Aufgabe 1:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} \\ -\frac{2x_2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{x_2}{2} \end{pmatrix}$$

$\nabla f = 0$

$x_1 = 0$

$$\frac{2x_2}{(1+x_2^2)^2} = \frac{x_2}{2} \qquad x_{21} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(1+x_2^2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4 = (1+x_2^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1 + x_2^2 \qquad 1 + x_2^2 > 0 \; \forall x_2 \in R$$

$$\Leftrightarrow 1 = x_2^2$$

$$\Leftrightarrow x_{22} = -1 \wedge x_{23} = 1$$

Punkte $(0,0), (0,-1), (0,1)$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{2-6x_1^2}{(1+x^2)^3} & 0 \\ 0 & \frac{6x_1^2 - 2}{(1+x^2)^3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(0,0) Sattel Punkt

$$\nabla^2 f(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{6-2}{(2)^3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{8} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(0,-1) lokales Minimum.

$$\nabla^2 f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{6-2}{(2)^3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(0,1) lokales Minimum

(A3)

Wir stellen zuerst q als Summe dar

$$q(x) = \frac{1}{2}x^T A x + b^T x + c$$

$$= \frac{1}{2}(x_1, \dots, x_n)^T \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + (b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot a_{i0}, \dots, \sum_{i=1}^n x_i \cdot a_{in}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left(\sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j\right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i x_i\right) + c$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j\right) + b_k$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_{i \neq k} a_{ik} x_i}_{j=k} + \underbrace{\sum_{j \neq k} a_{kj} x_j}_{i=k} + \underbrace{2 a_{kk} x_k}_{i=j=k} \right) + b_k$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot (a_{ik} + a_{ki})\right) + b_k$$

Damit ist dann

$$q'(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot (a_{i1} + a_{1i}) + b_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (a_{in} + a_{ni}) + b_n \end{pmatrix}$$

Für q'' berechnen wir zuerst:

$$\frac{\partial q}{\partial x_k, x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (a_{ik} + a_{ki})\right) + b_k$$
$$= \frac{1}{2}(a_{lk} + a_{kl})$$

Die Hesse-Matrix sieht also wie folgt aus:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_{11}+a_{11}) & \frac{1}{2}(a_{21}+a_{12}) & \cdots & \frac{1}{2}(a_{n1}+a_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}(a_{n1}+a_{n1}) & \frac{1}{2}(a_{2n}+a_{2n}) & \cdots & \frac{1}{2}(a_{nn}+a_{nn}) \end{pmatrix}$$

Wir wissen, dass $A + A^T$ symmetrisch ist. Wir versuchen also A mit $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ zu ersetzen.

Wir müssen nur zeigen, dass gilt

$$x^T \frac{1}{2}(A + A^T)x = \frac{1}{2}x^T Ax + \frac{1}{2}x^T A^T x$$
$$= \frac{1}{2}x^T Ax + \left(\frac{1}{2}x^T A^T x\right)^T = \frac{1}{2}x^T Ax + \frac{1}{2}x^T A x = x^T Ax$$

$x^T Ax$ ist also das gleiche wie $x^T \frac{1}{2}(A+A^T)x$ und damit können wir A immer mit der symmetrischen Matrix $\frac{1}{2}(A+A^T)$ ersetzen.

Es muss gelten $q'(x)=0$. Durch das wissen, dass A symmetrisch ist können wir q' vereinfachen.

$$\begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_{1i}\right) + b_1 \\ \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_{ni}\right) + b_n \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Hesse Matrix, wir vereinfachen diese wieder mit dem Wissen, dass A symmetrisch ist.

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Da A positiv definit ist, ist $\overline{x}$ ein lokales Minimum