# 序列极限讲义

谢彦桐

北京大学数学科学学院

2021.9.28

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。题型说明，基础题指方法非常标准的题目，综合题指方法标准但需要一些技术技巧的题目，进阶题指方法不常规的题目。

## 1 知识点整理

### 1.1 极限的定义

想理解“极限”这一概念，必须同时了解极限的严格定义和生活语言定义：

**1.**严格定义：对于序列$\{a_n\}$，如存在一个实数$a$，使得对于$\forall \varepsilon > 0$，总存在$N \in \mathbb{N}$，使得$|a_n - a| < \varepsilon$对于一切$N > n$成立，则称序列$\{a_n\}$**收敛**，实数$a$称为序列$\{a_n\}$的**极限**。

**2.**生活语言定义：序列$a_n$在走过很多项后逐渐向某个点$a$聚拢。

极限严格定义最大的特点是“层层叠叠”，先是存在一个$a$，再是对任取任意$\varepsilon > 0$找到正整数$N$，使得序列对$n > N$满足一定条件。这样的叙述手法被称为$\varepsilon - N$**语言**。当你想证明一个序列收敛或具有特定极限时，就需要我们按照$\varepsilon - N$语言的定义一步一步去验证。而如果想真的理解极限，还是“生活语言定义”更为直观。

接下来的部分我们展示如何使用极限的定义证明极限

**例 1.** 证明极限$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n}{n+1} = 0$

*Proof.* **步骤1：叙述$\varepsilon - N$语言的命题** 我们只要证明，对于$\forall \varepsilon > 0$，存在一个$N \in \mathbb{N}^*$（依赖$\varepsilon$）使得对于$\forall n > N$ 都有$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n}{n+1} - 0\right| < \varepsilon$。换言之，**我们要对每一个$\varepsilon > 0$找到属于它的$N$**。

**步骤2：适当放大待估计的式子** 为了使得$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n}{n+1} - 0\right| < \varepsilon$对足够大的$n$成立，我们

适当放大待估计的式子$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}-0\right|$，以方便我们寻找合适的$N$。由于

$$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}\right|<\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n}\right|<\left|\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right|, \tag{1}$$

此时为了$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}-0\right|<\varepsilon$成立，只需要使得$n$满足$\left|\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right|<\varepsilon$即可。

**步骤3：写出$N$的表达式** 这一步要根据第二步的估计式(1)，反解正整数$N$满足的条件。为了$\left|\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right|<\varepsilon$对一切$n>N$成立，取$N$满足$\left|\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}}\right|<\varepsilon$，即$N>\frac{1}{\varepsilon^3}$。由于$N$是正整数，我们令$N=\left[\frac{1}{\varepsilon^3}\right]+1$。

**步骤4：完成$\varepsilon-N$语言命题结论** 根据前面的分析，重写步骤1中的命题。我们取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon^3}\right]+1$，对于一切$n>N$有$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}-0\right|<\varepsilon$。原命题得证。

□

对于比较简单的问题，有时不需要放大待估计的量就可以找出$\varepsilon>0$对应的$N$，如课本28页例题1。但在如本例的比较复杂的极限问题中，**放大被控制量的思想非常重要**，请同学们抓住放大这一主旨思路。

作为这一部分的结束，我们感性讨论一下发散的序列。我们知道收敛的序列一般会向某点“聚拢”，那么发散的序列是什么样的呢？大体来说可以分为两种情况
**1.**序列$a_n=(-1)^n$，这一序列以-1和1交替，其序列值始终“震荡”，因而发散。
**2.**序列$b_n=\mathrm{e}^n$，这一序列极限为$\infty$，但是不收敛。
上述两种情形也概括了发散序列的两种情况，即序列值震荡的情形和向无穷发散的情形，前者一般称为“本质发散”，后者则称为“广义收敛”。我们在课本上学习了单调收敛原理，即单调递增且有界的序列一定收敛。事实上，单调有界的序列的单调性使得序列不可能“震荡”，而有界性则使得序列不会趋于无穷，所以否定了序列发散的两种情形。通过这样的思路，我们感性地明白了为什么单调收敛原理是对的。

