

UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA

Departamento de Matemática
MAT468
Segundo Semestre 2023

Experimentos de simulación sobre modelos GARCH de series temporales

Nombre: Diego Astaburuaga, David Rivas

Rol: 202010018-7, 202010014-4

Valparaíso, Noviembre de 2023

Resumen

Este informe se enmarca en el modelado de series temporales financieras, donde la suposición de volatilidad constante a menudo es inexacta. Sobre esto introduce los procesos GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) como herramientas fundamentales para capturar la variabilidad condicional en estos datos.

El trabajo detalla los modelos GARCH y resalta resultados clave en la sección 2. El objetivo principal es comprender más profundamente estos modelos mediante experimentos de simulación y validar algunos de sus resultados con técnicas experimentales.

Se proponen varios experimentos independientes en Python, principalmente utilizando la librería ARCH [2]. Los detalles y resultados de estos experimentos se presentan en la sección 3. Incluyen simulaciones de trayectorias de distintos modelos GARCH, verificación de un resultado sobre la correlación teórica en el modelo GARCH(1,1) y evaluación de la normalidad asintótica de los estimadores de los parámetros del proceso.

Índice

1. Introducción	2
1.1. Motivación	3
2. Definiciones y resultados previos	3
2.1. Procesos estacionarios	3
2.2. Modelos ARMA y ARIMA	4
2.3. Procesos GARCH	4
2.4. Estimador Cuasi máximo verosímil	6
3. Experimentos de Simulación	7
3.1. Esquema de simulación	7
3.2. Proceso GARCH(1,1)	8
3.2.1. Trayectorias de un proceso GARCH(1,1)	8
3.2.2. Convergencia de correlación muestral de un proceso GARCH(1,1)	9
3.3. Comportamiento cualitativo de trayectorias de modelos GARCH	10
3.3.1. Ejemplo no estacionario	11
3.3.2. Simulaciones para distintos órdenes	11
3.4. Distribución de estimadores	12
4. Conclusiones	13
Referencias	13

1. Introducción

Las series temporales representan conjuntos de datos observados secuencialmente a lo largo del tiempo. En el ámbito financiero, comprender y modelar la volatilidad de estos datos es crucial para la toma de decisiones informada. Los modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) han surgido como herramientas fundamentales para abordar la variabilidad condicional en series temporales financieras.

Desarrollados por Robert Engle en 1982 (modelos ARCH) y posteriormente generalizados por Tim Bollerslev, los modelos GARCH proporcionan un marco robusto para el modelado de la volatilidad en procesos de series temporales. Esto permite captar patrones más complejos en diversas series de tiempo, donde el supuesto de volatilidad constante (homocedasticidad) no se verifica.

Al igual que los convencionales modelos ARIMA, los modelos GARCH poseen una teoría desarrollada sobre la estimación de parámetros, resultados asintóticos de distribución y propiedades cualitativas sobre las trayectorias. Estas características los convierten en candidatos adecuados para corroborar diversos resultados y técnicas a través de experimentos de simulación.

1.1. Motivación

Como se mencionó anteriormente, los modelos GARCH proporcionan un marco de trabajo para abordar las series temporales con volatilidad no constante, es decir, heterocedásticas. Esto permite captar patrones más complejos, como los llamados "clusters de volatilidad", que se refieren a la existencia de períodos con alta volatilidad y otros con menor volatilidad. Un ejemplo claro de esto se observa en la serie temporal de los retornos porcentuales diarios del índice S&P 500, presentada en la Figura 1, obtenida de la biblioteca ARCH de Python [2]. En dicha figura, se aprecia que aproximadamente durante el periodo entre 2009 y 2010 hubo una fuerte volatilidad, mientras que en los periodos entre 2004 y 2006, y entre 2013 y 2015, la volatilidad fue claramente más baja.

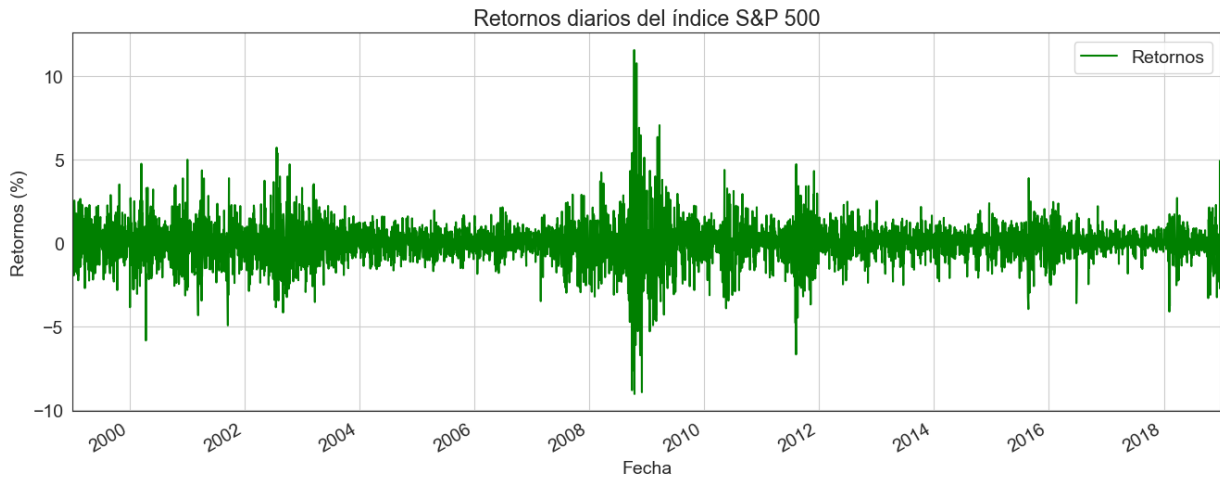


Figura 1: Retornos porcentuales diarios del índice S&P 500.

2. Definiciones y resultados previos

A continuación se presentan una serie de definiciones y resultados sin demostrar que serán utilizados y necesarios para la comprensión del presente documento. La mayor parte de los resultados y definiciones son extraídas directamente desde [1].

2.1. Procesos estacionarios

Definición 2.1 (Estacionariedad estricta). *El proceso (X_t) se dice que es estrictamente estacionario si los vectores $(X_1, \dots, X_k)^T$ y $(X_{1+h}, \dots, X_{k+h})^T$ tienen la misma distribución conjunta, para todo $k \in \mathbb{N}$ y $h \in \mathbb{Z}$.*

Definición 2.2 (Estacionariedad de segundo orden). *El proceso (X_t) se dice que es estacionario de segundo orden si verifica:*

1. $E(X_t^2) < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{Z};$

2. $E[X_t] = m, \quad t \in \mathbb{Z};$
3. $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(h), \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}.$

la función $\gamma_X(\cdot)$ ($\rho_X(\cdot) := \gamma_X(\cdot)/\gamma_X(0)$) se denota la función de autocovarianza (función de autocorrelación) de (X_t) .

Definición 2.3 (Ruido blanco débil). *El proceso (ϵ_t) se denota como ruido blanco débil si existe alguna constante σ^2 tal que:*

1. $E(\epsilon_t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z};$
2. $E(\epsilon_t^2) = \sigma^2, \quad \forall t \in \mathbb{Z};$
3. $\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_t) = 0, \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0.$

Definición 2.4 (Ruido blanco fuerte). *Nótese que no existe algún supuesto de independencia en la definición de ruido blanco débil. Las variables en diferentes tiempos son únicamente no correlacionadas y esta distinción es particularmente crucial para series de tiempo financieras (donde usualmente se utilizan los procesos GARCH). Es a veces necesario reemplazar la tercera hipótesis por una más fuerte: las variables ϵ_t y ϵ_{t+h} son independientes e idénticamente distribuidas. En tal caso el proceso (ϵ_t) se dice que es un ruido blanco fuerte.*

2.2. Modelos ARMA y ARIMA

Definición 2.5 (Procesos ARMA(p, q)). *Un proceso estacionario de segundo orden (X_t) se denomina ARMA(p, q), donde p y q son enteros, si existen coeficientes reales $c, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ tales que, para todo $t \in \mathbb{Z}$,*

$$X_t + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} = c + \epsilon_t + \sum_{j=1}^q b_j \epsilon_{t-j},$$

donde (ϵ_t) es el proceso de innovación lineal de (X_t) .

Definición 2.6 (Procesos ARIMA(p, d, q)). *Sea d un entero positivo. El proceso (X_t) se denomina proceso ARIMA(p, d, q) si, para $k = 0, \dots, d-1$, los procesos $(\Delta^k X_t)$ no son estacionarios de segundo orden y $(\Delta^d X_t)$ es un proceso ARMA(p, q).*

2.3. Procesos GARCH

Definición 2.7 (Procesos GARCH(p, q)). *Un proceso (ϵ_t) se conoce como GARCH(p, q) si sus dos primeros momentos condicionales existen y satisfacen:*

1. $E(\epsilon_t | \epsilon_u, u < t) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}.$
2. *Existen constantes $\omega, \alpha_i, i = 1, \dots, p$ y $\beta_j, 1, \dots, q$ tales que*

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(\epsilon_t | \epsilon_u, u < t) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

si $\beta_j = 0$, $j = 1, \dots, q$ entonces el proceso se conoce como proceso ARCH(p).

