

UNIVERSIDAD TÉCNICA  
FEDERICO SANTA MARÍA

Departamento de Matemática  
MAT468  
Segundo Semestre 2023

# Experimentos de simulación sobre modelos GARCH de series temporales

Nombre: Diego Astaburuaga, David Rivas

Rol: 202010018-7, 202010014-4

Valparaíso, Noviembre de 2023

## Resumen

Este informe se enmarca en el modelado de series temporales financieras, donde la suposición de volatilidad constante a menudo es inexacta. Sobre esto introduce los procesos GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) como herramientas fundamentales para capturar la variabilidad condicional en estos datos.

El trabajo detalla los modelos GARCH y resalta resultados clave en la sección 2. El objetivo principal es comprender más profundamente estos modelos mediante experimentos de simulación y validar algunos de sus resultados con técnicas experimentales.

Se proponen varios experimentos independientes en Python, principalmente utilizando la librería ARCH [2]. Los detalles y resultados de estos experimentos se presentan en la sección 3. Incluyen simulaciones de trayectorias de distintos modelos GARCH, verificación de un resultado sobre la correlación teórica en el modelo GARCH(1,1) y evaluación de la normalidad asintótica de los estimadores de los parámetros del proceso.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Motivación . . . . .	3
<b>2. Definiciones y resultados previos</b>	<b>3</b>
2.1. Procesos estacionarios . . . . .	3
2.2. Modelos ARMA y ARIMA . . . . .	4
2.3. Procesos GARCH . . . . .	4
<b>3. Experimentos de Simulación</b>	<b>7</b>
3.1. Esquema de simulación . . . . .	7
3.2. Proceso GARCH(1,1) . . . . .	7
3.2.1. Trayectorias de un proceso GARCH(1,1) . . . . .	8
3.2.2. Convergencia de correlación muestral de un proceso GARCH(1,1) . . . . .	8
3.3. Comportamiento cualitativo de trayectorias de modelos GARCH . . . . .	8
3.3.1. Ejemplo no estacionario . . . . .	8
3.3.2. Simulaciones para distintos ordenes . . . . .	9
3.4. Distribución de estimadores . . . . .	9
<b>4. Conclusiones.</b>	<b>10</b>
<b>Referencias</b>	<b>10</b>

## 1. Introducción

Las series temporales representan conjuntos de datos observados secuencialmente a lo largo del tiempo. En el ámbito financiero, comprender y modelar la volatilidad de estos datos es crucial para la toma de decisiones informada. Los modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) han surgido como herramientas fundamentales para abordar la variabilidad condicional en series temporales financieras.

Desarrollados por Robert Engle en 1982 (modelos ARCH) y posteriormente generalizados por Tim Bollerslev, los modelos GARCH proporcionan un marco robusto para el modelado de la volatilidad en procesos de series temporales. Esto permite captar patrones más complejos en diversas series de tiempo, donde el supuesto de volatilidad constante (homocedasticidad) no se verifica.

Al igual que los convencionales modelos ARIMA, los modelos GARCH poseen una teoría desarrollada sobre la estimación de parámetros, resultados asintóticos de distribución y propiedades cualitativas sobre las trayectorias. Estas características los convierten en candidatos adecuados para corroborar diversos resultados y técnicas a través de experimentos de simulación.

## 1.1. Motivación

Como se mencionó anteriormente, los modelos GARCH proporcionan un marco de trabajo para abordar las series temporales con volatilidad no constante, es decir, heterocedásticas. Esto permite captar patrones más complejos, como los llamados "clusters de volatilidad", que se refieren a la existencia de períodos con alta volatilidad y otros con menor volatilidad. Un ejemplo claro de esto se observa en la serie temporal de los retornos porcentuales diarios del índice S&P 500, presentada en la Figura 1, obtenida de la biblioteca ARCH de Python [2]. En dicha figura, se aprecia que aproximadamente durante el periodo entre 2009 y 2010 hubo una fuerte volatilidad, mientras que en los periodos entre 2004 y 2006, y entre 2013 y 2015, la volatilidad fue claramente más baja.