## 1.2 计算序列极限的方法

在上一节我们学习了极限的定义，但是极限定义的$\varepsilon-N$语言特别复杂拗口，我们不能指望用$\varepsilon-N$语言求各种极限。本节介绍一些脱离$\varepsilon-N$语言来计算极限的技巧，他们在解题中是格外重要的。

### 夹逼原理

夹逼原理是序列极限计算方法中最灵活的。如果三个序列满足

$$b_n\le a_n\le c_n, \tag{2}$$

且序列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$都收敛且极限同为实数$l$，那么$\{a_n\}$也收敛于$l$。在实际解题中，可以将$\{b_n\}$和$\{c_n\}$之一取成常数列。

我们在此介绍夹逼原理三个最为典型的题目

**例 2.** 证明极限$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mathrm{e}^n}=0$。

*Proof.* 对$\mathrm{e}^n$用二项式展开定理，并且$[1+(\mathrm{e}-1)]^n$展开式的二次项

$$\mathrm{e}^n=[1+(\mathrm{e}-1)]^n\geq\frac{n(n-1)}{2}(\mathrm{e}-1)^2. \tag{3}$$

由此

$$0\leq\frac{n}{\mathrm{e}^n}\leq\frac{2n}{n(n-1)(\mathrm{e}-1)^2}=\frac{2}{(\mathrm{e}-1)^2(n-1)}. \tag{4}$$

由于$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(\mathrm{e}-1)^2(n-1)}=0$，所以$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\mathrm{e}^n}=0$。 □

**例 3.** 证明极限$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$。

*Proof.* 设$h_n=\sqrt[n]{n}-1$，那么$(1+h_n)^n=n$， 对左式使用二项式定理并取其中$n$的二次项

$$\frac{n(n-1)}{2}h_n^2\leq(1+h_n)^n=n \tag{5}$$

解得

$$h_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{6}$$

又$\sqrt[n]{n}>1$因此

$$0<h_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{7}$$

夹逼定理得证$\lim_{n\to\infty}h_n=0$。

□

**例 4.** 计算极限$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+\cdots+2021^n}$。

*Proof.* 对根号内不等估计

$$2021^n\leq2^n+3^n+\cdots+2021^n\leq2020\cdot2021^n. \tag{8}$$

由此

$$2021\leq\sqrt[n]{2^n+3^n+\cdots+2021^n}\leq2021\sqrt[n]{2020}. \tag{9}$$

由于$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2020}=1$，由夹逼原理

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+\cdots+2021^n}=2021. \tag{10}$$

□

总得来说，夹逼原理通常结合对序列的**代数变形**和**不等估计**，技巧是比较多变的，需要同学们通过做题积累。但是上述三道题是夹逼原理应用中最经典的。

## 极限的四则运算和不定式的概念

对于两个收敛的序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，在一定条件下序列四则运算后的新序列的极限等于序列极限四则运算的结果。假定序列$a_n \to a$和$b_n \to b$，那么我们有$a_n \pm b_n \to a \pm b$，$a_n b_n \to ab$。假定$b \neq 0$还有$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$。利用四则运算计算极限是解决极限问题最基本的方法，如下述例题：

**例 5.** 计算极限$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-2}{n^2+1}$。

*Proof.* 我们首先进行代数变形

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}. \tag{11}$$

根据极限加法运算法则有

$$\lim_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2} = 2 \quad , \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n^2} = 1. \tag{12}$$

由此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 2. \tag{13}$$

□

然而如果序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的极限是某些取值，例如是$0$或$\infty$，它们的四则运算序列的极限值是不确定的，这样的情况称为**不定式**。例如当$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的极限都是无穷大量，它们的商极限$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$的值不确定，如

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = 0, \\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty. \end{cases} \tag{14}$$

不定式使得我们不能简单地利用四则运算法则计算各种极限，造成很大的困难。可以说，我们整个高数上册的内容都是在与不定式极限作斗争，包括著名的洛必达法则、Taylor公式等技巧。

常见的不定式包括

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad (+\infty)+(-\infty), \quad 0\cdot\infty, \quad 1^{\infty}. \tag{15}$$

