

UNIVERSIDAD TÉCNICA  
FEDERICO SANTA MARÍA

Departamento de Matemática  
MAT468  
Segundo Semestre 2023

# Experimentos de simulación sobre modelos GARCH de series temporales

Nombre: Diego Astaburuaga, David Rivas

Rol: 202010018-7, 202010014-4

Valparaíso, Noviembre de 2023

## Resumen

Este informe se enmarca en el modelado de series temporales financieras, donde la suposición de volatilidad constante a menudo es inexacta. Sobre esto introduce los procesos GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) como herramientas fundamentales para capturar la variabilidad condicional en estos datos.

El trabajo detalla los modelos GARCH y resalta resultados clave en la sección 2. El objetivo principal es comprender más profundamente estos modelos mediante experimentos de simulación y validar algunos de sus resultados con técnicas experimentales.

Se proponen varios experimentos independientes en Python, principalmente utilizando la librería ARCH [2]. Los detalles y resultados de estos experimentos se presentan en la sección 3. Incluyen simulaciones de trayectorias de distintos modelos GARCH, verificación de un resultado sobre la correlación teórica en el modelo GARCH(1,1) y evaluación de la normalidad asintótica de los estimadores de los parámetros del proceso.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Motivación . . . . .	3
<b>2. Definiciones y resultados previos</b>	<b>3</b>
2.1. Procesos estacionarios . . . . .	3
2.2. Modelos ARMA y ARIMA . . . . .	4
2.3. Procesos GARCH . . . . .	4
2.4. Estimador Cuasi máximo verosímil . . . . .	6
<b>3. Experimentos de Simulación</b>	<b>7</b>
3.1. Esquema de simulación . . . . .	7
3.2. Proceso GARCH(1,1) . . . . .	7
3.2.1. Trayectorias de un proceso GARCH(1,1) . . . . .	8
3.2.2. Convergencia de correlación muestral de un proceso GARCH(1,1) . . . . .	8
3.3. Comportamiento cualitativo de trayectorias de modelos GARCH . . . . .	9
3.3.1. Ejemplo no estacionario . . . . .	9
3.3.2. Simulaciones para distintos órdenes . . . . .	10
3.4. Distribución de estimadores . . . . .	11
<b>4. Conclusiones.</b>	<b>11</b>
<b>Referencias</b>	<b>12</b>

## 1. Introducción

Las series temporales representan conjuntos de datos observados secuencialmente a lo largo del tiempo. En el ámbito financiero, comprender y modelar la volatilidad de estos datos es crucial para la toma de decisiones informada. Los modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) han surgido como herramientas fundamentales para abordar la variabilidad condicional en series temporales financieras.

Desarrollados por Robert Engle en 1982 (modelos ARCH) y posteriormente generalizados por Tim Bollerslev, los modelos GARCH proporcionan un marco robusto para el modelado de la volatilidad en procesos de series temporales. Esto permite captar patrones más complejos en diversas series de tiempo, donde el supuesto de volatilidad constante (homocedasticidad) no se verifica.

Al igual que los convencionales modelos ARIMA, los modelos GARCH poseen una teoría desarrollada sobre la estimación de parámetros, resultados asintóticos de distribución y propiedades cualitativas sobre las trayectorias. Estas características los convierten en candidatos adecuados para corroborar diversos resultados y técnicas a través de experimentos de simulación.

## 1.1. Motivación

Como se mencionó anteriormente, los modelos GARCH proporcionan un marco de trabajo para abordar las series temporales con volatilidad no constante, es decir, heterocedásticas. Esto permite captar patrones más complejos, como los llamados "clusters de volatilidad", que se refieren a la existencia de períodos con alta volatilidad y otros con menor volatilidad. Un ejemplo claro de esto se observa en la serie temporal de los retornos porcentuales diarios del índice S&P 500, presentada en la Figura 1, obtenida de la biblioteca ARCH de Python [2]. En dicha figura, se aprecia que aproximadamente durante el periodo entre 2009 y 2010 hubo una fuerte volatilidad, mientras que en los periodos entre 2004 y 2006, y entre 2013 y 2015, la volatilidad fue claramente más baja.

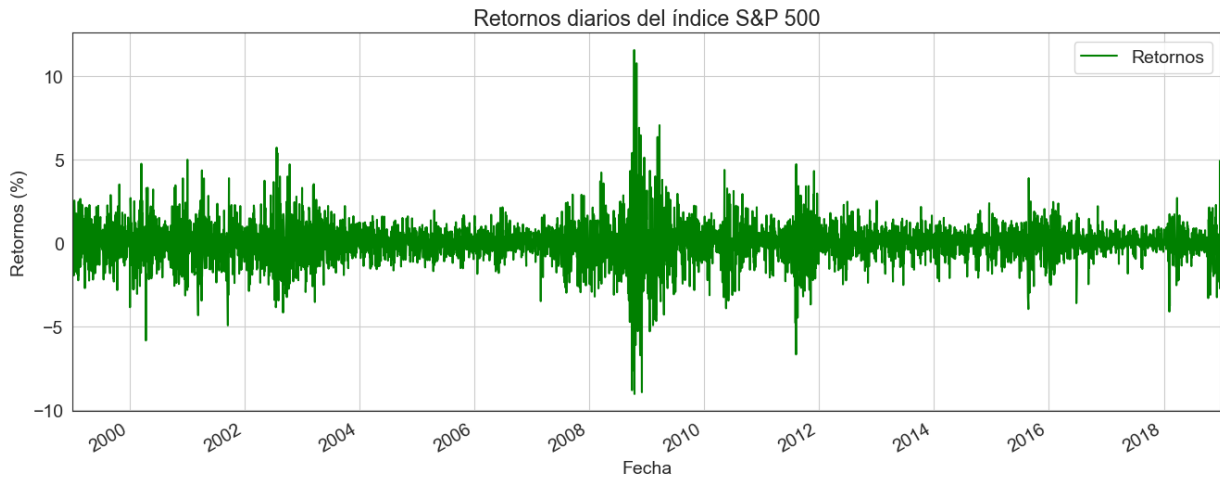


Figura 1: Retornos porcentuales diarios del índice S&P 500.

