导数讲义

谢彦桐

北京大学数学科学学院

2021.10.19

题型说明，基础题指方法非常标准的题目，综合题指方法标准但需要一些技术技巧的题目，进阶题指方法不常规的题目。

目录

1 知识点整理

1.1 导数的定义

导数定义的直观理解

导数的数学严格定义是逐点的，在x_0处函数$f(x)$的导数定义为

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{1}$$

当我们判断一点是否可导，只要判断极限极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$是否收敛即可。可以看到，判断$f(x)$在$x_0$处可导，既需要$f(x)$在去心邻域$U(x_0,\delta)/\{x_0\}$的信息，也依

赖$f(x)$在x_0点函数值的信息。思考题：如果极限$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$存在，能否说明$f(x)$在$x_0$处可导？

在高中数学学习中，由于没有严格定义极限，许多同学对于导数的理解停留在背诵层面。**在高等数学的层次理解导数，就必须从函数极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$出发。**除去导数的抽象极限定义，导数的几种直观定义方式我们都比较熟悉。从图像上看，分式$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$可以理解为$x_0$处一条割线的斜率，对$x$取极限便得到$x_0$处切线的斜率。在物理上如果$f(x)$代表时间$x$时的位移，那么$f'(x)$则代表时间$x$时的速度。另一种理解导数的方式是通过微分的方式，我们留到后面介绍微分时候说明。

必须强调的是，可导是有条件的，即极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$必须收敛，据此我们可以证明一个函数可导就必然是连续的。由于导数是通过极限$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$定义的，我们也可以定义左导数和右导数，以及导数的四则运算法则，这里不做赘述。课本上详细给出了各种初等函数导数的计算公式。

通过病态函数深入理解导数的定义

对于考试而言，通过公式直接计算导数的计算题通常没有区分度，难点在于那些不能用公式计算的函数的导数，这依赖我们对导数性质的深入理解。我们本节讨论病态函数

$$f_m(x)=\begin{cases} x^m\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases} \tag{2}$$

这里m为正实数。特别地，这里将$\sin\frac{1}{x}$替换为$\cos\frac{1}{x}$性质类似，我们只讨论正弦的情形。

在上一章学习中我们知道，$x=0$是函数$f_0(x)$的第二类间断点，因为$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在。而$x=0$是函数$f_1(x)$的连续点，因为$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$。更一般地，我们不难验证$f_1(x)$在$\mathbb{R}$连续，且当$x\neq 0$时有$f_1'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$。对于点$x=0$，我们不能简单通过初等函数的导数性质计算其导数，故使用定义

$$f_1'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}. \tag{3}$$

由此$f(x)$在0处并不可导。然而当我们考虑$f_2(x)$时，对$x\neq 0$，我们依然可以计算$f_2'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$。在$x=0$处依定义计算导函数

$$f_2'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0. \tag{4}$$

由此$f_2(x)$在$\mathbb{R}$点点可导且

$$f_2'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases} \tag{5}$$

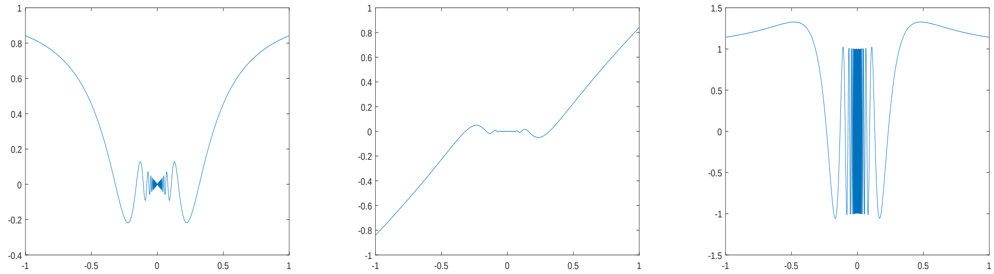

图 1: 三张图片从左向右依次为函数$f_1(x)$，$f_2(x)$和$f_2'(x)$的图像。在点$x = 0$附近，函数$f_1(x)$和$f_2(x)$的振幅收敛到0，但是$f_1(x)$的震荡却比$f_2(x)$剧烈得多，这直观体现了为什么$f_1(x)$在$x = 0$不可导而在$f_2(x)$可导。而$f_2'(x)$的图像中0附近的振幅保持稳定且不收敛于0，这说明了为什么$x = 0$是$f_2'(x)$的第二类间断点。

