UNIVERSIDAD TÉCNICA
FEDERICO SANTA MARÍA

Departamento de Matemática

MAT468

Segundo Semestre 2023

Experimentos de simulación sobre modelos GARCH de series temporales

Nombre: Diego Astaburuaga, David Rivas

Rol: 202010018-7, 202010014-4

Valparaíso, Noviembre de 2023

Resumen

Este informe se sitúa en el contexto del modelamiento de series temporales financieras, donde la asunción de volatilidad constante es a menudo incorrecta. Introduce los procesos GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) como herramientas fundamentales para capturar la variabilidad condicional en tales datos.

El trabajo presenta de manera detallada los modelos GARCH[1] y destaca resultados clave derivados de estos modelos. El objetivo principal es realizar experimentos de simulación para validar experimentalmente estos resultados y llevar a cabo la estimación de parámetros mediante técnicas de simulación.

Para lograr esto, se proponen varios experimentos independientes implementados en Python, utilizando principalmente la librería ARCH[3]. Los resultados de estos experimentos se discuten detalladamente, incluyendo la capacidad de la simulación para estimar índices de modelos GARCH, la confirmación de que las técnicas de estimación de parámetros producen resultados precisos y la validez de las distribuciones de los estimadores.

Este trabajo proporciona una contribución valiosa al entendimiento de la aplicabilidad y confiabilidad de los modelos GARCH en el contexto de series temporales financieras. Las conclusiones finales y cualquier resultado adicional se presentarán en la versión completa del informe.

Índice

1. Introducción

Las series temporales representan conjuntos de datos observados secuencialmente a lo largo del tiempo. En el ámbito financiero, comprender y modelar la volatilidad de estos datos es crucial para la toma de decisiones informada. Los modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) han surgido como herramientas fundamentales para abordar la variabilidad condicional en series temporales financieras.

Desarrollados por Robert Engle en 1982 (modelos ARCH) y posteriormente generalizados por Tim Bollerslev, los modelos GARCH proporcionan un marco robusto para el modelado de la volatilidad en procesos de series temporales. Esto permite captar patrones más complejos en diversas series de tiempo, donde el supuesto de volatilidad constante (homocedasticidad) no se verifica.

Al igual que los convencionales modelos ARIMA, los modelos GARCH poseen una teoría desarrollada sobre la estimación de parámetros, resultados asintóticos de distribución y propiedades cualitativas sobre las trayectorias. Estas características los convierten en candidatos adecuados para corroborar diversos resultados y técnicas a través de experimentos de simulación, así como para la estimación de coeficientes de interés mediante la generación de trayectorias.

2. Definiciones y resultados

A continuación se presentan una serie de definiciones y resultados sin demostrar que serán utilizados y necesarios para la comprensión del presente documento. La mayor parte de los resultados y definiciones son extraidas directamente desde [1].

2.1. Procesos estacionarios

Definición 2.1 (Estacionariedad estricta). *El proceso* (X_t) *se dice que es estrictamente estacionario si los vectores* $(X_1, \ldots, X_k)^T$ *y* $(X_{1+h}, \ldots, X_{k+h})^T$ *tienen la misma distribución conjunta, para todo* $k \in \mathbb{N}$ *y* $h \in Z$*.*

Definición 2.2 (Estacionariedad de segundo orden). *El proceso* (X_t) *se dice que es de segundo orden estacionario si:*

1. $E(X_t^2) < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$;
2. $E[X_t] = m, \quad t \in \mathbb{Z}$;
3. $\mathrm{Cov}\,(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(h), \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}$.

la función $\gamma_X(\cdot)$ $(\rho_X(\cdot) := \gamma_X(\cdot)/\gamma_X(0))$ *se denota la función de autocovarianza (función de autocorrelación) de* (X_t)*.*

Definición 2.3 (Ruido blanco débil). *El proceso* (ϵ_t) *se denota como ruido blanco débil si existe alguna constante* σ^2 *tal que:*

1. $E(\epsilon_t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$;
2. $E(\epsilon_t^2) = \sigma^2, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$;
3. $\mathrm{Cov}\,(\epsilon_t, \epsilon_t) = 0, \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0$.

