北京大学高等数学B习题课讲义：定积分

谢彦桐

北京大学数学科学学院

最后修改：2022.10

本讲义只供北京大学高等数学B学习使用，任何未经作者允许的转载都是禁止的。免费符号计算网页https://www.wolframalpha.com/拥有计算函数定积分的功能，可以作为学习定积分参考使用。

1 知识点整理

1.1 定积分相关概念辨析

本节主要讲解和辨析定积分的基本性质，以及收集与这些性质相关的解题技巧。定积分的本质是曲线线下面积的计算，本身与计算原函数的不定积分毫无关系，直到Newton和Leibniz提出以它们名字命名的定理以后，不定积分和定积分才成为一个整体。

定积分和黎曼和

考虑定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的定义遵循三步走：

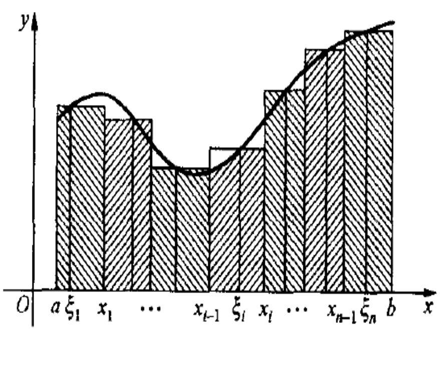

图 1: 定积分和黎曼和的示意图

1.先“分” 将积分区间$[a,b]$分为n小段$[x_{i-1},x_i]$，其中$i=1,2,\cdots,n$：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots x_{n-1}<x_n=b. \tag{1}$$

2.后“积” 积是指计算每一个以区间$[x_{i-1},x_i]$为底的曲边梯形的面积。我们将各个面积近似为$f(\xi_i)(x_{i-1}-x_i)$，其中ξ_i是任取自区间$[x_{i-1},x_i]$的点。我们将曲边梯形面积求和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1}-x_i), \tag{2}$$

得到的和式称为**黎曼和**。

3.取极限 需要注意的是取极限的标准：定义区间划分的最大长为$\Delta=\max_i|x_i-x_{i-1}|$。当$\Delta$趋于0，其实就是对区间分划逐渐加密的过程，我们定义黎曼和的极限为定积分的值，近似函数$f(x)$的线下面积，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1}-x_i). \tag{3}$$

我们称极限值$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$为$f(x)$在$[a,b]$的**定积分**或**黎曼积分**。

这里同学们可能有一个问题：在定义定积分的过程中，我们只要求划分的最大长Δ趋于0，并没有限制划分点$\{x_i\}$的具体取法，也没有规定用于近似的函数值$f(\xi_i)$的点ξ_i在$[x_{i-1},x_i]$的取法。对于不同划分$\{x_i\}$和点$\{\xi_i\}$的选取，会不会对黎曼和的收敛性造成影响呢？例如，区间$[x_{i-1},x_i]$上$f(x)$的最大值$M_i=f(\xi_i^M)$和最小值$m_i=f(\xi_i^m)$之间差的过多，有没有可能导致黎曼和极限(3)在分别选取$\xi_i=\xi_i^M$和$\xi_i=\xi_i^m$时，计算的黎曼和差距过大使得极限(3)不收敛呢？实际上，这样的情况是可能出现的，这就涉及到可积性的概念，即并非每一个$f(x)$都是可以由黎曼和的极限(3)定积分的。我们称可以通过式(3)的黎曼和的极限定义定积分的$f(x)$称为**可积的**。例如我们可以证明连续函数都是可积函数，这一点可以直观地理解为，连续函数在每一个区间$[x_{i-1},x_i]$上的最大值和最小值的差通常不会太大，进而不会影响黎曼和的收敛性。

最后我们介绍黎曼和在解题中的应用，主要是利用黎曼和的方法求极限。在式(3)中，我们知道了黎曼和的极限是定积分，但是我们一般只需要Newton-Leibniz公式就可以计算定积分的值而不需要黎曼和。因此，对于求和式的极限，如果我们能把它写成黎曼和的形式，那么其极限就是定积分的值。

例 1. 计算下述极限

1.$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

2.2020年高数B期中考试 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i^2}$.

分析：黎曼和法与夹逼法、裂项法统称为计算和式型极限的三类重要方法。我们知道黎曼和的形式是$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$，我们希望将求和式写成黎曼和的形式，即将

求和项的每一项都分解为函数值$f(\xi_i)$乘以区间长$x_i - x_{i-1}$。我们一般考虑长为1的区间上的等分情形，此时黎曼和$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(\xi_n)$。

Proof. **1.**考虑拆分$\frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{i}{n}}$，因此

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right). \tag{4}$$

其中$f(x) = \frac{1}{1+x}$。所以

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \mathrm{d}x = \ln(1+x)|_{x=0}^{x=1} = \ln 2. \tag{5}$$

2.考虑拆分$\frac{i}{n^2+i^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$，因此

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right). \tag{6}$$

其中$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$。所以

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+i^2} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\ln 2}{2}. \tag{7}$$

□

可积性的判别

刚刚我们已经说明，并不是所有函数都可积，但是连续函数是可积的，更一般的，我们希望同学们不加证明的记忆下面三类可积函数，其中函数定义域均为$[a,b]$

1.连续函数。

2.单调函数。

3.在$[a,b]$上有界但是有且仅有有限个间断点或无定义的点的函数。

此外可积函数必须有界，无界函数都不可积。

我们简要介绍第三类。例如，函数$\frac{\sin x}{x}$显然在点$x = 0$没有定义，但是$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$，所以函数$\frac{\sin x}{x}$是$[-1,0) \cup (0,1]$上的有界的连续函数，且在$x = 0$处属于可去间断点。由于$\frac{\sin x}{x}$在$[-1,1]$有且仅有一个间断点$x = 0$，所以$\frac{\sin x}{x}$在$[-1,1]$可积；类似地函数$\sin\frac{1}{x}$也在$x = 0$处没定义，但是在$[-1,0) \cup (0,1]$上有界且连续，在$x = 0$处属于第二类间断点，因此$\sin\frac{1}{x}$在$[-1,1]$可积。另一方面，函数$\frac{1}{x}$在$[-1,1]$也只有$x = 0$一个无定义的点，但是因为$\frac{1}{x}$无界，因此$\frac{1}{x}$在$[-1,1]$不可积。

更一般的，20世纪初的数学家勒贝格提出了可积性和间断点个数更一般的关系：

定理 1.1 (勒贝格). 设函数$f(x)$在$[a,b]$是有界函数，那么$f(x)$在$[a,b]$可积的充分必要条件是$f(x)$的间断点集“零测”。

零测指“测度为零”，其概念是复杂的，直观理解就是说间断点比较少，大多数点连续。而有界的集合都是零测集，这也说明了有界且间断点有限的函数是可积的。此外，区间$[0,1]$上的有理数集是零测集。我们之前学习的狄利克雷函数和黎曼函数，前者在$[0,1]$每一点都不连续，后者在$[0,1]$中的有理点集间断，在无理点连续。因此，虽然狄利克雷函数和黎曼函数都是糟糕的病态函数，但是从连续性来看，黎曼函数只在少部分点很糟糕，所以黎曼函数可积；但是狄利克雷函数在每一个点都很糟糕，所以狄利克雷函数不可积。

正因为大量不连续函数的存在，使得定积分（确切说是黎曼积分）在很多函数上不可积，在使用黎曼积分时有许多限制。在黎曼定义黎曼积分的几十年后，数学家勒贝格定义了以它名字命名的勒贝格积分。比起黎曼积分，勒贝格积分大大扩增了可积函数的范围带许多连续性很差的函数，且可以在非闭区间的其他数集上定义积分。特别地，对于黎曼可积的函数，其黎曼积分的值与勒贝格积分的值相同。在概率论等学科里，我们需要将积分推广到非闭区间的一般数集上，所以采用勒贝格积分。然而黎曼积分也有其相较勒贝格积分不可替代的点，在于黎曼积分可以通过牛顿莱布尼茨公式和原函数联系在一起并快速计算积分的值。

