Aufgabe 1.

$$\kappa_\infty = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\|A\|_\infty = \beta + 1$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{k-n}$$

$$\kappa_\infty = (\beta+1) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \beta^{k-1} \qquad \beta > 1}_{\text{gem. Reihe,}}$$

$\beta > 1 \Rightarrow$ konvergiert

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \beta^{k-n} = \lim_{n \to \infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \beta^{-k} \right) - \beta^0$$

$$= \frac{1}{1-\beta} - 1$$

$$\kappa_\infty \leq (\beta+1) \cdot \frac{1}{1-\beta} - 1$$

$\blacksquare$

Aufgabe 2.)

a)

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$|\Delta A| \leq \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad |\Delta b| \leq \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}=(0.9,\ 1.1)^T$$

Testen sie mit Hilfe des Resultats von Prager und Oettli, ob $\tilde{x}$ als Lösung akzeptiert werden kann.

$$\tilde{r} = b - A\tilde{x}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot(0.9,\ 1.1)^T$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0,7\\2\end{pmatrix}$$

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix}0,3\\0\end{pmatrix}$$

also $|\tilde{r}| = \begin{pmatrix}0,3\\0\end{pmatrix}$

$$B=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad c=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$B|\tilde{x}|+c = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,9\\1,1\end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0,3\\0,3\end{pmatrix}$$

$$|\tilde{r}| = \begin{pmatrix}0,3\\0\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}0,3\\0,3\end{pmatrix} = B|\tilde{x}|+c$$

$\Rightarrow$ d.h. $\tilde{x}$ kann akzeptiert werden!

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1.001 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\Delta A| \leq 5 \cdot 10^{-4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\Delta b| \leq 5 \cdot 10^{-4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x} = (501, 500)^T$$

$$\tilde{r} = b - Ax$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1{,}001 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 501 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{r}| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$B = 5 \cdot 10^{-4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c = 5 \cdot 10^{-4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B|\tilde{x}| + c = 5 \cdot 10^{-4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 501 \\ 500 \end{pmatrix} + 5 \cdot 10^{-4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \cdot 10^{-4} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 501 \\ 500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 5 \cdot 10^{-4} \begin{pmatrix} 1002 \\ 1002 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}501 \\ 0{,}501 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{r}| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0{,}501 \\ 0{,}501 \end{pmatrix} = B|\tilde{x}| + c$$

$\Rightarrow$ d.h. $\tilde{x}$ kann akzeptiert werden!