虽然如此，导函数$f_2'(x)$在点0处是间断点，属于第二类间断点。我们将三个病态函数$f_1(x)$，$f_2(x)$和$f_2'(x)$的图像绘制在图1中。

我们看下面的例题：

例 1. 回答下列两个问题

1.设$f(x) = \begin{cases} x^m \cos\frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$，求参数$m$的取值范围，使得$f(x)$在$x = 0$右连续但是右导数不存在。

2.设$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0. \\ 0, & x = 0. \end{cases}$，求二阶导数$f''(0)$。

Proof. **1.**首先$f(x)$是右连续的，因此极限

$$\lim_{x\to 0+0} x^m \cos\frac{1}{x} = 0, \tag{6}$$

这说明$m > 0$，即振幅x^m在0处收敛于0。接着$f(x)$不存在右导数，所以极限

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x^m \cos\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0+0} x^{m-1} \cos\frac{1}{x}, \tag{7}$$

是发散的，这要求$m - 1 \leq 0$，此时振幅x^{m-1}不收敛于0。综上$m \in (0, 1]$。

2.我们分别在$x \neq 0$和$x = 0$计算$f(x)$的导函数，得到

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2 \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{8}$$

由此计算

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(4x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}\right) = 0. \tag{9}$$

□

在数学中，我们称连续性和可导次数越高的导数具有更高的**光滑性**（也有文献称“正则性”）。你们显然，$f_2(x)$比$f_1(x)$具有更高的光滑性。更一般的，对于一般的正实数m，随着m的增大$f_m(x)$的光滑性也在逐渐提高。总结规律，一般地可以通过数学归纳法总结如下定理：

定理 1.1. 设$n \in \mathbb{N}$，那么
1.设$n \neq 0$，函数$f_m(x)$在*0*处n阶可导的充分必要条件是$n > 2m-1$，且$f_m^{(n)}(0) = 0$。
2.函数$f_m(x)$的n阶导数在*0*处连续的充分必要条件是$n > 2m$。

本定理的结论超出了课程要求，不需要大家牢记。大家只需要明白，对于病态函数$f_m(x)$，在$x \neq 0$的任一点都是无穷次可导的，而对于$x = 0$的导数或连续性必须使用定义验证。并且在$x \neq 0$的点对$f_m(x)$求导，得到的函数是形如$x^\alpha \sin \frac{1}{x}$和$x^\beta \cos \frac{1}{x}$的项的加减，当某一次导数$f_m^{(n)}(x)$得到的振幅$x^\alpha$或$x^\beta$的指数小于等于0时，这说明$f_m^{(n)}(x)$在$x = 0$不连续。

小叙微分与导数

最后我们简单介绍微分与导数的关系。与导数的极限定义不同，**微分的定义基于朴素的“化曲为直”的想法。**考虑函数$y = f(x)$从x到$x + \Delta x$一段函数值的变化$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，如果函数$f(x)$连续那么$\Delta y$是无穷小量，我们寄希望于当$\Delta x \to 0$时$\Delta y$是线性函数（即“一次函数”），即

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{10}$$

此时我们称Δy和Δx为**微分**，如果(10)成立则称$f(x)$在x_0可微。此时Δy是关于Δx的不低于一阶的无穷小量（注：$A = 0$时Δy可以是一阶以上的无穷小量）。此时Δy的主项线性函数$A\Delta x$，这就是“化曲为直”的想法。记为$A = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，称为**微商**，即“微分之商”。而凑巧的是，对于$\mathbb{R}$上一元函数可微与可导是等价的，且$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = f'(x_0)$，**因此我们一般不区分可微和可导的区别，也不区分导数和微商的区别。**因此有时也将导数记为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$。