## 2. Definiciones y resultados previos

A continuación se presentan una serie de definiciones y resultados sin demostrar que serán utilizados y necesarios para la comprensión del presente documento. La mayor parte de los resultados y definiciones son extraídas directamente desde [1].

### 2.1. Procesos estacionarios

**Definición 2.1** (Estacionariedad estricta). *El proceso  $(X_t)$  se dice que es estrictamente estacionario si los vectores  $(X_1, \dots, X_k)^T$  y  $(X_{1+h}, \dots, X_{k+h})^T$  tienen la misma distribución conjunta, para todo  $k \in \mathbb{N}$  y  $h \in \mathbb{Z}$ .*

**Definición 2.2** (Estacionariedad de segundo orden). *El proceso  $(X_t)$  se dice que es de segundo orden estacionario si:*

1.  $E(X_t^2) < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{Z};$

2.  $E[X_t] = m, \quad t \in \mathbb{Z};$
3.  $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(h), \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}.$

la función  $\gamma_X(\cdot)$  ( $\rho_X(\cdot) := \gamma_X(\cdot)/\gamma_X(0)$ ) se denota la función de autocovarianza (función de autocorrelación) de  $(X_t)$ .

**Definición 2.3** (Ruido blanco débil). *El proceso  $(\epsilon_t)$  se denota como ruido blanco débil si existe alguna constante  $\sigma^2$  tal que:*

1.  $E(\epsilon_t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z};$
2.  $E(\epsilon_t^2) = \sigma^2, \quad \forall t \in \mathbb{Z};$
3.  $\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_t) = 0, \quad \forall t, h \in \mathbb{Z}, h \neq 0.$

**Definición 2.4** (Ruido blanco fuerte). *Nótese que no existe algún supuesto de independencia en la definición de ruido blanco débil. Las variables en diferentes tiempos son únicamente no correlacionadas y esta distinción es particularmente crucial para series de tiempo financieras (donde usualmente se utilizan los procesos GARCH). Es a veces necesario reemplazar la tercera hipótesis por una más fuerte: las variables  $\epsilon_t$  y  $\epsilon_{t+h}$  son independientes e idénticamente distribuidas. En tal caso el proceso  $(\epsilon_t)$  se dice que es un ruido blanco fuerte.*

## 2.2. Modelos ARMA y ARIMA

**Definición 2.5** (Procesos ARMA( $p, q$ )). *Un proceso estacionario de segundo orden  $(X_t)$  se denomina ARMA( $p, q$ ), donde  $p$  y  $q$  son enteros, si existen coeficientes reales  $c, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$  tales que, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ,*

$$X_t + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} = c + \epsilon_t + \sum_{j=1}^q b_j \epsilon_{t-j},$$

donde  $(\epsilon_t)$  es el proceso de innovación lineal de  $(X_t)$ .

**Definición 2.6** (Procesos ARIMA( $p, d, q$ )). *Sea  $d$  un entero positivo. El proceso  $(X_t)$  se denomina proceso ARIMA( $p, d, q$ ) si, para  $k = 0, \dots, d-1$ , los procesos  $(\Delta^k X_t)$  no son estacionarios de segundo orden y  $(\Delta^d X_t)$  es un proceso ARMA( $p, q$ ).*

## 2.3. Procesos GARCH

**Definición 2.7** (Procesos GARCH( $p, q$ )). *Un proceso  $(\epsilon_t)$  se conoce como GARCH( $p, q$ ) si sus dos primeros momentos condicionales existen y satisfacen:*

1.  $E(\epsilon_t | \epsilon_u, u < t) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}.$
2. *Existen constantes  $\omega, \alpha_i, i = 1, \dots, p$  y  $\beta_j, 1, \dots, q$  tales que*

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(\epsilon_t | \epsilon_u, u < t) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

si  $\beta_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, q$  entonces el proceso se conoce como proceso ARCH( $p$ ).

**Resultado 2.8** (Representación proceso GARCH( $p, q$ )). *Por definición, el termino de innovación del proceso  $\epsilon_t^2$  es la variable  $\nu_t = \epsilon_t - \sigma_t^2$ . Substituyendo en la ecuación anterior las variables  $\sigma_{t-j}^2$  por  $\epsilon_{t-j}^2 - \nu_{t-j}$ , tenemos la representación*

$$\epsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) \epsilon_{t-i}^2 + \nu_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \nu_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

donde  $r = \max(p, q)$  con la convención de que  $\alpha_i = 0$  ( $\beta_j = 0$ ) si  $i > p$  ( $j > q$ ). Esta ecuación tiene la estructura lineal de un modelo ARMA, permitiendo el computo de predictores lineales. En particular, bajo condiciones adicionales (implicando la estacionariedad de segundo orden de  $\epsilon_t^2$ ) se puede establecer que si  $(\epsilon_t)$  es GARCH( $p, q$ ), entonces  $(\epsilon_t^2)$  es un proceso ARMA( $r, q$ ). En específico, el cuadrado de un proceso ARCH( $p$ ) admite, si este es estacionario, una representación AR( $p$ ).

