Tratamiento de Señales Multimedia I: *señales visuales (TSM I)*

Tema 0: Introducción al tratamiento de señal unidimensional

Álvaro García Martín
alvaro.garcia@uam.es

Escuela Politécnica Superior

Universidad Autónoma de Madrid
E28049 Madrid (SPAIN)

Video Processing and Understanding Lab

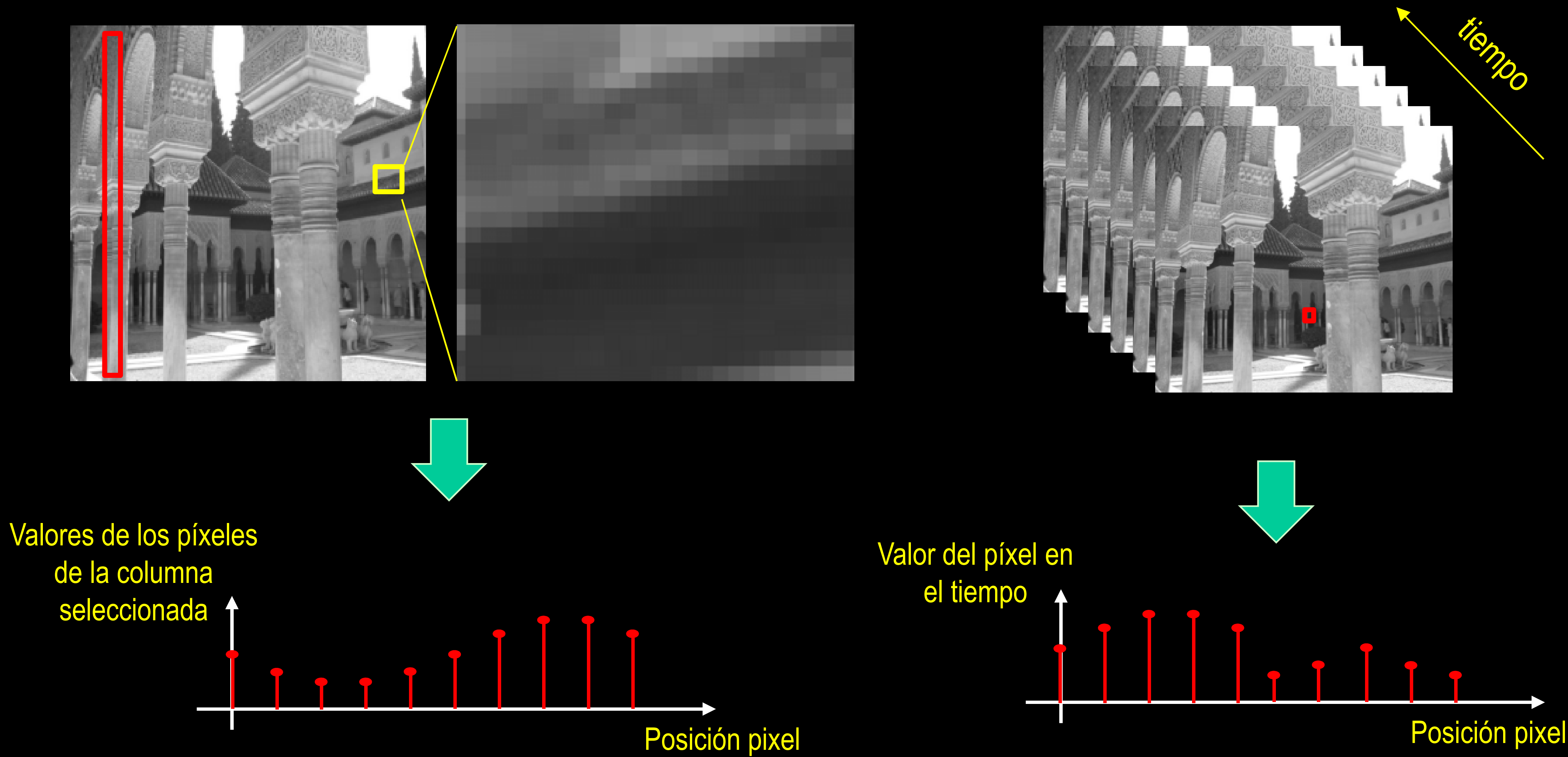
Grupo de Tratamiento e Interpretación de Vídeo