我们指出虽然一元函数导数和微商没有区别，我们一般采用数学表述上更为严格的表示方法$f'(x)$。但这不表示微商的记号没有意义，在推导求导公式的过程中，微商的表述形式更直观。此外我们还需牢记，如果我们只写出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，那么我们默认它是一个关于$x$的函数，如果想要表达$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的函数值则记为$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$。

1.2 各类导数的计算技巧

我们这里主要介绍复合函数、反函数、参数方程、隐函数四类函数的求导技巧。以

下几种函数的求导公式通常有微商记法和导数记法，微商记法非常直观却不够严格，导数记法是更严格的。

复合函数

我们假定$y = f(x)$和$z = g(y)$，我们定义复合函数$z = g(f(x)) = h(x)$以x为自变量，那么得到的复合函数$h(x)$的导数公式为

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x), \tag{11}$$

其中项$g'(f(x))$是导函数g'在点$f(x)$处的函数值，这是需要注意的。

利用微商的表述形式，也可以写出如下形式简单的公式，被称为链式法则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \tag{12}$$

即z关于x的微商等于z关于y的微商乘以y关于x的微商。**上述表达看似非常直观，可以辅助理解，但是却有逻辑错误。**因为我们计算出的微商或导数$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$是自变量为$x$的函数，而$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$虽然是以自变量为$y$的函数，但必须通过$y = f(x)$的形式复合为$x$的函数。严格的链式法则应该写为

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right|_{y=f(x_0)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}. \tag{13}$$

瑕不掩瑜，链式法则的形式也是非常有价值的。

反函数

设$y = f(x)$是定义域上的一一映射，由此定义反函数$x = g(y)$。课本采用定义的方法计算反函数的导数，我们则从复合函数的角度思考。用反函数性质，由于$x = g(f(x))$对每一个x成立，求导得

$$1 = g'(f(x)) \cdot f'(x). \tag{14}$$

因此对于$y = f(x)$，反函数g在y处的导数为

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}. \tag{15}$$

这里我们指出使用代换$y = f(x)$的原因是我们希望将反函数导数g'写成关于自变量y的函数。类似地利用微商的形式$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}$也不难写出

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=g(y_0)}}. \tag{16}$$

参数方程

我们假定函数$y = f(x)$是由参数方程确定的，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [a, b]. \tag{17}$$

特别地，想要定义参数方程必须指明参数t的定义域。朴素的想法是$y(t) = f(x(t))$对一切t成立，故左右同时求导

$$y'(t) = f'(x(t))x'(t), \tag{18}$$

因此得到参数方程求导公式

$$f'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}, \tag{19}$$

其中$x_0 = x(t_0)$，即计算f在x_0的导数必须找到对应t_0，然后计算$\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$。**特别地，在计算参数方程导数$f'(x)$时，得式为关于t的表达式是允许的。**

从微商的角度也可以将参数方程的求导形式计算$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}$。由此得到求导公式

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \frac{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}}{\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}}. \tag{20}$$

隐函数

由于隐函数求导的微商形式严格来说依赖多元函数微分性质，因此我们只介绍导数形式隐函数求导方法。所谓隐函数，是指不由具体表达式，而由某个等式确定。例如等式$h(x, y) = y^2 - 2xy - x^2 + 2x - 4 = 0$，对于每一个给定的$x$，如果可以解出一个$y(x)$使得$(x, y(x))$满足等式，由于$y(x)$并没有给出显式表达式，就称$y(x)$是一个隐函数。