Mencionar la importancia de este resultado y donde se ocupa

**Definición 2.9** (Proceso GARCH fuerte). *Sea  $(\eta_t)$  una secuencia de variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución  $\eta$ . El proceso  $(\epsilon_t)$  se le denota como proceso GARCH( $p, q$ ) fuerte (con respecto a la secuencia  $(\eta_t)$ ) si*

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases} \quad (3)$$

donde los  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  son constantes no negativas y  $\omega$  es una constante estrictamente positiva.

Substituyendo  $\epsilon_{t-i}$  por  $\sigma_{t-i} \eta_{t-i}$  en (3), tenemos que

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^2 \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (4)$$

el cual puede ser escrito como

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^r a_i(\eta_{t-i}) \sigma_{t-i}^2 \quad (5)$$

donde  $a_i(z) = \alpha_i z^2 + \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Esta representación muestra que el proceso de volatilidad de un GARCH fuerte es la solución de una ecuación autoregresiva con coeficientes aleatorios.

Mencionar al momento de simular en el experimento 1 que nos encontramos simulando este proceso

**Teorema 2.10** (Estacionariedad de segundo orden). *Si existe un proceso GARCH( $p, q$ ), en el sentido*

de la definición (1), el cual es estacionario de segundo orden y causal<sup>1</sup>, y si  $\omega > 0$ , entonces

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1. \quad (6)$$

Por el contrario, si se tiene (6), entonces la única solución estrictamente estacionaria del modelo (3) es un ruido blanco débil (y por ende estacionario de segundo orden). Además, no existe otra solución estacionaria de segundo orden.

**Resultado 2.11** (Correlación modelo GARCH(1,1)). *Para un modelo GARCH(1,1) tal que  $E[\epsilon_t^4] < \infty$ , la autocorrelación de los residuos al cuadrado toma la forma*

$$\rho_{\epsilon^2}(h) := \text{Corr}(\epsilon_t^2, \epsilon_{t-h}^2) = \rho_{\epsilon^2}(1)(\alpha_1 + \beta_1)^{h-1}, \quad h \geq 1 \quad (7)$$

donde

$$\rho_{\epsilon^2}(1) = \frac{\alpha_1 \{1 - \beta_1(\alpha_1 + \beta_1)\}}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 + \alpha_1^2} \quad (8)$$

## 2.4. Estimador Cuasi máximo verosímil

**Definición 2.12** (Estimador Cuasi máximo verosímil). *Dados  $p$  y  $q$  conocidos, denotemos*

$$\theta = (\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)^T \quad (9)$$

como el vector de parámetros del modelo. El estimador cuasi-máximo verosímil de  $\theta$  se obtiene mediante el uso de la función de cuasi-verosimilitud (gaussiana). Esta función, condicionada a ciertos valores iniciales, coincide con la verosimilitud del caso  $\eta_t \sim N(0,1)$ . Dados valores iniciales  $\epsilon_0, \dots, \epsilon_{1-p}, \tilde{\sigma}_0^2, \dots, \tilde{\sigma}_{1-q}^2$ , especificados posteriormente, la cuasi-verosimilitud gaussiana condicionada se expresa como

$$L_n(\theta, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}_t^2}} \exp\left(\frac{-\epsilon_t^2}{2\tilde{\sigma}_t^2}\right) \quad (10)$$

donde  $\tilde{\sigma}_t^2$  se define de forma recursiva para  $t \geq 1$  mediante

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \tilde{\sigma}_{t-j}^2 \quad (11)$$

Para un  $\theta$  dado y bajo la condición de estacionariedad de segundo orden, la llamada varianza no condicionada es una elección razonable para los valores iniciales desconocidos, es decir:

$$\epsilon_0^2 = \dots = \epsilon_{1-p}^2 = \sigma_0^2 = \dots = \sigma_{1-q}^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j} \quad (12)$$

<sup>1</sup>Causal en un sentido que  $\epsilon_t$  es una función medible de  $(\eta_{t-s})_{s \geq 0}$ , donde  $(\eta_t)$  son independientes e idénticamente distribuidos desde  $N(0,1)$  y  $\epsilon_t = \sigma_t \eta_t$  y  $\sigma_t^2$  dado por (1)

Finalmente, el estimador, denotado por  $\hat{\theta}_n$ , se obtiene como la solución del problema

$$\hat{\theta}_n = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} L_n(\theta) \quad (13)$$

**Resultado 2.13** (Normalidad asintótica del QMLE). *Suponiendo que el estimador cuasi-máximo verosímil de  $\theta$ ,  $\hat{\theta}_{QMLE}$ , es consistente y cumple las siguientes condiciones:*

1.  $\theta \in \operatorname{int}(\Theta)$
2.  $E(\eta_t^4) = \kappa_t < \infty$

*entonces, se tiene que  $\hat{\theta}_{QMLE} \xrightarrow{d} N(\theta, \frac{\kappa_t - 1}{nJ(\theta)})$ , donde  $J(\theta) = E_\theta(\frac{\partial^2 \ln(L(\theta))}{\partial \theta \partial \theta^T})$ .*

**Resultado 2.14** (Caso  $\eta_t \sim N(0, 1)$ ). *Si  $\eta \sim N(0, 1)$ , entonces el estimador  $\hat{\theta}_{QMLE}$  es consistente y asintóticamente normal. Además,  $J(\theta) = I(\theta)$ , donde  $I(\theta)$  es la matriz de información de Fisher.*

### 3. Experimentos de Simulación

En esta sección, se detallan varios experimentos de simulación vinculados a los procesos GARCH. En primer lugar, se presenta el esquema de simulación de un proceso GARCH(p,q). Luego, se aborda la comprensión del proceso GARCH(1,1), seguido de simulaciones para diferentes órdenes  $p$  y  $q$ . Finalmente, se examina la distribución asintótica de los estimadores.