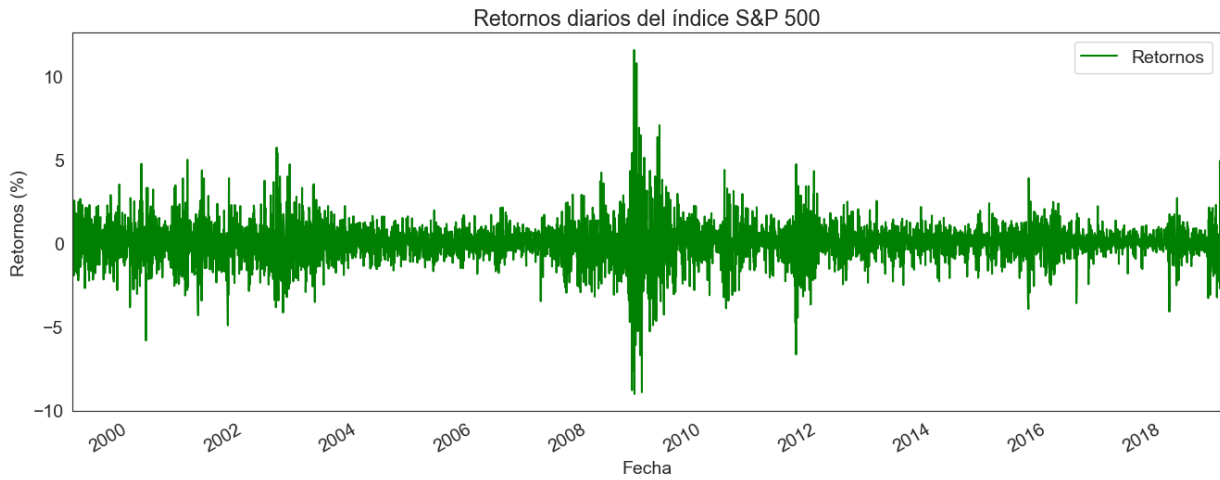


Figura 1: Retornos porcentuales diarios del índice S&P 500.

## 2. Definiciones y resultados previos

A continuación se presentan una serie de definiciones y resultados sin demostrar que serán utilizados y necesarios para la comprensión del presente documento. La mayor parte de los resultados y definiciones son extraídas directamente desde [1].

### 2.1. Procesos estacionarios

**Definición 2.1** (Estacionariedad estricta). *El proceso  $(X_t)$  se dice que es estrictamente estacionario si los vectores  $(X_1, \dots, X_k)^T$  y  $(X_{1+h}, \dots, X_{k+h})^T$  tienen la misma distribución conjunta, para todo  $k \in \mathbb{N}$  y  $h \in \mathbb{Z}$ .*

**Definición 2.2** (Estacionariedad de segundo orden). *El proceso  $(X_t)$  se dice que es de segundo orden estacionario si:*

1.  $E(X_t^2) < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{Z};$

2.  $E[X_t] = m, \quad t \in \mathbb{Z};$
3.  $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(h), \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}.$

la función  $\gamma_X(\cdot)$  ( $\rho_X(\cdot) := \gamma_X(\cdot)/\gamma_X(0)$ ) se denota la función de autocovarianza (función de autocorrelación) de  $(X_t)$ .

**Definición 2.3** (Ruido blanco débil). *El proceso  $(\epsilon_t)$  se denota como ruido blanco débil si existe alguna constante  $\sigma^2$  tal que:*

1.  $E(\epsilon_t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z};$
2.  $E(\epsilon_t^2) = \sigma^2, \quad \forall t \in \mathbb{Z};$
3.  $\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_t) = 0, \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0.$

**Definición 2.4** (Ruido blanco fuerte). *Nótese que no existe algún supuesto de independencia en la definición de ruido blanco débil. Las variables en diferentes tiempos son únicamente no correlacionadas y esta distinción es particularmente crucial para series de tiempo financieras (donde usualmente se utilizan los procesos GARCH). Es a veces necesario reemplazar la tercera hipótesis por una más fuerte: las variables  $\epsilon_t$  y  $\epsilon_{t+h}$  son independientes e idénticamente distribuidas. En tal caso el proceso  $(\epsilon_t)$  se dice que es un ruido blanco fuerte.*

## 2.2. Modelos ARMA y ARIMA

**Definición 2.5** (Procesos ARMA( $p, q$ )). *Un proceso estacionario de segundo orden  $(X_t)$  se denomina ARMA( $p, q$ ), donde  $p$  y  $q$  son enteros, si existen coeficientes reales  $c, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$  tales que, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ,*

$$X_t + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} = c + \epsilon_t + \sum_{j=1}^q b_j \epsilon_{t-j},$$

donde  $(\epsilon_t)$  es el proceso de innovación lineal de  $(X_t)$ .