对于一般的等式$h(x, y) = 0$确定的隐函数，什么样的x我们可以解出符合等式的y，以及对于给定的x我们有没有可能解出两个y使得x到y的对应关系是一对二从而不是函数，这两个问题的回答依赖多元函数的知识故不赘述。在本节计算隐函数导数时，我们一律默认隐函数在定义域里存在。此外我们本节并无法对一般形式的隐函数求导，我们便以$h(x, y) = y^2 - 2xy - x^2 + 2x - 4 = 0$为例演示隐函数的导数的计算方法。

假定$h(x, y) = y^2 - 2xy - x^2 + 2x - 4 = 0$确定了隐函数$y = y(x)$，那么关于$x$的等式恒成立：

$$G(x) = (y(x))^2 - 2xy(x) - x^2 + 2x - 4 = 0. \tag{21}$$

由此对x求导得

$$2y(x)y'(x) - 2y(x) - 2xy'(x) - 2x + 2 = 0, \tag{22}$$

这一步请特别注意$y(x)$是关于x的函数而不是单纯的一个变量y。由此解得

$$y'(x)=\frac{y(x)+x-1}{y(x)-x}. \tag{23}$$

我们指出，得到的隐函数导数(23)仍然包含没有显式表达式的部分$y(x)$，这是无法避免的。有时也可以略去y对x的依赖写为$y'=\frac{y+x-1}{y-x}$。如果想对隐函数求二阶导数，只需要以式(23)为基础用公式计算即可。

1.3 高阶导数的计算方法

高阶导数的计算是一个非常复杂的问题，这里的高阶导数通常指要求计算某函数n阶导数或n阶导数函数值的问题，其中$n\in\mathbb{N}^*$。我们将在本节着重介绍各种技巧，不过仍有一些题目需要见招拆招，此外我们即将在第四章学习的Taylor公式也是计算高阶导数的可行方法。

公式法

部分比较简单的函数，可以直接计算其n阶导数的不等式，我们总结如下（课本99页有相关证明）

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right), \tag{24}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right), \tag{25}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}, \tag{26}$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \tag{27}$$

$$(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x. \tag{28}$$

这几个公式的证明都是通过数学归纳法，因此不需要死记硬背，可以通过“找规律”的方法在考场自行推导。此外还有一个重要公式是Leibniz公式，它使得我们可以写出乘积函数的n阶导数：

$$[f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x). \tag{29}$$

我们可将一些形式简单函数写成式(24)-(28)中函数加减乘的形式，通过导数加减性质和Leibniz公式计算其n阶导数。下面看一例题：

例 2. 设$f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$，求$f^{(n)}(x)$，其中$n\in\mathbb{N}^*$。

Proof. 经过代数变形

$$f(x)=\frac{2x}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}. \tag{30}$$

根据式(26)得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} &= (-1)^n\frac{n!}{(x+1)^{n+1}},\\ \left(\frac{1}{-1+x}\right)^{(n)} &= (-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

这里我们不直接对$\frac{1}{1-x}$求导而选择对$\frac{1}{x-1}$求导，是为了避免$-x$对导数的影响。因此

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}n!\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right). \tag{31}$$

□

处理这类公式法问题时，主要的目标是把被求导函数拆解为我们可以直接计算n阶导的函数。

找规律和数学归纳法

对于一些很复杂的函数不能用公式处理，我们可以列举函数的各阶导数总结规律，然后使用数学归纳法计算其n阶导数。这类方法适用面很广，我们看下例：

例 3. 设$f(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，求$f^{(n)}(x)$，其中$n\in\mathbb{N}^*$。

Proof. 当$n=1$时有$\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$。当$n=2$时有$\left(x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)''=\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$。当$n=3$时有$\left(x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)'''=-\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$。我们希望证明

$$\left(x^n\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}. \tag{32}$$

我们用数学归纳法。式(32)显然对$n=1$成立。假如式(32)对$n=k$成立，即

$$\left(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}=\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}. \tag{33}$$