Las descripciones y especificaciones de cada experimento se proporcionan en esta sección. Sin embargo, los códigos y las bibliotecas utilizadas no se incluyen aquí. Para acceder a esta información, se invita al lector a visitar el repositorio público del trabajo en GitHub<sup>2</sup>. Cabe destacar que los códigos fueron desarrollados en Python, utilizando principalmente la biblioteca `arch` [2].

#### 3.1. Esquema de simulación

Agregar comentarios sobre la simulación de los procesos, con énfasis en como lo hace la librería. Entre los comentarios importantes: simulación secuencial, proceso de *burn*, etc.

En favor de las simulaciones, a partir de este momento, se asumirá un proceso GARCH fuerte donde  $\eta = N(0, 1)$ . Además, a menos que se especifique lo contrario, se empleará la misma semilla generadora para los valores  $(\eta_t)$ . Esto posibilitará la generación de trayectorias comparables para comprender el efecto de los diversos parámetros del modelo GARCH.

#### 3.2. Proceso GARCH(1,1)

El proceso GARCH(1,1) resulta de gran interés en el estudio, al representar el modelo más sencillo capaz de captar los fenómenos descritos previamente en las series temporales con volatilidad no

<sup>2</sup>En caso de no poder utilizar la referencia anterior, la url es la siguiente: <https://github.com/Darkrayyss/Proyecto-modelos-GARCH>

constante. Su simplicidad y completitud facilitan el análisis de la influencia de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  en el modelo, permitiendo la experimentación de resultados de interés, como se describe en el resultado 2.11.

Siguiendo la estructura definida en 2.9, el modelo GARCH(1,1) se expresa mediante la ecuación

$$\begin{cases} \epsilon_t = \sigma_t \eta_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{cases} \quad (14)$$

donde se utilizarán  $\alpha$  y  $\beta$  tal que verifiquen la condición de estacionariedad de segundo orden y  $\eta_t \sim N(0, 1)$ .

### 3.2.1. Trayectorias de un proceso GARCH(1,1)

En relación con las especificaciones anteriores, se generaron un total de 12 trayectorias de modelos GARCH(1,1) para diversas configuraciones de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , manteniendo constante el valor de  $\omega$ . Este último desempeña únicamente el papel de proporcionar una volatilidad mínima al proceso y gestionar la variabilidad de manera general, siendo las configuraciones más específicas aquellas establecidas por  $\alpha$  y  $\beta$ .

A partir de las simulaciones en Figura 2 y Figura 3, donde se fija el valor de  $\alpha$  y se varía el valor de  $\beta$ , se observa que a medida que  $\beta$  aumenta, los incrementos y descensos en la volatilidad son más prolongados en el tiempo, evidenciando el fenómeno de clustering de volatilidad. Esto es especialmente claro entre los periodos de 350 y 400 aproximadamente. Además, como consecuencia del valor de  $\beta$ , la volatilidad también alcanza valores más elevados. En contraste, al observar los resultados para valores bajos de  $\beta$ , se nota que las influencias en el aumento de la volatilidad son breves, probablemente debido a la aleatoriedad de  $\eta_t$ .

Complementando con las simulaciones mostradas en Figura 4 y Figura 5, se puede apreciar que la influencia de  $\alpha$  está más vinculada a la magnitud del cambio en la volatilidad. Para valores más altos de  $\alpha$ , los incrementos en la volatilidad también son mayores. En particular, en Figura 5, se observa que para un valor alto de  $\beta$ , el aumento en  $\alpha$  conlleva cambios más pronunciados en la volatilidad, los cuales son persistentes en el tiempo debido al alto valor de  $\beta$ .

A la luz de lo anterior, utilizando la ecuación general del modelo GARCH y lo comentado anteriormente para este caso particular, se puede afirmar que el papel de los parámetros  $\alpha_i$  es proporcionar peso a los residuos o fluctuaciones anteriores sobre la volatilidad actual. A mayor valor del parámetro, mayor es el impacto de las fluctuaciones en la varianza. Por otro lado, los parámetros  $\beta_j$  confieren al modelo cierta estabilidad, permitiendo que este pueda captar los denominados clusters de volatilidad.