**Definición 2.6** (Procesos ARIMA( $p, d, q$ )). *Sea  $d$  un entero positivo. El proceso  $(X_t)$  se denomina proceso ARIMA( $p, d, q$ ) si, para  $k = 0, \dots, d-1$ , los procesos  $(\Delta^k X_t)$  no son estacionarios de segundo orden y  $(\Delta^d X_t)$  es un proceso ARMA( $p, q$ ).*

## 2.3. Procesos GARCH

**Definición 2.7** (Procesos GARCH( $p, q$ )). *Un proceso  $(\epsilon_t)$  se conoce como GARCH( $p, q$ ) si sus dos primeros momentos condicionales existen y satisfacen:*

1.  $E(\epsilon_t | \epsilon_u, u < t) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}.$
2. *Existen constantes  $\omega, \alpha_i, i = 1, \dots, p$  y  $\beta_j, j = 1, \dots, q$  tales que*

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(\epsilon_t | \epsilon_u, u < t) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

si  $\beta_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, q$  entonces el proceso se conoce como proceso ARCH( $p$ ).

**Resultado 2.8** (Representación proceso GARCH( $p, q$ )). Por definición, el término de innovación del proceso  $\epsilon_t^2$  es la variable  $\nu_t = \epsilon_t - \sigma_t^2$ . Substituyendo en la ecuación anterior las variables  $\sigma_{t-j}^2$  por  $\epsilon_{t-j}^2 - \nu_{t-j}$ , tenemos la representación

$$\epsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) \epsilon_{t-i}^2 + \nu_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \nu_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

donde  $r = \max(p, q)$  con la convención de que  $\alpha_i = 0$  ( $\beta_j = 0$ ) si  $i > p$  ( $j > q$ ). Esta ecuación tiene la estructura lineal de un modelo ARMA, permitiendo el computo de predictores lineales. En particular, bajo condiciones adicionales (implicando la estacionariedad de segundo orden de  $\epsilon_t^2$ ) se puede establecer que si  $(\epsilon_t)$  es GARCH( $p, q$ ), entonces  $(\epsilon_t^2)$  es un proceso ARMA( $r, q$ ). En específico, el cuadrado de un proceso ARCH( $p$ ) admite, si este es estacionario, una representación AR( $p$ ).

Mencionar la importancia de este resultado y donde se ocupa

**Definición 2.9** (Proceso GARCH fuerte). Sea  $(\eta_t)$  una secuencia de variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $\eta$ . El proceso  $(\epsilon_t)$  se le denota como proceso GARCH( $p, q$ ) fuerte (con respecto a la secuencia  $(\eta_t)$ ) si

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases} \quad (3)$$

donde los  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  son constantes no negativas y  $\omega$  es una constante estrictamente positiva.

Substituyendo  $\epsilon_{t-i}$  por  $\sigma_{t-i} \eta_{t-i}$  en (3), tenemos que

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (4)$$

el cual puede ser escrito como

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r a_i(\eta_{t-i}) \sigma_{t-i}^2 \quad (5)$$

donde  $a_i(z) = \alpha_i z^2 + \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Esta representación muestra que el proceso de volatilidad de un GARCH fuerte es la solución de una ecuación autoregresiva con coeficientes aleatorios.

Mencionar al momento de simular en el experimento 1 que nos encontramos simulando este proceso

**Teorema 2.10** (Estacionariedad de segundo orden). Si existe un proceso GARCH( $p, q$ ), en el sentido

de la definición (1), el cual es estacionario de segundo orden y causal<sup>1</sup>, y si  $\omega > 0$ , entonces

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1. \quad (6)$$

Por el contrario, si se tiene (6), entonces la única solución estrictamente estacionaria del modelo (3) es un ruido blanco débil (y por ende estacionario de segundo orden). Además, no existe otra solución estacionaria de segundo orden.