我们想计算$\left(x^{k+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)}$。由于归纳假设与我们的目标函数不一致，所以我们首先使用Leibniz公式计算

$$\begin{aligned}\left(x^{k+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)} &= \left(x\cdot x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}\\ &= x\cdot\left(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}+k\cdot\left(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k-1)}\\ &= \frac{(-1)^k}{x^k}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+k\cdot\left(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k-1)}.\end{aligned} \tag{34}$$

再对左右两端求导数

$$\begin{aligned}\left(x^{k+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k+1)} &= (-1)^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-k}{x^{k+1}}-\frac{1}{x^{k+2}}\right)+k\cdot\left(x^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{(k)}\\ &= (-1)^k\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-k}{x^{k+1}}-\frac{1}{x^{k+2}}\right)+\frac{k(-1)^k}{x^{k+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.\end{aligned} \tag{35}$$

由此归纳法成立。 $\square$

化显为隐

化显为隐是一类比较特殊的高阶导数计算方法，我们直接看例题来总结规律

例 4. 设$f(x) = \arctan x$，求$f^{(n)}(0)$，其中$n \in \mathbb{N}^*$。

Proof. 我们设$y = \arctan x$，可以计算一阶导数

$$y' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{36}$$

移项得

$$(1+x^2)y' = 1. \tag{37}$$

我们指出式(37)是确定x与y'关系的隐函数。我们对式(37)求n次导数

$$\left((1+x^2)y'\right)^{(n)} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{38}$$

再用Leibniz公式展开

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0, \quad \forall n \geq 2. \tag{39}$$

代入$x = 0$得

$$y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)y^{(n-1)}(0), \quad \forall n \geq 2. \tag{40}$$

结合$y'(0) = 1$和$y''(0) = 0$得

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & , \quad n\text{是偶数}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & , \quad n\text{是奇数}. \end{cases} \tag{41}$$

$\square$

我们指出，计算$y = \arctan x$的n阶导数主要难度在于其一阶导数$\frac{1}{1+x^2}$比较难直接用公式法或归纳法计算，因此我们将y'和x的显关系化为隐关系(37)，然后再对式(37)求n阶导数，结合Leinbiz公式计算y的导数之间的迭代关系。我们指出，这一方法能够成立的主要原因是y'和x的隐关系(37)比较简单，使得使用Leibniz公式得到的n阶导数表达式只有三项，如y'和x的隐关系的隐关系比较复杂，则可能需要寻找更高阶导数的隐关系。

注解 1. 本题有一种另解。将y'写为$y' = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$，其中i是虚数单位，然后用公式法求解。

2 题目类型和解题方法整理

- 利用导数的定义计算给定函数导数
- 利用复合函数求导公式或反函数求导公式计算给定函数导数
- 计算参数方程确定的函数的导数
- 计算隐函数的导数
- 通过数学归纳法、Leibniz公式、化显为隐等方法计算高阶导数

3 习题

题 1. 判断符合以下要求的函数是否存在，并说明理由
1.在全体实数定义的函数，其仅在一点一阶可导，其余点均不连续。
2.在全体实数定义的函数，其仅在一点二阶可导，其余点均不连续。

分析：本题旨在通过病态函数的构造加深对导数和二阶导数的定义的理解。

Proof. **1.**存在，构造函数$f(x)=x^2D(x)$，其中$D(x)$是Dirichlet函数。那么根据上一章讲义的分析可知$f(x)$在$x\neq 0$均不连续，下面证明$f(x)$在$x=0$可导

$$f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2D(x)-0}{x}=\lim_{x\to 0}xD(x)=0. \tag{42}$$

所以$f(x)$仅在$x=0$一点可导，其余点不连续。

2.不存在。我们回忆二阶导数的定义。称函数$f(x)$在点x_0二阶可导，如果导函数$f'(x)$在x_0的邻域$U(x_0,\delta)$有定义，且$f'(x)$在x_0处可导。也就是说，如果一个函数在一点x_0二阶可导，至少需要$f(x)$在x_0的邻域$U(x_0,\delta)$是可导的，由于可导蕴含着连续，因此$f(x)$必须在邻域$U(x_0,\delta)$连续。由此不存在函数$f(x)$在一点二阶可导，其余点均不连续。 □