### 3.2.2. Convergencia de correlación muestral de un proceso GARCH(1,1)

Incluir aquí el análisis sobre el resultado



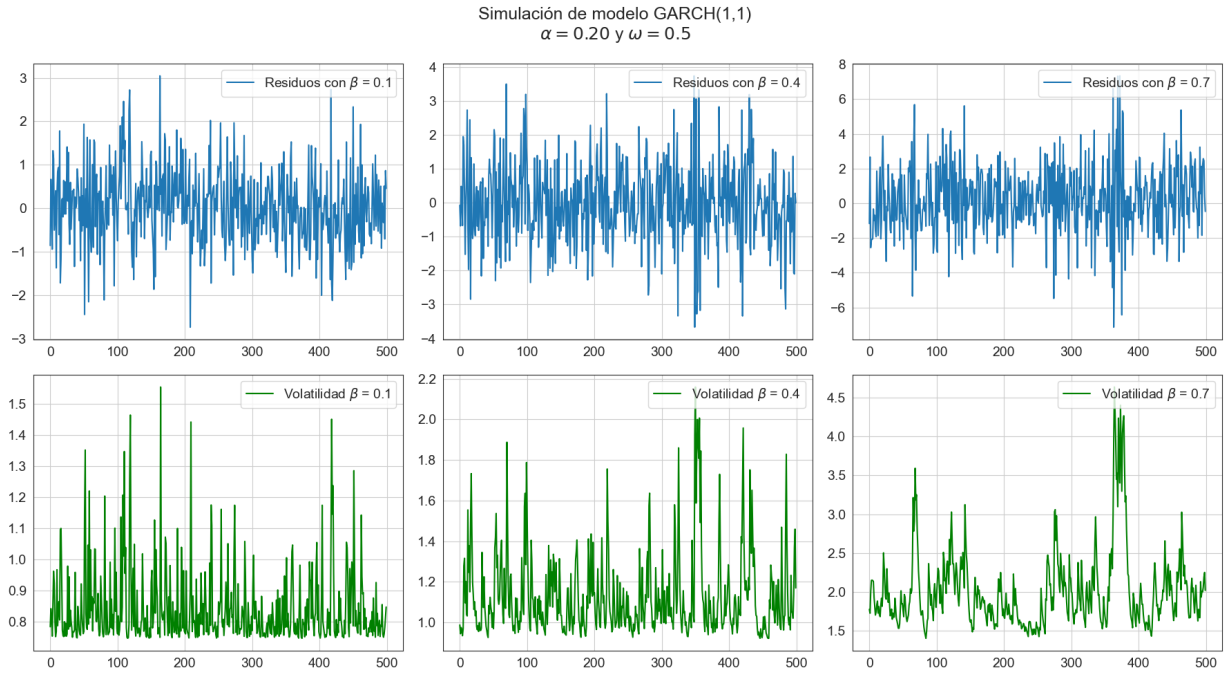


Figura 2: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con  $\omega = 0.5$  y  $\alpha = 0.2$ , para distintos valores de  $\beta \in \{0.1, 0.4, 0.7\}$  (en orden de izquierda a derecha), utilizando  $\eta \equiv N(0, 1)$ . Se muestra la serie de los residuos (arriba) y la serie de la volatilidad (abajo).

### 3.3. Comportamiento cualitativo de trayectorias de modelos GARCH

En esta sección, se realiza un análisis de las simulaciones de las trayectorias de modelos GARCH que podrían ser de particular interés. Es relevante señalar que el estudio sobre la influencia de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  en el modelo fue abordado en la Sección 3.2, y puede extenderse de manera análoga al incrementar el número de parámetros.

#### 3.3.1. Ejemplo no estacionario

Dada la condición establecida por el Teorema 2.10, es posible simular trayectorias de procesos GARCH que no cumplen con la condición de estacionariedad de segundo orden. Esto se evidencia al observar que la serie de los residuos simulados no poseen una media constante y toman valores que se alejan fuertemente de la media. Un ejemplo ilustrativo se presenta en Figura 6, la cual muestra una realización de un modelo GARCH(1,1) en el que los coeficientes suman más de la unidad. En dicho gráfico, se aprecia cómo tanto la serie de volatilidad como la de residuos experimentan un crecimiento significativo.

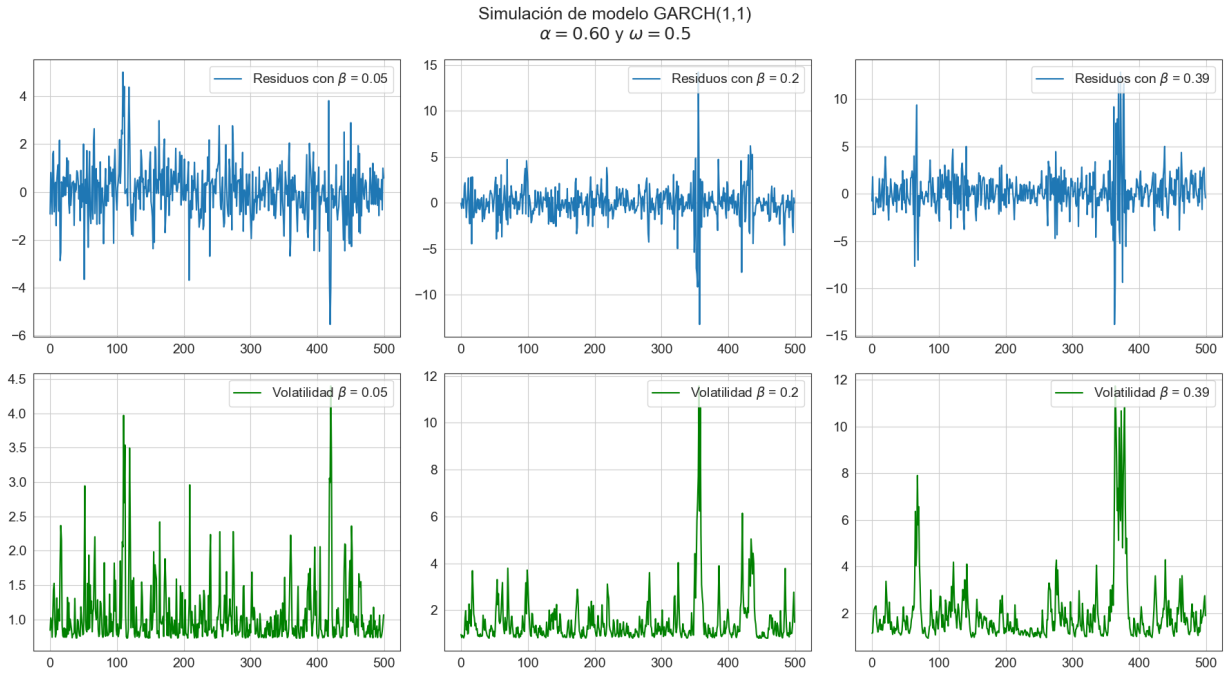


Figura 3: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con  $\omega = 0.5$  y  $\alpha = 0.6$ , para distintos valores de  $\beta \in \{0.05, 0.2, 0.39\}$  (en orden de izquierda a derecha), utilizando  $\eta \equiv N(0, 1)$ . Se muestra la serie de los residuos (arriba) y la serie de la volatilidad (abajo).