Resultado 2.8 (Representación proceso GARCH(p, q)). *Por definición, el término de innovación del proceso ϵ_t^2 es la variable $\nu_t = \epsilon_t - \sigma_t^2$. Substituyendo en la ecuación anterior las variables σ_{t-j}^2 por $\epsilon_{t-j}^2 - \nu_{t-j}$, tenemos la representación*

$$\epsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) \epsilon_{t-i}^2 + \nu_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \nu_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

donde $r = \max(p, q)$ con la convención de que $\alpha_i = 0$ ($\beta_j = 0$) si $i > p$ ($j > q$). Esta ecuación tiene la estructura lineal de un modelo ARMA, permitiendo el computo de predictores lineales. En particular, bajo condiciones adicionales (implicando la estacionariedad de segundo orden de ϵ_t^2) se puede establecer que si (ϵ_t) es GARCH(p, q), entonces (ϵ_t^2) es un proceso ARMA(r, q). En específico, el cuadrado de un proceso ARCH(p) admite, si este es estacionario, una representación AR(p).

Definición 2.9 (Proceso GARCH fuerte). *Sea (η_t) una secuencia de variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución η . El proceso (ϵ_t) se le denota como proceso GARCH(p, q) fuerte (con respecto a la secuencia (η_t)) si*

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases} \quad (3)$$

donde los α_i y β_j son constantes no negativas y ω es una constante estrictamente positiva.

Substituyendo ϵ_{t-i} por $\sigma_{t-i} \eta_{t-i}$ en (3), tenemos que

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (4)$$

el cual puede ser escrito como

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r a_i (\eta_{t-i}) \sigma_{t-i}^2 \quad (5)$$

donde $a_i(z) = \alpha_i z^2 + \beta_i$, $i = 1, \dots, r$. Esta representación muestra que el proceso de volatilidad de un GARCH fuerte es la solución de una ecuación autoregresiva con coeficientes aleatorios.

Teorema 2.10 (Estacionariedad de segundo orden). *Si existe un proceso GARCH(p, q), en el sentido de la definición (1), el cual es estacionario de segundo orden y causal¹, y si $\omega > 0$, entonces*

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1. \quad (6)$$

¹Causal en un sentido que ϵ_t es una función medible de $(\eta_{t-s})_{s \geq 0}$, donde (η_t) son independientes e idénticamente distribuidos desde $N(0, 1)$ y $\epsilon_t = \sigma_t \eta_t$ y σ_t^2 dado por (1)

Por el contrario, si se tiene (6), entonces la única solución estrictamente estacionaria del modelo (3) es un ruido blanco débil (y por ende estacionario de segundo orden). Además, no existe otra solución estacionaria de segundo orden.

Resultado 2.11 (Correlación modelo GARCH(1, 1)). *Para un modelo GARCH(1, 1) tal que $E[\epsilon_t^4] < \infty$, la autocorrelación de los residuos al cuadrado toma la forma*

$$\rho_{\epsilon^2}(h) := \text{Corr}(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-h}^2) = \rho_{\epsilon^2}(1)(\alpha_1 + \beta_1)^{h-1}, \quad h \geq 1 \quad (7)$$

donde

$$\rho_{\epsilon^2}(1) = \frac{\alpha_1 \{1 - \beta_1(\alpha_1 + \beta_1)\}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2} \quad (8)$$

2.4. Estimador Cuasi máximo verosímil

Definición 2.12 (Estimador Cuasi máximo verosímil). *Dados p y q conocidos, denotemos*

$$\theta = (\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)^T \quad (9)$$

como el vector de parámetros del modelo. El estimador cuasi-máximo verosímil de θ se obtiene mediante el uso de la función de cuasi-verosimilitud (gaussiana). Esta función, condicionada a ciertos valores iniciales, coincide con la verosimilitud del caso $\eta_t \sim N(0, 1)$. Dados valores iniciales $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{1-p}, \tilde{\sigma}_0^2, \dots, \tilde{\sigma}_{1-q}^2$, especificados posteriormente, la cuasi-verosimilitud gaussiana condicionada se expresa como

$$L_n(\theta, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_t^2}} \exp\left(\frac{-\epsilon_t^2}{2\tilde{\sigma}_t^2}\right) \quad (10)$$

donde $\tilde{\sigma}_t^2$ se define de forma recursiva para $t \geq 1$ mediante

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \tilde{\sigma}_{t-j}^2 \quad (11)$$

Para un θ dado y bajo la condición de estacionariedad de segundo orden, la llamada varianza no condicionada es una elección razonable para los valores iniciales desconocidos, es decir:

$$\epsilon_0^2 = \dots = \epsilon_{1-p}^2 = \sigma_0^2 = \dots = \sigma_{1-q}^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j} \quad (12)$$

Finalmente, el estimador, denotado por $\hat{\theta}_n$, se obtiene como la solución del problema

$$\hat{\theta}_n = \arg\max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta) \quad (13)$$

Resultado 2.13 (Normalidad asintótica del QMLE). *Suponiendo que el estimador cuasi-máximo verosímil de θ , $\hat{\theta}_{QMLE}$, es consistente y cumple las siguientes condiciones:*

1. $\theta \in \text{int}(\Theta)$
2. $E(\eta_t^4) = \kappa_t < \infty$

entonces, se tiene que $\hat{\theta}_{QMLE} \xrightarrow{d} N(\theta, \frac{\kappa_t - 1}{nJ(\theta)})$, donde $J(\theta) = E_\theta(\frac{\partial^2 \ln(L(\theta))}{\partial \theta \partial \theta^T})$.

Resultado 2.14 (Caso $\eta_t \sim N(0, 1)$). *Si $\eta \sim N(0, 1)$, entonces el estimador $\hat{\theta}_{QMLE}$ es consistente y asintóticamente normal. Además, $J(\theta) = I(\theta)$, donde $I(\theta)$ es la matriz de información de Fisher.*

3. Experimentos de Simulación

En esta sección, se detallan varios experimentos de simulación vinculados a los procesos GARCH. En primer lugar, se presenta el esquema de simulación de un proceso GARCH(p,q). Luego, se aborda la comprensión del proceso GARCH(1,1), seguido de simulaciones para diferentes órdenes p y q . Finalmente, se examina la distribución asintótica de los estimadores.

Las descripciones y especificaciones de cada experimento se proporcionan en esta sección. Sin embargo, los códigos y las bibliotecas utilizadas no se incluyen aquí. Para acceder a esta información, se invita al lector a visitar el repositorio público del trabajo en GitHub². Cabe destacar que los códigos fueron desarrollados en Python, utilizando principalmente la biblioteca `arch` [2].

3.1. Esquema de simulación

Observando la definición de un proceso GARCH, asumiremos la forma fuerte de este. Suponiendo que se conoce el procedimiento de simulación desde η , surge el desafío de necesitar conocer los valores previos (σ_{t-i}) para calcular los nuevos valores σ_t , lo cual plantea dificultades al intentar generar una trayectoria desde el inicio.

En consideración de lo anterior, una solución sencilla es considerar los valores (σ_j^2) dados por Ecuación 12 y comenzar la simulación utilizando dichos valores. Aunque esto implica que el proceso no sea GARCH, permite iniciar la secuencia de simulación que posibilita obtener llegar a dicho proceso. De esta forma, solo es necesario simular una cierta cantidad `burn` (como se menciona en la biblioteca utilizada) de observaciones, para luego ser utilizadas y finalmente descartadas.

Desde la definición del proceso fuerte, se evidencia que el procedimiento para simular estos procesos implica una simulación secuencial. En otras palabras, dados $(\sigma_{t-j}^2)_{1 \leq j \leq \max p, q}$ y sabiendo simular desde η , podemos calcular σ_t^2 de manera recursiva.

En favor de las simulaciones, a partir de este momento, se asumirá un proceso GARCH fuerte donde $\eta = N(0, 1)$. Además, para el gráfico de trayectorias, se empleará la misma semilla generadora para

²En caso de no poder utilizar la referencia anterior, la url es la siguiente: <https://github.com/Darkrayyss/Proyecto-modelos-GARCH>

los valores (η_t) . Esto posibilitará la generación de trayectorias comparables para comprender el efecto de los diversos parámetros del modelo GARCH.

3.2. Proceso GARCH(1,1)

El proceso GARCH(1,1) resulta de gran interés en el estudio, al representar el modelo más sencillo capaz de captar los fenómenos descritos previamente en las series temporales con volatilidad no constante. Su simplicidad y completitud facilitan el análisis de la influencia de los parámetros α y β en el modelo, permitiendo la experimentación de resultados de interés, como se describe en el resultado 2.11.

Siguiendo la estructura definida en 2.9, el modelo GARCH(1,1) se expresa mediante la ecuación

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{cases} \quad (14)$$

donde se utilizarán α y β tal que verifiquen la condición de estacionariedad de segundo orden y $\eta_t \sim N(0, 1)$.

3.2.1. Trayectorias de un proceso GARCH(1,1)

En relación con las especificaciones anteriores, se generaron un total de 12 trayectorias de modelos GARCH(1,1) para diversas configuraciones de los parámetros α y β , manteniendo constante el valor de ω . Este último desempeña únicamente el papel de proporcionar una volatilidad mínima al proceso y gestionar la variabilidad de manera general, siendo las configuraciones más específicas aquellas establecidas por α y β .

A partir de las simulaciones en Figura 2 y Figura 3 donde se fija el valor de α y se varía el valor de β , se observa que a medida que el valor de β aumenta, los valores altos y bajos en la volatilidad son más prolongados en el tiempo, evidenciando el fenómeno de clustering de volatilidad. Esto es especialmente claro entre el periodo entre los tiempos 350 y 400 aproximadamente. Además, como consecuencia del valor de β , la volatilidad también alcanza valores más elevados. En contraste, al observar los resultados para valores bajos de β , se nota que las influencias en el aumento de la volatilidad son breves, probablemente debido a la aleatoriedad de η_t .