Comentar de alguna forma que este resultado es valioso para la simulación dado que permite generar trayectorias que no exploten.

**Resultado 2.11** (Correlación modelo GARCH(1, 1)). *Para un modelo GARCH(1, 1) tal que  $E[\epsilon_t^4] < \infty$ , la autocorrelación de los residuos al cuadrado toma la forma*

$$\rho_{\epsilon^2}(h) := \text{Corr}(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-h}^2) = \rho_{\epsilon^2}(1)(\alpha_1 + \beta_1)^{h-1}, \quad h \geq 1 \quad (7)$$

donde

$$\rho_{\epsilon^2}(1) = \frac{\alpha_1 \{1 - \beta_1(\alpha_1 + \beta_1)\}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2} \quad (8)$$

**Definición 2.12** (Sucesión Ergódica).

**Teorema 2.13** (Exponente de Lyapunov). *Sea  $\{A_t\}$  una sucesión de matrices ergódicas y estrictamente estacionaria de matrices aleatorias, tal que  $E(\log^+(||A||_t))$  es finito, entonces*

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\log(||A_t A_{t-1} \dots A_1||)) = \inf_{t \in \mathbb{N}} \frac{1}{t} E(\log(||A_t A_{t-1} \dots A_1||))$$

donde tenemos que

$$A_t = \begin{bmatrix} \alpha_1 \eta_t^2 & 0 & \dots & 0 & \alpha_q \eta_t^2 & \beta_1 \eta_t^2 & \dots & 0 & \beta_p \eta_t^2 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & \alpha_q & \beta_1 & \dots & 0 & \beta_p \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup>Causal en un sentido que  $\epsilon_t$  es una función medible de  $(\eta_{t-s})_{s \geq 0}$ , donde  $(\eta_t)$  son independientes e idénticamente distribuidos desde  $N(0, 1)$  y  $\epsilon_t = \sigma_t \eta_t$  y  $\sigma_t^2$  dado por (1)

**Teorema 2.14** (Estacionariedad estricta de un modelo GARCH(p,q)). *Una necesaria y suficiente condición para la existencia de una solución estacionaria de un modelo GARCH(p,q) es que*

$$\gamma < 0$$

**Definición 2.15** (Estimador Cuasi máximo verosímil). *Es el estimador que se obtiene cuando aun sin asumir alguna distribución de  $\eta_n$*

### 3. Experimentos de Simulación

En esta sección, se detallan varios experimentos de simulación vinculados a los procesos GARCH. En primer lugar, se presenta el esquema de simulación de un proceso GARCH(p,q). Luego, se aborda la comprensión del proceso GARCH(1,1), seguido de simulaciones para diferentes órdenes  $p$  y  $q$ . Finalmente, se examina la distribución asintótica de los estimadores.

Las descripciones y especificaciones de cada experimento se proporcionan en esta sección. Sin embargo, los códigos y las bibliotecas utilizadas no se incluyen aquí. Para acceder a esta información, se invita al lector a visitar el repositorio público del trabajo en GitHub<sup>2</sup>. Cabe destacar que los códigos fueron desarrollados en Python, utilizando principalmente la biblioteca `arch` [2].

Al momento de explicar hay que mencionar que distribución estamos usando como base, esto es importante que quede claro, en general, es importante dejar clara las especificaciones de cada experimento.

#### 3.1. Esquema de simulación

Resulta beneficioso describir cómo funciona el código que simula los procesos GARCH desde una perspectiva de simulación.

En favor de las simulaciones, a partir de este momento, se asumirá un proceso GARCH fuerte donde  $\eta = N(0, 1)$ . Además, a menos que se especifique lo contrario, se empleará la misma semilla generadora para los valores  $(\eta_t)$ . Esto posibilitará la generación de trayectorias comparables para comprender el efecto de los diversos parámetros del modelo GARCH.

