1.

a) für $\|\cdot\|_1$: $\max\limits_{j=1,\dots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$$\|Ax\|_1 \leq \left(\max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right) \cdot \|x\|_1 \quad \text{für } \forall x$$

$$\|Ax\|_1 \Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_1$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \\ \vdots \end{pmatrix} \right\|_1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \right| \underset{\text{Bemerkung 10}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j|$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j|$$

$$\underset{\text{Summen wechseln}}{\Rightarrow} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j|$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$= \|x\|_1 \cdot \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| = \|x\|_1$

Mit der Definition Aus der folie Satz 9.

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|$$

Dadurch existiert ein j_0, sodass:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Dann erfüllt der Einheitsvektor e_{j_0} die Bedingung $\|e_{j_0}\|_1 = 1$ und es gilt:

$$\|Ae_{j_0}\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Dann erfüll der Einheitsvektor e_{j_0} die Bedingung $\|e_{j_0}\| = 1$ und gilt:

$$\|Ae_{j_0}\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

2. fur $\|\cdot\|_\infty$: $\max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|$

$$\|Ax\|_\infty \leq \left(\max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|$$

$$\leq \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| |x_j|$$

$$\leq \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty$$

Also existiert ein Index i_0 sodass:

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Dann erfüllt der Vektor

$$\check{x} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{a_{i_0 1}}}{|a_{i_0 1}|} \\ \vdots \\ \frac{\overline{a_{i_0 n}}}{|a_{i_0 n}|} \end{pmatrix}$$

die Bedingung $\|\check{x}\|_\infty = 1$ und es gilt:

$$\|A\check{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

A2

a)

$$uv^T = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \cdots & u_nv_n \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rang}(uv^T) = 1$

$\operatorname{tr}(uv^T) = v^Tu$ ist Summe der Eigenwerte

$n-1$ Eigenwerte sind 0 $\Rightarrow$ letzter Eigenwert ist v^Tu

Für das charakteristische Polynom der Matrix gilt nach der Definition:

$$p(\lambda) = \det(uv^T - \lambda I) = (-1)^n (x-0)^{n-1}(x - v^Tu)$$

λ ist nun durch $\lambda = -1$ zu ersetzen

$$p(-1) = \det(I + uv^T) = (-1)^n(-1)^{n-1}(-1-v^Tu)$$

$$= (-1)^{2n-1}(-1-v^Tu) \Rightarrow 1 + v^Tu$$

Schaut man sich jetzt

$\det(A+uv^T) = \det(A + AA^{-1}uv^T) = \det(A)\det(I + A^{-1}uv^T)$

$\Rightarrow \det(A)(1+v^T(A^{-1}u))$

A ist regulär $\Rightarrow \det(A) \neq 0$ und

$\det(A+uv^T) = 0 \Leftrightarrow \det(A)(1+v^T(A^{-1}u)) = 0 \Leftrightarrow 1+v^TA^{-1}u = 0$

$\hat{A}$ ist also genau dann singulär, wenn $1+v^TA^{-1}u = 0$ ist.

b) $\hat{A}^{-1} = A^{-1} - \alpha A^{-1}uv^TA^{-1}$, $\alpha = \dfrac{1}{1+v^TA^{-1}u}$

Zu zeigen ist, dass

$\hat{A}\hat{A}^{-1} = I$ und $\hat{A}^{-1}\hat{A} = I$

1.) $\hat{A}\hat{A}^{-1} = (A+uv^T)(A^{-1} - \alpha A^{-1}uv^TA^{-1})$

$= AA^{-1} - A\alpha A^{-1}uv^TA^{-1} + uv^TA^{-1} - uv^T\alpha A^{-1}uv^TA^{-1}$

$= I - \alpha uv^TA^{-1} + uv^TA^{-1} - uv^T\alpha A^{-1}uv^TA^{-1}$

$= I + uv^TA^{-1} + u(-\alpha - v^T\alpha A^{-1}u)v^TA^{-1}$

$= I + uv^TA^{-1} - uv^TA^{-1}\alpha(1+v^TA^{-1}u)$

$= I + uv^TA^{-1} - uv^TA^{-1} \cdot 1$

$= I$ ✓

2) $\hat{A}^{-1}A = (A^{-1} - \alpha A^{-1}uv^T A^{-1})(A + uv^T)$

$$= A^{-1}A + A^{-1}uv^T - \alpha A^{-1}uv^T A^{-1}A - \alpha A^{-1}uv^T A^{-1}uv^T$$

$$= I + A^{-1}uv^T - \alpha A^{-1}uv^T - \alpha A^{-1}uv^T A^{-1}uv^T$$

$$= I + A^{-1}uv^T - A^{-1}u\alpha(1 + v^T A^{-1}u)v^T$$

$$= I + A^{-1}uv^T - A^{-1}uv^T \cdot 1$$

$$= I \quad \checkmark$$

A3

$$F(x) = \frac{x_1}{x_2} \qquad F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} \\ \frac{-x_1}{x_2^2} \end{pmatrix}$$

$\varepsilon \in [x-\delta, x+\delta]$

$$\max_{|\varepsilon - x| \leq d} |F'(\varepsilon)| = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2-\delta} \\ \frac{-x_1-d_1}{(x_2-\delta)^2} \end{pmatrix}$$

$x_1 = 1,\ x_2 = 10^{-4} \Rightarrow$

$\delta = 10^{-8}$

$$\kappa_a \leq \max \begin{pmatrix} \frac{1}{10^{-4}-d} \\ \frac{1-\delta_1}{10^{-8}-2\cdot 10^{-4}+\delta^2} \end{pmatrix}$$

$$\kappa_a \approx F'(x) = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{10^{-4}-10^{-8}} \\ \frac{1-10^{-8}}{10^{-8}-2\,10^{-12}+10^{-16}} \end{pmatrix} \right| \approx \underline{\underline{10^8}}$$

Berechnung mit der max Norm