变限积分、原函数和Newton-Leibniz公式

这一节我们把重点回到原函数这一概念。我们之前曾提出，并不是每一个函数都存在原函数，但是连续函数一定存在原函数。如果$f(x)$在$[a,b]$连续，任取$c\in[a,b]$，变限积分函数$F(x)=\int_c^x f(t)\mathrm{d}t$就是$f(x)$的一个原函数，即$F'(x)=f(x)$对一切$x\in[a,b]$成立。

关于变限积分，我们给出几点说明

- 虽然我们可以将连续函数的原函数写成变限积分，但是许多变限积分的表达式不能写成初等函数，例如$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$就不是初等函数，所以$\frac{\sin x}{x}$的原函数写不出表达式。
- 变限积分$F(x)=\int_c^x f(t)\mathrm{d}t$是以$x$为自变量的函数，由于$x$出现在定积分上限，所以被积函数的自变量不能仍然使用t，即形如$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$的积分是错误的。
- 如果$f(x)$是可积函数但不是连续函数，变限积分$F(x)=\int_c^x f(t)\mathrm{d}t$虽然仍可定义，但是变限积分一般不再是不连续函数$f(x)$的原函数。

接下来的例题介绍变限积分求导的计算技巧

例 2. 计算$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}\mathrm{d}t$

分析：本题主要是利用$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$和复合函数求导的方法进行计算。此外，由于我们无法对上下限均为变限的积分进行计算，因此我们应首先进行代数变形。

Proof. 定义$F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t^4+2}\mathrm{d}t$。我们显然有

$$\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}\mathrm{d}t=\int_0^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}\mathrm{d}t-\int_0^{x^3+1}\frac{\sin t}{t^4+2}\mathrm{d}t=F\left(2^x\right)-F\left(x^3+1\right). \tag{8}$$

根据$F'(x)=\frac{\sin x}{x^4+2}$，用复合函数求导法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\left(2^x\right)=F'\left(2^x\right)\cdot\left(2^x\ln 2\right)=\frac{2^x\ln 2\sin\left(2^x\right)}{2^{4x}+2}. \tag{9}$$

同时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\left(x^3+1\right)=F'\left(x^3+1\right)\cdot\left(3x^2\right)=\frac{3x^2\sin\left(x^3+1\right)}{\left(x^3+1\right)^4+2}. \tag{10}$$

由此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}\mathrm{d}t=\frac{2^x\ln 2\sin\left(2^x\right)}{2^{4x}+2}-\frac{3x^2\sin\left(x^3+1\right)}{\left(x^3+1\right)^4+2}. \tag{11}$$

□

对于不连续的函数，原函数可能存在也可能不存在，但是上一节介绍的Darboux定理告诉我们，具有原函数的函数必须具有介值性。图2的韦恩图则表达了“具有原函数的函数”，“可积函数”，“连续函数”三者关系。我们会在下面的小节补充几个相关反例，供感兴趣的读者阅读。同学们只需要掌握韦恩图的内涵即可：连续函数比如可积，连续函数比如存在原函数，但是这两个结论反之都不对。

对于最为常用且重要的连续函数，著名的牛顿莱布尼茨公式（本讲义简称NL公式）将定积分和原函数这两个原本没有关系的概念串联在了一起

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a). \tag{12}$$

而使得NL公式成立的$f(x)$是连续函数，它位于韦恩图的交集，是既有原函数又可积的函数。

*补充内容：三个反例

我们下面给出关于图2的三个反例，三个反例超出课程要求，我们只需要基本了解结论即可。这里我们给出三个反例函数f_1,f_2,f_3，说明可积但不存在原函数的函数、存

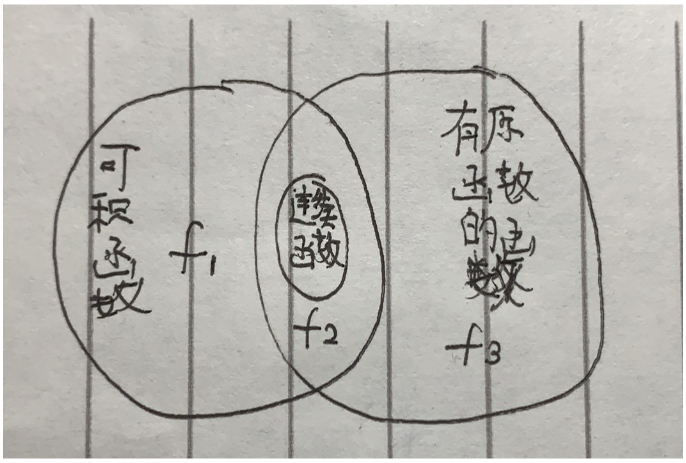

图 2: “具有原函数的函数”，“可积函数”，“连续函数”三者关系和三个反例函数f_1, f_2, f_3在韦恩图中的位置。

在原函数但不可积的函数、既有原函数又可积但不连续的函数都存在：首先是函数f_1定义为

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & ,x \in [0,1], \\ 1 & ,x \in (1,2]. \end{cases} \tag{13}$$

由于f_1在$[0,2]$有且仅有一个间断点$x = 1$，所以f_1在$[0,2]$可积。但是f_1并不存在原函数，因为f_1在跳跃间断点$x = 1$附近没有介值性。另一种理解方式是，如果下述函数F_1是f_1原函数，那么其必须具有如下形式

$$F_1(x) = \begin{cases} C & ,x \in [0,1], \\ C + x - 1 & ,x \in (1,2], \end{cases} \tag{14}$$

其中C为某给定常数。然而我们可以检验得到F_1在点$x = 1$不可导，左导数为0而右导数为1，因此F_1不是f_1原函数。于是f_1是可积但不连续的函数，1

函数f_2和函数f_3定义为

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{15}$$

根据导数的定义，不难验证f_2和f_3分别具有原函数

$$F_2(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad F_3(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{16}$$

因此函数f_3存在原函数F_3，但是因为f_3无界，因此f_3不可积，由此f_3是具有原函数但不可积的函数；函数f_2存在原函数F_2，且有且仅有间断点$x = 0$，同时f_2有界，因此f_2既存在原函数又可积，但是却不连续。

1.2 定积分的计算

由于黎曼和过于复杂，我们一般使用NL公式以及衍生出的分部积分法、换元法计算定积分。此外，定积分还有一种非常重要的对称法，可以不依赖NL公式和求解原函数计算定积分。我们下面介绍这些方法。

分部积分法

定积分使用分部积分法的原理与不定积分基本相同:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\mid_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{17}$$

但是需要注意的是，定积分的微元后面必须是积分变量名，例如$\int_a^b f(x)\mathrm{d}(g(x))$这一形式是不规范的，必须写作$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$。但是在使用分部积分法时，我们依然强调凑微分的重要性。

例 3. 使用定积分分部积分递推法计算
1.设n是自然数，计算$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$。
2.设m,n是正整数，计算$J_{m,n} = \int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x$。

Proof. **1.**模仿不定积分分部积分法计算:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(\cos x)'\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\left(\sin^{n-1} x\right)'\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,
\end{aligned} \tag{18}$$

由此

$$I_n = \frac{n}{n-1} I_{n-2}. \tag{19}$$

由于$I_0 = \frac{\pi}{2}$和$I_1 = 1$，叠乘得到

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} & ,k\text{是奇数}, \\ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2} & ,k\text{是偶数}, \end{cases} \tag{20}$$

其中$n!!$是双阶乘。

2.用分部积分法

$$\begin{aligned}
J_{m,n} &= \int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}\int_0^1 \left(x^{m+1}\right)'(\ln x)^n\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}\Big|_0^1 - \frac{1}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}\left[(\ln x)^n\right]'\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}\Big|_0^1 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}\Big|_0^1 - \frac{n}{m+1}I_{m,n-1}
\end{aligned} \tag{21}$$

注意到$\left.\frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}\right|_{x=1}=0$，但是$\frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}$在$x=0$无定义，我们以极限代替

$$\lim_{x\to 0+0} x^{m+1}(\ln x)^n=0. \tag{22}$$

这一极限的计算可以通过量级估计分析，作为$0\times\infty$的不定式，x^{m+1}比$(\ln x)^n$具有更高的量级，因此$x^{m+1}(\ln x)^n$是一个无穷小量，严格的证明也可以使用洛必达法则。由此

$$I(m,n)=-\frac{n}{m+1}I(m,n-1)=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n}I(m,0). \tag{23}$$