Complementando con las simulaciones mostradas en Figura 4 y Figura 5, se puede apreciar que la influencia de α está más vinculada a la magnitud del cambio en la volatilidad. Para valores más altos de α , los incrementos en la volatilidad también son mayores. En particular, en Figura 5, se observa que para un valor alto de β , el aumento en α conlleva cambios más pronunciados en la volatilidad, los cuales son persistentes en el tiempo debido al alto valor de β .

A la luz de lo anterior, utilizando la ecuación general del modelo GARCH y lo comentado anteriormente para este caso particular, se puede afirmar que el papel de los parámetros α_i es proporcionar peso a los residuos o fluctuaciones anteriores sobre la volatilidad actual. A mayor valor del parámetro,

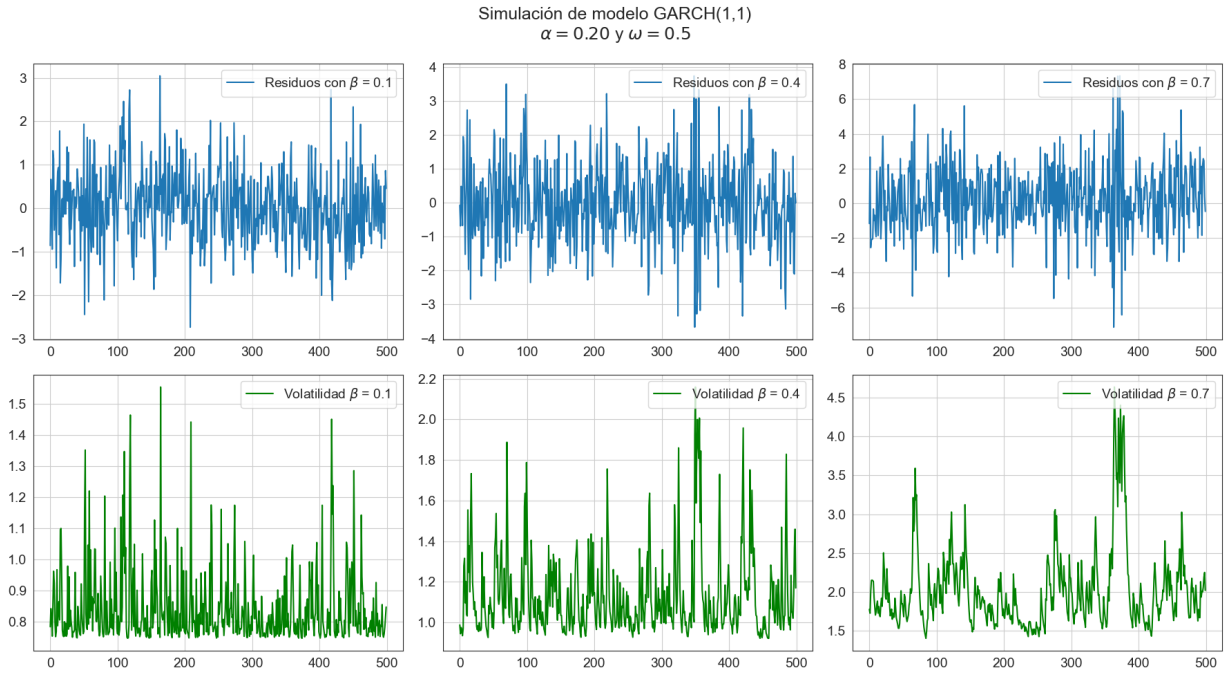


Figura 2: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con $\omega = 0.5$ y $\alpha = 0.2$, para distintos valores de $\beta \in \{0.1, 0.4, 0.7\}$ (en orden de izquierda a derecha), utilizando $\eta \equiv N(0, 1)$. Se muestra la serie de los residuos (arriba) y la serie de la volatilidad (abajo).

mayor es el impacto de las fluctuaciones en la varianza. Por otro lado, los parámetros β_j confieren al modelo cierta estabilidad, permitiendo que este pueda captar los denominados clusters de volatilidad.

3.2.2. Convergencia de correlación muestral de un proceso GARCH(1,1)

En virtud del resultado sobre la correlación teórica del proceso GARCH(1,1) dado en 2.11, se realizaron múltiples simulaciones para ciertos parámetros α y β con el fin de verificar que, al aumentar el número de datos desde dicho modelo, la ACF muestral se acerca en cierta forma a la ACF teórica.

Para investigar acerca de esto, se realizaron 3 experimentos distintos sobre 3 configuraciones de parámetros distintas de α y β . Estas son dadas por las tuplas $\{(\alpha = 0.1, \beta = 0.8), (\alpha = 0.4, \beta = 0.4), (\alpha = 0.8, \beta = 0.1)\}$, las cuales fueron escogidas con el fin de captar distintas configuraciones de procesos estacionarios.

Sobre cada par de parámetros, primero se simuló una única trayectoria y se calculó la ACF muestral para los largos $m = 1.000$, $m = 10.000$, y $m = 100.000$ de dichas series y se comparó con su ACF teórica respectiva (Figura 6). De manera similar, en el segundo experimento se fijó un largo $m = 1.000$, y se simulaban n trayectorias para cada par de parámetros con $n \in \{10, 100, 1.000\}$, con lo cual se calcula la ACF muestral promedio para cada n y se presenta con la ACF teórica (Figura 7). Finalmente, el tercer experimento se desarrolla de la misma manera, sólo que considerando $n = 100$

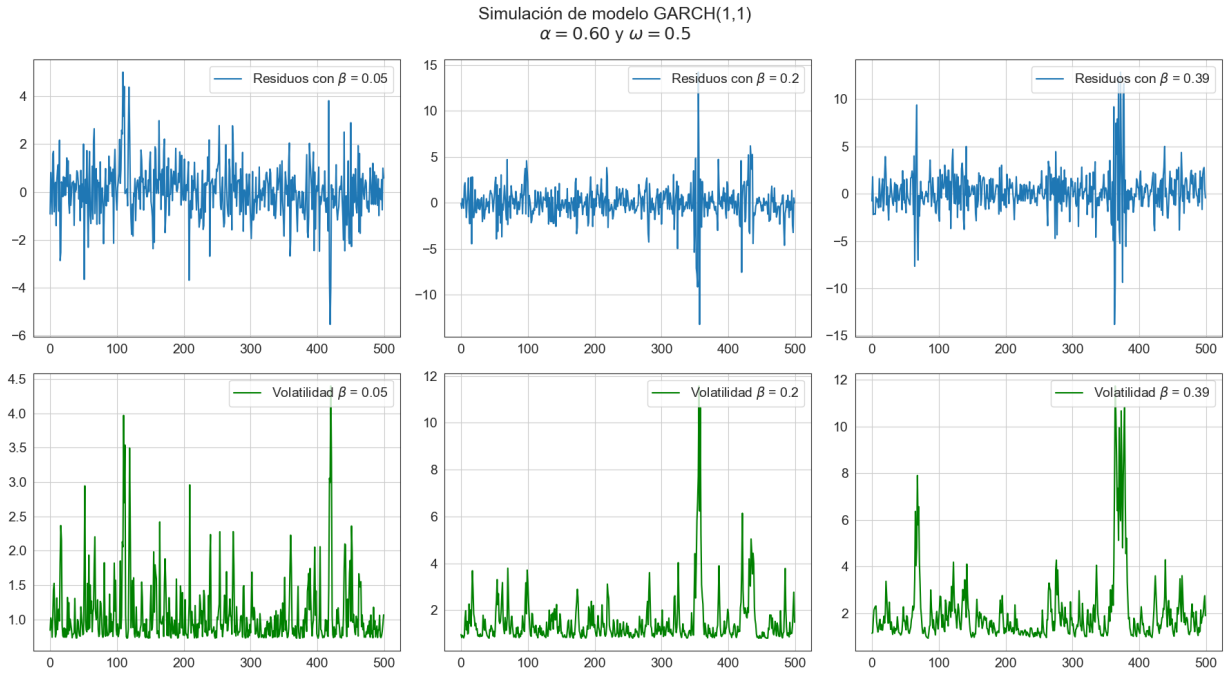


Figura 3: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con $\omega = 0.5$ y $\alpha = 0.6$, para distintos valores de $\beta \in \{0.05, 0.2, 0.39\}$ (en orden de izquierda a derecha), utilizando $\eta \equiv N(0, 1)$. Se muestra la serie de los residuos (arriba) y la serie de la volatilidad (abajo).

trayectorias fijas y $m \in \{10.000, 100.000, 1.000.000\}$ largos distintos (Figura 8).

De los experimentos realizados, es importante señalar que computacionalmente resulta menos efectivo simular numerosas trayectorias de corta longitud en comparación con simular una única trayectoria de longitud suficientemente extensa. Este enfoque, motivado también por consideraciones analíticas, demuestra ser más eficiente para llevar a cabo estos estudios.

A partir de las observaciones, se deduce la necesidad de disponer de una cantidad significativa de datos para verificar que la autocorrelación se aproxime a la teórica. Al comparar Figura 6 y Figura 7, se aprecia que, para una misma cantidad de datos, la aproximación parece ser más precisa al considerar una única trayectoria. Se destaca que esta noción de convergencia estudiada se ve fuertemente influenciada por los parámetros; en Figura 7, se observa que para $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.8)$ ambas gráficas se superponen, mientras que al intercambiar los parámetros, no se evidencian resultados tan favorables.