#### 3.2. Proceso GARCH(1,1)

Siguiendo la forma entregada en la definición 2.9, se puede escribir un modelo GARCH(1,1) mediante la siguiente ecuación

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{cases} \quad (9)$$

---

<sup>2</sup>En caso de no poder utilizar la referencia anterior, la url es la siguiente: <https://github.com/Darkrayyss/Proyecto-modelos-GARCH>

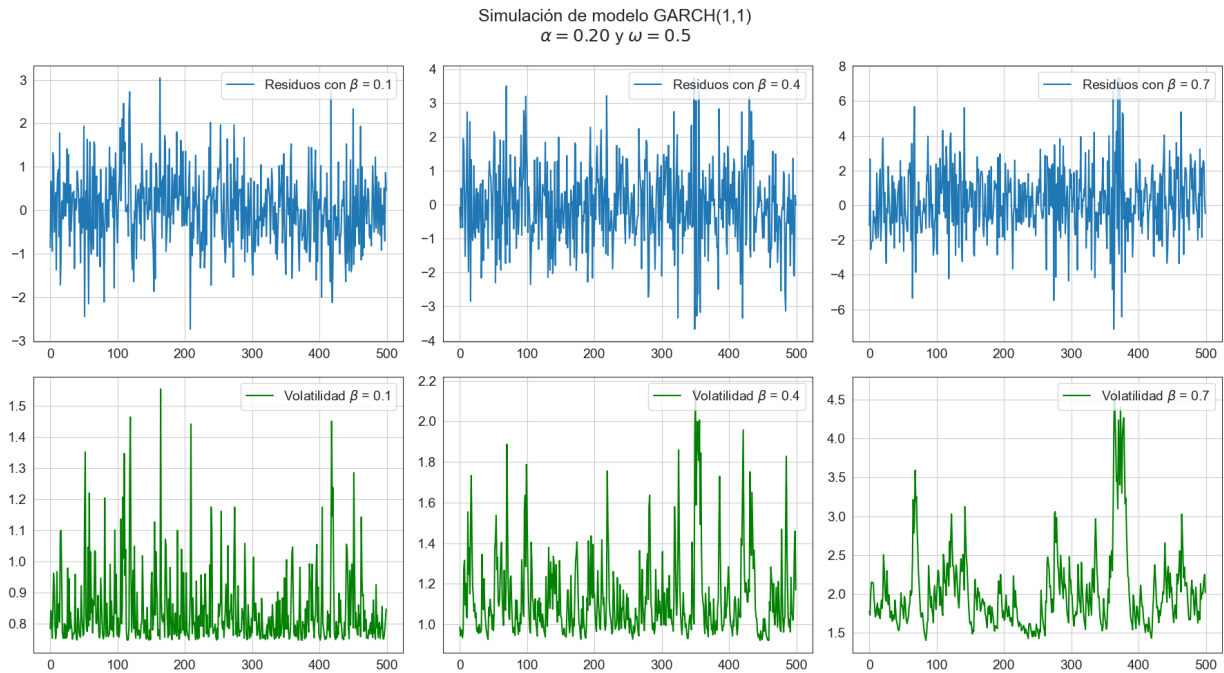


Figura 2: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con  $\omega = 0.5$  y  $\alpha = 0.2$ , para distintos valores de  $\beta \in \{0.1, 0.4, 0.7\}$  (en orden de izquierda a derecha), utilizando  $\eta \equiv N(0, 1)$ . Se muestra la serie de los residuos (arriba) y la serie de la volatilidad (abajo).

Comentar un poco acerca del porqué este modelo es importante, esto es, su simplicidad y capacidad de captar patrones complejos en la volatilidad.

### 3.2.1. Trayectorías de un proceso GARCH(1,1)

Mostrar un proceso GARCH, como lucen los cluster de volatilidad, la acf, la pacf, etc.

Como cambia el proceso para distintas magnitudes de parámetros

### 3.2.2. Convergencia de correlación muestral de un proceso GARCH(1,1)

Incluir aquí el análisis sobre el resultado

## 3.3. Comportamiento cualitativo de trayectorias de modelos GARCH

Hacer simulaciones variadas de trayectorias y describirlas en función de lo teórico y lo visto.

