Faza IV

## S. Rejmus, D. Rzeźnik, F. Urban

## Kwiecień 2022

## 1 Wstęp teoretyczny

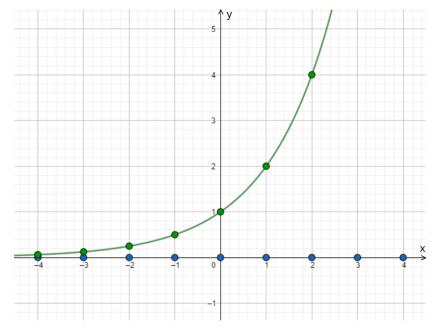
## 1.1 Treść Zadania

Obliczyć  $a=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$  i  $b=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$  interpolując wielomianami funkcję  $2^x$ , czyli daną za pomocą tabeli:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16

Która z liczba, b jest lepiej przybliżana?

## 1.2 Wykres funkcji $2^x$



# 1.3 Metoda Newtona (za pomocą ilorazów róznicowych) wyznaczania wielomianu interpolacyjnego

**Twierdzenie.** Wielomian P w postaci Newtona interpolujący dane  $(x_i, f(x_i))$  dla i = 0, 1, ..., n,

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}),$$

ma współczynniki

$$b_j = f[x_0, x_1, ..., x_j], \quad j = 0, 1, ...,$$

gdzie:  $b_j$  - iloraz różnicowy funkcji

Według definicji obliczamy ilorazy różnicowe:

dla 1 rzędu:

$$f[x_1, x_{j+1}] := \frac{f[x_{j+1}] - f[x_j]}{x_{j+1} - x_j}$$

dla k-tego rzędu:

$$f[x_1,x_{j+1},...,x_{j+k-1},x_{j+k}] := \frac{f[x_{j+1},...,x_{j+k}] - f[x_j,...,x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}$$

gdzie: j = 0, 1, ...

## 1.4 Błąd bezwzględny i względny

Błąd bezwzględny liczymy ze wzoru:  $\Delta x = |x - x_0|$  gdzie:

x - to dokładna wartość

 $x_0$  - to zmierzona wartość

Błąd względny liczymy ze wzoru:  $\delta = \frac{\Delta x}{x} = \frac{|x-x_0|}{x}$ gdzie:

 $\Delta x$  - to błąd bezwzględny pomiaru

x - to dokładna wartość

 $x_0$  - to zmierzona wartość

## 2 Proces działania

Mamy zamiar zinterpolować funkcję  $2^x$  za pomocą metody Newtona, używając ustalonych zakresów podanej tabeli. Przyjmujemy 4 zakresy :

- $x \in \{-1, 0, 1\}$
- $x \in \{1, 2, 3\}$
- $x \in \{-2, 0, 1, 2, 4\}$
- $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Sprawdzamy, która z liczb,  $a=\sqrt{2}$  czy  $b=2\sqrt{2}$  zostanie lepiej przybliżona (używając zinterpolowanej funkcji), poprzez ustalenie błędu bezwględnego i względnego dla 4 wybranych przez nas zakresów.

**Przykład:** Zakres I :  $x \in \{-1, 0, 1\}$ . Wyznaczamy  $f[x_0, x_1, x_2]$  dla  $\frac{x_i}{f(x_i)} = \frac{-1}{0, 5} = \frac{0}{1}$  Obliczamy f[-1, 0], f[0, 1], f[-1, 0, 1] zgodnie ze wzorem

$$f[-1,0] = \frac{f[0]-f[-1]}{0-(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$f[0,1] = \frac{f[1] - f[0]}{1 - 0} = 1$$

$$f[-1,0,1] = \frac{f[0,1] - f[-1,0]}{1 - (-1)} = \frac{1}{4}$$

Rozwiązaniem interpolacji danych  $\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 1 \\ \hline f(x_i) & 0.5 & 1 & 2 \end{array}$  jest wielomian:

$$P(x) \ = \ f[-1] + f[-1,0](x+1) + f[-1,0,1](x+1)x =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)x = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} = \frac{x^2 + 3x + 4}{4}$$

$$P(\frac{1}{2}) = 1.4375$$

Błąd bezwględny: 0.023286 Błąd względny: 0.01647

$$P(\frac{3}{2}) = 2.6875$$

Błąd bezwględny: 1.27329 Błąd względny: 0.90035

Dla wybranego przykładu liczba  $a=\sqrt{2}$ została lepiej przybliżona.