这里$\infty$和0分别代表无穷大量序列和无穷小量序列。不过需要指出，并不是涉及$\infty$的极限式都是不定式，例如

$$\frac{a}{\infty} = 0, \quad (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty, \tag{16}$$

上式中$a$代表一个以实数作为极限值的序列。我们指出，在式(15)的不定式中，存在含幂运算的不定式$1^\infty$。我们将在下一节特殊极限部分着重说明。

此外，我们还可以证明，如果序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$收敛，那么序列通过指数、幂、三角函数等超越运算得到的新序列仍然收敛，并且新序列的极限等于序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$极限超越运算的结果：

**1.**设$a_n \to a$，$b > 0$，那么$b^{a_n} \to b^a$。

**2.**设$a_n \to a$，$b > 0$且$b \neq 1$，$a_n, a > 0$，那么$\log_b a_n \to \log_b a$。

**3.**设$a_n \to a$，$a_n, a > 0$，那么$(a_n)^b \to a^b$。

**4.**设$a_n \to a$，那么$\sin a_n \to \sin a$。

**5.**设$a_n \to a$和$b_n \to b$，其中$a_n > 0$，$a > 0$和$b$都是有限数，那么$(a_n)^{b_n} \to a^b$。

**注解 1.** 无穷大量和无穷小量是指极限为$\infty$（可以是$+\infty$或$-\infty$）和极限为*0*的序列。如果一个序列是无穷大量，我们称之**广义收敛**，但是广义收敛一般不算在收敛范畴内。

## 无穷大量的量级估计法

量级估计法是一种直观分析无穷大量的比值不定式$\frac{\infty}{\infty}$的方法。我们知道序列$a_n = n^n$，$b_n = n!$，$c_n = \mathrm{e}^n$，$d_n = n$，$e_n = \ln n$都是无穷大量。但是这五个序列趋于无穷的速度实际并不一致。通过图像的观察告诉我们，这五个序列趋于无穷的速度是递减的，即$a_n$最快，$e_n$最慢。直观地我们可以总结下述量级估计：

$$\ln n \ll n^a \ll \mathrm{e}^n \ll n! \ll n^n, \tag{17}$$

其中符号$\ll$是“远大于”的意思。

那么，如何用极限的语言刻画“无穷大量趋于无穷的速度快慢比较”这一现象呢。之前我们证明了极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = 0. \tag{18}$$

这说明当$n$足够大时，线性无穷大量$n$相较指数无穷大量$\mathrm{e}^n$很小，这体现了$\mathrm{e}^n$的量级要大于无穷大量$n$。我们甚至还可以证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \ln n}{n^n} = 0 \tag{19}$$

即便分母是两个无穷大量相乘，但是终究比不过量级更大的无穷大量$n^n$的量级，三个臭皮匠也顶不过一个诸葛亮。

此外，我们可以证明序列$\{n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0\}$是无穷大量，即一切最高次项系数为正数的多项式都是无穷大量。此外，次数越高的无穷大量的量级越高，我们总结为下述结论

**例 6.** 考虑序列$x_n = n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$和$y_n = n^j + b_{j-1}n^{j-1} + \cdots + b_1 n + b_0$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} 0 & , j > k, \\ +\infty & , k > j, \\ 1 & , k = j. \end{cases} \tag{20}$$

这说明，高阶多项式具有更高的量级。

*Proof.* 证明仅以$k = j$为例，其余情况类似。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + a_{k-1}n^{-1} + \cdots + a_1 n^{-(k-1)} + a_0 n^{-k}}{1 + b_{k-1}n^{-1} + \cdots + b_1 n^{-(k-1)} + b_0 n^{-k}} = 1 \tag{21}$$

其中第一个等号是在分子分母同时除以$n^k$，第二个等号是极限的四则运算性质，$n^{-k}$等项极限是0。 □

## e的特殊极限

e的方法是计算序列极限和函数极限最核心的方法之一，一般来说需要函数极限理论才能吧e的方法说得更严格。本节我们仅简单介绍e的方法。e的方法讨论的是一类非常特殊的不定式$1^\infty$，例如