3.3. Comportamiento cualitativo de trayectorias de modelos GARCH

En esta sección, se realiza un análisis de las simulaciones de las trayectorias de modelos GARCH que podrían ser de particular interés. Es relevante señalar que el estudio sobre la influencia de los parámetros α y β en el modelo fue abordado en la Sección 3.2, y puede extenderse de manera análoga al incrementar el número de parámetros.

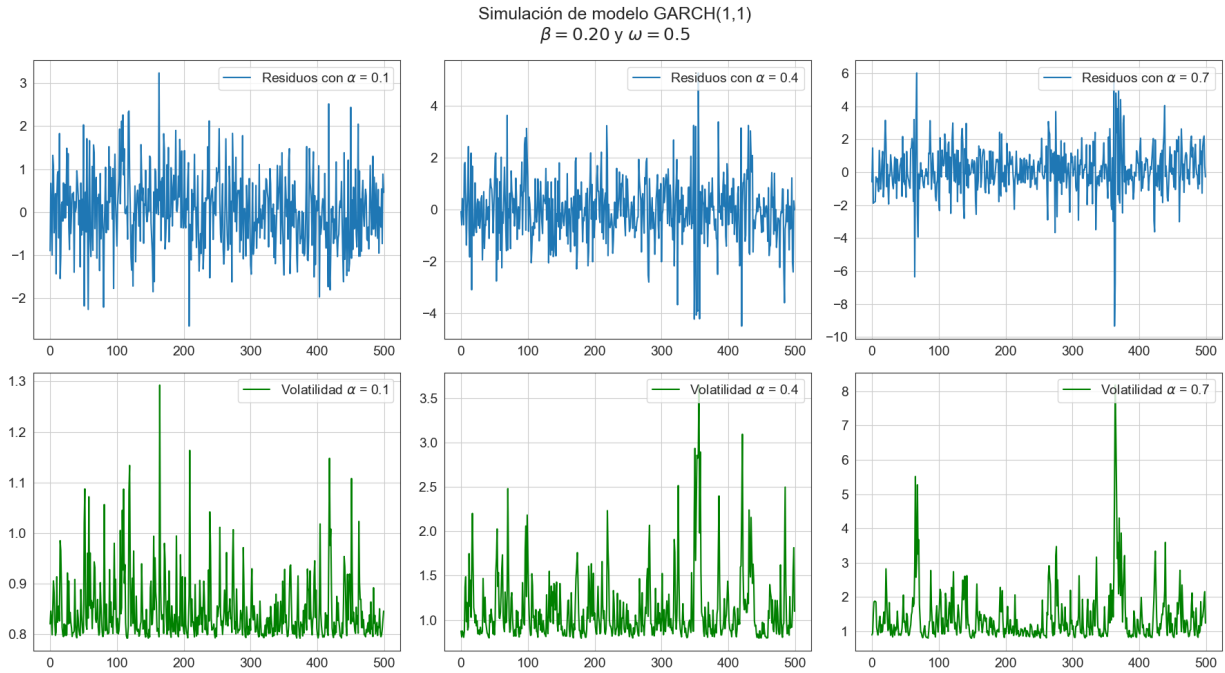


Figura 4: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con $\omega = 0.5$ y $\beta = 0.2$, para distintos valores de $\alpha \in \{0.1, 0.4, 0.7\}$ (en orden de izquierda a derecha), utilizando $\eta \equiv N(0, 1)$. Se muestra la serie de los residuos (arriba) y la serie de la volatilidad (abajo).

3.3.1. Ejemplo no estacionario

Dada la condición establecida por el Teorema 2.10, es posible simular trayectorias de procesos GARCH que no cumplen con la condición de estacionariedad de segundo orden. Esto se evidencia al observar que la serie de los residuos simulados no poseen una media constante y toman valores que se alejan fuertemente de la media. Un ejemplo ilustrativo se presenta en Figura 9, la cual muestra una realización de un modelo GARCH(1,1) en el que los coeficientes suman más de la unidad. En dicho gráfico, se aprecia cómo tanto la serie de volatilidad como la de residuos experimentan un crecimiento significativo.

3.3.2. Simulaciones para distintos órdenes

En este estudio, se generaron los gráficos de trayectorias presentados en la Figura 10 y la Figura 11, que muestran las series de residuos y las respectivas series de varianzas, respectivamente, para distintos valores de p y q . En la simulación de las trayectorias, se fijaron valores (α_i) y (β_j) , y dados los valores de p y q a utilizar, se seleccionaron los primeros p valores de (α_i) y los primeros q valores de (β_j) para la simulación. Para garantizar estacionariedad en cada caso, se multiplicó por un factor de escala que asegura que la suma de los parámetros sea menor a 1.

Observando principalmente las series de varianza (Figura 11), se pueden apreciar conclusiones simi-

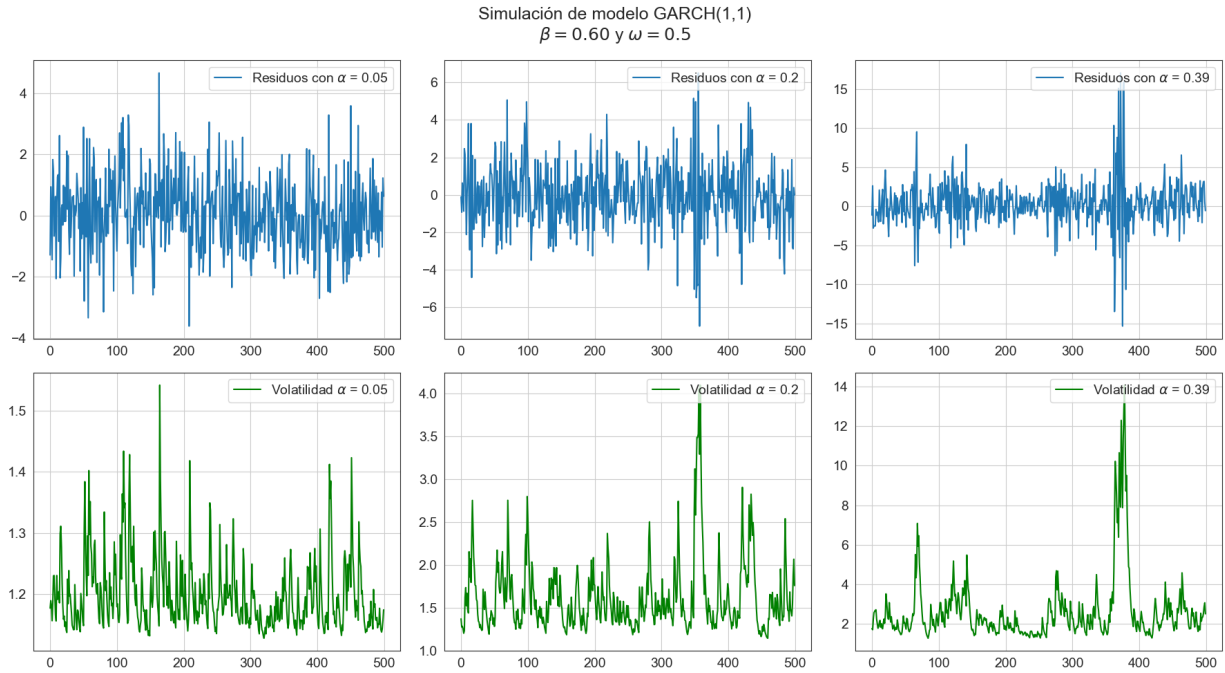


Figura 5: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con $\omega = 0.5$ y $\beta = 0.6$, para distintos valores de $\alpha \in \{0.05, 0.2, 0.39\}$, utilizando $\eta \equiv N(0, 1)$. Se muestra la serie de los residuos (arriba) y la serie de la volatilidad (abajo).

lares a las obtenidas en el caso del modelo GARCH(1,1). Un mayor valor de p en comparación con q influye en más cambios en la varianza, mientras que en caso contrario la varianza suele mantener ciertos niveles. Se observa que en algunos casos, como alrededor del tiempo 100 aproximadamente, la volatilidad aumenta drásticamente para luego volver a caer (generalmente casos $p \geq q$), mientras que en otros la volatilidad mantiene niveles altos (generalmente casos $p < q$).

De esto se puede inferir que el uso de más parámetros está ligado a modelar la influencia de las varianzas condicionales y residuos pasados. Observando el caso $p = 1$, se muestra que el utilizar más parámetros reduce en cierta forma el rango de la volatilidad. Esto se debe a que los parámetros tienen valores más bajos para garantizar la solución estacionaria y, por ende, menos influencia de residuos atípicos (elevados con respecto al resto).

3.4. Distribución de estimadores

En el resultado 2.14, se establece que, bajo ciertas condiciones, el estimador (cuasi) máximo verosímil converge en distribución a una densidad normal multivariada. Para simplificar el estudio, consideremos $p = q = 1$ y, como fue mencionado anteriormente, $\eta = N(0, 1)$. Así, el vector de parámetros está dado por $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$. Con base en el resultado proporcionado, procederemos a verificar experimentalmente que, para cada componente θ_i de θ , se cumple la siguiente convergencia en distribución:

$$\frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{\sqrt{\text{Var}(\theta_i)}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (15)$$

Para realizar esta verificación, consideraremos las tuplas ordenadas (ω, α, β) dadas por $(0,1,0,2,0,3)$, $(0,6,0,8,0,1)$ y $(0,8,0,4,0,4)$. El procedimiento consiste en, para cada tupla, realizar n estimaciones del parámetro θ mediante simulaciones de trayectorias de longitud $m = 1,000$, tomando valores de n en $\{100, 1,000, 5,000\}$. Posteriormente, para cada resultado, se genera un histograma estandarizado para cada parámetro por separado, el cual se compara con la distribución normal estándar.