## 3 Działanie programu

Program tworzy tablicę, w której zapisane są wybrane dla przedziału argumenty funkcji. Tworzy dodatkowo tablicę dwuwymiarową zawierającą w swojej 1 kolumnie wartości funkcji  $f(x) = 2^x$ .

Następnie dla proponowanego przedziału  $x \in \{-1,0,1\}$  w odpowiednich miejscach tablicy dwuwymiarowej wylicza wartości ilorazów różnicowych, wyświetla je na ekranie. Niezbędne do dalszych obliczeń: f[-1,0], f[0,1], f[-1,0,1] są dodatkowo wyeksponowane niebieskim kolorem. Następnie funkcją opierającą swoje działanie na metodzie Newtona wylicza wielomian dla  $x = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$  oraz błąd bezwzględny i względny.

#### 3.1 Instrukcja dla użytkownika

Użytkownik wpisuje dla jakiego x chce obliczyć  $f(x) = 2^x$ . Potem wybiera jeden z dostępnych przedziałów lub tworzy własny, na podstawie którego program wylicza zinterpolowany wielomian i podstawia podanego x.

Podgląd programu dla przykładu z predefiniowanym przedziałem:

```
Wpisz dla jakiego "x" (Float oddzielony kropką zamiast przecinka) chcesz obliczyć potęgę 2^x:

"""

Wybierz przedział (wpisz 1, 2, 3, 4 albo 5):

1: x = {-1, 0, 1}

2: x = {1, 2, 3}

3: x = {-2, 0, 1, 2, 4}

4: x = {-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}

5: własny zakres

Tabela wyliczonych ilorazów róźnicowych:
Kolorem niebieskim oznaczono ilorazy różnicowe potrzebne do wyprowadzienia wielomianu w postaci Newtona

x<sub>i</sub> f[x<sub>i</sub>] f[x<sub>i</sub>,x<sub>i+1</sub>] f[x<sub>i</sub>,...,x<sub>i+2</sub>]

x<sub>o</sub>= 1 2,000000 2,000000 1,000000

x<sub>1</sub>= 2 4,000000 4,000000

x<sub>2</sub>= 3 8,000000

Wartość dla "x" = 0.5 wynosi 1.75

Błąd bezwzględny wynosi: 0,335786

Błąd względny wynosi: 0,237437

Wciśnij dowolny klawisz aby kontynuować lub "N" by zakończyć program
```

#### 3.2 Wyniki programu

#### **3.2.1** Dla przedziału zdefiniowanego: $x \in \{-1, 0, 1\}$

#### Wynik dla $x = \frac{1}{2}$ :

```
Tabela wyliczonych ilorazów róźnicowych:
Kolorem niebieskim oznaczono ilorazy różnicowe potrzebne do wyprowadzienia wielomianu w postaci Newtona x_i f[x_i] f[x_i,x_i+_1] f[x_i,\dots,x_i+_2] x_0=-1 0,500000 0,500000 0,250000 x_1=0 1,000000 1,000000 x_2=0 2,000000 x_3=0 2,000000 Wartość dla "x" = 0.5 wynosi 1.4375
```

#### Wynik dla $x = \frac{3}{2}$ :

```
Tabela wyliczonych ilorazów róźnicowych:
Kolorem niebieskim oznaczono ilorazy róźnicowe potrzebne do wyprowadzienia wielomianu w postaci Newtona x_i f[x_i] f[x_1,x_1+1] f[x_1,\dots,x_1+2] x_0=-1 0,500000 0,500000 0,250000 x_1=0 1,000000 1,000000 x_2=1 2,000000 x_1=0 1,000000 x_2=1 2,000000 Wartość dla "x" = 1.5 wynosi 2.6875

Błąd bezwzględny wynosi: 0,140927
Błąd względny wynosi: 0,049825
```

#### **3.2.2** Dla przedziału zdefiniowanego: $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

#### Wynik dla $x = \frac{1}{2}$ :

```
Tabela myliczonych ilorazów róźnicowych:

Kolorem niebieskim oznaczono ilorazy róźnicowych:

Kolorem niebieskim oznaczono ilorazy róźnicowe potrzebne do wyprowadzienia wielomianu w postaci Newtona

x. flx.] f[x_1, x_1+1] f[x_1, ..., x_1+1] f
```