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \\ \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty. \end{cases} \tag{22}$$

这说明$1^\infty$的确是不定式。换一个角度理解，由于不定式$1^\infty = \exp(\infty \cdot \ln 1)$，而$0 \cdot \infty$是不定式，因此也说明$1^\infty$是不定式。

我们通过一例题说明e的方法，**其实质是将待计算极限转化为$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$的形式。**

**例 7.** 计算极限$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$。

*Proof.* 考虑如下代数变形

$$\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}}. \tag{23}$$

考虑到$\frac{n^2}{n+1} \to +\infty$，我们可以有如下的夹逼原理

$$\left(1+\frac{1}{\left[\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right]}\right)^{\left[\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right]} \leq \left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} \leq \left(1+\frac{1}{\left[\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}+1\right]}\right)^{\left[\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}+1\right]} \tag{24}$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} = \mathrm{e}. \tag{25}$$

另一方面$\frac{n+1}{n} \to 1$，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{n+1}}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}. \tag{26}$$

□

综上所述，e的方法是将$1^\infty$极限，在底数强行构造一个形如$1+\frac{1}{n}$，凑出极限为e的部分，然后再对指数剩余的部分求极限。这类方法在函数极限题目的应用比序列极限更广泛，后续我们还会学习。

## Stolz定理简介

以下补充Stolz定理，其主要目标也是计算$\frac{\infty}{\infty}$型不定式极限：

**定理 1.1.** $\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个序列，其中$\{b_n\}$ 是严格单调递增，且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} = A$，其中$A$可以为有限值，$+\infty$ 或 $-\infty$. 则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = A$.

这一定理处理的是$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$这一极限。如果$a_n$和$b_n$均有有限极限，那么该极限可以直接利用四则运算性质求解。如果$a_n$极限是有限数，$b_n$是无穷，那么显然$\dfrac{a_n}{b_n}$极限是0，也无需Stolz定理。如果$a_n$和$b_n$极限均为无穷，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$是一个不定式，此时正是Stolz定理用武之地，它告诉我们，当$\dfrac{a_n}{b_n}$满足一定条件，差商极限等于原极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}. \tag{27}$$

特别地，Stolz定理的形式与洛必达法则方程类似

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{28}$$

只是Stolz定理将洛必达法则中“函数的导数”换成了“序列的差商”。Stolz定理的证明我们补充在了附录。

## 2 习题

**题 1.** （*Cauchy*命题）如果序列$\{a_n\}$收敛于$a$，这里$a$可以是有限数或无穷，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}=a. \tag{29}$$

分析：Cauchy命题使用$\varepsilon-N$语言定义证明极限，对于初学者有很大难度。应对考试而言，熟练掌握Cauchy命题的证明非常有益。

*Proof.* 我们只证明$a$是有限实数的情况。我们模仿$\varepsilon-N$语言证明极限的思路，首先重新叙述命题：对于$\forall\varepsilon>0$，我们希望找到一个$n\in\mathbb{N}^*$使得

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}-a\right|=\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)}{n}\right|<\varepsilon. \tag{30}$$

适当放大(30)中的待估计项，我们只需要

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k-a|\right)<\varepsilon, \tag{31}$$

就可以使得(30)成立。剩下的内容就是根据$\varepsilon$存在$N$，使得式(31)对一切$n>N$成立。

先分析思路。我们注意到，式(31)左侧的形式是$n$个绝对值项$\{|a_k-a|\}_{k=1}^{n}$的平均值。由于我们知道$a_m\to a$，因此当$m$足够大时绝对值$|a_m-a|$一定足够小。由此我们可以将$n$个绝对值项$\{|a_k-a|\}_{k=1}^{n}$分成两部分，前$M$项$\{|a_k-a|\}_{k=1}^{M}$是坏项绝对值不受控制，但后面$n-M$项$\{|a_k-a|\}_{k=M+1}^{n}$是好项，每一项绝对值都很小，并将前面$M$个“糟糕”的项的平均值“拉回”$\varepsilon$以下。