由于$I(m,0)=\frac{1}{m+1}$，所以$I(m,n)=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$。 □

我们指出，模仿上例第一问的递推法，我们可以证明

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x==\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} & ,k\text{是奇数},\\ \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2} & ,k\text{是偶数}.\end{cases} \tag{24}$$

上述公式称为**点火公式**或**瓦利斯公式**，在积分计算中非常有用，建议读者记下来。

换元法

定积分的换元法是定积分部分最大的易错点，同学们需认真理解定积分换元的本质才可以避免在计算中犯错。不定积分的换元法仅仅是将自变量x替代为另一自变量y，但是定积分中被积函数的自变量x是在积分区间中取值的，因此换元所得的另一自变量y也应有范围，这是二者本质的不同。我们首先叙述定积分的换元法：

定理 1.2. 设函数$f(x)\in C[a,b]$，定义函数$x=\varphi(t):[\alpha,\beta]\to[a,b]$具有连续的导函数，满足$\varphi(\alpha)=a$和$\varphi(\beta)=b$。**设当$t$从$\alpha$增大为$\beta$时，$\varphi(t)$由$a$变化到$b$，同时$\varphi(t)$这一变化始终在区间**$[a,b]$，那么我们有如下换元结论

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{25}$$

我们首先直观地了解上述定理，积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是考虑函数$f(x)$在x从a变化到b这一过程的“积累”。而换元法的实质是“另辟蹊径”，我们另选自变量t，t与x通过可微函数$\varphi(t)$关联。当t从α运动到β时，$x=\varphi(t)$也从a变化到b，因此我们就可以将以x为自变量的积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$等效为以t为自变量的积分“$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\mathrm{d}x$”，即用$f(\varphi(t))$的“积累”代替$f(x)$的“积累”。但是我们仍需要将微分$\mathrm{d}x$替换为$\mathrm{d}t$，这就需要微商运算$\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t$，由此得到换元公式(25)。

我们首先来看换元法的两个应用，它们分别对应不定积分换元法的凑微分法和第二类换元法，但是我们必须用定积分换元法的语言来描述：

例 4. 计算下列定积分

***1.2021*高等数学*B*期中考试** 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$。

***2.2020*高等数学*B*期中考试** 计算$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$。

3.计算$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x$。

Proof. **1.**在不定积分的范畴里，处理这类三角函数型积分的方法是凑微分法。我们模仿凑微分思路，将分子的$\cos x\mathrm{d}x$凑成$\mathrm{d}(\sin x)$，以得到只包含$\sin x$的积分。用定积分换元法来描述，考虑换元$t=\sin x$：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t=\left.\frac{1+t^2}{2}\right|_{t=0}^{t=1}=\frac{\ln 2}{2}. \tag{26}$$

2.由于根式的存在，我们进行三角换元$x=\sin t$：当x初值于$[0,1]$时，自变量t取值于$[0,\frac{\pi}{2}]$：

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\mathrm{d}t=I_4-I_6, \tag{27}$$

其中I_n的定义如例题3。由瓦利斯公式的$I_4=\frac{3}{16}\pi$以及$I_6=\frac{15}{96}\pi$。于是

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=I_4-I_6=\frac{\pi}{32}. \tag{28}$$

3.依然应用三角换言$x=\sin t$得

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^4 t}\mathrm{d}t. \tag{29}$$

对于三角函数积分$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^4 t}\mathrm{d}t$，直接使用凑微分和有理分式积分的方法非常麻烦，我们选用分部积分递推的方法

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^4 t}\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{(\tan t)'}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\left.\frac{\tan t}{\cos^2 t}\right|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\tan t\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)'\mathrm{d}t\\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 t}{\cos^4 t}\mathrm{d}t=\frac{4\sqrt{3}}{9}-2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^4 t}\mathrm{d}t+2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{30}$$

注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\tan t|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \tag{31}$$

使用

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^4 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}+2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t\right)=\frac{10\sqrt{3}}{27}. \tag{32}$$

我们指出，见到形如$\int_0^a\frac{\mathrm{d}t}{\cos^n t}$的积分，应想到降次递推的方法。 □

我们指出，在换元公式(25)提出的要求“当t从α增大为β时，$\varphi(t)$始终在区间$[a,b]$变化”是必须的，它保证了$f(\varphi(t))$在$[\alpha,\beta]$的“积累”确实等效覆盖了$f(x)$在$[a,b]$的“积累”。为了增加理解，我们看两个非常容易错解的例题：

例 5. 计算下列定积分

1. $\int_0^\pi \frac{1}{2\sin^2 x+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

2. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x.$

Proof. **1.**我们首先介绍一种因为错误使用换元法造成的误解。我们使用换元$t=\tan x$，被积函数写作

$$\frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\tan^2 x+1}=\frac{(\tan x)'}{2\tan^2 x+1}. \tag{33}$$

由于$\tan 0=\tan\pi=0$，部分同学直接使用换元

$$\int_0^\pi \frac{1}{2\sin^2 x+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1}=0. \tag{34}$$

然而被积函数是正函数，必然有$\int_0^\pi \frac{1}{2\sin^2 x+\cos^2 x}\mathrm{d}x>0$，因此换元式(34)是不对的。

我们指出，式(34)错误的原因，是不满足换元法条件“当t从α增大为β时，$\varphi(t)$始终在区间$[a,b]$变化”。自变量x在积分过程中遍历区间$[0,\pi]$，对应的$t=\tan x$也应该由0变化为$+\infty$，然后变化到$-\infty$回答0,。式(34)在代入换元式$t=\tan x$过程中只看积分上下限，并没有关注积分变量变化的过程。于是，正确的换元结果是

$$\int_0^\pi \frac{1}{2\sin^2 x+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1}+\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1}. \tag{35}$$

由于被积函数$\frac{1}{2t^2+1}$的原函数是$\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}x\right)+C$，所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}t\right)\Big|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-0=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi, \tag{36}$$

其中原函数$\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}x\right)$在$t=+\infty$的取值用极限$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}x\right)$替代。同理

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2}t\right)\Big|_{t=-\infty}^{t=0}=0-\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi, \tag{37}$$

所以

$$\int_0^\pi \frac{1}{2\sin^2 x+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1}+\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi. \tag{38}$$

2.这一积分是我们在不定积分部分学过的，我们可以做如下换元

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)+C. \tag{39}$$

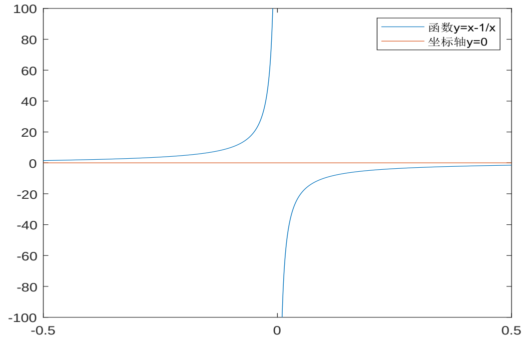

图 3: 换元函数$y=x-\frac{1}{x}$的示意图

有些同学想通过NL公式直接计算

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= -\sqrt{2}\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right). \end{aligned} \tag{40}$$

这将得到$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x<0$这一荒谬结论。

我们分析后会发现，我们找到的“原函数”$F(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$在点$x=0$根本就没有定义，也就是说$F(x)$根本就不是$\frac{1+x^2}{1+x^4}$在$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$每一个点的原函数。对于不定积分运算(39)，我们可以包容结果又这样一个断点$x=0$。但是对于需要严格地使用NL公式的定积分运算而言，断点$x=0$不能被接受。**由此建议同学们不要采用不定积分换元法做定积分，避免不必要的错误。**

我们接下来严格地考虑定积分换元法。当x从$-\frac{1}{2}$运动到$\frac{1}{2}$时，变量$y=x-\frac{1}{x}$，y从$\frac{3}{2}$出发运动到$+\infty$，再由$-\infty$运动到$-\frac{3}{2}$，由此

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x &= \int_{\frac{3}{2}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^2+2}+\int_{-\infty}^{-\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}y}{y^2+2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{+\infty}+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\Bigg|_{-\infty}^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)-\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\right). \end{aligned} \tag{41}$$