题 2. 计算题
1.设$f(x)=|\ln|x||$，求$f'(x)$。
2.设$f(x)=x^{x^x}$，求$f'(x)$。
3.设$f(x)=2\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)-\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$，求$f'(x)$。
4.定义$g(x)=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$，其中$f(x)$可导且$f'(x)=\arctan x$，求$g'(x)$。

分析：本题包括前两问为常规的绝对值求导和指数函数求导，后两问则是复合函数求导，应注意计算准确率。特别地，**求导前先求函数定义域**。

Proof. **1.绝对值有关的极限我们只需要特别关注绝对值内为0的情况。**定义域$x \neq 0$。首先考虑$\ln|x| \neq 0$即$x \neq \pm 1$的情况。由于

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 1, \\ -\ln x, & 0 < x < 1, \\ -\ln(-x), & -1 < x < 0, \\ \ln(-x), & x < -1. \end{cases} \tag{43}$$

计算导数

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1, \\ -\frac{1}{x}, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x}, & -1 < x < 0, \\ -\frac{1}{x}, & x < -1. \end{cases} \tag{44}$$

当$x = \pm 1$时，我们分别计算左右导数。由于$f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} \frac{\ln x - 0}{x-1} = 1$而$f(1-0) = \lim_{x \to 1+0} \frac{-\ln x - 0}{x-1} = -1$由此$f(x)$在$x=1$不可导。同理$f(x)$在$x=-1$也不可导。

2.定义域$x > 0$。本题的主要方法是使用取对数的方式将$f(x)$化成可求导的形式。设$g(x) = x^x$，我们知道$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$，由此

$$g'(x) = \mathrm{e}^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1). \tag{45}$$

接下来$x^{x^x} = \mathrm{e}^{x^x \ln x}$，由此

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{x^x \ln x}\left[(x^x)' \cdot \ln x + \frac{x^x}{x}\right] \\ &= x^{x^x}\left(x^{x-1} + x^x(\ln x + 1)\ln x\right). \end{aligned} \tag{46}$$

3.定义域$x \neq 0$。直接使用复合函数求导公式计算

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[2\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right) - \ln\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right) + \ln\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\right]' \\ &= \frac{2}{1 + \left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)^2} \cdot \frac{(2x)\cdot(\sqrt{2}x) - \sqrt{2}(x^2-1)}{2x^2} - \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \\ &\quad + \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\left(x^2+1\right)}{x^4+1} + \frac{\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)\left(2x + \sqrt{2}\right) - \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(2x - \sqrt{2}\right)}{\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\left(x^2+1\right)}{x^4+1} + \frac{2\sqrt{2}\left(-x^2+1\right)}{x^4+1} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{x^4+1}. \end{aligned} \tag{47}$$

4.用复合函数求导公式

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= f'\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \\
&= \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{2}{(x+1)^2}.
\end{aligned} \tag{48}
$$

□

注解 2. 我们这里简单补充和$f(x)=|x|$导数的一些性质。我们比较熟悉的是$f(x)$在$x\neq 0$可导，而在$x=0$处左右导数分别为*-1*和*1*，所以不可导。我们也可以写作$|x|=\sqrt{x^2}$在$\mathbb{R}$上定义，因为函数$g(x)=\sqrt{x}$在$x>0$可导但在$x=0$不存在右导数（注意到极限$\lim_{x\to0+0}\frac{\sqrt{x}}{x}=+\infty$），根据复合函数求导法则只能说明$|x|$在$x\neq0$可导，但是说明不了其在$x=0$可导性。