接着叙述严格证明。由于$a_m\to a$，我们取$M\in\mathbb{N}^*$，对一切$m>M$都有$|a_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$，由此，对$n>M$有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k-a|\right) &\le \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{M}|a_k-a|\right)+\frac{1}{n}\left(\sum_{k=M+1}^{n}|a_k-a|\right)\\ &\le \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{M}|a_k-a|\right)+\frac{(n-M)\varepsilon}{2n}\\ &\le \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{M}|a_k-a|\right)+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned} \tag{32}$$

注意到$M$以及$\sum_{k=1}^{M}|a_k-a|$是由$\varepsilon$确定的，因此我们只要取

$$n>\frac{\varepsilon}{2\left(\sum_{k=1}^{M}|a_k-a|\right)}. \tag{33}$$

就可以使得式(31)成立。

因此取

$$N=\max\left\{\left[\frac{\varepsilon}{2\left(\sum_{k=1}^{M}|a_k-a|\right)}\right]+1,M\right\},\tag{34}$$

对一切$n>N$都有式(31)成立。 □

**注解 2.** 为了使得式(31)中$n$个绝对值的平均值拉低到$\varepsilon$以下，我们要求后面的“好项”$\{|a_k-a|\}_{k=M+1}^{n}$每一项都小于$\frac{\varepsilon}{2}$。由于$\frac{\varepsilon}{2}$比$\varepsilon$更小，所以当$n$足够大可以将$n$个绝对值的平均值拉低到$\varepsilon$以下。

**题 2.** 用*Cauchy*命题计算或证明

***1.***设序列$\{a_n\}$满足$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=A$，那么$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=A$。

***2.***设正序列$\{a_n\}$满足$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=A$，那么$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$。

***3.***求极限$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$。

分析：利用柯西命题可以很简单地证明一些复杂的问题。

*Proof.* **1.**设$b_n=a_n-a_{n-1}$，同时补充定义$b_1=a_1$，根据题设$\lim_{n\to\infty}b_n=A$，那么根据Cauchy命题

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}b_k}{n}=A.\tag{35}$$

**2.**设$c_n=\ln(a_n)$，由此$\lim_{n\to\infty}(c_{n+1}-c_n)=\ln A$，根据**1**有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(a_n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}=\ln A.\tag{36}$$

对这一极限取e指数即可证明结论。

**3.**设$d_n=\frac{n!}{n^n}$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.\tag{37}$$

由**2**得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{d_n}=\mathrm{e}.\tag{38}$$

□

**题 3.** 计算以下和式型极限

***1.***$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$。

***2.***$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n}$。

***3.***$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$。

***4.***$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2n+k)(2n+k+1)}$。

分析：求和式或求积式极限是序列极限问题中的一类常考题，其做法主要有三种：裂项法、放缩法、黎曼和法。裂项法如**1**、**2**小问，它将求和式的值直接通过裂项法算出来然后求极限；放缩法如**3**、**4**问，通过对求和式项的放缩寻求夹逼原理解决；黎曼和法我们将在定积分一节介绍。由于求积式取对数就可以得到求和式，因此求积式极限与求和式解法一样。

*Proof.* **1.**考虑裂项

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{1}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\sqrt{k(k+1)}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}. \tag{39}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 1. \tag{40}$$

**2.**本题虽然是求积式，我们也可以用裂项法

$$\begin{aligned}\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n} &= \frac{1}{\sin\frac{1}{2^n}}\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left(\cos\frac{1}{2^n}\sin\frac{1}{2^n}\right)\\ &= \frac{1}{2\sin\frac{1}{2^n}}\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\left(\cos\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{1}{2^{n-1}}\right)\\ &\cdots\\ &= \frac{\sin 1}{2^n}.\end{aligned} \tag{41}$$

由此

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n}=0. \tag{42}$$

**3.**本题属于无法进行裂项的求和式，我们使用放缩和夹逼原理。注意到

$$2+\frac{2}{n}=\frac{1}{n}\cdot(2n+2)>\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{1}{n+1}\cdot(2n+2)=2. \tag{43}$$