□

对称法

对称法是考试的必考知识点，其理论基础是奇函数和偶函数的定积分性质：假如$f(x)$在对称区间$[-a,a]$可积，那么

1.如果$f(x)$是奇函数，那么$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$，因为$f(x)$图像关于原点中心对称，$y$轴两侧的图形可以互相抵消面积。

2.如果$f(x)$是偶函数，那么$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$，因为$f(x)$图像关于$y$轴轴对称，$y$轴两侧的图形面积相同。

对于一些过于复杂或被积函数的原函数不是初等函数的定积分，我们可以使用对称的思想快速计算定积分。大致的方法分为“局部对称”和“区间再现”两类问题。首先是“局部对称”：

例 6. ***2020高等数学B期中考试题*** 计算定积分$\int_{-1}^{1} \frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

Proof. 本题被积函数虽没有对称性，但是我们可以将被积函数拆分为两部分

$$\frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2\arcsin x}{1+x^2}. \tag{42}$$

后一部分的被积函数$\frac{x^2\arcsin x}{1+x^2}$是奇函数，由此

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\arcsin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0. \tag{43}$$

由此

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=(x-\arctan x)|_{-1}^{1}=2-\frac{\pi}{2}. \tag{44}$$

□

接下来的“区间再现”法适用于具有更复杂对称性的函数，换言之这些积分的被积函数并非简单的奇函数或偶函数。我们要尝试通过被积函数的变形寻找对称性：

例 7. 计算定积分$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$。

Proof. 这一被积函数的原函数不能写成初等函数的形式。设被积函数$f(x)=\ln(1+\tan x)$，我们进行下述计算

$$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)=\ln 2-\ln(1+\tan x). \tag{45}$$

整理得$f(x)+f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2$。结合图4，关于直线$x=\frac{\pi}{8}$对称的两个点$x$与$\frac{\pi}{4}-x$的函数值和为$\ln 2$，亦即函数值函数$f(x)=\ln(1+\tan x)$的图像关于点$(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2})$中心对称。由此，函数$\ln(1+\tan x)$与直线$y=\frac{\ln 2}{2}$夹出的在对称中心$(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2})$左下和右上的两部分面积

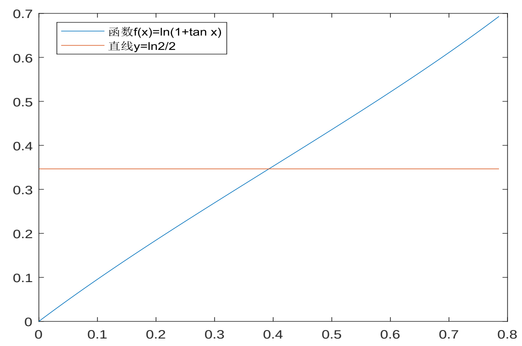

图 4: 函数$f(x)=\ln(1+\tan x)$的图像

相等：在计算函数$f(x)=\ln(1+\tan x)$的图像的线下面积时，可以将右上的面积挪到左下，从而使得总面积成为一个长为$\frac{\pi}{4}$高为$\frac{\ln 2}{2}$的矩形面积：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\ln 2}{2} = \frac{\pi\ln 2}{8}. \tag{46}$$

如果想避开几何直观而直接计算积分，可以使用“区间再现”的想法：应用换元$t=\frac{\pi}{4}-x$，定积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$的积分区间不变，但是被积函数却变为了“对称”的点的函数值

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - f(t))\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln 2}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\mathrm{d}t. \tag{47}$$

移项得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi\ln 2}{8}. \tag{48}$$

我们使用“区间再现”法时，核心是积极寻找被积函数的对称关系，如本题$f(x)+f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2$意味着图像关于点$(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2})$中心对称。为寻找到这样的对称关系，我们通常可以从尝试计算函数值$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$入手。对于一般的积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，则通常考察关于积分区间中垂线$x=\frac{a+b}{2}$的两个点$f(a+b-x)$和$f(x)$的关系着手，尝试用$f(x)$表示$f(a+b-x)$。 □

1.3 利用定积分的方法计算几何问题

在开始之前，我们要先明确曲线这一概念。几何意义上的曲线意指平面或空间中连贯的线，在高等数学的范畴里，我们采用解析几何的方式研究曲线：即用坐标系上的方程意指曲线。曲线的方程有三种：一般方程、参数方程，极坐标三种，我们分别以单位圆$x^2+y^2=1$的上半圆为例介绍。特别注意，**讨论曲线方程时必须注意自变量的定义域。**

1.一般方程$y=f(x)$，自变量x的取值范围$[a,b]$，此时曲线是一个函数。以椭圆上半圆

为例，一般方程$y=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$，自变量取值范围即椭圆长轴$[-1,1]$。

2.参数方程$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ 自变量$t\in[\alpha,\beta]$。参数方程能刻画的曲线是最丰富的，且对于同一曲线参数方程常常不唯一。以单位椭圆上半圆为例，参数方程$\begin{cases} x(t)=\cos t, \\ y(t)=\sin t, \end{cases}$ 自变量取值范围$t\in[0,\pi]$。

3.极坐标$r=r(\theta)$，其中默认$r\geq 0$，自变量$\theta\in[\alpha,\beta]$一般要求是$[0,2\pi]$的子集。显然极坐标对应参数方程$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta, \\ y=r(\theta)\sin\theta. \end{cases}$ 以单位椭圆上半圆为例，极坐标方程$r=1$，其中$\theta\in[0,\pi]$。

其中我们对极坐标方程的定义域补充说明：例如课本上我们研究过三叶玫瑰线$r(\theta)=\sin(3\theta)$，如果要求$r\geq 0$，自变量

$$\theta\in[0,\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{2\pi}{3},\pi]\cup[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]. \tag{49}$$

如果错误分析了极坐标的方程的定义域，会对计算造成毁灭性影响。

不同的曲线，合理地选择适合的方程可以减小计算量。例如对椭圆的计算来说，参数方程就是最方便的，而极坐标方程和一般方程却很麻烦。

定积分算几何公式整理

利用定积分计算几何问题的基本框架分为“写出曲线方程-根据公式写出积分-计算定积分”。在“写出曲线方程”一步时，必须写出自变量的定义域；在“根据公式写出积分”一步时，我们需要根据自变量的定义域额外关注积分上下限的选择，也可以通过画图寻找图形的对称性来简化计算。例如三叶玫瑰线具有三个对称的叶，计算其面积就可以计算一叶面积乘以3。如果感觉图形比较抽象，可以再写出曲线方程时画出示意图。

接下来我们整理弧长、侧面积和面积在不同方程情况下的计算公式：

曲线弧长

- 一般方程：$L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$。
- 参数方程：$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t.$
- 极坐标方程：$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta$。

旋转体的体积和侧面积

- 一般方程算旋转体体积：$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$。
- 一般方程算旋转体侧面积：$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$。
- 参数方程算旋转体侧面积：$S=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t$。
- 极坐标方程算旋转体侧面积：$S=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta$。

平面图形的面积

- 两条曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$夹出图形面积：$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$，其中积分上下限$a,b$需要由图形所处区域的横坐标范围决定。
- 极坐标方程算围成图形面积：$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$。

接下来的篇幅，我们来看几个基本的应用题。读者要在应用题中关注选择什么样的方程计算更为简便。

例 8. 使用定积分计算

1.2021年高等数学B期中考试题 求直角坐标系的抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$从$(0,0)$到$(1,\frac{1}{2})$之间的弧长。

2.2021年高等数学B期中考试题 给定奇数$n\geq 3$，n叶玫瑰线由极坐标方程$r=\sin(n\theta)$定义，求n叶玫瑰线所围部分面积。

3. 求封闭曲线$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$弧长，其中$a>0,b>0$。（注：本小问计算量很大，可以作为锻炼计算能力的习题使用）

Proof. **1.**首先确定抛物型的一般方程$y=\frac{1}{2}x^2$，自变量定义域$x\in[0,1]$，因此可以直接套用一般方程弧长公式

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)'\right]^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x. \tag{50}$$

