Modelo GARCH(p, q)

Modelo utilizado en series temporales financieras

Diego Astaburuaga & David Rivas

[1]Universidad Técnica Federico Santa María. Departamento de Matemática.

21 de Noviembre de 2023

Contenido

Contenido

Algunas carácteristicas de las series temporales financieras son [1]:

1. No estacionariedad de la serie de precios.
2. Ausencia de autocorrelación para las variaciones de precios.
3. Autocorrelaciones de los rendimientos al cuadrado de los precios.
4. Agrupación de la volatilidad.
5. Distribuciones con colas anchas.
6. *Leverage effect*.
7. Estacionalidad.

Ejemplo: Rendimientos Diarios S&P 500

El índice S&P 500, que abarca las principales 500 empresas en la bolsa estadounidense, se presenta como una serie relevante para el análisis con modelos GARCH.

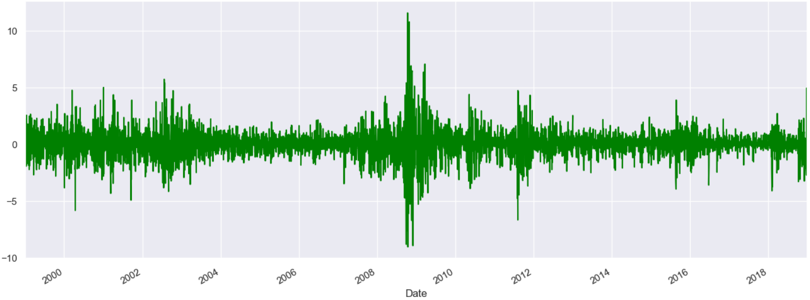


Figura: Serie de tiempo de los rendimientos diarios del S&P 500. Fuente: `arch.data.sp500` en Python.