#### Wynik dla $x = \frac{3}{2}$ :

```
Tabela wyliczonych ilorazów róźnicowych:
Kolorem niebieskim oznaczono ilorazy róźnicowe potrzebne do wyprowadzienia wielomianu w postaci Newtona

x<sub>1</sub> f[x<sub>1</sub>] f[x<sub>1</sub>, ..., x<sub>1</sub>+1] f[x<sub>1</sub>, ..., x<sub>1</sub>+2] f[x<sub>2</sub>, ..., x<sub>1</sub>+2] f[x<sub>2</sub>, ..., x<sub>1</sub>+2] f[x<sub>2</sub>, ..., x<sub>2</sub>+2] f[x<sub>2</sub>, ..., x<sub>2</sub>+2] f[x<sub>2</sub>, ..., x<sub>3</sub>+2] f[x<sub>4</sub>, ..., x<sub>2</sub>+2] f[x<sub>4</sub>, ..., x<sub>4</sub>+2] f[x<sub>4</sub>, ..., x<sub>4</sub>+
```

#### **3.2.3** Dla przedziału użytkownika: $x \in \{-4, -3, -1, 0, 3, 4, 5, 9, 10, 11\}$

#### Wynik dla $x = \frac{1}{2}$ :

```
Two j zakres[-4.0, -3.0, -1.0, 0.0, 3.0, 4.0, 5.0, 9.0, 10.0, 11.0]
Tabela myliczonych ilonazów róźnicowych:

Nolorem niebieskim oznaczono ilonazy różnicowe potrzebne do wyprowadzienia wielomianu w postaci Newtona

x. f[x] f[x], ..., x] f[x], x] f[x], ..., x] f[x], x] f[x
```

## Wynik dla $x = \frac{3}{2}$ :

#### 3.3 Wnioski

Patrząc na powyższe wyniki widać, że zakres  $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  najlepiej przybliża liczby  $a = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$  i  $b = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$ (z podanych zakresów), z czego liczba b jest lepiej przybliżona w porównaniu do a, ponieważ błąd względny i bezwzględny dla liczby b są mniejsze niż dla liczby a. Z powyższych przykładów wynika, że szukane przybliżenie jest tym lepsze jeśli wartośći wybranego zakresu są symetrycznie bliższe szukanemu x oraz im ten zakres posiada więcej tych symetrycznych argumentów. Np. dla x = 3 przedział  $x \in \{2,4\}$ , którego błąd bezwzględny wynosi 2.0, względny 0.25, a przybliżony wynik 10 gorzej przybliża wynik niż przedział  $x \in \{0,1,2,4,5,6\}$ , którego błąd bezwzględny wynosi 0.05, względny 0.006, a przybliżony wynik 8.05, gdzie poprawnym wynikiem f(3) = 8.

## 4 Bibliografia

- Prezentacja Pani dr Danuta Jaruszewska-Walczak
- Strona z, której pochodzi oryginalny kod programu