在上一讲我们知道如下原函数（这一不定积分计算比较繁琐，可以背下结论）

$$\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\right)+C. \tag{51}$$

所以

$$\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}. \tag{52}$$

2.首先确定n叶玫瑰线由极坐标方程$r=\sin(n\theta)$，自变量定义域

$$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{n}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{n},\frac{3\pi}{n}\right]\cup\cdots\cup\left[\frac{(2n-2)\pi}{n},\frac{(2n-1)\pi}{n}\right], \tag{53}$$

并且每一个小区间对应的玫瑰线面积相等，所以

$$S=n\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^2(n\theta)}{2}\mathrm{d}\theta. \tag{54}$$

应用换元$t=n\theta$得

$$S=n\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^2(n\theta)}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}. \tag{55}$$

3.本题曲线$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$的一般方程涉及开根号，我们转而写出曲线参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=b\sin^3 t,\end{cases}, \tag{56}$$

其中$t\in[0,2\pi)$。注意到图像是在四个象限对称的，我们只需要计算第一象限部分弧长然后乘以4。参数方程的曲线长公式：

$$\begin{aligned}L &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3a\cos^2 t\sin t)^2+\left(3b\sin^2 t\cos t\right)^2}\mathrm{d}t\\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t\right)}\mathrm{d}t\\ &= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{57}$$

解决上述微分最直接的相反便是凑微元$\cos t\mathrm{d}t=\mathrm{d}\sin t$，用换元$z=\sin t$有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^1 z\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\,z^2}\mathrm{d}z. \tag{58}$$

接下来的分析要分为$b\neq a$和$b=a$讨论，我们只讨论$b\neq a$的情形，另一种情况答案一致。注意到式(58)仍可以凑微分，我们用换元$w=z^2$

$$\begin{aligned}\int_0^1 z\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\,z^2}\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(a^2+\left(b^2-a^2\right)w\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}w\\ &= \frac{1}{3\left(b^2-a^2\right)}\left(a^2+\left(b^2-a^2\right)w\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{w=0}^{w=1}=\frac{1\left(b^3-a^3\right)}{3\left(b^2-a^2\right)}\end{aligned} \tag{59}$$

结合(57)有

$$s(L)=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=\frac{4\left(a^2+b^2+ab\right)}{a+b}. \tag{60}$$

□

1.4 定积分的性质和在证明题的使用

本节我们介绍定积分的几个重要性质以及这些性质在证明题中的应用。常见的定积分证明题用这些技巧都可以完成。

定积分的几个重要性质

我们将定积分的几个重要不等式性质总结如下

1. **定积分的单调性质** 如果$f(x), g(x) \in R[a,b]$且$f(x) \le g(x)$对$x \in [a,b]$成立，那么$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

2. **定积分的单调性质推论1** 如果$f(x) \in R[a,b]$且$m \le f(x) \le M$对$x \in [a,b]$成立，那么$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$。

3. **定积分的单调性质推论2** 如果$f(x) \in R[a,b]$且$f(x) \ge 0$对$x \in [a,b]$成立，那么对于$a < c < d < b$有$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

4. **定积分的绝对值性质** 如果$f(x) \in R[a,b]$，那么$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \ge \left|\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|$。

上述性质为定积分的值提供了丰富的不等式估计。对于一些题目中的定积分，如果其值无法算出，使用上述不等式进行放缩估计是很不错的方法。

最后我们来思考一个问题，如果$f(x) \in R[a,b]$且$f(x) > 0$对$x \in [a,b]$成立，根据定积分单调性质有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$。那么有没有可能进一步推出$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$呢？答案是肯定的，但是证明依赖了勒贝格定理。对于$f(x) \in C[a,b]$，如果$f(x) > 0$对$x \in [a,b]$成立，我们可以在高等数学课程的范畴证明$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$：任取$x_0 \in (a,b)$，设$A = f(x_0) > 0$，借助$f(x)$在点$x = x_0$的连续性，存在$\delta > 0$使得

$$f(x) \ge \frac{A}{2}, \quad x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \tag{61}$$

由此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x \ge 2\delta \cdot \left(\frac{A}{2}\right) = A\delta > 0. \tag{62}$$

所以只要连续正函数的定积分一定是正的。由此，定积分单调性质可以如下加强：如果$f(x), g(x) \in R[a,b]$且$f(x) > g(x)$对$x \in [a,b]$成立，那么$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。（建议不要在过于简单的题目直接使用这一结论，连续版本的结论可以加以证明在使用）

定积分中值定理

我们知道对于抽象的函数$f(x)$，我们无法估计定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$具体的值，借助定积分中值定理，我们可以对定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值准确估计。因此定积分中值定理是定积分相关证明题中最重要的解题方法。

定积分中值定理分为两个版本：简化版本和完整版本。我们课本上仅讲解了简化版本，但是在许多题目需要用到完整版本的定积分中值定理。我们先来看简化版本：

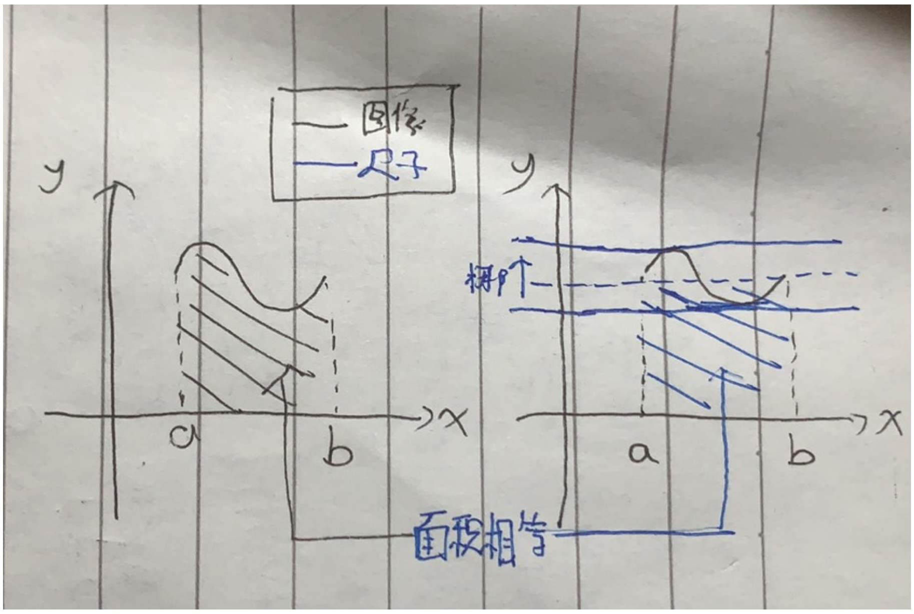

图 5: 定积分中值定理几何示意图

定理 1.3 (简化). 设函数$f(x) \in C[a,b]$，那么存在$\xi \in [a,b]$满足

$$f(\xi)(b-a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{63}$$

我们首先从几何上理解简化的定积分中值定理。假定$f(x) \geq 0$，$f(x)$与$x=a, x=b, y=0$合在一起形成一块“木板”，如图5所示。如果我们用一根尺子，在与x轴平行的方向对齐板子（$f(x)$图像）最低点，在向最高点挪移的“连续”变化过程里，尺子以下的矩形面积$f(\xi)(b-a)$总有一刻和板子的面积一致。

完整的定积分中值定理如下：

定理 1.4 (完整). 设函数$f(x) \in C[a,b]$和$g(x) \in R[a,b]$，且$g(x)$在$[a,b]$区间内不变号（即非正或非负），那么存在$\xi \in [a,b]$满足

$$f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{64}$$

考虑完整版本的中值定理，其变化实际上是为“木板”在x方向的不同位置上添加了不同“密度”$g(x)$，因此木板的总质量变为$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$。在此情况下，我们重复从最低点挪移尺子的过程，此时某一时刻尺子下的矩形质量是$f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，我们依然可以找到一刻矩形质量等于木板质量。

两个经典例题

例 9. ***2020年高等数学B期中考试题*** 设$f(x) \in C^1[0,1]$，求证对于一切$x \in [0,1]$都有

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t+\int_0^1 \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t. \tag{65}$$