Los resultados para α se presentan en Figura 12, para β en Figura 13, y para ω en Figura 14.

De los gráficos se destaca que, efectivamente, la distribución de los parámetros tiende, en el sentido presentado, hacia una normal estándar. Se observa que, por ejemplo, en Figura 13, hay una incongruencia con respecto a la distribución, ya que los valores no disminuyen de cierto umbral. Lamentablemente, mediante este experimento no es posible discernir la causa de esta discrepancia. Sin embargo, se puede conjeturar que se debe a que, por razones de estimación, se requiere que los estimadores sean no negativos, lo que puede generar este problema, así como también, una cierta asimetría observada en algunos histogramas.

4. Conclusiones

A partir de la información presentada en el informe, se logra obtener conocimientos sustanciales sobre la forma y el comportamiento cualitativo de las trayectorias de los modelos GARCH(p,q) de distintos ordenes y configuraciones de parámetros. En específico, se puede afirmar que los parámetros α emergen como elementos cruciales al proporcionar a la varianza condicional una estructura dependiente de los datos, mientras que los parámetros β , desempeñan un papel fundamental en la estabilidad temporal de la volatilidad.

Los resultados obtenidos de los experimentos de simulación sobre la función de autocorrelación de los residuos al cuadrado revelan que esta puede diferir de la teórica o de la esperada, ofreciendo cierta advertencia al momento de querer dilucidar un modelo a través de esta.

Para finalizar, se destaca la relevancia de realizar estimaciones a partir de una única serie de tiempo, así como de utilizar varias series provenientes de un mismo modelo. Esta observación motiva la consideración de técnicas que involucren la toma de submuestras de series temporales extensas para realizar estimaciones diversas, las cuales pueden ser promediadas para obtener un estimador final.

Referencias

- [1] C. Francq y J.M. Zakoian. *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Wiley, 2011. ISBN: 9781119957393. URL: <https://books.google.cl/books?id=hwR1aWSg9PUC>.

- [2] Kevin Sheppard et al. *bashtage/arch: Release 6.2.0*. Ver. v6.2.0. Sep. de 2023. DOI: 10.5281/zenodo.8380532. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.8380532>.

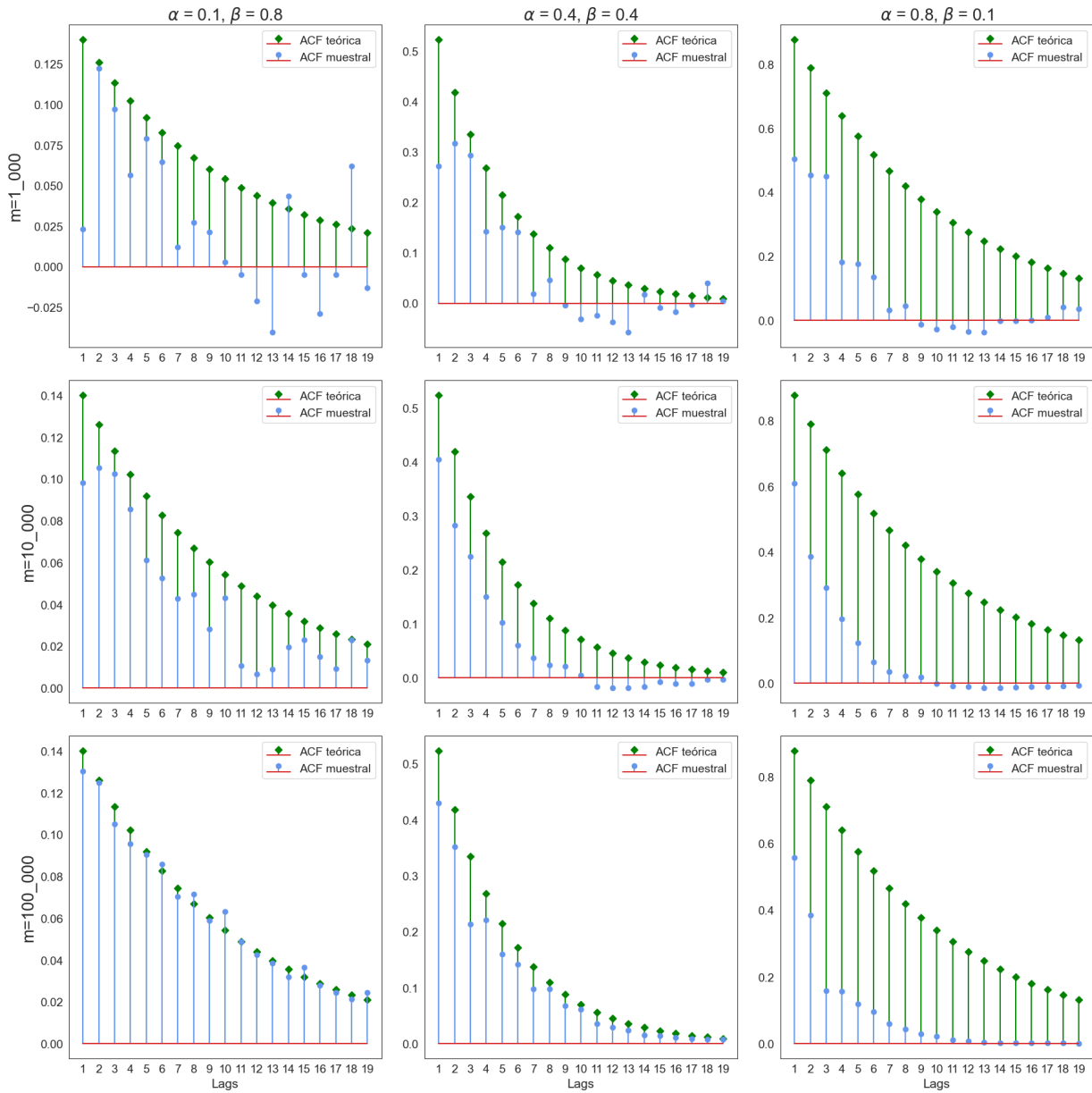


Figura 6: Resultados de comparación gráfica entre la ACF teórica (de color verde) y la ACF muestral (de color azul) para distintos pares de parámetros α y β (izquierda a derecha) entre los lags 1 a 19 para 3 trayectorias de distintos largos m (arriba a abajo).

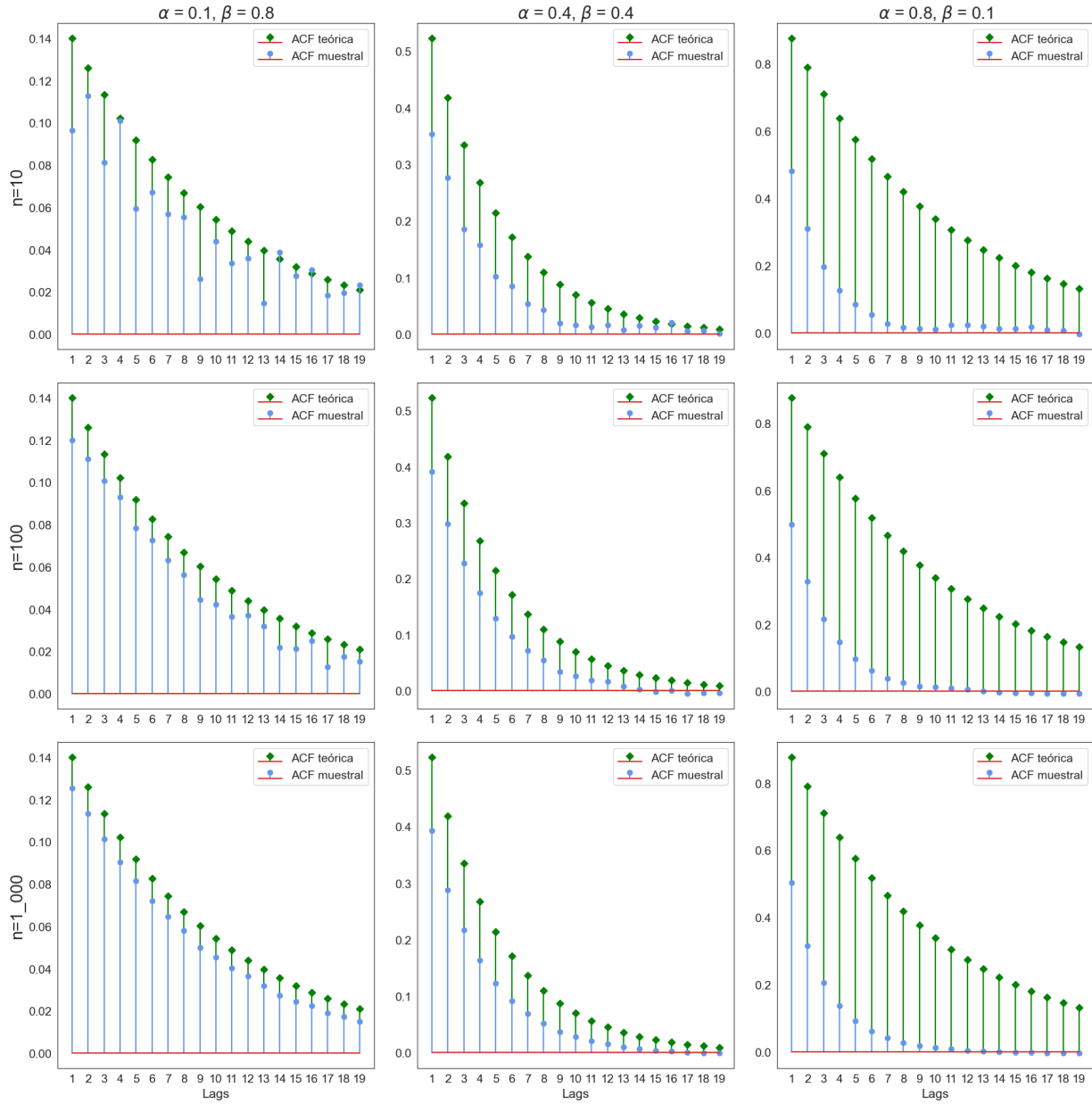


Figura 7: Resultados de comparación gráfica entre la ACF teórica (de color verde) y la ACF muestral promedio (de color azul) de n trayectorias (arriba a abajo) de 1.000 observaciones cada una, esto entre los lags 1 a 19 y para distintos pares de parámetros α y β (izquierda a derecha).