INDICE

INDICE

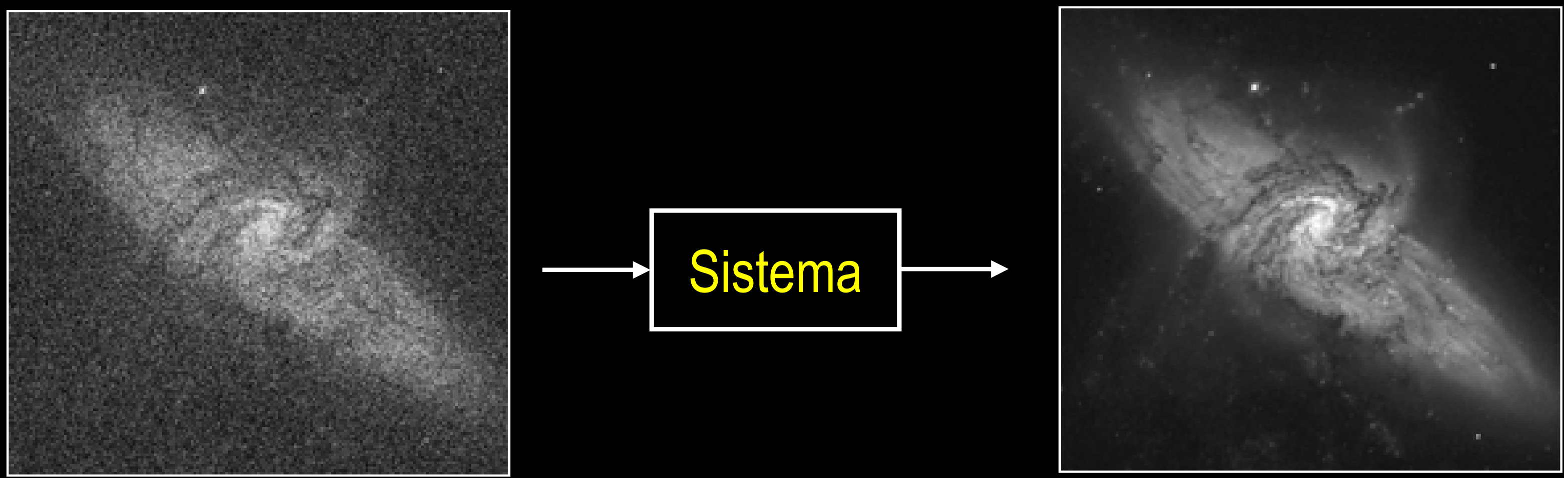
INTRODUCCION

- Tratamiento digital de imágenes se basa:
  – Descomponer imágenes (señales 2D) en señales 1D para tratamiento eficiente



INTRODUCCION

- Tratamiento digital de imágenes se basa:
  - Análisis frecuencial es una técnica muy utilizada (basado en análisis 1D)
  - Algoritmos de procesamiento son vistos como 'cajas negras' (sistemas)

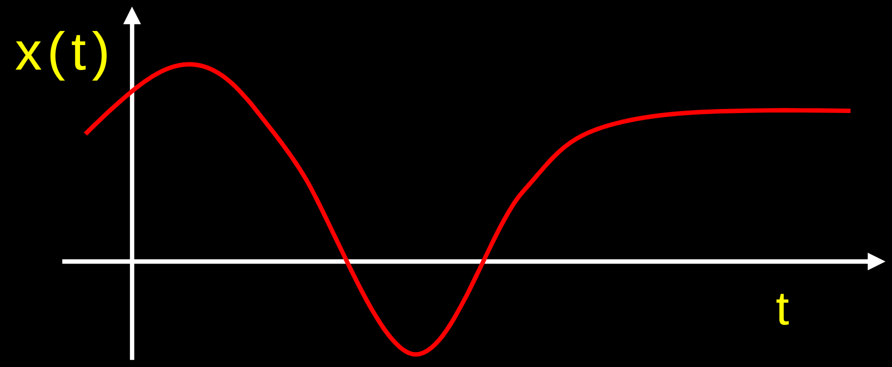


Necesaria una revisión de conceptos básicos en 1D (una dimensión)

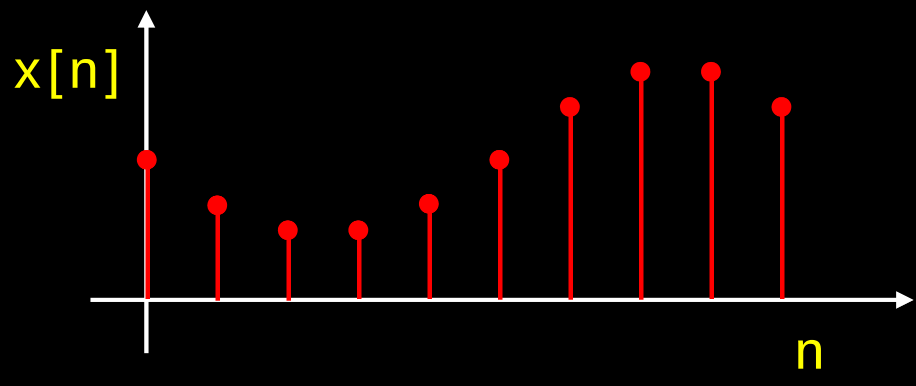
INDICE

SEÑAL: TIPOS

- Señales continuas – x(t)
  - Señales del mundo real (e.g., voltaje, velocidad)
  - Continuas en el tiempo
  - Escala infinitesimal
  - Operaciones: integrales, derivadas,…



- Señales discretas – x[n]
  - Algunas señales reales y digitales (e.g., pixeles)
  - Discretas en el tiempo
  - Escala infinitesimal (o no)
  - Operaciones: sumas, restas,….
  - Utilizadas en tratamiento digital de imágenes