分析：由于本题两个积分的值无法计算出来，我们用积分中值定理的方法将积分的值表述出来，并借助三角不等式和定积分绝对值性质解决绝对值积分放缩。

Proof. 根据积分中值定理，由于$|f|$的连续性，存在$\xi \in [0,1]$使得

$$\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = |f(\xi)|. \tag{66}$$

因此我们只要证明，对一切$x \in [0,1]$都有

$$|f(x)| - |f(\xi)| \le \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t. \tag{67}$$

不妨设$\xi \ge x$，由于被积函数$|f'(t)|$是正的，因此

$$\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t \ge \int_x^\xi |f'(t)|\mathrm{d}t \ge \left|\int_x^\xi f'(t)\mathrm{d}t\right| = |f(x) - f(\xi)|. \tag{68}$$

再根据三角不等式有

$$\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t \ge |f(x) - f(\xi)| \ge |f(x)| - |f(\xi)|. \tag{69}$$

对于$\xi < x$的情况证明方法只需调换一下积分上下限。

我们指出**三角不等式**在本题证明里发挥的作用。三角不等式是指$|A+B| \le |A| + |B|$，其中$A, B \in \mathbb{R}$。另一种三角不等式是差式的形式$|A-B| \ge ||A| - |B||$。三角不等式在高等数学最常见的应用，是我们想估计式$|A-B|$时，直接难以估计，就寻找跳板：

$$|A-B| \le |A-C| + |B-C|, \tag{70}$$

然后分别估计式$|A-C|$和$|B-C|$。此外，很多和绝对值有关的证明题，做题人直觉容易得出结论的正确性，可是却不能写严格，这时借助“三角不等式”这一简单易懂的结论，可以将复杂的绝对值分类讨论快速说清楚。 □

例 10. 设$f(x)$是$[0,1]$的连续函数，并且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{71}$$

求证$f(x)$在$[0,1]$至少有两个零点。

分析：根据$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$结合积分中值定理，很容易知道$f$在$[0,1]$必存在一个零点，我们反设$f$零点唯一，则图像如图6所示。此时$f(x)$在$x$轴以上和以下两部分面积必然要相等，则自然造成了函数$xf(x)$在x轴以上和以下两部分面积不相等，导致$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 0$不成立。我们将把这段分析写成严格的叙述需要加强版的定积分单调性质。本题还有一种比较巧妙的方法。

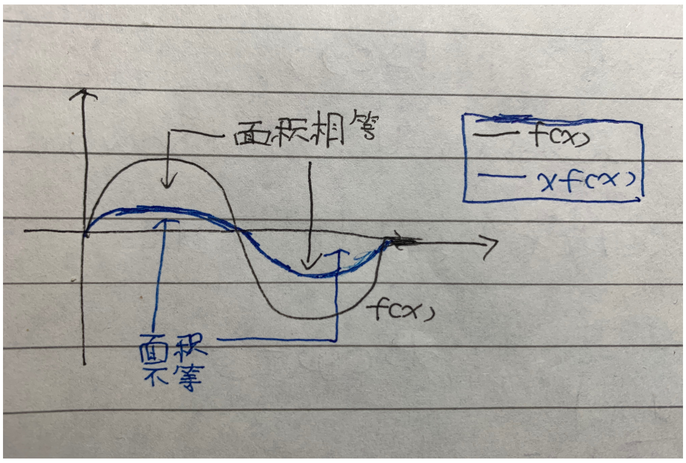

图 6: 假定函数$f(x)$有且仅有一个零点时，函数$f(x)$和$xf(x)$图像的示意图。

Proof. **方法1：** 根据$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$和积分中值定理，存在$\xi \in [0,1]$使得$f(\xi) = 0$。我们使用反证法，假如$\xi$是$[0,1]$上的唯一零点，因此不妨

$$\begin{cases} f(x) > 0 \quad , \quad x \in [0,\xi), \\ f(x) < 0 \quad , \quad x \in (\xi,1]. \end{cases} \tag{72}$$

因此根据题设我们有

$$\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\xi}^1 f(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{73}$$

我们首先排除$\xi = 0$的可能，如果0是$f(x)$在$[0,1]$唯一零点，那么$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$且$f(x) < 0$对一切$x \in (0,1]$成立，根据加强版的定积分单调性质课推出矛盾。同理$\xi \neq 1$。

此时根据$f(x)$的符号，我们分别有

$$\begin{cases} xf(x) < \xi f(x), \quad x \in (0,\xi), \\ xf(x) > \xi f(x), \quad x \in (\xi,1). \end{cases} \tag{74}$$

再根据$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 0$和加强版的定积分单调性质得到

$$\int_0^{\xi} xf(x)\mathrm{d}x < \xi \int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x = -\xi \int_{\xi}^1 f(x)\mathrm{d}x < -\int_{\xi}^1 xf(x)\mathrm{d}x. \tag{75}$$

这说明$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x < 0$，与题设矛盾。因此$f$在$[0,1]$不可能有且仅有一个零点，即至少有两个零点。

方法2 依然假设$f(x)$在$[0,1]$有且只有一个零点ξ，并且不妨设f的正负关系如式(72)。那么

$$\int_0^1 (x-\xi)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x - \xi\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{76}$$

而考虑到ξ是$f(x)$唯一零点，也是的一次多项式$x-\xi$的唯一零点，那么函数$(x-\xi)f(x) < 0$对每一个$x \neq \xi$都成立，因此

$$\int_0^1 (x-\xi)f(x)\mathrm{d}x < 0. \tag{77}$$

这与式(76)形成矛盾。 □

*补充内容：柯西-施瓦茨不等式

接下来我们介绍重要的积分不等式：柯西-施瓦茨不等式，这一不等式是高中的柯西不等式的连续版本。假定$f(x), g(x) \in R[a,b]$，其积分具有如下关系

$$\left(\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x\right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2. \tag{78}$$

如果将连续的积分运算近似为离散的求和，我们有

$$\left(\sum_{k=1}^n (f(x_k))^2\right)\left(\sum_{k=1}^n (g(x_k))^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\right)^2, \tag{79}$$

这就是离散版本的柯西不等式。接下来我们将上述从离散到连续的过程写成证明：

Proof. 我们将定积分$\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x$写成黎曼和的极限，其中区间$[a,b]$选择$n$等分的划分：

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, i = 0, 1, \cdots, n, \tag{80}$$

而每一个ξ_i都选为区间的右端点$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$，那么

$$\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (f(x_i))^2\right], \int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (g(x_i))^2\right], \tag{81}$$

同时

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\right]. \tag{82}$$

与此同时，我们使用离散的柯西不等式：对于任意给定的自然数n有

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (f(x_i))^2\right]\cdot\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (g(x_i))^2\right] \geq \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\right]^2, \tag{83}$$

我们在不等式(83)两侧取$n \to \infty$，然后借助式(81)和式(82)的结论：

$$\left(\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x\right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2. \tag{84}$$

□

对于多个积分乘积不等式，柯西-施瓦茨不等式是非常方便的做法，可以参加扩展习题中的相关例题。

2 扩展延伸

2.1 扩展题概览

扩展延伸题难度较大，特别是各个证明题，请同学们根据实际情况选择性阅读。

- 扩展习题1：简单难度，用黎曼和技巧计算求积型极限。
- 扩展习题2：中等难度，对称法和区间再现法计算定积分。
- 扩展习题3：中等难度，双层变限积分的分部积分技巧。
- 扩展习题4：困难难度，定积分极限的两种计算方法：分段法和分部积分法。
- 扩展习题5：困难难度，定积分极限综合题。
- 扩展习题6：困难难度，震荡型定积分极限计算方法。
- 扩展习题7：困难难度，柯西-施瓦茨不等式的应用。
- 扩展补充题1：简单难度，各种定积分计算技巧的使用。
- 扩展补充题2：中等难度，定积分单调性性质的直接应用。
- 扩展补充题3：困难难度，分段法研究定积分极限，类似习题4第1小问。
- 扩展补充题4：困难难度，震荡型定积分极限计算方法，类似习题6。
- 扩展补充题5：困难难度，柯西-施瓦茨不等式的应用，需结合分部积分技巧。

2.2 扩展习题

题 1. 计算求极限$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}$

分析：本题为乘积式积分，为了创造出黎曼和的形式，我们首先取对数。

Proof. 取对数

$$\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}\right)=\frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]. \tag{85}$$

由黎曼和近似有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]\Big|_0^1=2\ln 2-1. \tag{86}$$