Definición 2.4 (Ruido blanco fuerte). *Nótese que no existe algún supuesto de independencia en la definición de ruido blanco débil. Las variables en diferentes tiempos son únicamente no correlacionadas y esta distinción es particularmente crucial para series de tiempo financieras (donde usualmente se utilizan los procesos GARCH). Es aveces necesario reemplazar la tercera hipótesis por una más fuerte: las variables* ϵ_t *y* ϵ_{t+h} *son independientes e identicamente distribuidas. En tal caso el proceso* (ϵ_t) *se dice que es un ruido blanco fuerte.*

2.2. Modelos ARMA y ARIMA

Definición 2.5 (Procesos ARMA(p, q)). *Un proceso estacionario de segundo orden* (X_t) *se denomina ARMA(p, q), donde p y q son enteros, si existen coeficientes reales* $c, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ *tales que, para todo* $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t + \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} = c + \epsilon_t + \sum_{j=1}^{q} b_j \epsilon_{t-j},$$

donde (ϵ_t) es el proceso de innovación lineal de (X_t).

Definición 2.6 (Procesos ARIMA(p, d, q))**.** *Sea d un entero positivo. El proceso (X_t) se denomina proceso ARIMA(p, d, q) si, para $k = 0, \dots, d-1$, los procesos $(\Delta^k X_t)$ no son estacionarios de segundo orden y $(\Delta^d X_t)$ es un proceso ARMA(p, q).*

2.3. Procesos GARCH

Definición 2.7 (Procesos GARCH(p, q))**.** *Un proceso (ϵ_t) se conoce como GARCH(p, q) si sus dos primeros momentos condicionales existen y satisfacen:*

1. *$E(\epsilon_t | \epsilon_u,\, u < t) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}$.*
2. *Existen constantes ω, α_i, $i = 1, \dots, p$ y β_j, $1, \dots, q$ tales que*

$$\sigma_t^2 = \mathrm{Var}\left(\epsilon_t | \, \epsilon_u,\, u < t\right) = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

si $\beta_j = 0$, $j = 1, \dots, q$ entonces el proceso se conoce como proceso ARCH(p).

Resultado 2.8 (Representación proceso GARCH(p, q))**.** *Por definición, el termino de innovación del proceso ϵ_t^2 es la variable $\nu_t = \epsilon_t - \sigma_t^2$. Substituyendo en la ecuación anterior las variables σ_{t-j}^2 por $\epsilon_{t-j}^2 - v_{t-j}$, tenemos la representación*

$$\epsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + \beta_i) \epsilon_{t-i}^2 + \nu_t - \sum_{j=1}^{q} \beta_j \nu_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

donde $r = \max(p, q)$ con la convención de que $\alpha_i = 0$ ($\beta_j = 0$) si $i > p$ ($j > q$). Esta ecuación tiene la estructura lineal de un modelo ARMA, permitiendo el computo de predictores lineales. En particular, bajo condiciones adicionales (implicando la estacionariedad de segundo orden de ϵ_t^2) se puede establecer que si (ϵ_t) es GARCH(p, q), entonces (ϵ_t^2) es un proceso ARMA(r, q). En especifico, el cuadrado de un proceso ARCH(p) admite, si este es estacionario, una representación AR(p).

Ver como utilizar este resultado y/o fundamentar porqué está puesto en el documento

Definición 2.9 (Proceso GARCH fuerte)**.** *Sea (η_t) una secuencia de variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución η. El proceso (ϵ_t) se le denota como proceso GARCH(p, q) fuerte (con respecto a la secuencia (η_t)) si*

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases} \tag{3}$$

donde los α_i y β_j son constantes no negativas y ω es una constante estrictamente positiva.

Substituyendo ϵ_{t-i} por σ_{t-i} en (1), tenemos que

$$\sigma_t^2 = \omega = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \sigma_{t-i}^2 \eta_{t-i}^2 + \sigma_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{4}$$

el cual puede ser escrito como

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{r} a_i(\eta_{n-i}) \sigma_{t-i}^2 \tag{5}$$

donde $a_i(z) = \alpha_i z^2 + \beta_i$, $i = 1, \ldots, r$. Esta representación muestra que el proceso de volatilidad de un GARCH fuerte es la soluciöon de una ecuación autoregresiva con coeficientes aleatorios.

Mencionar al momento de simular en el experimento 1 que nos encontramos simulando este proceso

Teorema 2.10 (Estacionariedad de segundo orden)**.** *Si existe un proceso GARCH(p, q), en el sentido de la definición* (1)*, el cual es estacionario de segundo orden y causal*[1]*, y si* $\omega > 0$*, entonces*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_i < 1. \tag{6}$$

Por el contrario, si se tiene (6)*, entonces la única solución estrictamente estacionaria del modelo* (3) *es un ruido blanco débil (y por ende estacionario de segundo orden). En adición, no existe otra solución estacionaria de segundo orden.*

Comentar de alguna forma que este resultado es valioso para la simulación dado que permite generar trayectorias que no exploten.