Muestreo de una señal continua
$x[n] = x(nk)$ – k es el tiempo de muestreo

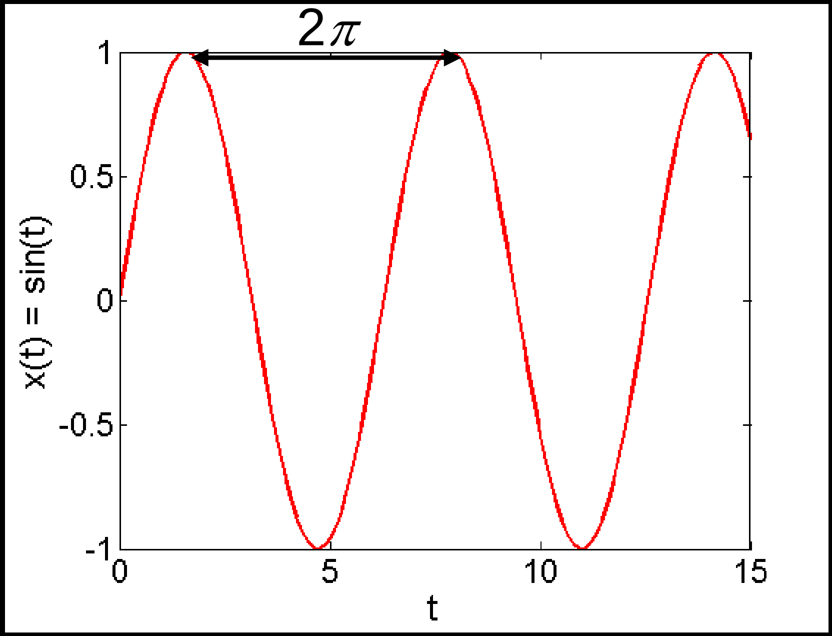
SEÑAL:PROPIEDADES

- Periodicidad (*equivalente para x[n]*)
  - *T* periodo

$$x(n) = x(n+T),$$
$$\text{donde } T > 0, \forall t$$

  - Por ejemplo

$$\cos(t+2\pi) = \cos(t)$$
$$\sin(t+2\pi) = \sin(t)$$
$$T = 2\pi$$

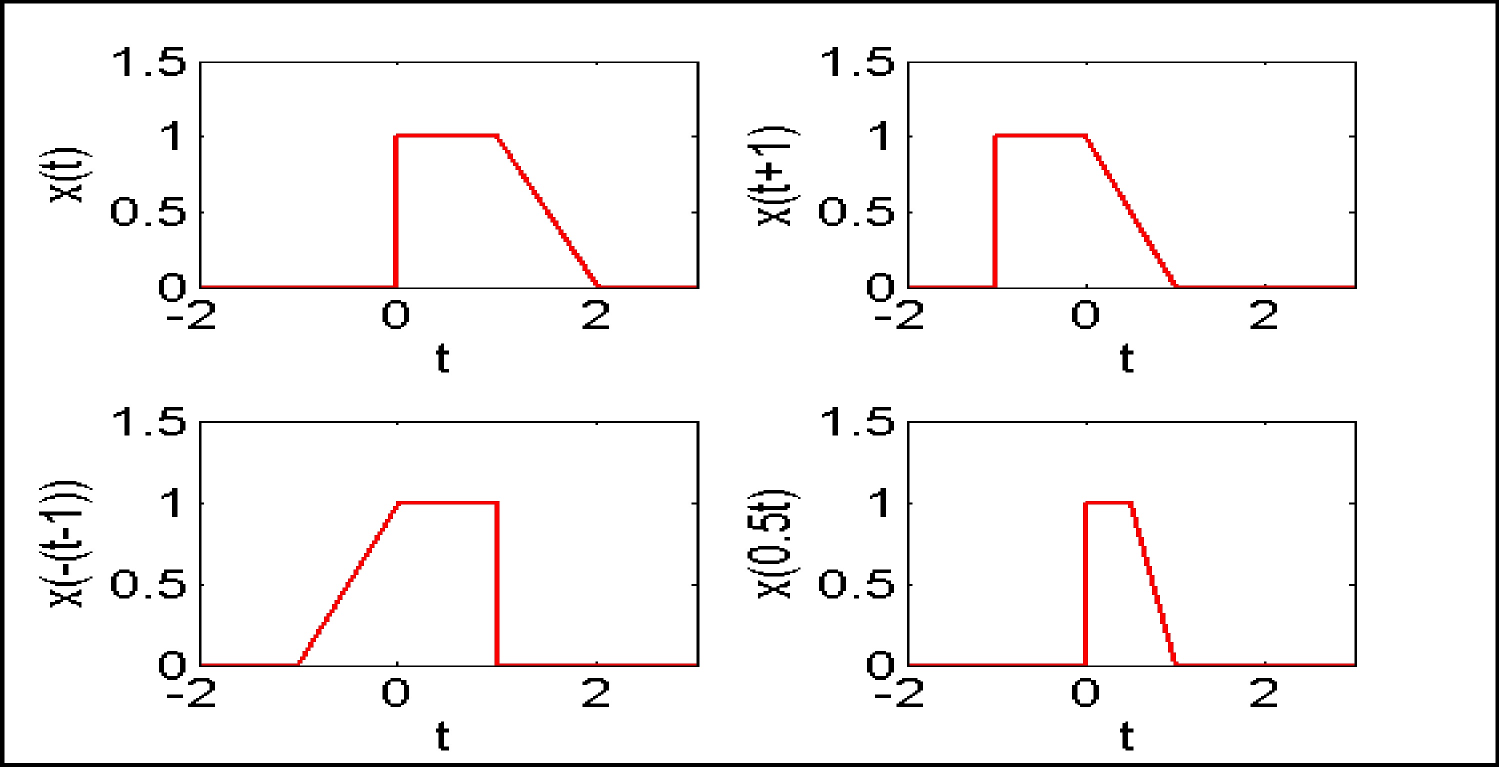


SEÑAL:TRANSFORMACION EJE

- Transformaciones del eje de una señal

$$y(t) = x(at + b)$$

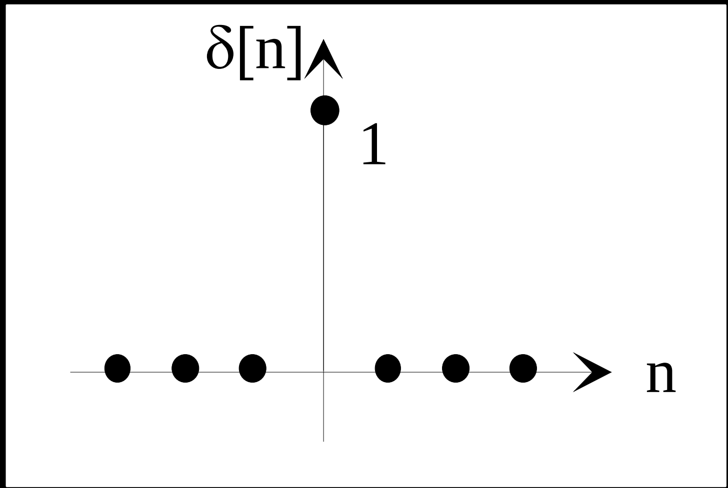