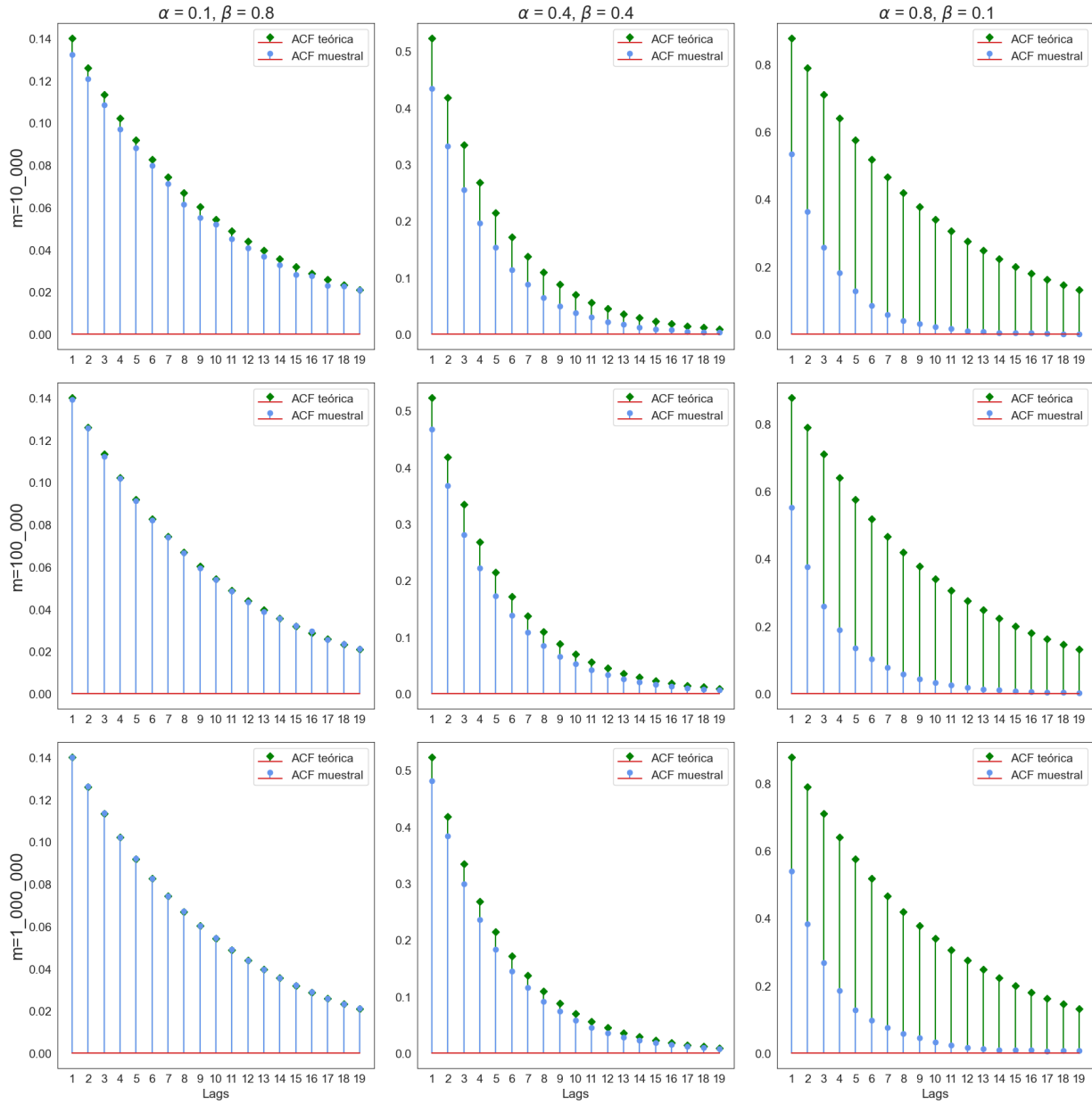


Figura 8: Resultados de comparación gráfica entre la ACF teórica (de color verde) y la ACF muestral promedio (de color azul) de 100 trayectorias de m observaciones cada una (arriba a abajo), esto entre los lags 1 a 19 y para distintos pares de parámetros α y β (izquierda a derecha).

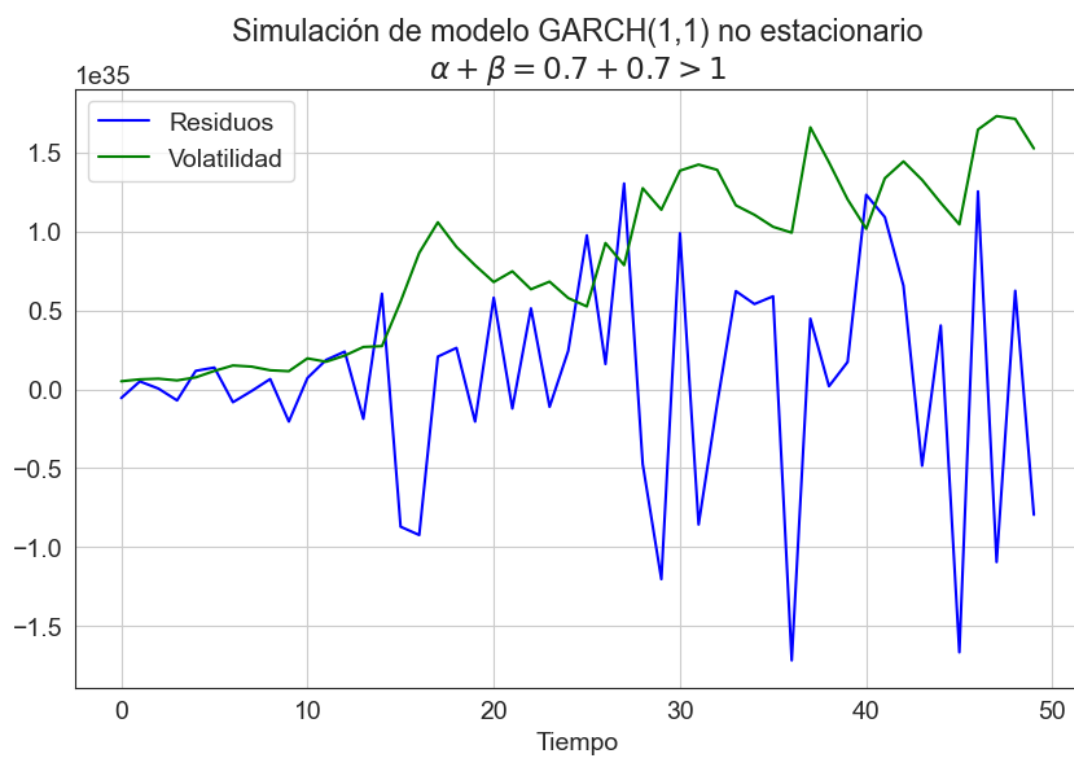


Figura 9: Simulación de una trayectoria de 50 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con $\alpha = \beta = 0.7$ y $\omega = 0.2$, utilizando $\eta \equiv N(0, 1)$.