用夹逼原理，可知所求极限为2。

**4.**对分子用放缩

$$\frac{n(5n+1)}{2}=\sum_{k=1}^{n}(2n+k)\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2n+k)(2n+k+1)}\le\sum_{k=1}^{n}(2n+k+1)=\frac{n(5n+3)}{2}. \tag{44}$$

由此

$$\frac{n(5n+1)}{2n^2}\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2n+k)(2n+k+1)}\le\frac{n(5n+3)}{2n^2}. \tag{45}$$

由此$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2n+k)(2n+k+1)}=\frac{5}{2}$。 □

**题 4.** 计算下列极限

*1.*$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$。

*2.*$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n+2}-3\sqrt{n+3}\right)$。

*3.*$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right)$。

*4.*$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\sum_{k=3}^{2021}k^n\right)$。

分析：本题的四问都是在经典例题上做修改得到的。需格外注意这些问题的解题技巧。

*Proof.* **1.**在例题中我们曾通过放缩

$$0\le\sqrt[n]{n}-1\le\sqrt{\frac{2}{n-1}},\tag{46}$$

证明了极限$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=0$。但是这样的估计不足以计算$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$，因为

$$0\le\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\le\sqrt{\frac{2n}{n-1}},\tag{47}$$

而$\sqrt{\frac{2n}{n-1}}$的极限却不是0，因此夹逼原理不能使用。这需要我们对$\sqrt[n]{n}-1$做更严格的估计。注意到在式(5)中我们仅仅选择了二项式展开的二次项，为了证明本题我们稍作修改。

我们依然令$h_n=\sqrt[n]{n}-1$，取$(1+h_n)^n=n$左侧的三次项

$$n=(1+h_n)^n\ge\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h_n^3,\tag{48}$$

由此

$$h_n\le\sqrt[3]{\frac{6}{(n-1)(n-2)}}.\tag{49}$$

进一步

$$0\le\sqrt{n}h_n\le\sqrt[3]{\frac{6n^{\frac{3}{2}}}{(n-1)(n-2)}}.\tag{50}$$

注意到次数更高的多项式具有更高的量级，由此$\sqrt[3]{\frac{6n^{\frac{3}{2}}}{(n-1)(n-2)}}\to0$。这说明$\sqrt{n}h_n\to0$。可见，**通过在式(47)左侧取更高次的项，我们得到了对$h_n$的更严格的估计。**

**2.**在课本上我们讨论过经典极限$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$，解题方法是**根式有理化**，即代数变形

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0.\tag{51}$$

我们指出根式有理化在求解极限和积分中都非常重要，例如本题也可以使用有理化的方法解答。注意到

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}+2\sqrt{n+2}-3\sqrt{n+3} &= \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}\right)+2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}\right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}-\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}. \end{aligned} \tag{52}$$

由此

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n+2}-3\sqrt{n+3}\right) \\ =& \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}-\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}\right)=-1-1=-2. \end{aligned} \tag{53}$$

**3.**我们注意到$\sin$内部$\pi\sqrt{4n^2+1}\to+\infty$，即便如此由于极限$\lim_{n\to\infty}\sin n$震荡而不存在，我们不能简单的通过计算$\sin$内部计算本极限。本题的方法为经典方法。

根据正弦函数的周期性

$$\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right)=\sin\left[\pi\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)\right]=\sin\frac{\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}, \tag{54}$$

这里使用了根式有理化变形。由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}=0$，因此本题极限为0。

**4.**本题多个数的$n$次方求和的形式类似于**例4**，我们模仿**例4**的方法进行放缩：

$$\ln 2021=\frac{\ln\left(2021^n\right)}{n}\le\frac{1}{n}\ln\left(\sum_{k=3}^{2021}k^n\right)\le\frac{\ln\left(2019\cdot 2021^n\right)}{n}=\frac{\ln 2019}{n}+\ln 2021. \tag{55}$$

根据夹逼原理可得本极限为$\ln 2021$。特别地，我们对本题极限取指数

$$\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\sum_{k=3}^{2021}k^n\right)\right)=\sqrt[n]{\sum_{k=3}^{2021}k^n}, \tag{56}$$