## 5 Kod programu

#### Kod dostępny również na Githubie

```
import java.util.Arrays;
import java.util.Objects;
import java.util.Scanner;
class PROJEKT {
   //Funkcja znajdująca wynik działania
   static double wynik(int i, double value, double[] x) {
       double pro = 1;
       for (int j = 0; j < i; j++) {
          pro = pro * (value - x[j]);
          //( "X" - x_j )
          //tj. (x-x1) w następnym wywołaniu (x-x1)(x-x2) itd
       }
       return pro;
   }
   //Funkcja wyznaczająca ilorazy różnicowe do tablicy 2D
   static void wyliczIlorazy(double[] x, double[][] y, int n) {
       for (int i = 1; i < n; i++) {
          for (int j = 0; j < n - i; j++) {
              y[j][i] = (y[j][i - 1] - y[j + 1][i - 1]) / (x[j] - x[i +
              //b_{i} = ( f[x_i-1] - f[x_i] ) / (x_i-1- x_i )
       }
```

```
}
//Funkcja do obliczania wartości wielomianu dla podanego "x" za pomoc
            ą metody Newtona
static double wielNewtona(double value, double[] x, double[][] y, int
              n) {
          double sum = y[0][0]; // = b_0
          for (int i = 1; i < n; i++) {
                   sum = sum + (y[0][i] * wynik(i, value, x));
                   //sum = sum + (b_i * ("X" - x_j) w pętli)
          }
          return sum;
}
//Funkcja drukująca tabelę ilorazów różnicowych
static void drukujTablice(double[][] y, int n, String[] indeksy,
           double[] x) {
          System.out.println("Tabela wyliczonych ilorazów róźnicowych:");
          System.out.println("Kolorem niebieskim oznaczono ilorazy róż
                     nicowe potrzebne do wyprowadzienia wielomianu w postaci
                    Newtona");
          System.out.print("x\u1D62 ");
          String s1 = "f[x\u1D62]";
          System.out.printf("%15s", s1);
          String s2 = f[x\u1D62, x\u1D62+\u2081];
          System.out.printf("%15s", s2);
          StringBuilder sb = new StringBuilder("f[x\u1D62,...,x\u1D62+");
          for (int i = 2; i < n; i++) {
                   System.out.printf("%13s%s]", sb, indeksy[i]);
          System.out.printf("\n");
          String s = "x";
          for (int i = 0; i < n; i++) {
                   System.out.printf("%s%s=%2.0f", s, indeksy[i], x[i]);
                   for (int j = 0; j < n - i; j++) {
                             if (i == 0) {
                                      System.out.printf("%s%15f%s", "\u001B[96m", y[i][j], "\u001B[96m", y[i][j]], "\u001B[96m", y[i][j]],
                                                 u001B[0m");
                            } else {
                                      System.out.printf("%15f", y[i][j]);
                   System.out.println("");
          }
}
```

```
public static void main(String[] args) {
   //Kody Unicode do wyświetlania dolnych indeksów
   String[] indeksy = {"\u2080", "\u2081", "\u2082", "\u2083", "\
        u2084", "\u2085", "\u2086", "\u2087", "\u2088", "\u2089", "\
        u2081\u2080";
   //Pierszy przedział
   int input_count = 3;
   double value_x_a = 0.5;
   double value_x_b = 1.5;
   double[][] y = new double[input_count][input_count];
   double[] x = \{-1, 0, 1\};
   y[0][0] = 0.5;
   y[1][0] = 1;
   y[2][0] = 2;
   //Drugi przedział
   int input_count2 = 3;
   double value_x2_a = 0.5;
   double value_x2_b = 1.5;
   double[][] y2 = new double[input_count2][input_count2];
   double[] x2 = \{1, 2, 3\};
   y2[0][0] = 2;
   y2[1][0] = 4;
   y2[2][0] = 8;
   //Trzeci przedział
   int input_count3 = 5;
   double value_x3_a = 0.5;
   double value_x3_b = 1.5;
   double[][] y3 = new double[input_count3][input_count3];
   double[] x3 = \{-2, 0, 1, 2, 4\};
   y3[0][0] = 0.25;
   y3[1][0] = 1;
   y3[2][0] = 2;
   y3[3][0] = 4;
   y3[4][0] = 16;
   //Czwarty przedział
   int input_count4 = 9;
   double value_x4_a = 0.5;
   double value_x4_b = 1.5;
   double[][] y4 = new double[input_count4][input_count4];
   double[] x4 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\};
   y4[0][0] = 0.125;
   y4[1][0] = 0.25;
   y4[2][0] = 0.5;
   y4[3][0] = 1;
   y4[4][0] = 2;
   y4[5][0] = 4;
```

```
y4[6][0] = 8;
y4[7][0] = 16;
y4[8][0] = 32;
Scanner sc = new Scanner(System.in);
String S1;
Float F1;
boolean B = true;
do {
   try {
       System.out.println("Wpisz dla jakiego \"x\" (Float
           oddzielony kropką zamiast przecinka) chcesz obliczyć
           potęgę 2^x:");
       S1 = sc.next();
       F1 = Float.parseFloat(S1);
       try {
           System.out.println("Wybierz przedział (wpisz 1, 2, 3, 4
                albo 5):");
           System.out.println("1: x = \{-1, 0, 1\}");
           System.out.println("2: x = \{1, 2, 3\}");
           System.out.println("3: x = \{-2, 0, 1, 2, 4\}");
           System.out.println("4: x = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,
               5}");
           System.out.println("5: własny zakres");
           String S2 = sc.next();
           Integer I2 = Integer.parseInt(S2);
           switch (I2) {