b → desplazamiento (izquierda b>0, derecha eje b<0)
a → escalado (ampliación|*a*|>1, compresión 0<|*a*|<1 y reflejo si *a*<0).



SEÑAL: DELTA

- Función impulso unidad (delta unidad o kronecker)
  - Versión discreta: $\delta[n]$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$



Señal muy utilizada en sistemas discretos (tratamiento digital de imágenes)

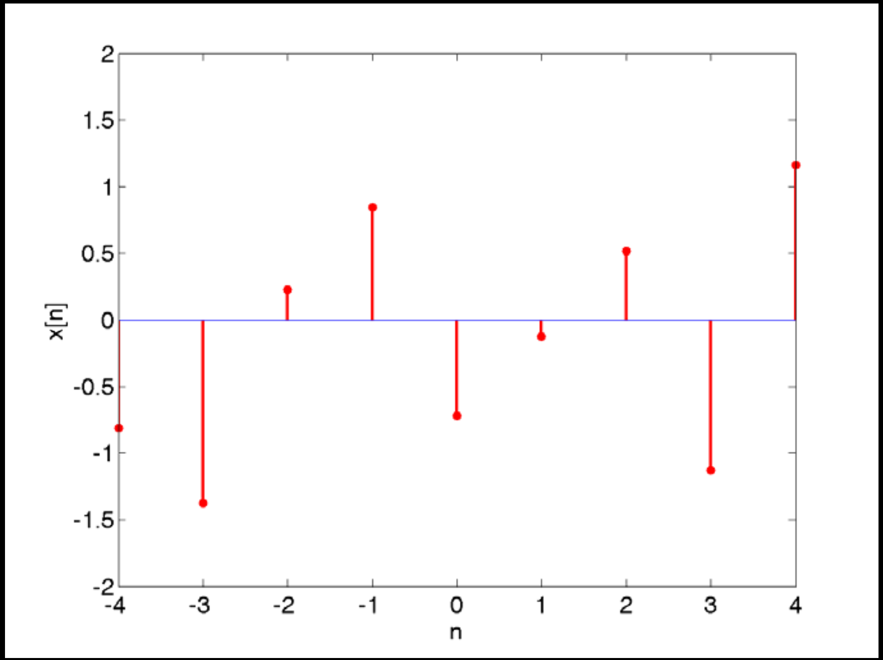
- Función impulso unidad (delta unidad): propiedades
  - Área unidad