### 3.3.1. Ejemplo no estacionario

Dada la condición establecida por el Teorema 2.10, es posible simular trayectorias de procesos GARCH que no cumplen con la condición de estacionariedad de segundo orden. Esto se evidencia al observar



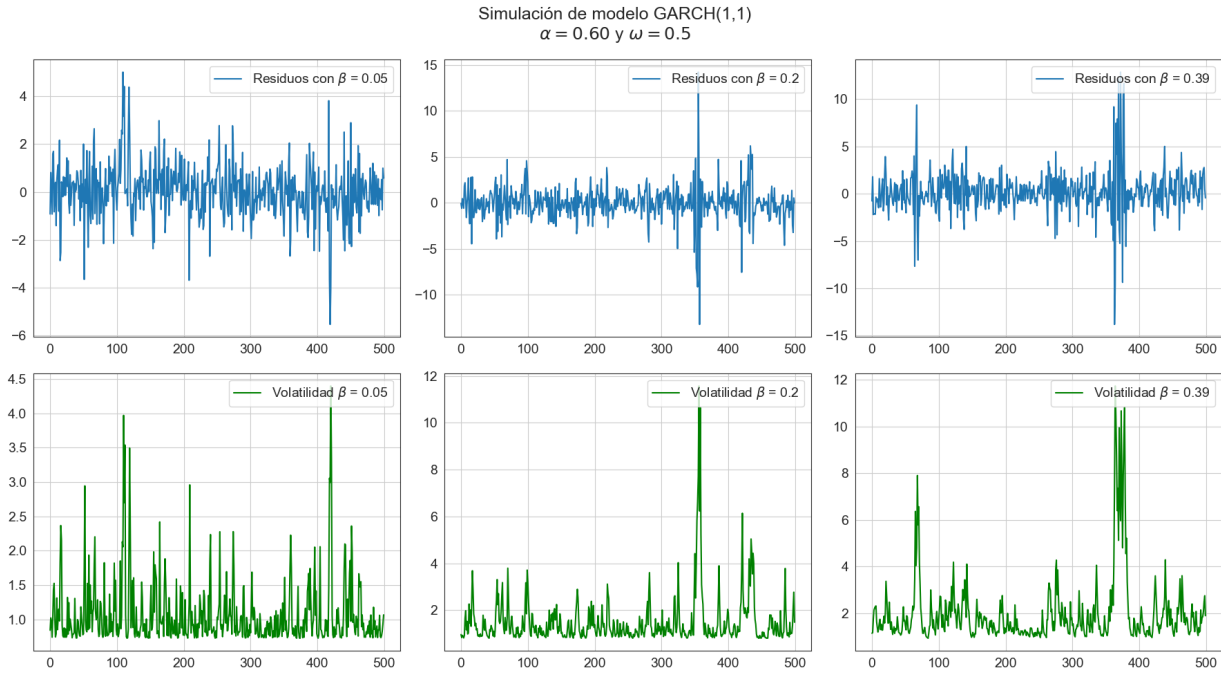


Figura 3: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con  $\omega = 0.5$  y  $\alpha = 0.6$ , para distintos valores de  $\beta \in \{0.05, 0.2, 0.39\}$  (en orden de izquierda a derecha), utilizando  $\eta \equiv N(0, 1)$ . Se muestra la serie de los residuos (arriba) y la serie de la volatilidad (abajo).

que la serie de los residuos simulados no posee una media constante y toma valores cada vez más elevados. Un ejemplo ilustrativo se presenta en Figura 6, la cual muestra una realización de un modelo GARCH(1,1) en el que los coeficientes suman más de la unidad. En dicho gráfico, se aprecia cómo tanto la serie de volatilidad como la de residuos experimentan un crecimiento significativo.

Recordar mencionar que cuando hablamos de estacionario, no es referimos a la estacionariedad de segundo orden.

### 3.3.2. Simulaciones para distintos ordenes

Realizar grilla de 3x3 para distintas combinaciones de ordenes con tal de generar experimentos visualmente informativos.

## 3.4. Distribución de estimadores

Realización exhaustiva de simulación para corroborar resultados técnicos y/o calculas cosas de interés.