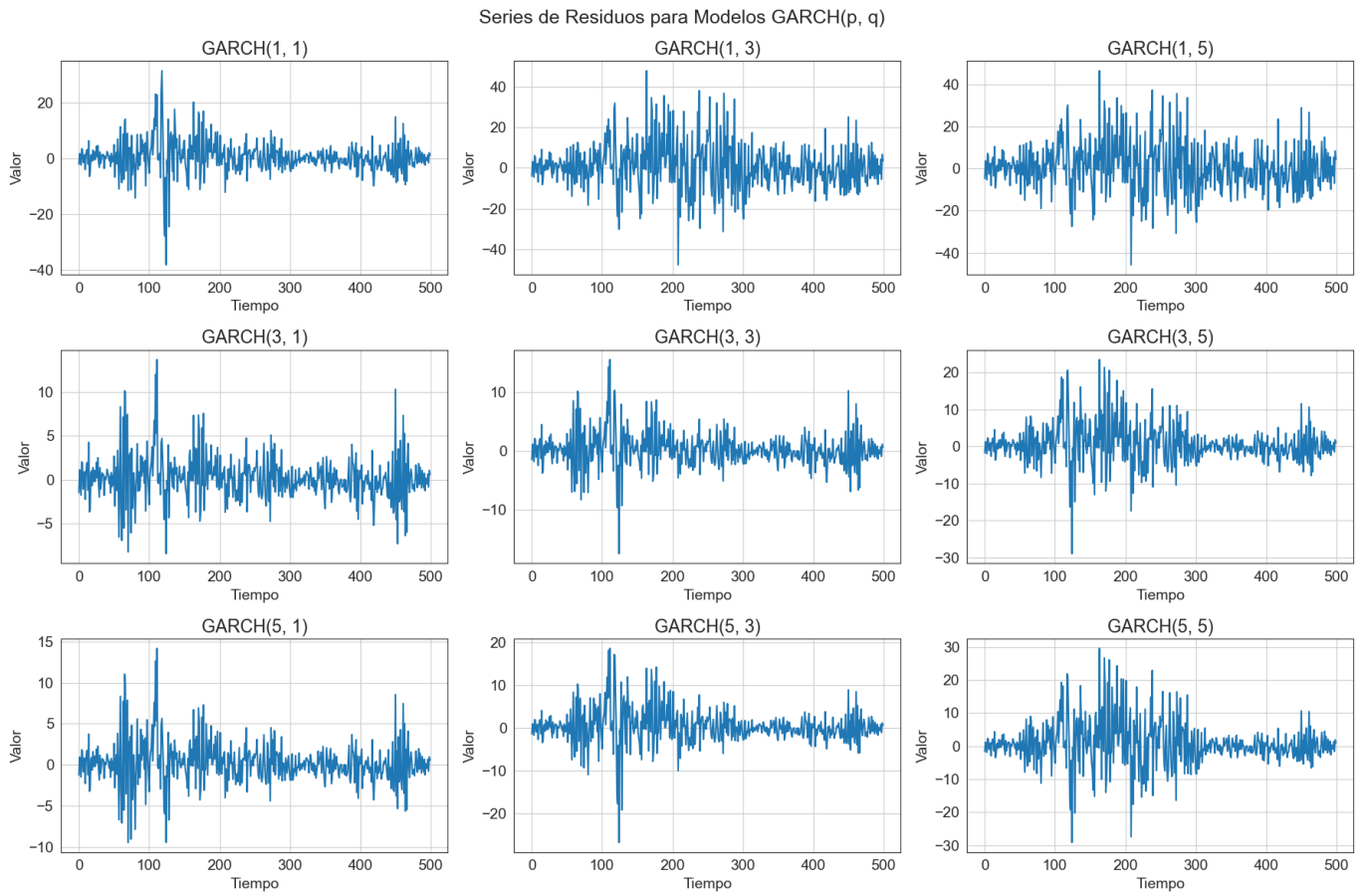


Figura 10: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(p,q) utilizando $\eta \equiv N(0, 1)$ con $\omega = 0.5$ y parámetros α_i y β_j generados aleatoriamente. Se muestra las series de los residuos para $p \in \{1, 3, 5\}$ (de arriba a abajo) y $q \in \{1, 3, 5\}$ (de izquierda a derecha).

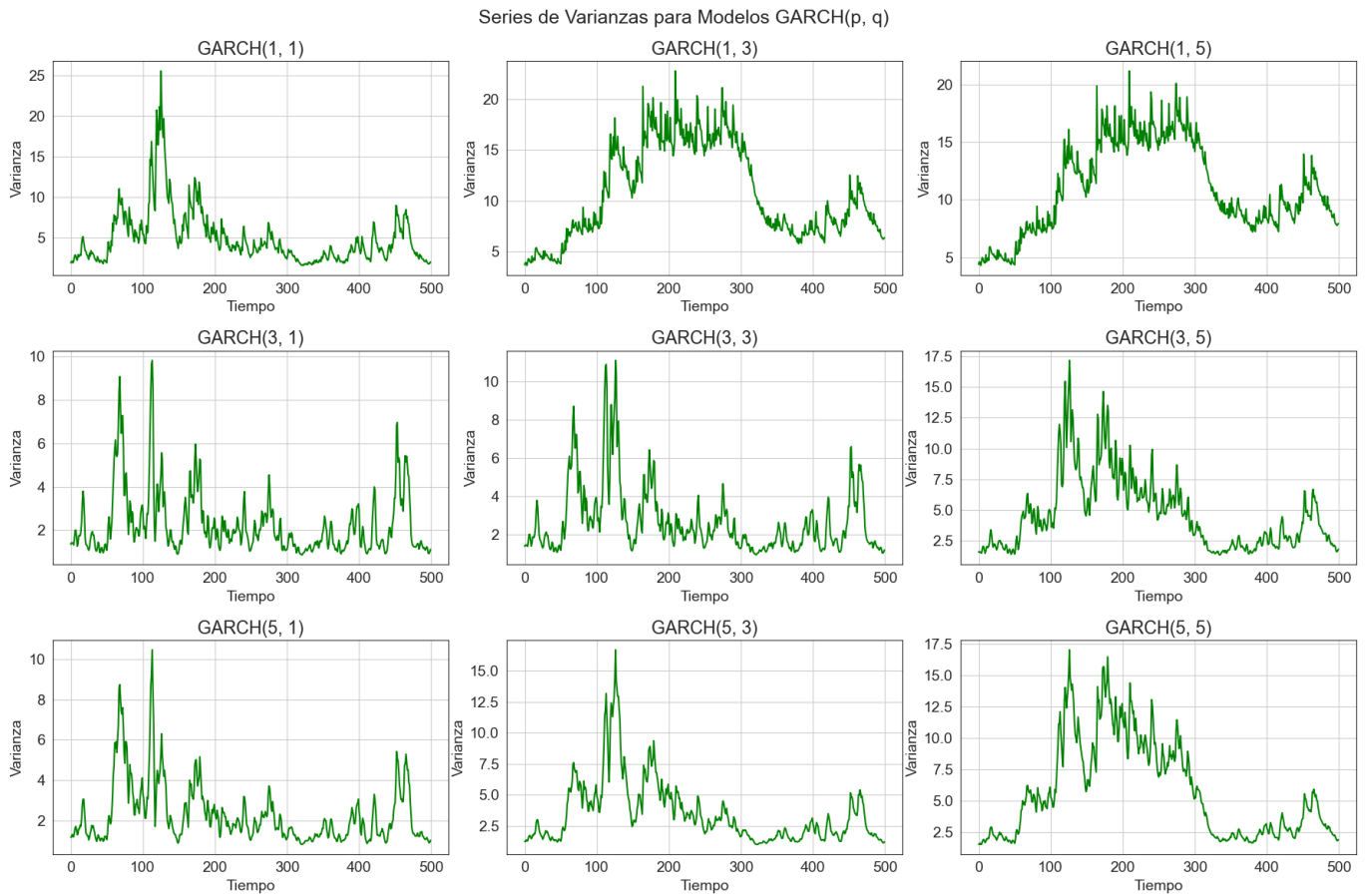


Figura 11: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(p,q) utilizando $\eta \equiv N(0, 1)$ con $\omega = 0.5$ y parámetros α_i y β_j generados aleatoriamente. Se muestra las series de las varianzas para $p \in \{1, 3, 5\}$ (de arriba a abajo) y $q \in \{1, 3, 5\}$ (de izquierda a derecha).

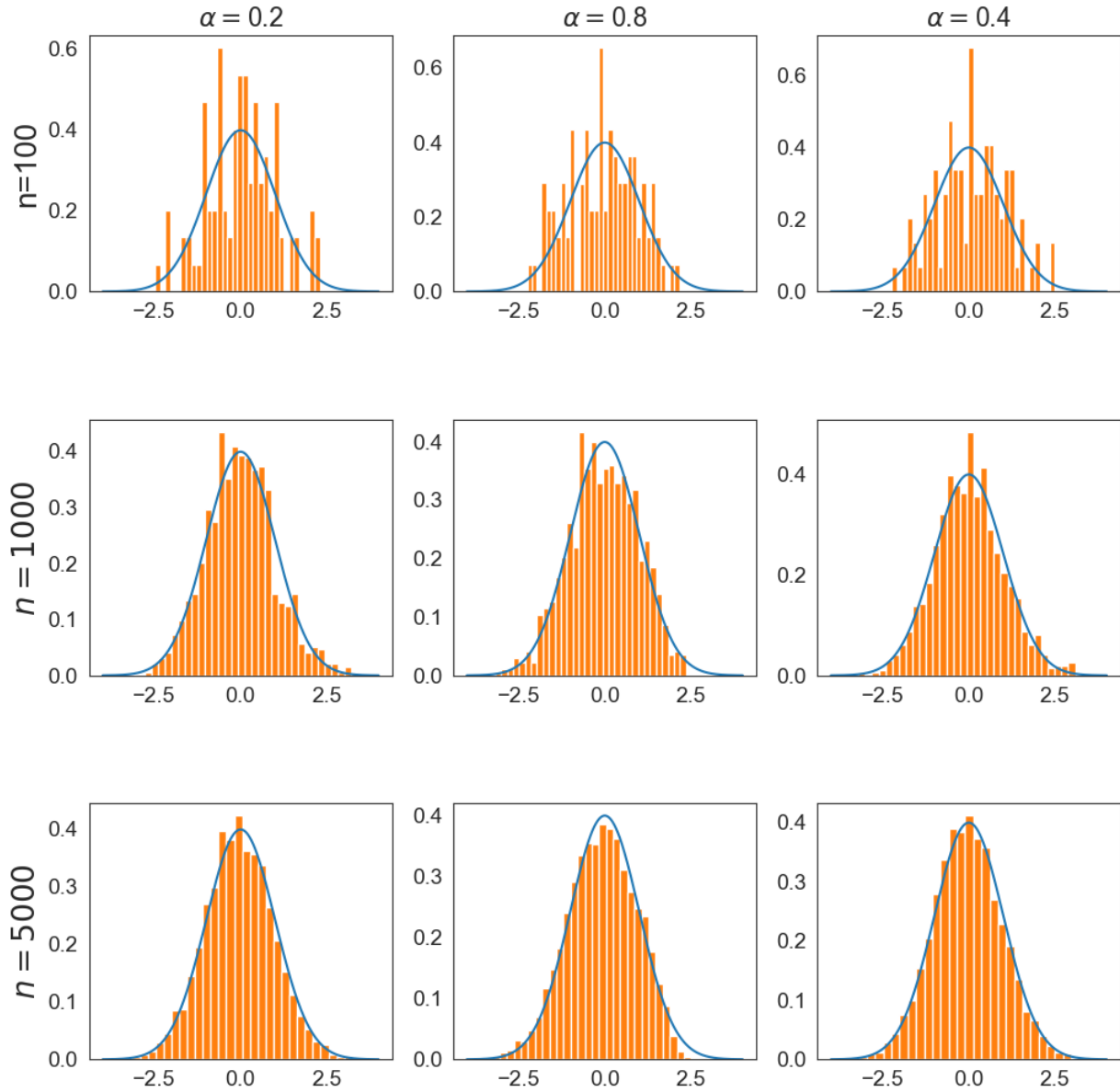


Figura 12: Comparación de histograma estandarizado de estimaciones de α contra densidad de la distribución $N(0,1)$ (de color azul). Se consideran distintos valores de α (de izquierda a derecha) y distinto número n de estimaciones (de arriba a abajo). Cada estimación proviene de una simulación de trayectoria de largo 1.000.