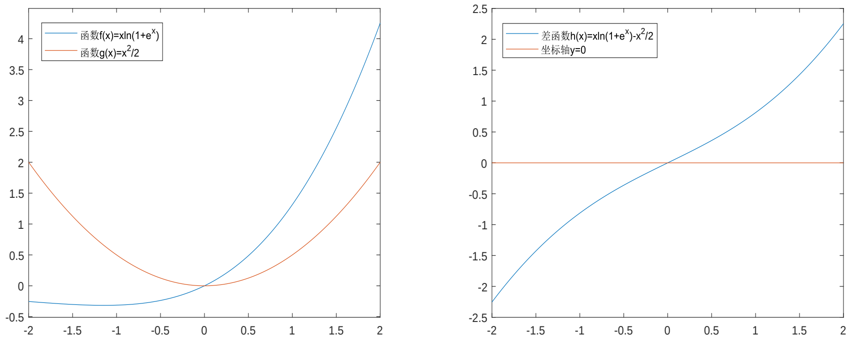

图 7: 左图：函数$y=x\ln(1+\mathrm{e}^x)$与函数$y=\frac{x^2}{2}$的图像；右图：左图二函数差值$y=\ln(1+\mathrm{e}^x)-\frac{x^2}{2}$的图像。

取指数得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}}{n}=\mathrm{e}^{2\ln 2-1}=\frac{8}{\mathrm{e}}. \tag{87}$$

□

题 2. 用对称性计算积分$\int_{-2}^{2}x\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$。

Proof. 设$f(x)=x\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$。为寻找对称性，计算

$$f(-x)=-x\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)=-x\left[\ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right)+\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right]=x^2-f(x). \tag{88}$$

由此得关系式$f(x)+f(-x)=x^2$。乍看此式找不到f任何对称性，但是结合图7我们发现，对于相反的两个点x与$-x$，函数f在x处多出$\frac{x^2}{2}$的部分和f在$-x$处少于$\frac{x^2}{2}$部分一样多。换言之，函数$g(x)=x\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)-\frac{x^2}{2}$是奇函数，如图7所示。亦即

$$f(x)-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}-f(-x). \tag{89}$$

从几何上看，函数$f(x)=x\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$与$y=\frac{x^2}{2}$夹出的两部分（右上和左下）面积一样大，我们可以把右上部分挪到左下计算，即

$$\int_{-2}^{2}x\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{8}{3}. \tag{90}$$

用“区间再现”的语言严格叙述，利用换元$x=-y$得

$$\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}f(-y)\mathrm{d}y=\int_{-2}^{2}\left(y^2-f(y)\right)\mathrm{d}y=\frac{16}{3}-\int_{-2}^{2}f(y)\mathrm{d}y, \tag{91}$$

由此$\int_{-2}^{2}f(y)\mathrm{d}y=\frac{8}{3}$。 □

题 3. 用分部积分法证明$\int_0^x\left[\int_0^y f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$。

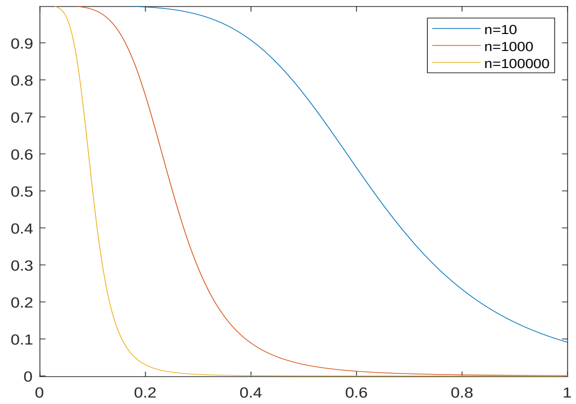

图 8: 函数$y = \frac{1}{1+nx^5}$在$n = 10, 1000, 100000$时，在$x \in [0, 1]$的示意图。

分析：对于复杂的多层积分，其被积函数也以积分形式出现。通过将积分整体换元的方式，可以用分部积分法化简研究。

Proof. 设$F(y) = \int_0^y f(t)\mathrm{d}t$然后用分部积分

$$\int_0^x \left[\int_0^y f(t)\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}y = \int_0^x F(y)\mathrm{d}y = yF(y) \mid_{y=0}^{y=x} - \int_0^x yF'(y)\mathrm{d}y. \tag{92}$$

由于$F'(y) = f(y)$，所以

$$\int_0^x F(y)\mathrm{d}y = xF(x) - \int_0^x yf(y)\mathrm{d}y = \int_0^x xf(y)\mathrm{d}y - \int_0^x yf(y)\mathrm{d}y = \int_0^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y. \tag{93}$$

□

题 4. 计算下列极限

1.$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}$。

2.$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} \int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$。

分析：本题两个小问都是与定积分有关的极限问题，并且都不能简单地通过算出积分计算。第一问使用分段放缩的方法结合$\varepsilon - N$语言，第二问则采用分部积分。希望同学们可以从两个题目学到一些在不能求解定积分具体值时估算积分大小的方法。注意，本题第一问不可以使用

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5} = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0, \tag{94}$$

因为极限$\lim_{n\to\infty}$和积分$\int_0^1$不可以换序。

Proof. **1.**结合图8，我们发现随着n变大，函数$y = \frac{1}{1+nx^5}$从$y(0) = 1$开始，趋向于0的速度越来越快。因此我们希望证明$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5} = 0$。我们注意到$y = \frac{1}{1+nx^5}$的图像

在$[0,1]$大致可以分为两段：其一是在$[0,\delta]$，其中δ通常很小，此时$y=\frac{1}{1+nx^5}$的函数值大致仍等于1；其二是$[\delta,1]$，此时$y=\frac{1}{1+nx^5}$快速向0下降（并不是收敛到0）。依据这样的理解，我们结合$\varepsilon-N$语言证明$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}=0$。

对$\forall\varepsilon>0$，我们希望找到一个N，使得$n>N$时有$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}<\varepsilon$（注：积分值是正数）。我们首先取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，并在$[0,\delta]$和$[\delta,1]$两部分分别讨论积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}$。首先

$$\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}\le\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}1\mathrm{d}x=\frac{\varepsilon}{2}. \tag{95}$$

其次

$$\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}\le\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1\frac{\mathrm{d}x}{nx^5}=-\frac{1}{4n}\frac{1}{x^4}\bigg|_{x=\frac{\varepsilon}{2}}^{x=1}=-\frac{1}{4n}+\frac{1}{n\varepsilon^2}\le\frac{1}{n\varepsilon^2}. \tag{96}$$

因此，对于给定的$\varepsilon>0$，我们得到对积分$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}$的估计

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n\varepsilon^2}. \tag{97}$$

为了$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}<\varepsilon$，再取$N=\left[\frac{2}{\varepsilon^3}\right]+1$，当$n>N$时有

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n\varepsilon^2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{98}$$

结合极限的定义，我们证明了$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+nx^5}=0$。

2.本题显然不能使用洛必达法则。我们用分部积分法处理分母的积分

$$\begin{aligned}\int_0^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t &= \int_0^x t^2\cdot\left(\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^x t^2\cdot\left(\cos\frac{1}{t}\right)'\mathrm{d}t\\ &= t^2\cos\frac{1}{t}\bigg|_{t=0}^{t=x}-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\ &= x^2\cos\frac{1}{x}-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{99}$$

那么分别计算有

$$\lim_{x\to0+0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=0. \tag{100}$$

此外由于

$$\left|\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right|\le\int_0^x\left|t\cos\frac{1}{t}\right|\mathrm{d}t\le\int_0^x t\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}. \tag{101}$$

由夹逼原理

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}=0. \tag{102}$$

因此

$$\lim_{x\to0+0}\frac{1}{x}\int_0^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\lim_{x\to0+0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}=0 \tag{103}$$

□

题 5. *2020年高等数学C期末考试题* 设I是一个开区间，$f(x) \in C(I)$，设$a, b \in I$且$a < b$求证：

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \mathrm{d}x = f(b) - f(a). \tag{104}$$

分析：本题一定不可以用如下的方法做：

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \mathrm{d}x = \int_a^b \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \mathrm{d}x = \int_a^b f'(x) \mathrm{d}x = f(b) - f(a). \tag{105}$$