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1$$

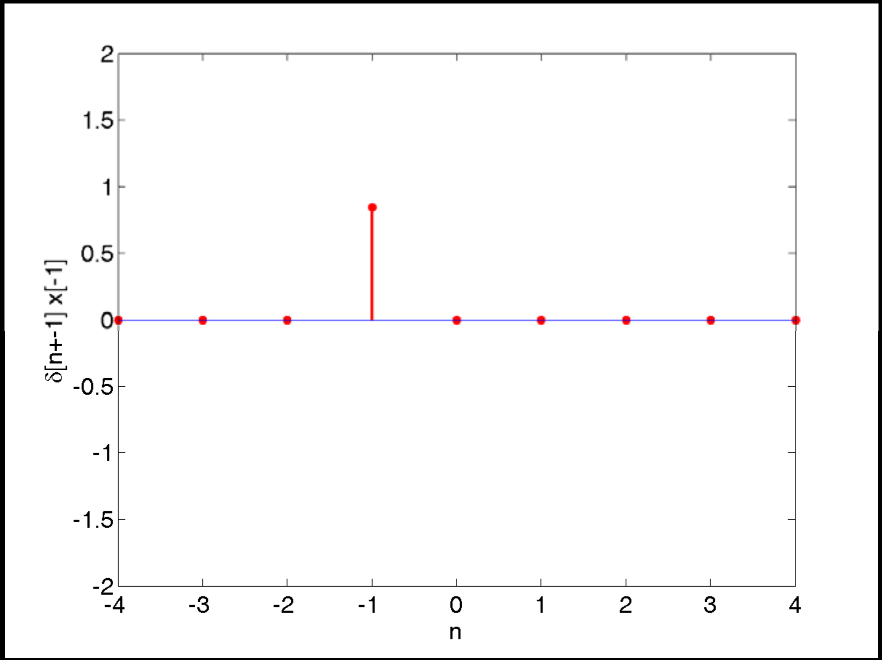
  - Selección de valores de la señal

$$f[n] \cdot \delta[n] = f[0] \cdot \delta[n]$$
$$f[n] \cdot \delta[n-n_0] = f[n_0] \cdot \delta[n-n_0]$$

x[n]



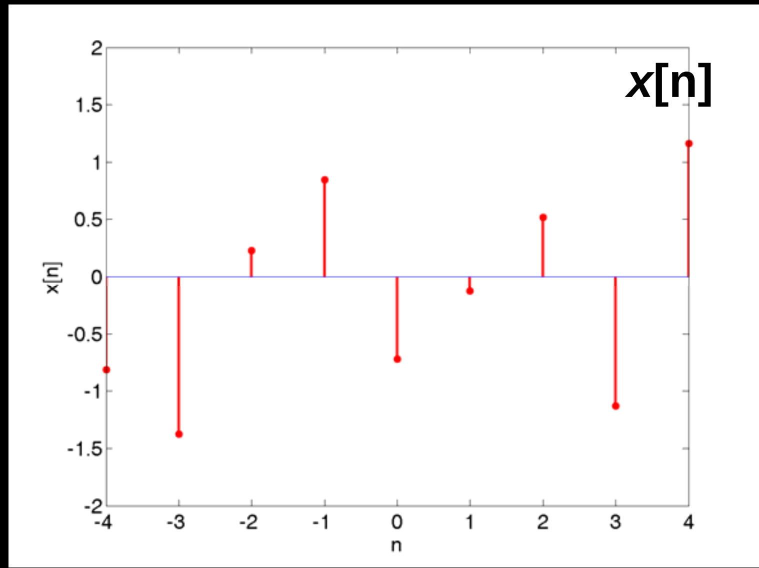
x[-1]δ[n+1]



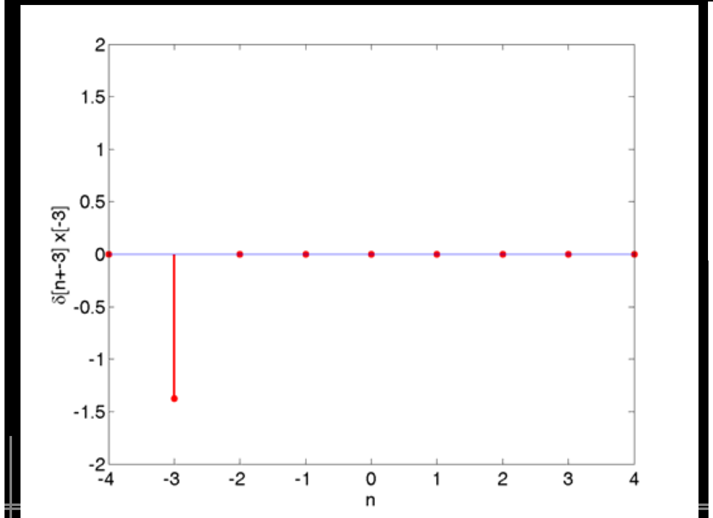
SEÑAL: DELTA

– Expresión de una señal $x[n]$ como combinación lineal de $\delta[n]$

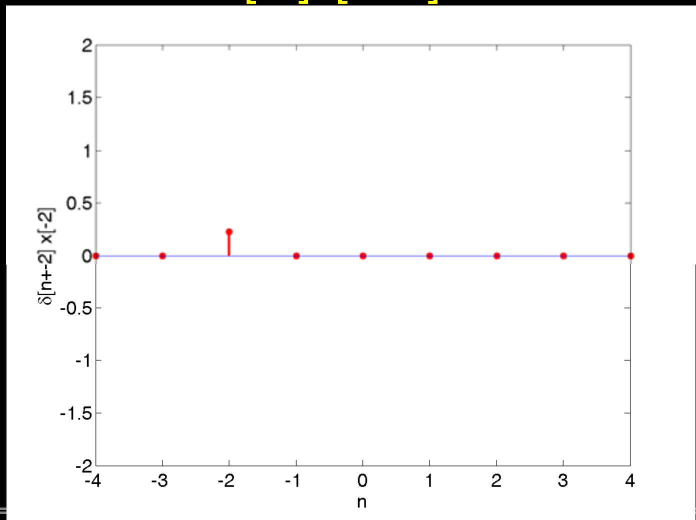
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$