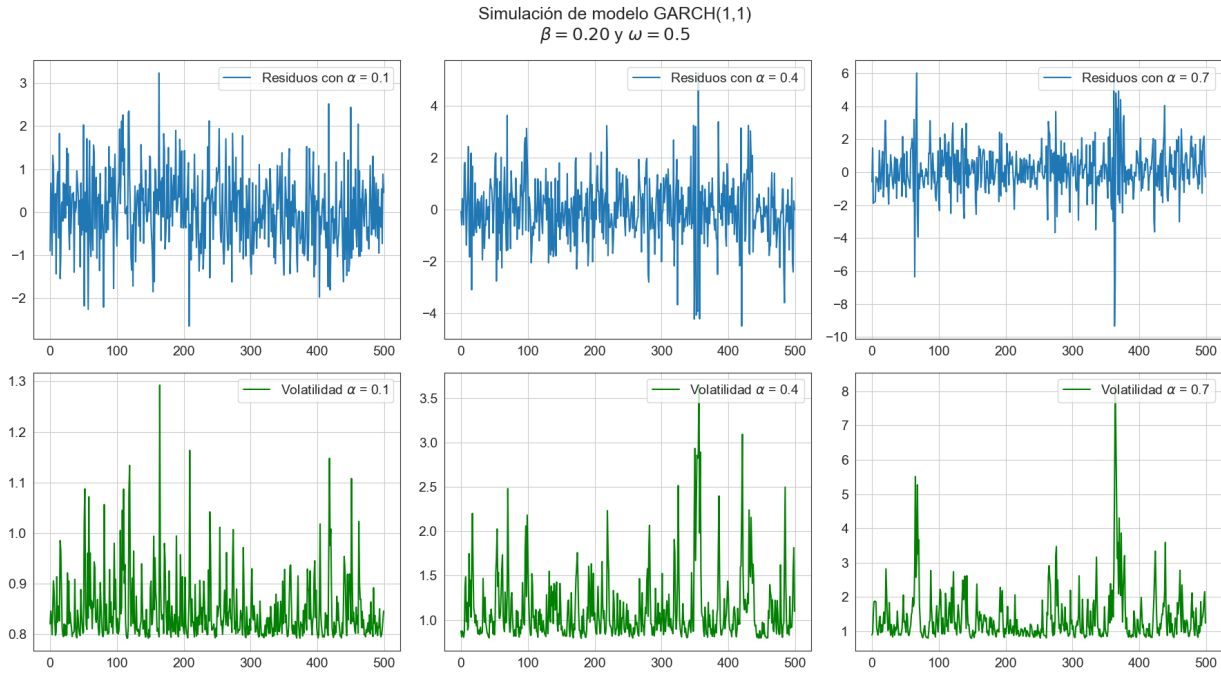


Figura 4: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con  $\omega = 0.5$  y  $\beta = 0.2$ , para distintos valores de  $\alpha \in \{0.1, 0.4, 0.7\}$  (en orden de izquierda a derecha), utilizando  $\eta \equiv N(0, 1)$ . Se muestra la serie de los residuos (arriba) y la serie de la volatilidad (abajo).

## 4. Conclusiones.

Recopilar lo más importante que pueda ser rescatado de los experimentos anteriores, tratando de cerrar discusiones que hayan sido abiertas en la discusión y entregar al lector, valga la redundancia, conclusión de lo expuesto en el informe.

## Referencias

- [1] C. Francq y J.M. Zakoian. *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Wiley, 2011. ISBN: 9781119957393. URL: <https://books.google.cl/books?id=hwR1aWSg9PUC>.
- [2] Kevin Sheppard et al. *bashtage/arch: Release 6.2.0*. Ver. v6.2.0. Sep. de 2023. DOI: 10.5281/zenodo.8380532. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.8380532>.