              case 1 -> {
                  wyliczIlorazy(x, y, input_count);
                  drukujTablice(y, input_count, indeksy, x);
                  System.out.println("Wartość dla \"x\" = " + F1
                      + " wynosi " + wielNewtona(F1, x, y,
                      input_count) + "\n");
                  System.out.printf("Błąd bezwzględny wynosi: %f\
                      n", Math.abs(Math.pow(2, F1) - wielNewtona(
                      F1, x, y, input_count)));
                  System.out.printf("Błąd względny wynosi: %f\n",
                       Math.abs((Math.pow(2, F1) - wielNewtona(F1
                       , x, y, input_count)) / Math.pow(2, F1)));
              }
              case 2 -> {
                  wyliczIlorazy(x2, y2, input_count2);
                  drukujTablice(y2, input_count2, indeksy, x2);
                  System.out.println("Wartość dla \"x\" = " + F1
                      + " wynosi " + wielNewtona(F1, x2, y2,
                      input_count2) + "\n");
                  System.out.printf("Błąd bezwzględny wynosi: %f\
                      n", Math.abs(Math.pow(2, F1) - wielNewtona(
```

```
F1, x2, y2, input_count)));
   System.out.printf("Błąd względny wynosi: \%f\n",
        Math.abs((Math.pow(2, F1) - wielNewtona(F1
        , x2, y2, input_count2)) / Math.pow(2, F1))
       );
}
case 3 -> {
   wyliczIlorazy(x3, y3, input_count3);
   drukujTablice(y3, input_count3, indeksy, x3);
   System.out.println("Wartość dla \"x\" = " + F1
       + " wynosi " + wielNewtona(F1, x3, y3,
       input_count3) + "\n");
   System.out.printf("Błąd bezwzględny wynosi: %f\
       n", Math.abs(Math.pow(2, F1) - wielNewtona(
       F1, x3, y3, input_count3)));
   System.out.printf("Błąd względny wynosi: %f\n",
        Math.abs((Math.pow(2, F1) - wielNewtona(F1
        , x3, y3, input_count3)) / Math.pow(2, F1))
       );
}
case 4 -> {
   wyliczIlorazy(x4, y4, input_count4);
   drukujTablice(y4, input_count4, indeksy, x4);
   System.out.println("Wartość dla \"x\" = " + F1
       + " wynosi " + wielNewtona(F1, x4, y4,
       input_count4) + "\n");
   System.out.printf("Błąd bezwzględny wynosi: %f\
       n", Math.abs(Math.pow(2, F1) - wielNewtona(
       F1, x4, y4, input_count4)));
   System.out.printf("Błąd względny wynosi: %f\n",
        Math.abs((Math.pow(2, F1) - wielNewtona(F1
        , x4, y4, input_count4)) / Math.pow(2, F1))
       );
}
case 5 -> {
   try {
       System.out.println("Podaj ilość argumentów")
       String S3 = sc.next();
       Integer input_count_user = Integer.parseInt(
           S3);
       double[][] y_user = new double[
           input_count_user][input_count_user];
       double[] x_user = new double[
           input_count_user];
       for (int i = 0; i < input_count_user; i++) {</pre>
           System.out.printf("Podaj %d argument: ",
                i+1);
           S3 = sc.next();
           x_user[i] = Double.parseDouble(S3);
```

```
y_user[i][0] = Math.pow(2, x_user[i]);
                             System.out.println("Twój zakres" + Arrays.
                                 toString(x_user));
                             wyliczIlorazy(x_user, y_user,
                                 input_count_user);
                             drukujTablice(y_user, input_count_user,
                                 indeksy, x_user);
                             System.out.println("Wartość dla \"x\" = " +
                                 F1 + " wynosi " + wielNewtona(F1, x_user
                                 , y_user, input_count_user) + "\n");
                             System.out.printf("Błąd bezwzględny wynosi:
                                 %f\n", Math.abs(Math.pow(2, F1) -
                                 wielNewtona(F1, x_user, y_user,
                                 input_count_user)));
                             System.out.printf("Błąd względny wynosi: %f\
                                 n", Math.abs((Math.pow(2, F1) -
                                 wielNewtona(F1, x_user, y_user,
                                 input_count_user)) / Math.pow(2, F1)));
                         } catch (NumberFormatException e) {
                             System.out.println("Nie podałeś poprawnego
                                 typu");
                         }
                      }
                      default -> System.out.println("Wybierz poprawny
                          zakres");
              } catch (NumberFormatException e) {
                  System.out.println("Nie podałeś poprawnego typu");
              }
           } catch (NumberFormatException e) {
              System.out.println("Nie podałeś poprawnego typu");
           System.out.println("Wciśnij dowolny klawisz aby kontynuować
               lub \"N\" by zakończyć program");
           String S3 = sc.next();
           if (Objects.equals(S3, "N")) {
              B = false;
       } while (B);
   }
}
```