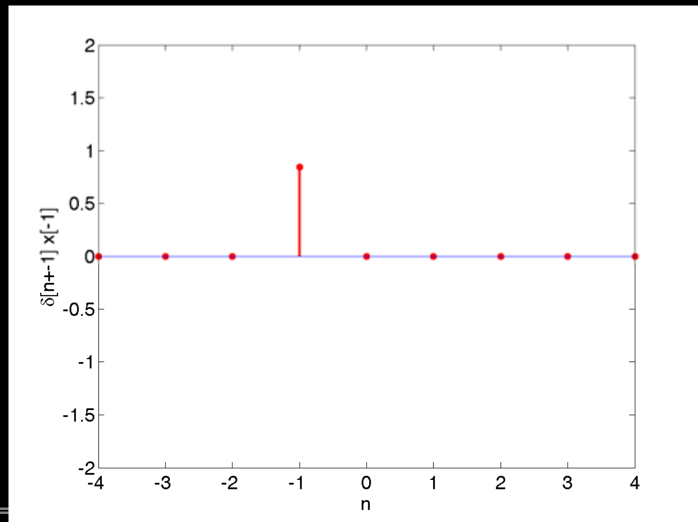
… + $x[-3]\delta[n+3]$ +



$x[-2]\delta[n+2]$ +



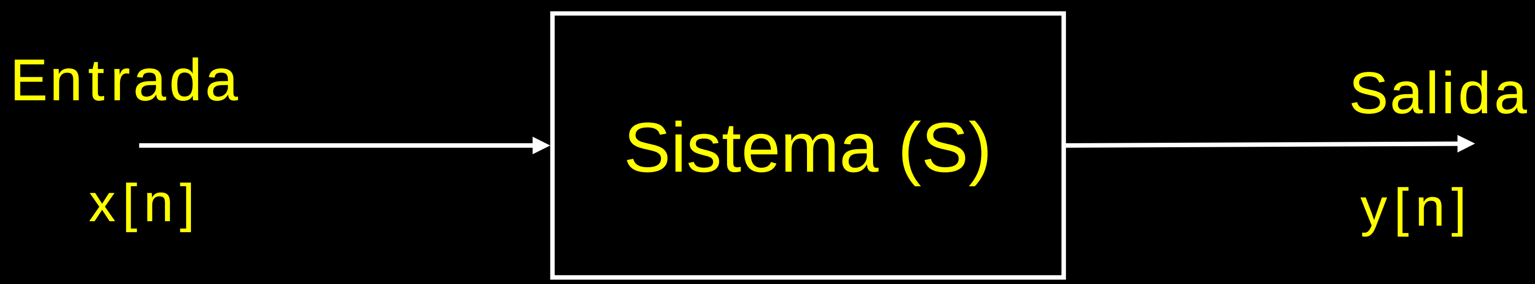
$x[-1]\delta[n+1]$ + …



INDICE

1. Introducción
2. Señales
3. Sistemas
   - Definición
   - Tipos
   - Ejemplos
   - Propiedades
   - Respuesta al impulso
4. Análisis de Fourier

- Sistema: procesa señales de entrada y genera señales de salida
  - Conexión: cascada, paralelo, realimentado
  - Invertible/no-invertible
  - …

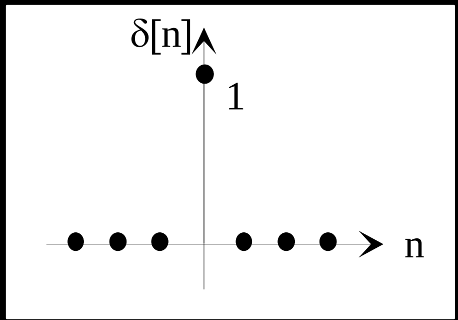


$$\Updownarrow$$

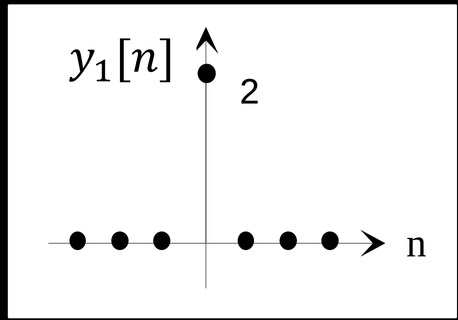
$$x[n] \xrightarrow{S} y[n]$$

- Sistema (ejemplos)

