\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right). \tag{74}$$

再通过无穷小量的定义推导矛盾。

Proof. 我们首先通过定义计算偏导数

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0. \tag{75}$$

同理计算得$\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$。

接下来如果假设f在$(0,0)$可微，那么f在点$(0,0)$的微分是$0\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}y$，代入微分的定义(30)得

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = 0\Delta x + 0\Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right). \tag{76}$$

然后化简可得

$$\sqrt{|\Delta x \Delta y|} = o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right). \tag{77}$$

我们接着使用高阶无穷小量的定义

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0. \tag{78}$$

然而根据分析，极限$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$是发散的，不会收敛于0，由此推出矛盾。 □

题 8. 设$z = f(x,y)$在(x_0, y_0)可微，且f在(x_0, y_0)处沿$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$的方向导数为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，沿$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$的方向导数为$\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1$。求$f$在$(x_0, y_0)$处的梯度。

分析：涉及梯度和方向导数的问题，核心都是通过偏导数表出梯度或方向导数，偏导数在这些概念中位居核心。

Proof. 我们设偏导数$A = \partial_x f(x_0, y_0)$和$B = \partial_y f(x_0, y_0)$，由此得到梯度

$$\mathrm{grad} f \mid_{(x_0,y_0)} = (A, B). \tag{79}$$

根据方向导数的定义

$$(A, B) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \tag{80}$$

以及

$$(A, B) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1. \tag{81}$$

解得

$$(A,B)=\left(\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2},\frac{7-3\sqrt{6}-3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right). \tag{82}$$

$\square$