即与**例4**一致。 □

**题 5.** 计算极限$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$。

分析：本题虽然是$1^\infty$型不定式，但是却无法使用e的方法，我们会在本题的后注分析原因。

*Proof.* 考虑

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}=(1+\frac{1}{n-1})^n=(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}\cdot(1+\frac{1}{n-1}). \tag{57}$$

由于$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}=\mathrm{e}$和$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=0$，利用四则运算性质得本题极限为$\mathrm{e}^{-1}$。

□

**注解 3.** 从本题我们可以直接看出$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}=\mathrm{e}$，这相当于关于$e$的特殊极限$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$在$n$趋于$-\infty$的情况。对于序列极限来说，$n$只能趋向$+\infty$；对于函数极限而言$n$趋于$+\infty$是允许的，此时我们可以证明更强的函数极限$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，它包含了$x$趋于$+\infty$和$-\infty$两种情况。因此在函数极限一节介绍了更完整的$e$的方法。

**题 6.** 设序列$\{x_n\}$满足$x_1=1$, $x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}$，证明极限$\lim_{n\to\infty}x_n$存在并证明极限的值。

分析：本题的序列$\{x_n\}$是通过抽象的递推式给出的，这类问题的解题技巧一般都是先通过单调收敛原理证明序列$\{x_n\}$收敛，然后再计算极限的值。

*Proof.* 我们想证明$\{x_n\}$是单调递增的。做差得到

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1+x_n-x_n^2}{1+x_n}, \tag{58}$$

因此如果证明$1+x_n-x_n^2>0$即可证明序列递增，这需要我们证明$x_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。为此我们先使用数学归纳法证明$1<x_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

显然$1<x_1<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。若$x_k<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，由于函数$y=\frac{x}{1+x}$是单调递增的，那么

$$0<\frac{x_k}{1+x_k}<\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}. \tag{59}$$

那么

$$1<x_{k+1}=1+\frac{x_k}{1+x_k}<\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{60}$$

归纳法证毕。由$1<x_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$有$1+x_n-x_n^2>0$，因此$x_{n+1}>x_n$。结合上面的结论，序列$\{x_n\}$单调递增且有上界，因此其极限存在。设$x_n\to y$，下面我们着力于求解极限$y$。

等式

$$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}. \tag{61}$$

两侧都是关于$n$的序列。由于$\{x_n\}$收敛，等式(60)两侧都有极限，因此他们的极限必定是相同的。对等式(60)两侧取极限，由于$x_n\to y$，根据极限四则运算

$$\frac{x_k}{1+x_k}\to\frac{y}{1+y}\quad ,x_{n+1}\to y. \tag{62}$$

因此$\frac{y}{1+y}=y$，解得$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，极限可求。 □

**注解 4.** 本题的一个关键，是如何证明一个序列单调递增。证明序列$\{x_n\}$单调递增的基本方法是做差法和做商法（即证明$x_{n+1}-x_n>0$或$\frac{x_{n+1}}{x_n}>1$），过程中可能辅以数学归纳法辅助证明。

**注解 5.** 本题求解极限的过程是容易搞错的。首先，我们是先证明了序列有一个极限$y$然后再计算$y$的，所以我们可以证明等式(60)两侧均收敛并可以对(60)两侧取极限。这一计算过程形式上好像是假设了“$x_{n+1}=x_n$”，但是其本质却是依赖了等式(60)两侧均收敛且极限相同的性质，并通过$\{x_n\}$的极限$y$表达等式(60)两侧极限。

**题 7.** 证明下列序列不收敛
***1.***$x_n=(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\sin\frac{n\pi}{4}$。
***2.***$y_n=\tan n$。

分析：课本28页的定理5告诉我们，收敛序列的子序列依然收敛，且与原序列具有相同的极限。这一命题的主要应用是，如果一个序列存在不收敛的子列，或存在两个子列收敛到不同极限，那么这个序列一定不收敛。因此，**证明序列极限发散的主要方法就是寻找序列两个收敛到不同值的子列。**

*Proof.* **1.**考虑$\{x_n\}$两个子列：

$$x_{8k}=(1+\frac{1}{n})^n\to \mathrm{e}. \tag{63}$$

和

$$x_{8k+1}=-(1+\frac{1}{n})^n+\frac{1}{\sqrt{2}}\to -\mathrm{e}+\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{64}$$