Resultado 2.11 (Correlación modelo GARCH$(1, 1)$)**.** *Para un modelo GARCH$(1, 1)$ tal que* $E[\epsilon_t^4] < \infty$*, la autocorrelación de los residuos al cuadrado toma la forma*

$$\rho_{\epsilon^2}(h) := \operatorname{Corr}\left(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-h}^2\right) = \rho_{\epsilon^2}(1)(\alpha_1 + \beta_1)^{h-1}, \quad h \geq 1 \tag{7}$$

donde

$$\rho_{\epsilon^2}(1) = \frac{\alpha_1\{1 - \beta_1(\alpha_1 + \beta_1)\}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2} \tag{8}$$

3. Experimentos de simulación

Revisar documento jupyter final en la carpeta de entregables.

En esta sección, se describen diversos experimentos de simulación relacionados con los procesos GARCH. En primer lugar, se busca comprender el efecto de los órdenes p y q en las trayectorias del modelo de manera cualitativa. Posteriormente, se analiza el modelo GARCH$(1, 1)$, el cual, debido a

[1] Causal en un sentido que ϵ_t es una función medible de $(\eta_{t-s})_{s \geq 0}$, donde (η_t) son independientes e idénticamente distribuidos desde $N(0, 1)$ y $\epsilon_t = \sigma_t \eta_t$ y σ_t^2 dado por (1)

su simplicidad, suele ser preferible y permite estudiar el efecto de la magnitud de los parámetros. Finalmente, se verifica la distribución de ciertos estimadores mediante simulación.

Las descripciones de cada experimento, así como las especificaciones, se encuentran en esta sección. Sin embargo, los códigos y las bibliotecas utilizadas no se incluyen aquí. Para acceder a esta información, se invita al lector a visitar el repositorio público del trabajo en `https://github.com/Darkrayyss/Proyecto-modelos-GARCH`. Se especifica que los códigos fueron realizados en lenguaje Python y con particular uso de las librerías `arch`[3] y `statsmodels`[2].

Al momento de explicar hay que mencionar que distribución estamos usando como base.

3.1. Reproducibilidad de experimentos

Mencionar como utilizar set.seed y randomstate para utilizar la librería correctamente y poder generar trayectorías reproducibles. Esto es de particular importancia en el informe dado que se centra en el proceso de simulación (nombre del ramo).

¿Tal vez poner un pseudo código de como se simulan los procesos? Describir el esquema de usar observaciones quemadas, etc.

3.2. Comportamiento cualitativo de trayectorias

3.2.1. Ejemplo no estacionario.

Recordar mencionar que cuando hablamos de estacionario, no es referimos a la estacionariedad de segundo orden.

3.2.2. Simulaciones para distintos ordenes

3.2.3. Trayectorias modelo GARCH(1,1)

3.3. Verificación covarianza teórica modelo GARCH(1,1)

3.4. Distribución de estimadores

4. Conclusiones.

Referencias

[1] C. Francq y J.M. Zakoian. *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Wiley, 2011. ISBN: 9781119957393. URL: `https://books.google.cl/books?id=hwR1aWSg9PUC`.

[2] Skipper Seabold y Josef Perktold. «statsmodels: Econometric and statistical modeling with python». En: *9th Python in Science Conference*. 2010.

[3] Kevin Sheppard et al. *bashtage/arch: Release 6.2.0*. Ver. v6.2.0. Sep. de 2023. DOI: `10.5281/zenodo.8380532`. URL: `https://doi.org/10.5281/zenodo.8380532`.

5. Sección temporal

Se debe de recordar lo siguiente:

- Eliminar esta sección.
- Revisar resumen/abstract.
- Hacer conclusión.
- Ocupar imagénes ilustrativas, no todas, en caso de ser necesarias se deben agregar como anexo.
- Para usar imagén se puede hacer:

Figura 1: Ejemplo de imagen.

- Recordar mencionar que cuando hablamos de estacionario, no es referimos a la estacionariedad de segundo orden.

Cuadro 1: Ejemplo de tabla con caption y label

Nombre	**Notas Series de Tiempo**	**Nivel de Pera**	**Nivel de Catricidad**
Rodrigo	78	5	43
David	92	8	75
Martin	65	2	21
Vivallo	85	7	58

5.1. Sobre experimentos

Acabo de interrumpir el trabajo que llevaba, debo anotar las cosas para no olvidarlas:

- Realizar experimentos simples sobre las trayectorías del modelo GARCH(1,1).
- Hacer experimentos para GARCH de distintos ordenes y de distintos parámetros para comparar cualitativamente los efectos de estos (algo así como la page 37 del lector de pdf del libro).
- Argumentar el sentido de cada experimento y comentarlo de forma pertinente.