Ejemplo: Rendimientos Diarios S&P 500

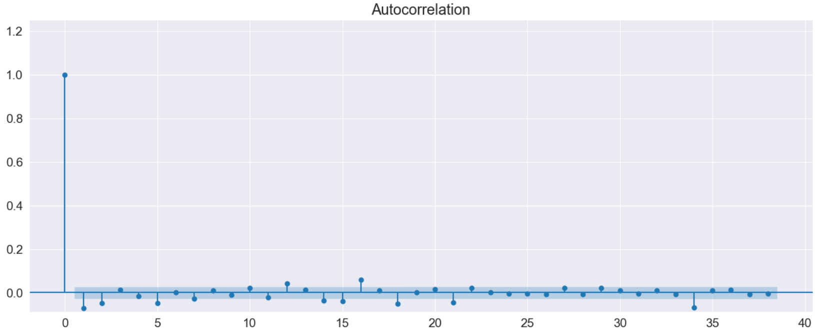


Figura: ACF de la serie temporal

Ejemplo: Rendimientos Diarios S&P 500

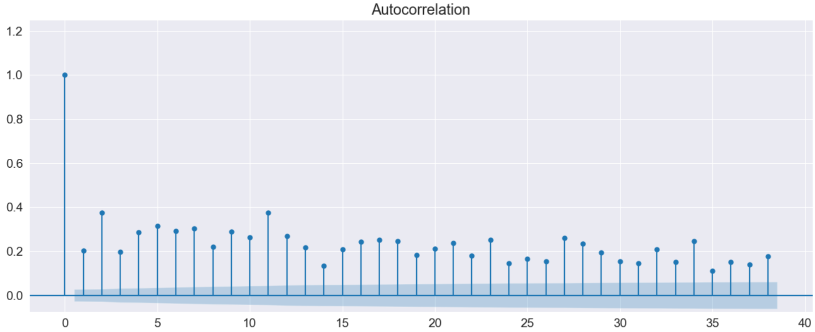


Figura: ACF de la serie temporal al cuadrado

Ejemplo: Rendimientos Diarios S&P 500

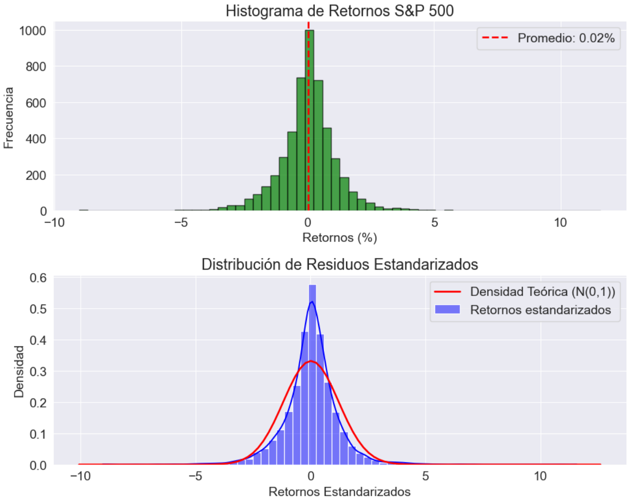
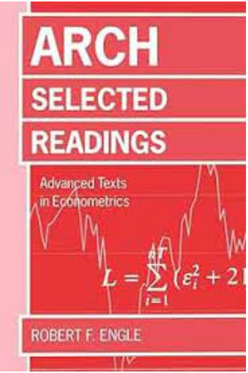


Figura: Histograma e histograma estandarizado de la serie temporal.

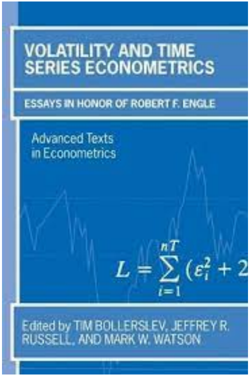
Contenido

Modelos GARCH: Aspectos Fundamentales

- Desarrollados por **Robert F. Engle** en 1982 (ARCH) y posteriormente generalizados por **Tim Bollerslev** en 1986 (GARCH), los Modelos GARCH abordan la volatilidad en series temporales financieras.
- Permiten modelar series de tiempo con ruidos de varianza no constante.
- Capturan la dinámica de rendimientos del mercado, destacando en la modelización de volatilidad condicional.
- Utilizados para comprender y prever fenómenos como el agrupamiento de volatilidad, ofreciendo una herramienta esencial en finanzas.



Modelo ARCH, Engle (1982).



Modelo GARCH, Bollerslev (1986)

Modelo ARCH: Definición

Definición del Modelo ARCH(p)

Sea ϵ_t un proceso estocástico discreto de valores reales. El proceso ϵ_t sigue un modelo ARCH(p) (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) si:

$$\epsilon_t | F_{t-1} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_t^2\right),$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2$$

donde $p \geq 0$, $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, p$. Donde F_{t-1} denota la "información" hasta el momento $t-1$.

Modelo ARCH: Comentarios

Tengamos en cuenta que buscamos modelar una varianza, por ende es razonable utilizar lo siguientes puntos

- Debe cumplirse que $\omega > 0$ y $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, p$.
- Se suele pedir que $\alpha_j > \alpha_i$ para $j > i$ bajo la interpretación de que las noticias más recientes tienen más impacto.
- La condición de estacionariedad viene dada por

$$0 \leq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \leq 1$$

Modelo GARCH: Definición

Definición del Modelo GARCH(p, q)

Sea ϵ_t un proceso estocástico discreto de valores reales. Entonces ϵ_t sigue un modelo GARCH(p, q) (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) si y sólo si:

$$\epsilon_t | F_{t-1} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_t^2\right),$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

donde $p \geq 0$, $q \geq 0$, $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, p$, y $\beta_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, q$. Donde F_{t-1} denota la "información" hasta el momento $t-1$.