原因有两个：首先f仅仅连续，不能保证导数$f'(x)$存在；其次，**没有任何理论保证求极限操作和求定积分操作可以交换次序**，即对一般的$f(x, h)$，我们不能保证

$$\lim_{h \to h_0} \int_a^b f(x, h) \mathrm{d}x = \int_a^b \left[\lim_{h \to h_0} f(x, h) \right] \mathrm{d}x, \tag{106}$$

成立。实际上，如果需要保证积分和极限操作可以换序，依赖下学期要学的概念“一致收敛”。

Proof. 我们对积分进行变形

$$\int_a^b \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f(x+h)}{h} \mathrm{d}x - \int_a^b \frac{f(x)}{h} \mathrm{d}x, \tag{107}$$

为了进一步化简，我们对上面的第一个积分式做换元$y = x + h$使得两个积分式的被积函数一致

$$\int_a^b \frac{f(x+h)}{h} \mathrm{d}x \xlongequal{y=x+h} \int_{a+h}^{b+h} \frac{f(y)}{h} \mathrm{d}y, \tag{108}$$

由于式(107)两个积分式被积函数相同，我们可以重新计算他们的差

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \frac{f(x+h)}{h} \mathrm{d}x - \int_a^b \frac{f(x)}{h} \mathrm{d}x \\
= \ & \int_{a+h}^{b+h} \frac{f(x)}{h} \mathrm{d}x - \int_a^b \frac{f(x)}{h} \mathrm{d}x \\
= \ & \left[\int_b^{b+h} \frac{f(x)}{h} \mathrm{d}x + \int_{a+h}^b \frac{f(x)}{h} \mathrm{d}x \right] - \left[\int_a^{a+h} \frac{f(x)}{h} \mathrm{d}x + \int_{a+h}^b \frac{f(x)}{h} \mathrm{d}x \right] \\
= \ & \int_b^{b+h} \frac{f(x)}{h} \mathrm{d}x - \int_a^{a+h} \frac{f(x)}{h} \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{109}$$

接下来使用积分中值定理，对于每一个h，都存在$\xi_1, \xi_2 \in I$使得

$$\int_b^{b+h} \frac{f(x)}{h} dx = h \cdot \frac{f(\xi_1)}{h} = f(\xi_1) \quad , \int_a^{a+h} \frac{f(x)}{h} dx = h \cdot \frac{f(\xi_2)}{h} = f(\xi_2), \tag{110}$$

其中$\xi_1 \in [b, b+h], \xi_2 \in [a, a+h]$。代入得到

$$\int_a^b \frac{f(x+h)}{h} \mathrm{d}x - \int_a^b \frac{f(x)}{h} \mathrm{d}x = f(\xi_1) - f(\xi_2). \tag{111}$$

此时我们考虑极限$h\to 0$，根据连续性的定义我们知道$\lim_{x\to b} f(x)=f(b)$。考虑到$\xi_1\in[b,b+h]$有$\lim_{h\to 0}\xi_1=b$，进一步$\lim_{h\to 0} f(\xi_1)=f(b)$。同理$\lim_{h\to 0} f(\xi_2)=f(a)$，亦即

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0}[f(\xi_1)-f(\xi_2)]=f(b)-f(a). \tag{112}$$

□

题 6. 设$f(x)$是$[0,2\pi]$的连续函数，

1.$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x.$

2.2021年高等数学B期中考试题 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$

分析：当n很大，被积函数$f(x)\sin nx$和$f(x)|\sin nx|$是高频震荡的函数，这类问题的分析方法一般是分段使用积分中值定理。

Proof. **1.**根据$\sin nx$的周期将区间$[0,2\pi]$划分，并使用完整版的积分中值定理

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n}\int_{(2(k-1)\pi)/n}^{(2k\pi)/n} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right)\int_{(2(k-1)\pi)/n}^{(2k\pi)/n}|\sin nx|\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{113}$$

其中$\xi_k\in[\frac{(2k-2)\pi}{n},\frac{2k\pi}{n}]$。注意到积分

$$\int_{(2(k-1)\pi)/n}^{(2k\pi)/n}|\sin nx|\mathrm{d}x \overset{y=nx}{=\!=\!=} \frac{1}{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}|\sin y|\mathrm{d}y=\frac{4}{n}. \tag{114}$$

由此

$$\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}f\left(\xi_k\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi}{n}f\left(\xi_k\right)\to\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x, \tag{115}$$

最后一个极限式使用了黎曼和的定义。

2.根据$\sin nx$的周期将区间$[0,2\pi]$划分，不过由于完整版的定积分中值定理要求定理中的$g(x)$不变号，这次我们以半周期分段

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\\ =&\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{((2k-2)\pi)/n}^{((2k-1)\pi)/n} f(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{((2k-1)\pi)/n}^{(2k\pi)/n} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]\\ =&\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\xi_k\right)\int_{((2k-2)\pi)/n}^{((2k-1)\pi)/n}\sin nx\mathrm{d}x+f\left(\xi_k\right)\int_{((2k-2)\pi)/n}^{((2k-1)\pi)/n}\sin nx\mathrm{d}x\right],\end{aligned} \tag{116}$$

其中$\xi_k\in[\frac{(2k-2)\pi}{n},\frac{(2k-1)\pi}{n}],\eta_k\in[\frac{(2k-1)\pi}{n},\frac{2k\pi}{n}]$。计算积分

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(f(\xi_k)-f(\eta_k)\right). \tag{117}$$

我们式(117)右侧求和式拆成两部分分别用黎曼和计算极限

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(\xi_k)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi}{n}f(\xi_k)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k\pi}{n}-\frac{(2k-2)\pi}{n}\right)f(\xi_k)\to\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x. \tag{118}$$

同理

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(\eta_k)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k\pi}{n}-\frac{(2k-2)\pi}{n}\right)f(\eta_k)\to\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x. \tag{119}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(\xi_k)\right]-\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(\eta_k)\right]=0. \tag{120}$$

□

题 7. 设$f(x)\in C^1[0,1]$且$f(0)=f(1)=0$，证明：$\int_0^1(f(x))^2\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x$。

Proof. 利用NL公式和变限积分的性质

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t, \tag{121}$$

在上式两侧平方然后使用柯西-施瓦茨不等式

$$(f(x))^2\le\left(\int_0^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t\right)^2\le\left(\int_0^x 1^2\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_0^x(f'(t))^2\mathrm{d}t\right)=x\int_0^x(f'(t))^2\mathrm{d}t. \tag{122}$$

由于被积函数$(f'(t))^2$非负，我们有

$$(f(x))^2\le x\int_0^x(f'(t))^2\mathrm{d}t\le x\int_0^1(f'(t))^2\mathrm{d}t, \tag{123}$$

注意到式(123)关于一切$x\in[0,1]$成立，所以将式(123)两侧分别在$x\in[0,1]$定积分

$$\int_0^1(f(x))^2\mathrm{d}x\le\left(\int_0^1 x\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^1(f'(t))^2\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{2}\int_0^1(f'(t))^2\mathrm{d}t. \tag{124}$$

□

2.3 扩展补充题

补 1. 计算下列定积分

1.$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}.\mathrm{d}x$

2.$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.$

3.$\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x.$

4.$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$。

补 2. 如果$f(x)\in C[a,b]$单调递增，证明$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

补 3. 证明：$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x=0$

补 4. 考虑函数$h_n(x)=\begin{cases} nx & ,0\le x<\frac{1}{n}, \\ 0 & ,\text{其他情况}, \end{cases}$然后再定义$g_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}h_n(x-\frac{k}{n})$，求极限$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^x g_n(x)\mathrm{d}x$。

补 5. 设$f\in C^1[0,1]$满足$f(0)=f(1)=0$且$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=1$，利用柯西-施瓦茨不等式证明下述海森堡不等式$\left(\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1(xf(x))^2\mathrm{d}x\right)\ge\frac{1}{4}$。如果$f(x)$代表量子力学波函数，那么积分$\int_0^1(f'(x))^2\mathrm{d}x$和$\int_0^1(xf(x))^2\mathrm{d}x$在动量和位置上的偏差，海森堡不等式对应量子力学中的测不准原理。