### 3.3.2. Simulaciones para distintos órdenes

En este estudio, se generaron los gráficos de trayectorias presentados en la Figura 7 y la Figura 8, que muestran las series de residuos y las respectivas series de varianzas, respectivamente, para distintos valores de  $p$  y  $q$ . En la simulación de las trayectorias, se fijaron valores  $(\alpha_i)$  y  $(\beta_j)$ , y dados los valores de  $p$  y  $q$  a utilizar, se seleccionaron los primeros  $p$  valores de  $(\alpha_i)$  y los primeros  $q$  valores de  $(\beta_j)$  para la simulación. Para garantizar estacionariedad en cada caso, se multiplicó por un factor de escala que asegura que la suma de los parámetros sea menor a 1.

Observando principalmente las series de varianza (Figura 8), se pueden apreciar conclusiones similares a las obtenidas en el caso del modelo GARCH(1,1). Un mayor valor de  $p$  en comparación con  $q$  influye en más cambios en la varianza, mientras que en caso contrario la varianza suele mantener una tendencia. Se observa que en algunos casos, como alrededor del tiempo 100, aproximadamente, la volatilidad aumenta drásticamente para luego volver a caer (generalmente casos  $p \geq q$ ), mientras que en otros la volatilidad mantiene niveles altos (generalmente casos  $p < q$ ).

De esto se puede inferir que el uso de más parámetros está ligado a modelar la influencia de las varianzas condicionales y residuos pasados. Observando el caso  $p = 1$ , se muestra que el utilizar más parámetros reduce en cierta forma el rango de la volatilidad. Esto se debe a que los parámetros tienen valores más bajos para garantizar la solución estacionaria y, por ende, menos influencia de residuos

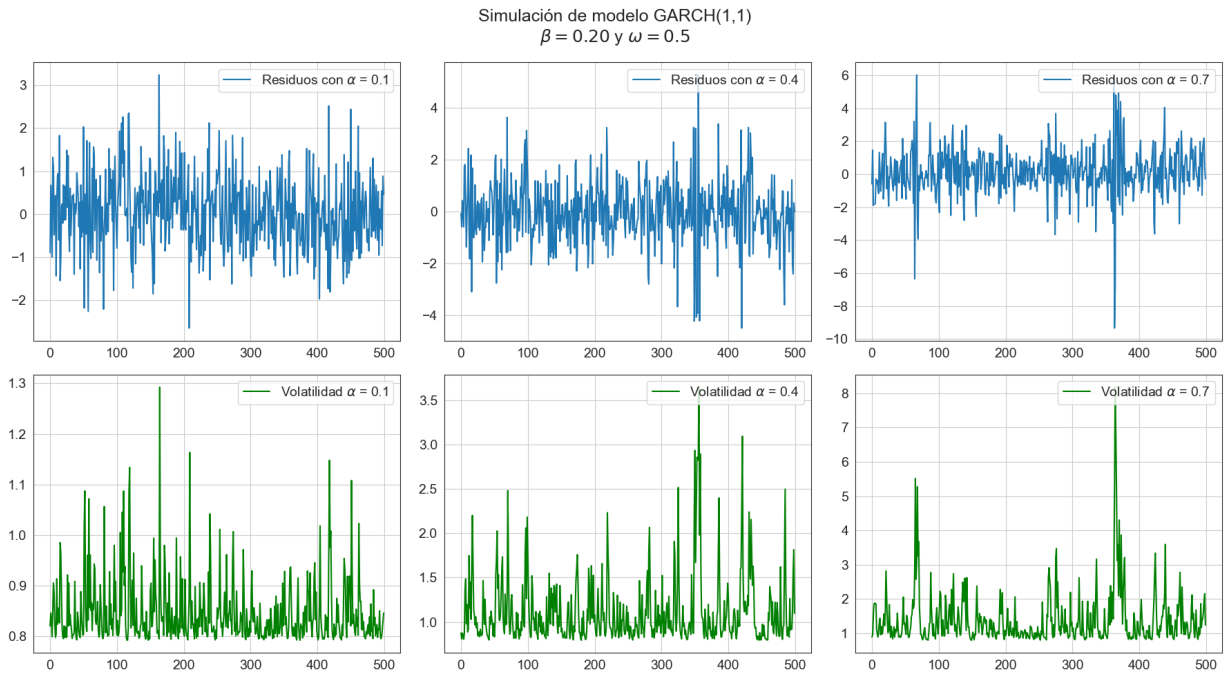


Figura 4: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con  $\omega = 0.5$  y  $\beta = 0.2$ , para distintos valores de  $\alpha \in \{0.1, 0.4, 0.7\}$  (en orden de izquierda a derecha), utilizando  $\eta \equiv N(0, 1)$ . Se muestra la serie de los residuos (arriba) y la serie de la volatilidad (abajo).

atípicos (elevados con respecto al resto).

### 3.4. Distribución de estimadores

Realización exhaustiva de simulación para corroborar resultados técnicos y/o calcular cosas de interés.

## 4. Conclusiones.

Recopilar lo más importante que pueda ser rescatado de los experimentos anteriores, tratando de cerrar discusiones que hayan sido abiertas en la discusión y entregar al lector, valga la redundancia, conclusión de lo expuesto en el informe.

Conclusión 1: Rol de los parámetros del modelo y como se observan. (influencia de  $p$ ,  $q$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ )

Conclusión 2: Correspondiente de los resultados de los ejemplos de simulación.