题 3. 设$a>0$，考虑参数方程$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

分析：本题为参数方程求导问题，同学们需额外关注参数方程二阶导数的计算方法。

Proof. 容易计算一阶导数

$$
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t. \tag{49}
$$

要计算参数方程二阶导，应首先把$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$写成关于$x$的表达式，然后用复合函数求导法。我们假定$t$关于$x$的关系式为$t=t(x)$（我们暂时不需要它的具体表达式），它是$x=a\cos^3 t$的反函数，由反函数求导法则计算

$$
t'(x)=\frac{1}{-3a\cos^2(t(x))\sin(t(x))} \tag{50}
$$

由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\tan t(x)$对$x$再求一次导数

$$
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{t'(x)}{\cos^2(t(x))}=-\frac{1}{(-3a\cos^2 t\sin t)\cos^2 t}=\frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}. \tag{51}
$$

□

题 4. 设隐函数$y=y(x)$由$x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$，其中$x>0$，求$y'(x)$。

Proof. 本题为隐函数求导的综合题。将隐函数$y=y(x)$代入表达式可以得到对一切x恒成立的等式

$$
x^{y(x)^2}+y(x)^2\ln x+4=0. \tag{52}
$$

左右对x求导得到

$$x^{y(x)^2}\left[\frac{y(x)^2}{x}+2y(x)y'(x)\ln x\right]+\frac{y(x)^2}{x}+2y(x)y'(x)\ln x=0, \tag{53}$$

其中对$x^{y(x)^2}$求导要首先化为指数形式$\exp\left(y(x)^2\ln x\right)$。继续化简得

$$\left(x^{y(x)^2}+1\right)\left[\frac{y(x)^2}{x}+2y(x)y'(x)\ln x\right]=0. \tag{54}$$

由此

$$y'(x)=-\frac{y}{2x\ln x}. \tag{55}$$

□

题 5. 求参数a,b,c使得$f(x)$在全体实数上可导，其中

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x|<1 \\ ax^4-bx^2+c. & |x|\geq 1 \end{cases}$$

分析：由于$f(x)$是分段函数，我们只需取a,b,c使得$f(x)$在端点±1可导即可。

Proof. 首先为了$f(x)$在$\mathbb{R}$可导，首先$f(x)$必须连续，而

$$\lim_{x\to1-0}\left(e^{\frac{1}{x^2-1}}\right)=\lim_{x\to-1+0}\left(e^{\frac{1}{x^2-1}}\right)=0. \tag{56}$$

由此我们得到关系式

$$a-b+c=0. \tag{57}$$

另一方面计算极限

$$\begin{aligned} f'(1-0) &= \lim_{x\to1-0}\frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}-0}{x-1} \\ &= \lim_{y\to+\infty}-ye^{\frac{y^2}{1-2y}}\text{（换元}y=-\frac{1}{x-1}\text{）} \\ &= -\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{\frac{y^2}{2y-1}}}. \end{aligned} \tag{58}$$

当$y\to+\infty$时显然有$\frac{y^2}{2y-1}\to+\infty$，因此$\lim_{y\to+\infty}e^{\frac{y^2}{2y-1}}=+\infty$，极限(58)是$\frac{\infty}{\infty}$型不定式。相较而言由于指数项量级更大，故$f'(1-0)=0$，同理$f'(-1+0)=0$。根据$f'(1-0)=f'(1+0)$和$f'(-1-0)=f'(-1+0)$得到

$$4a-2b=0, \tag{59}$$

结合(57)和(59)得到只要a,b,c满足$a:b:c=2:1:1$即可。 □

注解 3. 我们指出极限$\lim_{x\to 1-0}\frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}-0}{x-1}$是$\frac{0}{0}$的不定式，由于等价无穷小方法难以使用，用洛必达法则计算极限是最容易。我们使用换元$y=-\frac{1}{x-1}$的目的是将极限从$\frac{0}{0}$不定式化作$\frac{\infty}{\infty}$不定式，采用量级估计的方法。