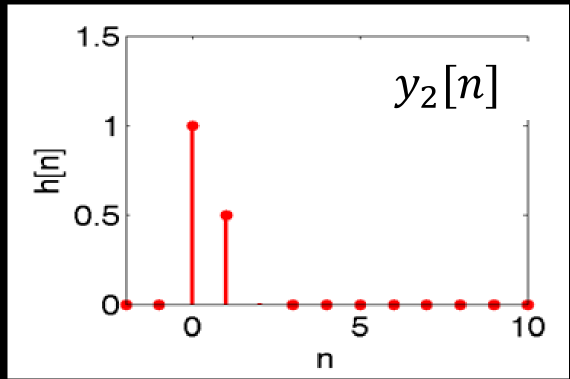
$x[n] =$



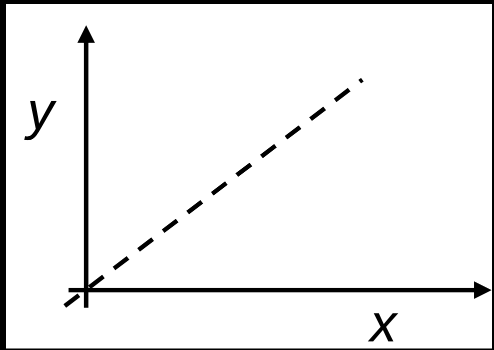
$y_1[n] = 2x[n]$



$y_2[n] = x[n] + 0.5x[n-1]$



- Sistemas LTI (*Linear Time Invariant*): propiedades
  - Lineal (L)
    - El sistema responde de manera proporcional a la entrada
    - Implica satisfacer dos propiedades:
      - Escalado



$$x[n] \xrightarrow{L} y[n] \quad \Rightarrow \quad k_1 x[n] \xrightarrow{L} k_1 y[n], \forall k_1$$

      - Aditividad

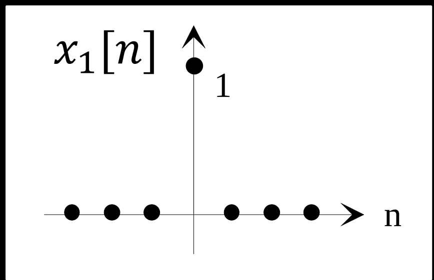
$$f_1[n] \xrightarrow{L} g_1[n] \qquad f_2[n] \xrightarrow{L} g_2[n]$$

$$\Downarrow$$

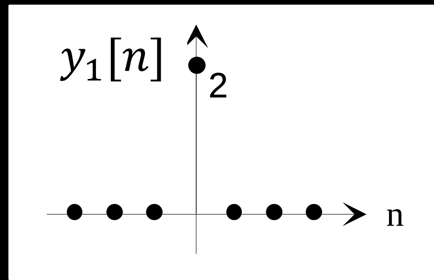
$$k_1 f_1[n] + k_2 f_2[n] \xrightarrow{L} k_1 g_1[n] + k_2 g_2[n], \forall k_1, k_2 \in \Re$$

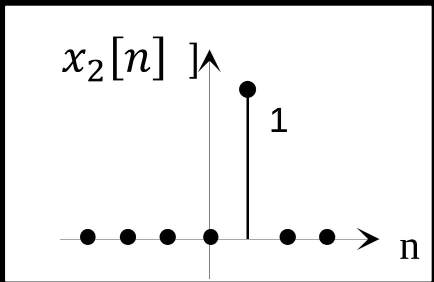
- Sistemas LTI (*Linear Time Invariant*): propiedades
  - Invariante temporal (*Time Invariant – TI*)
    - La respuesta del sistema no varía dada la misma señal de entrada (independientemente del instante temporal)

$$f[n] \overset{TI}{\rightarrow} g[n] \quad \Rightarrow \quad f[n-n_0] \overset{TI}{\rightarrow} g[n-n_0], \forall n_0 \in Z$$

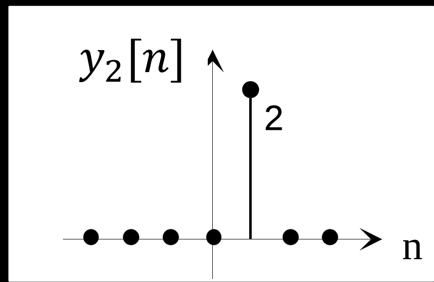


$y[n] = 2x[n]$





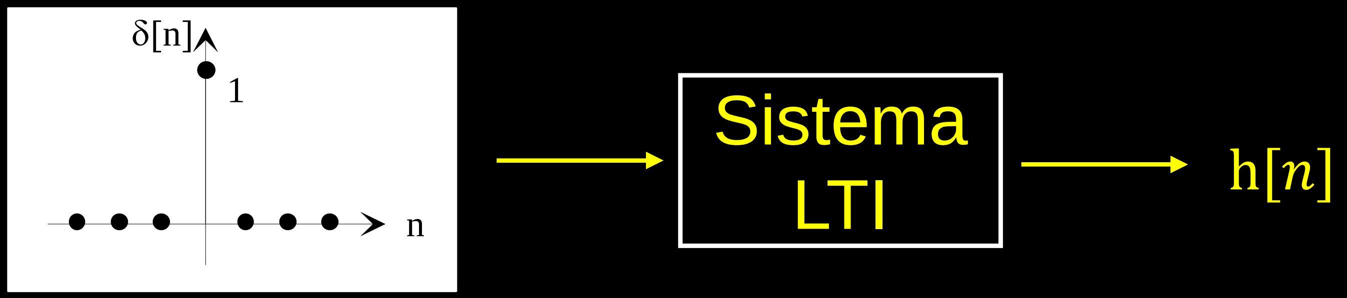
$y[n] = 2x[n]$



$x_2[n] = x_1[n-1]$

$y_2[n] = y_1[n-1]$

- Respuesta al impulso $\mathrm{h}[n]$:
  - Salida del sistema cuando introducimos $\delta[n]$