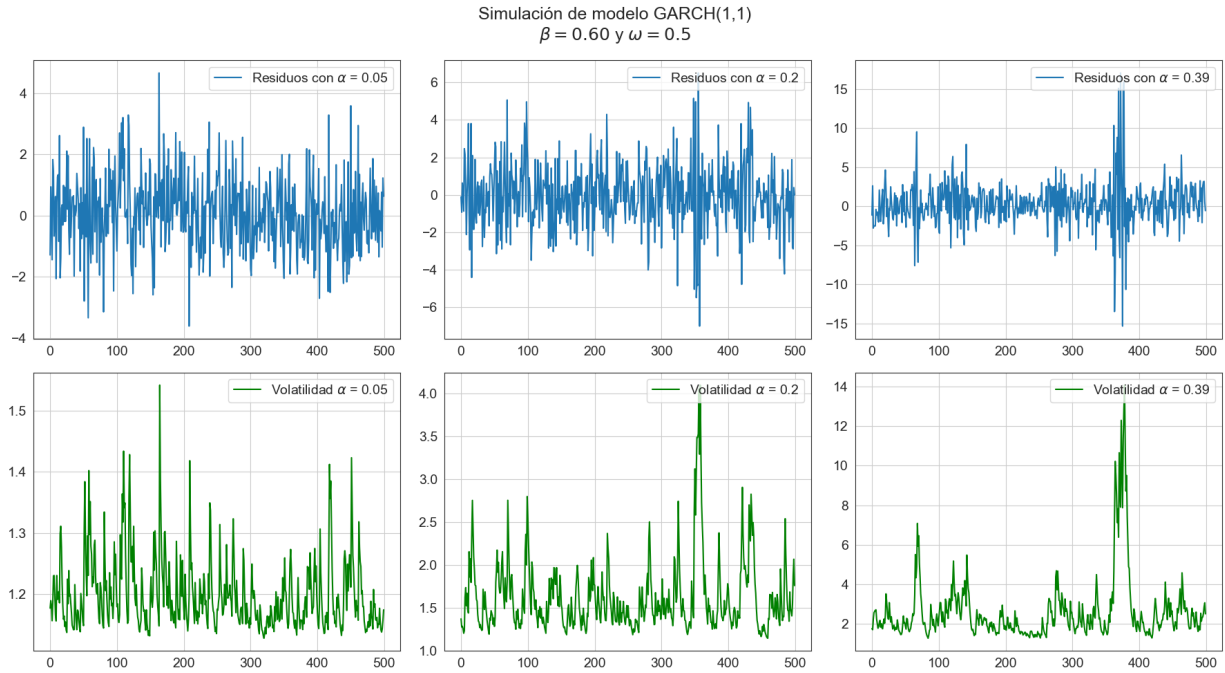


Figura 5: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con  $\omega = 0.5$  y  $\beta = 0.6$ , para distintos valores de  $\alpha \in \{0.05, 0.2, 0.39\}$ , utilizando  $\eta \equiv N(0, 1)$ . Se muestra la serie de los residuos (arriba) y la serie de la volatilidad (abajo).

## Referencias

- [1] C. Francq y J.M. Zakoian. *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Wiley, 2011. ISBN: 9781119957393. URL: <https://books.google.cl/books?id=hwR1aWSg9PUC>.
- [2] Kevin Sheppard et al. *bashtage/arch: Release 6.2.0*. Ver. v6.2.0. Sep. de 2023. DOI: 10.5281/zenodo.8380532. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.8380532>.

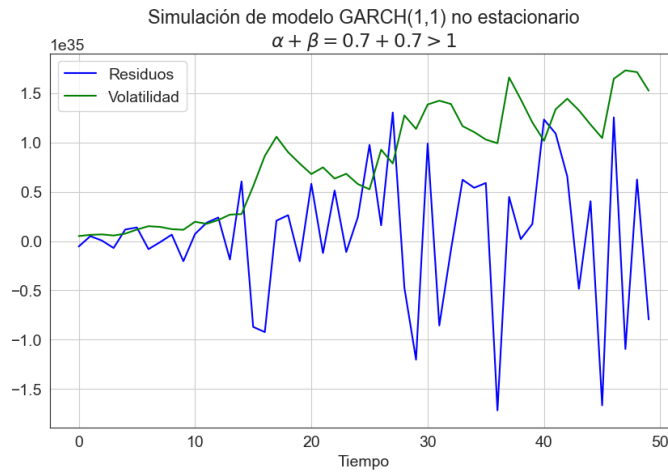


Figura 6: Simulación de una trayectoria de 50 observaciones de un modelo GARCH(1,1) con  $\alpha = \beta = 0.7$  y  $\omega = 0.2$ , utilizando  $\eta \equiv N(0, 1)$ .