Modelo GARCH: Comentarios

- α_i: Controla la contribución de los errores pasados a la varianza condicional en Modelos GARCH(p, q).
- β_j: Controla la contribución de la varianza pasada a la varianza condicional. Un valor más alto indica una mayor persistencia en la varianza a lo largo del tiempo.
- Se menciona que ϵ_t se les suele conocer como retornos y σ_t^2 como volatilidad.
- La condición de estacionariedad para este modelo viene dada por la ecuación
$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$$
- La condición de normalidad es una hipótesis fuerte que puede ser cambiada por supuestos sobre los momentos condicionales.

Ejemplo GARCH$(1, 1)$ no estacionario

En caso de que no se cumpla la condición de estacionariedad, la volatilidad puede tender a infinito como se observa en el siguiente ejemplo simulado:

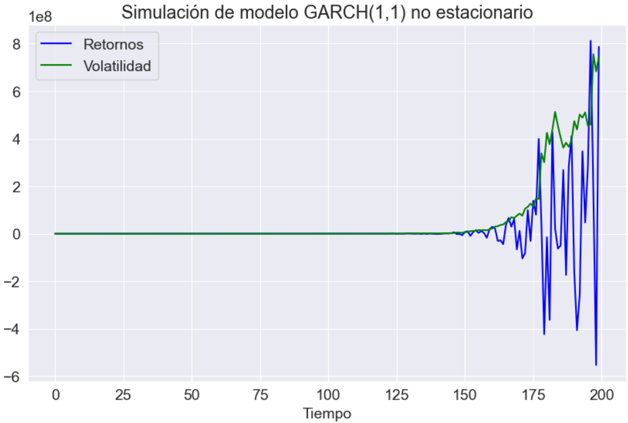


Figura: Fuente: Elaboración propia.

Representación de modelos GARCH(p, q)

Resultado

Bajo la notación anterior, escriba $\nu_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$

$$\epsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{r}(\alpha_i + \beta_i)\epsilon_{t-i}^2 + \nu_t - \sum_{j=1}^{q}\beta_j \nu_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

donde $r = \text{máx}\{p, q\}$ bajo la condición de que $\alpha_i = 0$ ($\beta_j = 0$) para $i > p$, ($j > q$).

El resultado anterior[1] nos dice que la serie de los residuos al cuadrado puede ser entendida como un modelo ARMA(r, q), en especifico, para el modelo ARCH(p), se tiene que este se puede representar como un AR(p).

[1] Este resultado es fundamental para toda la sección de inferencia.

Modelo ARMA-GARCH

La implementación de un modelo GARCH suele ser acompañada por un modelo ARIMA para la serie, por ejemplo un proceso $\mathrm{ARMA}(2,1)-\mathrm{GARCH}(1,1)$ puede ser definido mediante:

$$\begin{cases} X_t - 0.8X_{t-1} + 0.8X_{t-2} = \epsilon_t - 0.8\epsilon_{t-1} \\ \epsilon_t = \sigma_t\eta_t, \quad \eta_t \text{ iid } N(0,1) \\ \sigma_t^2 = 1 + 0.2\epsilon_{t-1}^2 + 0.6\sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

lo que permite desarrollar complejos más complejos que capten la heterocedasticidad.

Contenido

Identificación del modelo

- Detectar si el proceso cuenta con un ruido blanco débil o fuerte (supuesto distribucional, *Portmanteau tests*).
- Utilizar test de homocedasticidad: *Lagrange Multiplier Test for Conditional Homoscedasticity*
- Identificar parámetros P, Q del modelo ARMA(P, Q) (*The Corner Method*).
- Determinar parámetros de la parte GARCH.

Existen principalmente dos métodos para la estimación de los parámetros:

- **Estimación mediante mínimos cuadrados.**
  1. Mínimos Cuadrados Ordinarios.
  2. Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles.
  3. Mínimos Cuadrados Ordinarios con Restricciones.
- **Estimación cuasi-máxima verosímil.**[2]

para más información de métodos, resultados importantes, aplicaciones, etc, revise [1].

[2] El nombre de "cuasi" viene de utilizar resultados asintóticos sobre la distribución.

Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinario para ARCH(p)

Resultado: Estimador OLS para ARCH(p)

Sea $\theta = (\omega, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)^T$ el vector de parámetros del modelo. Dadas $n+1$ residuos con $n > p$, se tiene que el estimador tiene forma explicita dada por

$$\widehat{\theta}_{OLS} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$

donde

$$Y = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)^T \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_0^2 & \ldots & \epsilon_{-p+1}^2 \\ \vdots & & & \\ 1 & \epsilon_{n-1}^2 & \ldots & \epsilon_{n-p}^2 \end{pmatrix}$$

Además, se puede probar que bajo condiciones descritas en [1] el estimador es consistente y asintóticamente normal[3].

[3] Estos resultados y la forma del estimador no requieren hipótesis distribucionales

Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles para ARCH(p)

Resultado: Forma del estimador FGLS

Sea $\theta = (\omega, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)^T$ el vector de parámetros del modelo y $\hat{\theta}_{OLS}$ el estimador de mínimos cuadrados. Dadas $n + 1$ residuos con $n > p$, se tiene que el estimador tiene forma explicita dada por

$$\tilde{\theta} = (X^t \hat{\Omega} X)^{-1} X^t \hat{\Omega} Y$$

donde

$$\hat{\Omega} = diag(\sigma_1^{-4}(\hat{\theta}_{OLS}), ..., \sigma_n^{-4}(\hat{\theta}_{OLS}))$$

Además, se puede probar que bajo condiciones descritas en [1] el estimador es consistente y asintóticamente normal[4].

[4] Estos resultados y la forma del estimador no requieren hipótesis distribucionales

Contenido

En Python es de bastante utilidad conocer la librería `ARCH` en [3] que entrega gran soporte de modelos ARCH, de sus variantes y extensiones. Además de la librería `statsmodels` en [2] para análisis de series de tiempo en general. Recordemos el ejemplo inicial

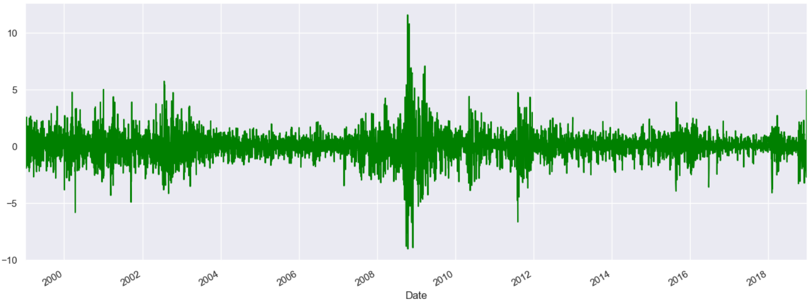


Figura: Serie de tiempo de los rendimientos diarios del S&P 500. Fuente: `arch.data.sp500` en Python.

Ejemplo: Rendimientos Diarios S&P 500

A modo de ejemplo, se ajusta un modelo GARCH$(1,1)$ para obtener los residuos estandarizados y la volatilidad condicional:

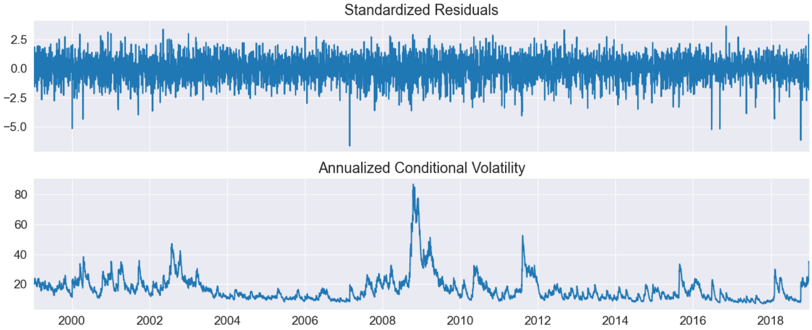


Figura: Residuos y volatilidad condicional.