序列$\{x_n\}$有两个收敛到不同数的子列，所以序列$\{x_n\}$发散。

**2.**序列$y_n$具有通项公式：

$$y_{n+1}=\tan(n+1)=\frac{\tan 1+y_n}{1-\tan 1y_n}. \tag{65}$$

假设$y_n$收敛于实数$Y$，则对通项公式(64)取极限，根据极限的四则运算性质得到

$$Y=\frac{\tan 1+Y}{1-\tan 1Y}. \tag{66}$$

得到$Y^2=-1$，与$Y$是实数矛盾。

□

**题 8.** 求证$\mathrm{e}=1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$。

分析：关于自然对数的底数e，我们所了解的也只有其定义$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。我们的分析也将围绕着这一极限出发。这一定理的证明有着很强的“数学分析”味道，即将“取极限”当成了一种保不等关系的运算进行讨论。

*Proof.* 对$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$考虑到二项式展开并带入组合数的定义得

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{67}$$

如果将(66)右侧的分数$\frac{k}{n}$均放缩到1我们有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}. \tag{68}$$

对于不等式(67)，我们左右两侧取$n\to\infty$，根据序列极限保序性质得到

$$\mathrm{e} \leq 1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}. \tag{69}$$

另一方面，我们取某个$m<n$，并在二项式展开(66)的考虑前$m$项：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}+\cdots+\frac{1}{m!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-m+1}{n}. \tag{70}$$

考虑$m$固定，在式(69)两侧取$n\to\infty$，对于给定$m$形如$\frac{n-m+1}{n}$的式子极限为1

$$\mathrm{e} \geq 1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!} \quad ,\forall m\in\mathbb{N}^*. \tag{71}$$

这时再对上式取$m\to\infty$

$$\mathrm{e} \geq 1+\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}. \tag{72}$$

结合式(68)和(71)，我们得证本题。

□

## 3 附录：Stolz定理的证明

Stolz定理证明难度较大，如读懂会对$\varepsilon-N$语言的理解有很大提高，读不懂建议不读不会对考试有任何影响。

*Proof.* 我们证明$A$是正实数的情况，其余情况同理。根据$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$的定义，对于一切$0<\varepsilon<\frac{A}{2}$均存在一个$N_0$使得

$$A-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<A+\varepsilon, \quad \forall n>N_0.$$

由于$b_n$单调递增，可以得到

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{n-1}), \quad \forall n>N_0.$$

我们任意取一个$N > N_0$，并在上式取$n = N_0+1, N_0+2, \cdots, n$得到

$$(A-\varepsilon)(b_N - b_{N_0}) < a_N - a_{N_0} < (A+\varepsilon)(b_N - b_{N_0}), \quad \forall N > N_0.$$

当$N$足够大$b_N$是正数，此时在不等式同除$b_N$得到

$$(A-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_0}}{b_N}\right) < \left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{N_0}}{b_N}\right) < (A+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_0}}{b_N}\right),$$

进一步

$$(A-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_0}}{b_N}\right) + \frac{a_{N_0}}{b_N} < \frac{a_N}{b_N} < (A+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_0}}{b_N}\right) + \frac{a_{N_0}}{b_N}.$$

对于固定$N_0$，$N$具有任意性，取$N$趋于$\infty$，那么$\frac{b_{N_0}}{b_N} \to 0$且$\frac{a_{N_0}}{b_N} \to 0$，此时又可以取$N$足够大使得

$$-\varepsilon < \frac{a_{N_0}}{b_N}, \frac{b_{N_0}}{b_N} < \varepsilon,$$

此时根据$A-\varepsilon > 0$，不等式(1)可以进一步放缩

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon) - \varepsilon < \frac{a_N}{b_N} < (A+\varepsilon)(1+\varepsilon) + \varepsilon.$$

综上，对任意小的$\varepsilon$（以及与$\varepsilon$对应的$N_0$），都可以找到足够大的$N_1$，对于一切$N > N_1$使得不等式(2)成立，因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$

□