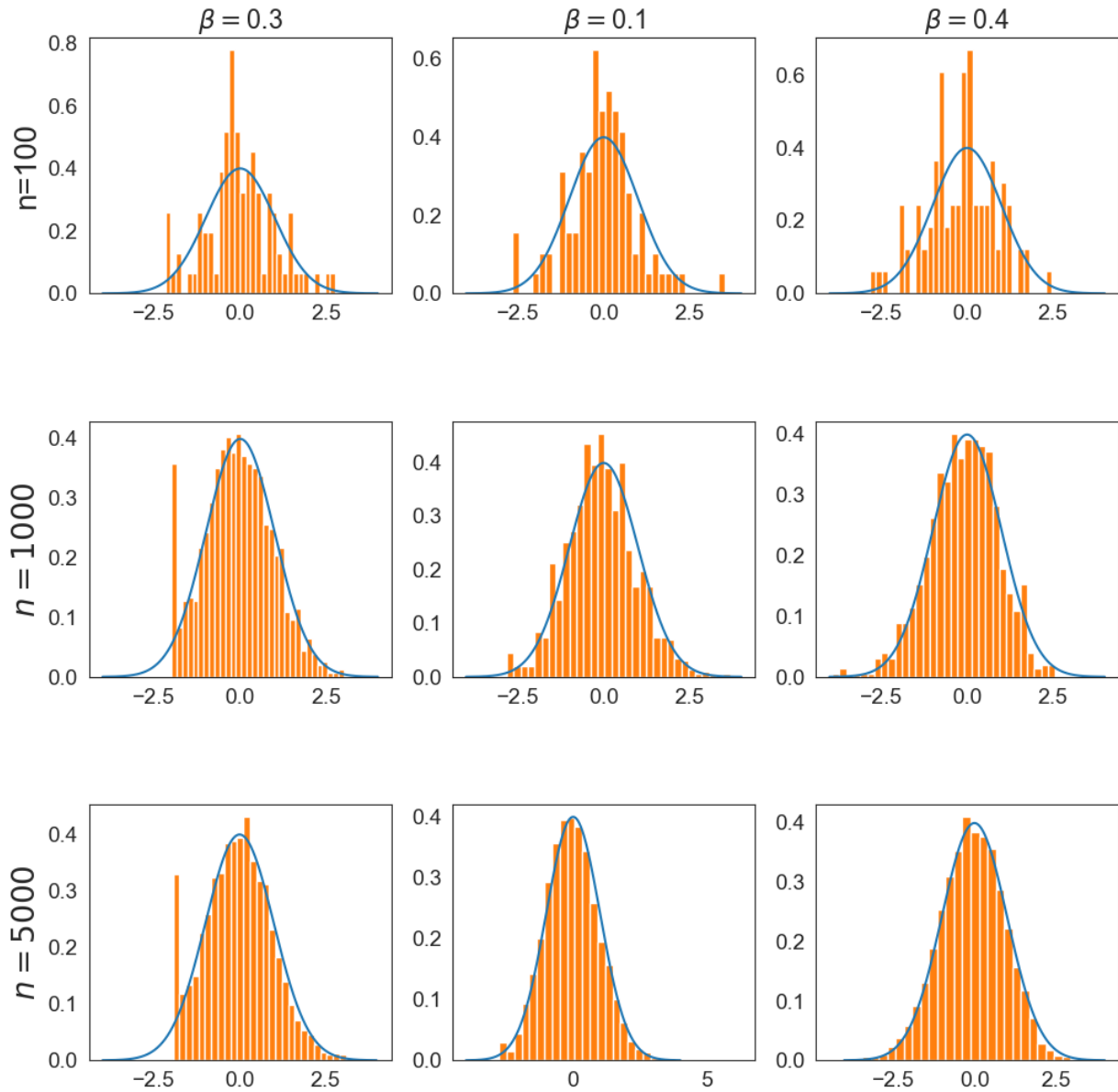


Figura 13: Comparación de histograma estandarizado de estimaciones de β contra densidad de la distribución $N(0,1)$ (de color azul). Se consideran distintos valores de β (de izquierda a derecha) y distinto número n de estimaciones (de arriba a abajo). Cada estimación proviene de una simulación de trayectoria de largo 1.000.

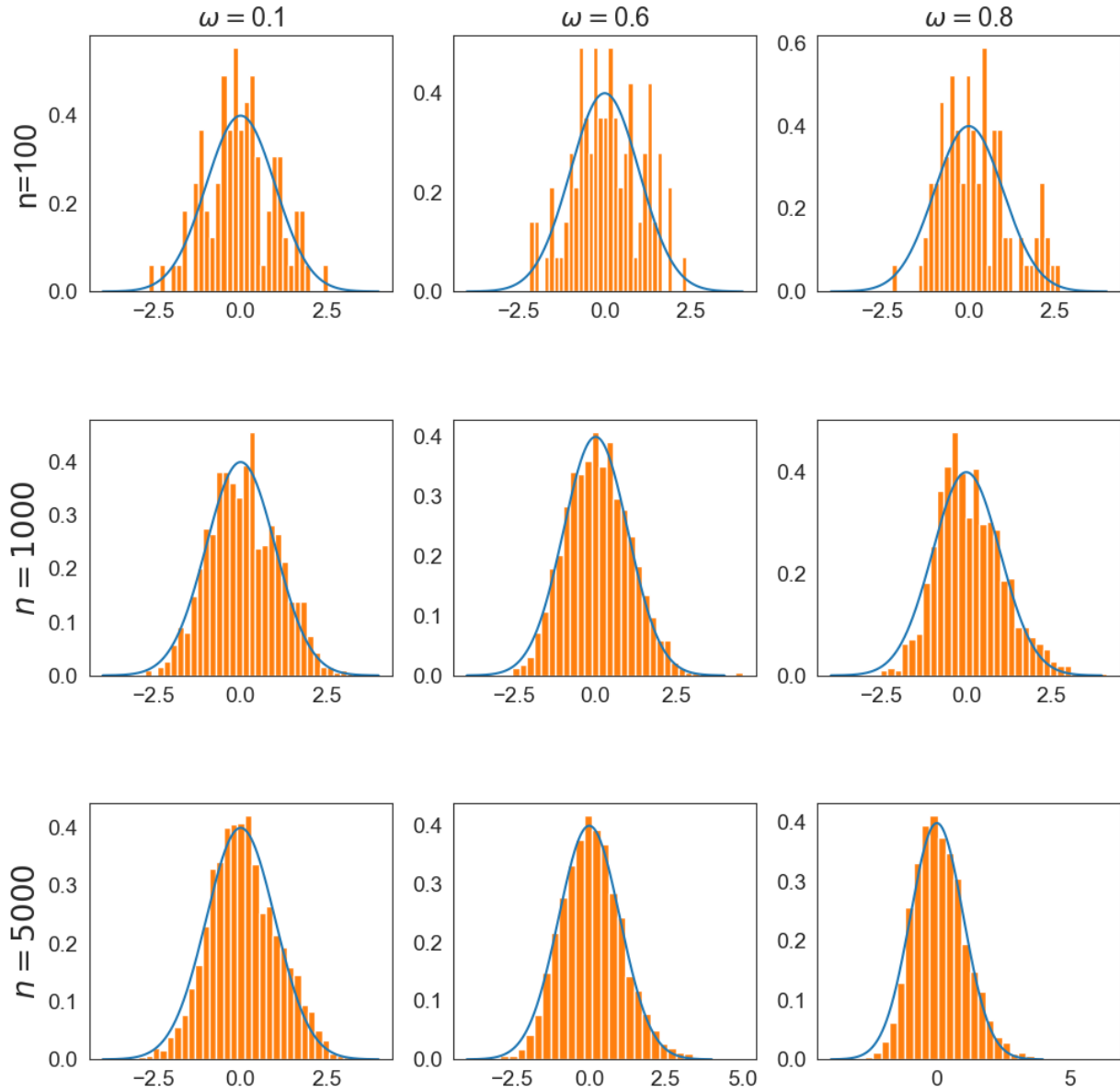


Figura 14: Comparación de histograma estandarizado de estimaciones de ω contra densidad de la distribución $N(0,1)$ (de color azul). Se consideran distintos valores de ω (de izquierda a derecha) y distinto número n de estimaciones (de arriba a abajo). Cada estimación proviene de una simulación de trayectoria de largo 1.000.