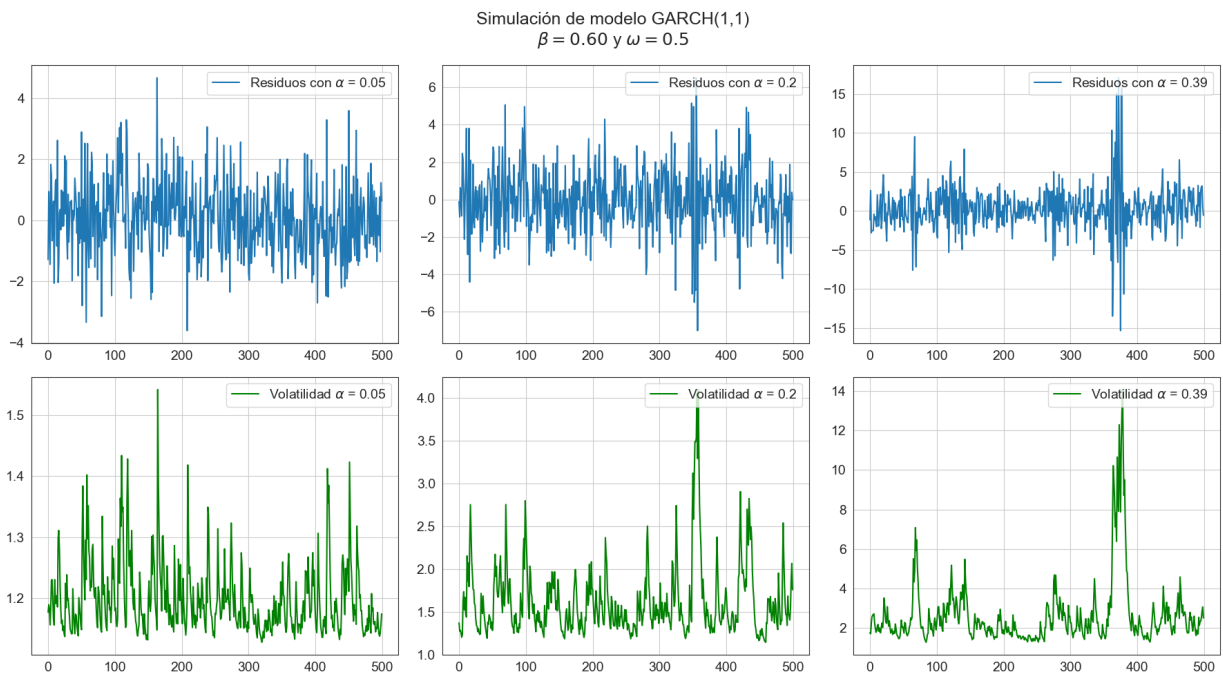


Figura 5: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con  $\omega = 0.5$  y  $\beta = 0.6$ , para distintos valores de  $\alpha \in \{0.05, 0.2, 0.39\}$ , utilizando  $\eta \equiv N(0, 1)$ . Se muestra la serie de los residuos (arriba) y la serie de la volatilidad (abajo).

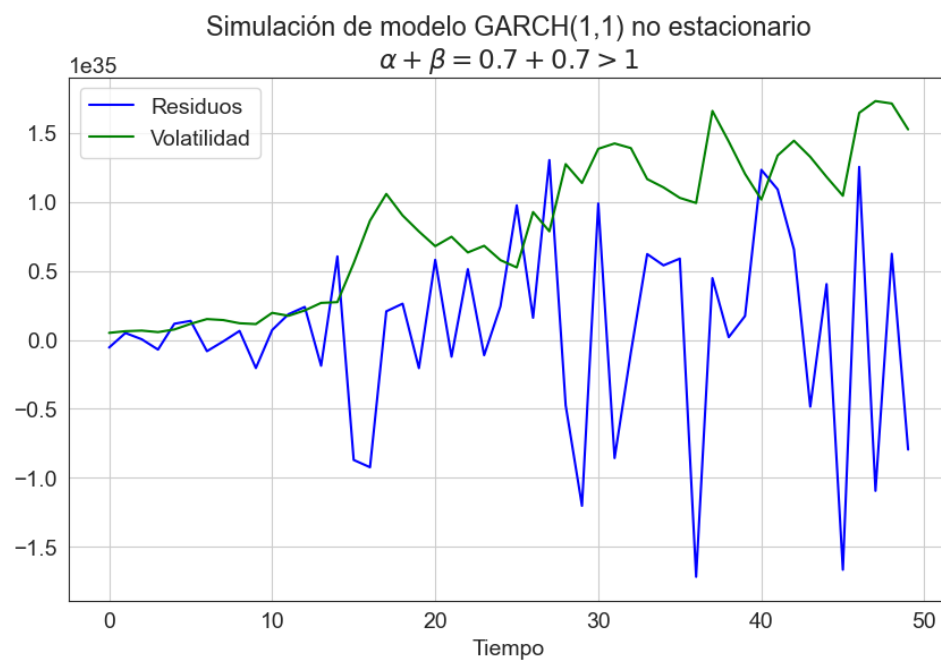


Figura 6: Simulación de una trayectoria de 50 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con  $\alpha = \beta = 0.7$  y  $\omega = 0.2$ , utilizando  $\eta \equiv N(0, 1)$ .