Ejemplo: Rendimientos Diarios S&P 500 - Modelo

Modelo ajustado

Considere el popular modelo GARCH$(1,1)$ con modelo de media constante y distribución normal, es decir:

$$\begin{cases} r_t = \mu + \epsilon_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \\ \epsilon_t = \sigma_t e_t, \quad e_t \sim N(0,1) \end{cases}$$

A continuación se presenta el resumen del modelo ajustado.

Ejemplo: Rendimientos Diarios S&P 500 - Resumen del Modelo

```
                     Constant Mean - GARCH Model Results
==============================================================================
Dep. Variable:              Adj Close   R-squared:                       0.000
Mean Model:             Constant Mean   Adj. R-squared:                  0.000
Vol Model:                      GARCH   Log-Likelihood:               -6936.72
Distribution:                  Normal   AIC:                           13881.4
Method:            Maximum Likelihood   BIC:                           13907.5
                                        No. Observations:                 5030
Date:                Sun, Nov 19 2023   Df Residuals:                     5029
Time:                        19:21:31   Df Model:                            1
                                 Mean Model
============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      95.0% Conf. Int.
----------------------------------------------------------------------------
mu             0.0564  1.149e-02      4.906  9.302e-07 [3.384e-02,7.887e-02]
                              Volatility Model
============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      95.0% Conf. Int.
----------------------------------------------------------------------------
omega          0.0175  4.683e-03      3.738  1.854e-04 [8.328e-03,2.669e-02]
alpha[1]       0.1022  1.301e-02      7.852  4.105e-15   [7.665e-02,  0.128]
beta[1]        0.8852  1.380e-02     64.125      0.000     [  0.858,  0.912]
============================================================================

Covariance estimator: robust
```

Figura: Resumen del modelo ajustado.

Contenido

Otros modelos y extensiones

Existen múltiples extensiones y variantes de los modelos presentados, entre las mostradas en la bibliografía:

- Basados en asimetría:
  1. *Exponential GARCH Model* (EGARCH).
  2. *Threshold GARCH Model* (TGARCH).
  3. *Asymmetric Power GARCH Model* (APARCH).
  4. *A GARCH Model with Contemporaneous Conditional Asymmetry*.
- Modelos multivariados.
- Existen otros:
  1. *Integrated GARCH Model* (IGARCH)
  2. *Nonlinear GARCH* (NGARCH)

Conclusiones

- Existen series de tiempo que no verifican los supuestos de modelos ya existentes (ej: ϵ_t de varianza constante).
- Utilizar modelos GARCH y ARCH para series temporales financieras permite captar los cambios de la volatilidad y otros fenómenos de interés.
- Se requiere conocer bien el problema a estudiar para identificar que tipo de modelo usar y que especificaciones debe tener.

Contenido

Bibliografía recomendada

La presentación desarrollada se basó fuertemente en el siguiente libro:

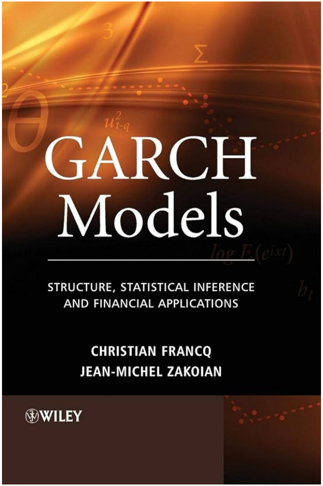


Figura: Libro: GARCH MODELS.

Referencias

[1] C. Francq y J.M. Zakoian. *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Wiley, 2011. ISBN: 9781119957393. URL: https://books.google.cl/books?id=hwR1aWSg9PUC.

[2] Skipper Seabold y Josef Perktold. «statsmodels: Econometric and statistical modeling with python». En: *9th Python in Science Conference*. 2010.

[3] Kevin Sheppard et al. *bashtage/arch: Release 6.2.0*. Ver. v6.2.0. Sep. de 2023. DOI: 10.5281/zenodo.8380532. URL: https://doi.org/10.5281/zenodo.8380532.

¡Muchas gracias por la atención!