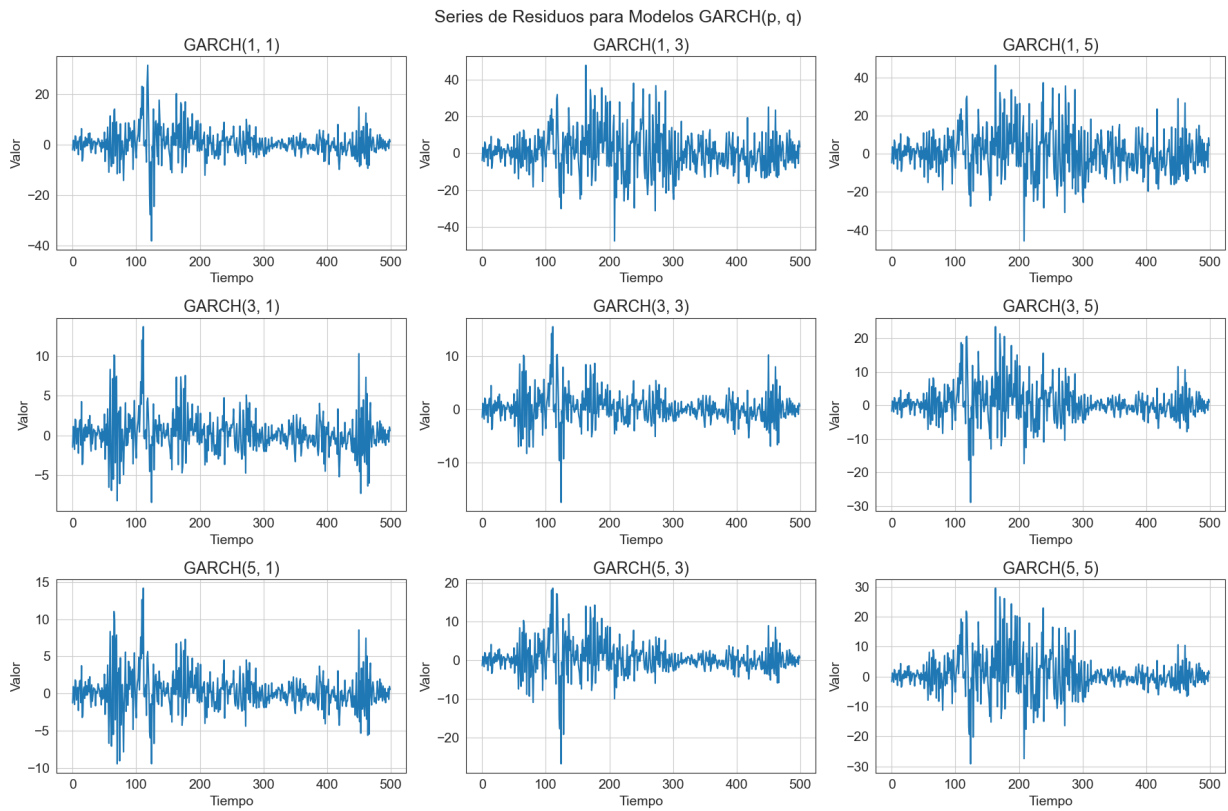


Figura 7: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(p,q) utilizando  $\eta \equiv N(0, 1)$  con  $\omega = 0,5$  y parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  generados aleatoriamente. Se muestra las series de los residuos para  $p \in \{1, 3, 5\}$  (de izquierda a derecha) y  $q \in \{1, 3, 5\}$  (de arriba a abajo).

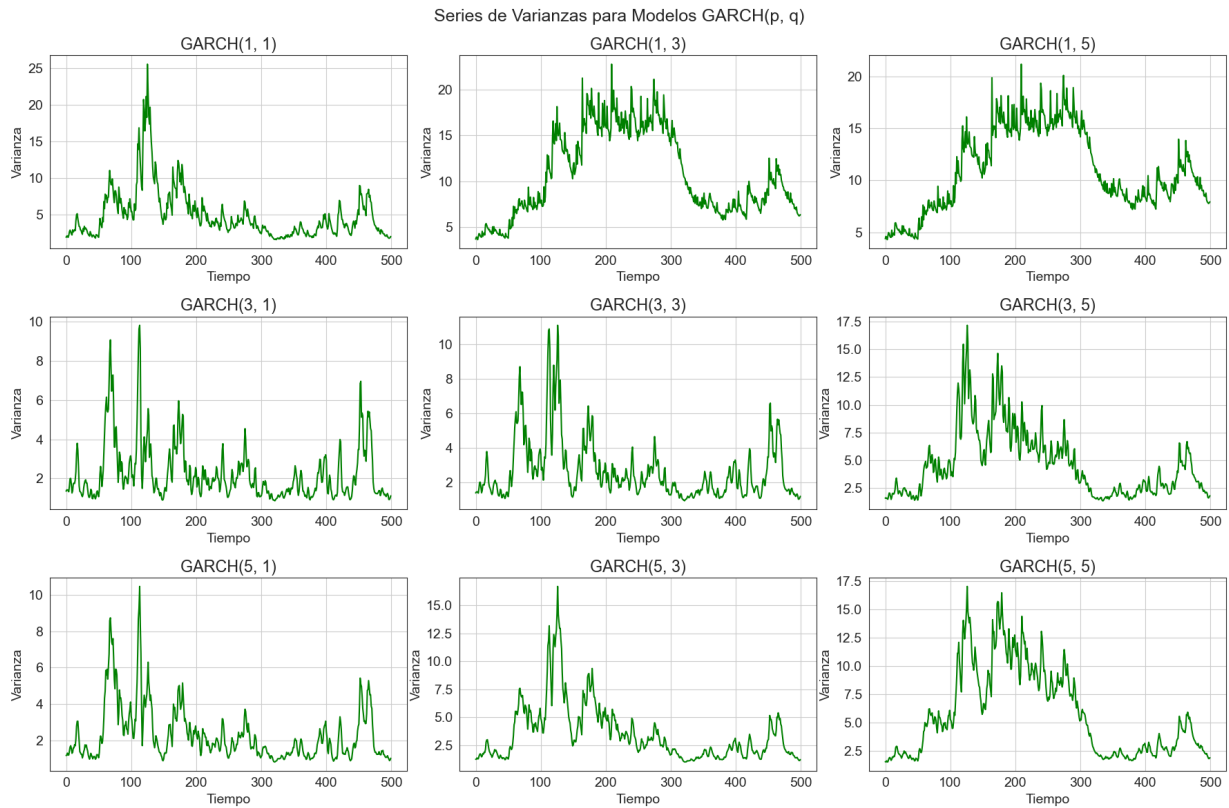


Figura 8: Simulación de trayectorias estacionarias de 500 observaciones de un modelo GARCH(p,q) utilizando  $\eta \equiv N(0, 1)$  con  $\omega = 0,5$  y parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  generados aleatoriamente. Se muestra las series de las varianzas para  $p \in \{1, 3, 5\}$  (de izquierda a derecha) y  $q \in \{1, 3, 5\}$  (de arriba a abajo).