Aufgabe 1

$\mathbb{R}^2$

$Q = I - 2uu^T \,, \; \|v\|_2 = 1$

$v = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Soll die Form

$Q = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}, \; c^2 + s^2 = 1$

$$Q = I - 2 \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot (-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$$

$$= I - 2 \begin{pmatrix} \sin^2(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin^2(\alpha) & 2 \cdot -\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ 2 \cdot -\sin(\alpha)\cos(\alpha) & 2 \cdot \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2\sin^2(\alpha) & 2 \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ 2 \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) & 1 - 2 \cdot \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 - 2 \cdot (1 - \sin^2(\alpha)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & 1-\left(2-2\sin^2(\alpha)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2\sin^2(\alpha) & 2\cdot\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ 2\cdot\sin(\alpha)\cos(\alpha) & -\left(1-2\sin^2(\alpha)\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} c & s \\ s & -c \end{pmatrix}$$

$$\|v\|_2 = 1 \qquad \|x\|_2 = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots (x_n)^2}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \right\|_2 = 1$$

$$\sqrt{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)} = 1 \quad | \text{ Quadr.}$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -17 \\ 10 & -9 & -19 \\ 10 & 20 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Wir zeigen zuerst, dass für $d = -\operatorname{sign}(a_{11})\|a_1\|$ die anderen zwei Gleichungen gelten und danach, dass d dann auch wirklich das Diagonalelement ist.

Nach der Definition gilt für $v_1 = a_{11} + \operatorname{sign}(a_{11})\|a_1\| = a_{11} - d$

Für $\|v\|_2^2$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\|v\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \\
&= v_1^2 + \sum_{i=2}^{n} v_i^2 \\
&= (a_{11} - d)^2 + \sum_{i=2}^{n} a_{i1}^2 \\
&= a_{11}^2 - 2a_{11}d + d^2 + \sum_{i=2}^{n} a_{i1}^2 \\
&= -2a_{11}d + d^2 + \sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2 \\
&= -2a_{11}d + d^2 + \|a_1\|_2^2 \\
&= -2a_{11}d + 2d^2 \\
&= -2d(a_{11} - d) \\
&= -2v_1 d
\end{aligned}
$$

Nun betrachten wir das Diagonalelement von $Q_1 A$:

$$Q_1 A = \left(I - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^T\right) A$$

$$Q_1 A = A - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^T A$$

Wir beschränken uns jetzt nur auf x, das Element oben links von $- \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^T A$.

Dafür gilt:

$$x = - \frac{2}{\|v\|_2^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} v_1 v_i a_{i1} \right)$$

$$= - \frac{2v}{\|v\|_2^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_{i1} \right)$$

$$= - \frac{2v}{\|v\|_2^2} \cdot \left(v_1 a_{11} + \sum_{i=2}^{n} v_i a_{i1} \right)$$

$$= - \frac{2v}{\|v\|_2^2} \cdot \left(v_1 (v_1 + d) + \sum_{i=2}^{n} v_i^2 \right)$$

$$= - \frac{2v}{\|v\|_2^2} \cdot \left(v_1^2 + v_1 d + \sum_{i=2}^{n} v_i^2 \right)$$

$$= - \frac{2v}{\|v\|_2^2} \cdot \left(v_1 d + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)$$

$$= - \frac{2v}{\|v\|_2^2} \cdot \left(v_1 d + \|v\|_2^2 \right)$$

$$= - \frac{2 v_1^2 d}{\|v\|_2^2} - 2v_1$$

$$= - 2v_1 \left(\frac{v_1 d}{-2 v_1 d} + 1 \right)$$

$$= -2v_1 \left(-\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= v_1$$

Daraus ist dann zu erkennen, dass das erste Diagonalelement von $A - \frac{2}{\|v\|_2^2} vv^T A$ $a_{11} - v_1 = d$ ist.

Damit ist d das gesuchte Diagonalelement.