题 6. 设$f(x)=(\arcsin x)^2$，求$f^{(n)}(0)$，其中$n\in\mathbb{N}^*$。

分析：本题采用化显为隐的办法，但是寻找可以使用Leibniz公式的隐式的过程是比较复杂的。

Proof. 设$y=(\arcsin x)^2$，进行一次求导得

$$y'=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{\frac{y}{1-x^2}}. \tag{60}$$

对上式左右平方

$$(y')^2(1-x^2)=4y. \tag{61}$$

式(61)虽然是关于x,y,y'的隐式，但是项$(y')^2$的存在使得我们不能直接对式(61)用Leibniz公式计算高阶导。为此我们再求一次导数

$$2y'y''(1-x^2)-2x(y')^2=4y'. \tag{62}$$

消去项y'就可以得到关于x,y',y''的隐式

$$y''(1-x^2)-xy'=4. \tag{63}$$

我们在式(63)两侧用Leibniz公式计算n阶导数

$$y^{(n+2)}(1-x^2)-2nxy^{(n-1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0,\quad \forall n\geq 2. \tag{64}$$

代入$x=0$得

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0). \tag{65}$$

结合$y'(0)=0$和$y''(0)=2$得

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}[(n-2)!!]^2 & , \quad n\text{是偶数},\\ 0 & , \quad n\text{是奇数},\end{cases} \tag{66}$$

其中$n!!$是双阶乘，当n是偶数时，$n!!=n\cdot(n-2)\cdots 2$。 □

题 7. 设$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求高阶导数$f^{(2021)}(0)$。

分析：通过直接找规律的办法，不难猜测$f^{(n)}(0)=0$对一切$n\in\mathbb{N}^*$成立，但是如何利用数学归纳法将这一问题说清楚是较难的。我们注意到$f(x)$在0处的定义是单独补充的，因此对于每一个高阶导数$f^{(n)}(x)$，其在0处都是补充定义为0，在计算$f^{(n+1)}(0)$时则需要计算极限$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}f^{(n)}(x)$。由此我们直接对高阶导数$f^{(n)}(x)$在$x\neq 0$的表达式进行归纳。

Proof. 如果$x\neq 0$，我们考虑高阶导数$f^{(n)}(x)$表达式。不难验算$f'(x)=\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$，$f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}-\frac{4}{x^6}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$以及$f''(x)=\left(\frac{24}{x^5}+\frac{36}{x^7}+\frac{8}{x^9}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$。我们归纳证明，对任意$n\in\mathbb{N}$，如果$x\neq 0$，我们可以将$f^{(n)}(x)$写成如下形式

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, \tag{67}$$

其中P_n是一个多项式。当$n=0$时，$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$，因此多项式$P_0=1$。我们假定$n=k$时可以将$f^{(k)}(x)$写成式(67)形式，即

$$f^{(k)}(x)=P_k\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}. \tag{68}$$

我们继续计算导数$f^{(k+1)}(x)$得

$$f^{(k+1)}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\left[-\frac{2}{x^3}P_k\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\right]. \tag{69}$$

考虑到P_k及其导数P_k'仍然是多项式，那么

$$P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x^3}P_k\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}P_k'\left(\frac{1}{x}\right), \tag{70}$$

也是关于$\frac{1}{x}$的多项式。由此当$x\neq 0$，可以将$f^{(k)}(x)$写成式(67)形式。

接下来我们用归纳法证明$f^{(n)}(0)=0$总成立，其中$n\in\mathbb{N}^*$。首先

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}y\mathrm{e}^{-y^2}=0, \tag{71}$$

其中换元$y=\frac{1}{x}$。对于一般的$k\in\mathbb{N}^*$如果$f^{(k)}(0)=0$，计算

$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}P_k\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}yP_k(y)\mathrm{e}^{-y^2}. \tag{72}$$

由于$yP_k(y)$是关于y的多项式，其量级是比指数型无穷大量e^{y^2}小的，所以$\lim_{y\to\infty}yP_k(y)\mathrm{e}^{-y^2}=0$。一般地，$f^{(2021)}(0)=0$。 □