  - Invariancia temporal (sistemas LTI) y $\mathrm{h}[n]$

$$\delta[n] \xrightarrow{LTI} h[n] \Rightarrow \delta[n-n_0] \xrightarrow{TI} h[n-n_0], \forall n_0 \in Z$$

SISTEMAS: RESPUESTA AL IMPULSO

- Si representamos una señal mediante un tren de deltas: $$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Entonces, podemos calcular la respuesta al sistema mediante $\mathrm{h}[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \xrightarrow{LTI} y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

Convolución

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[0-k]$$

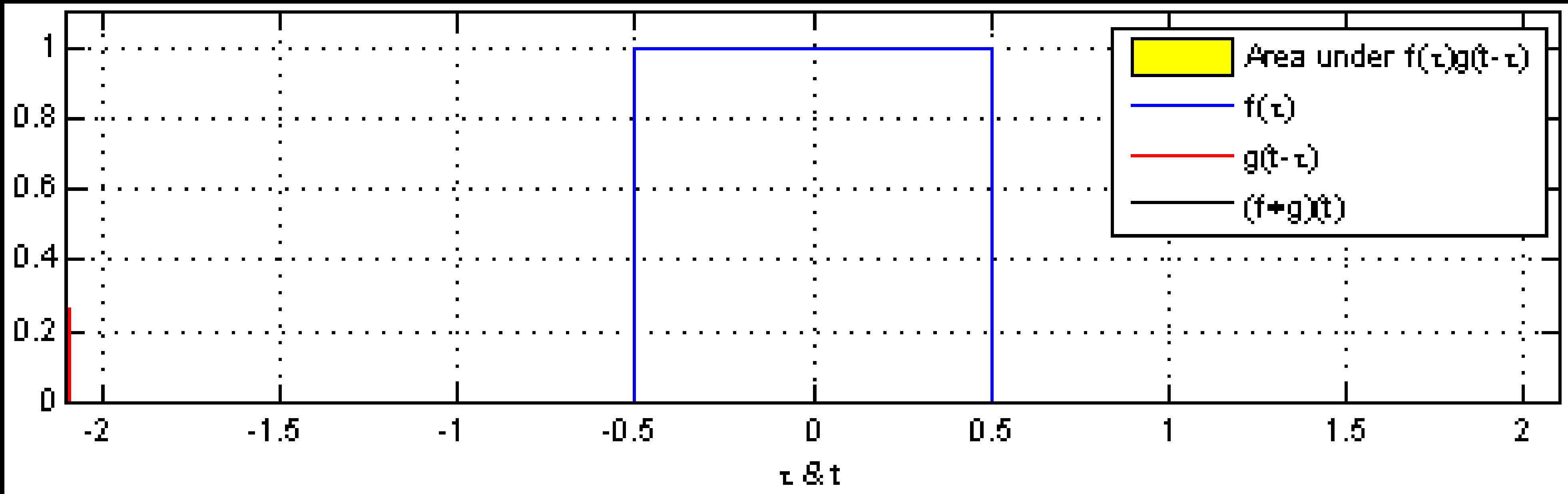
$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[1-k]$$

...

- Convolución (ejemplo donde $x[n] = h[n]$)

$x[k]$ $h[n-k]$ Area convolución

$$\mathbf{y[n]} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$



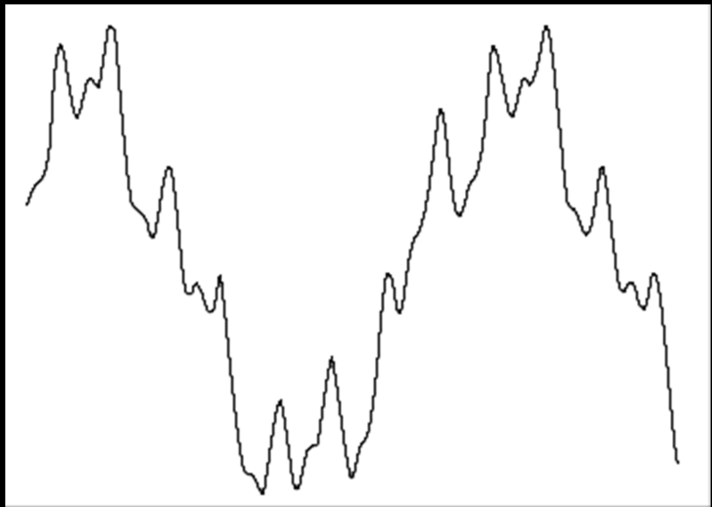
Ejemplo extraído de http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

INDICE

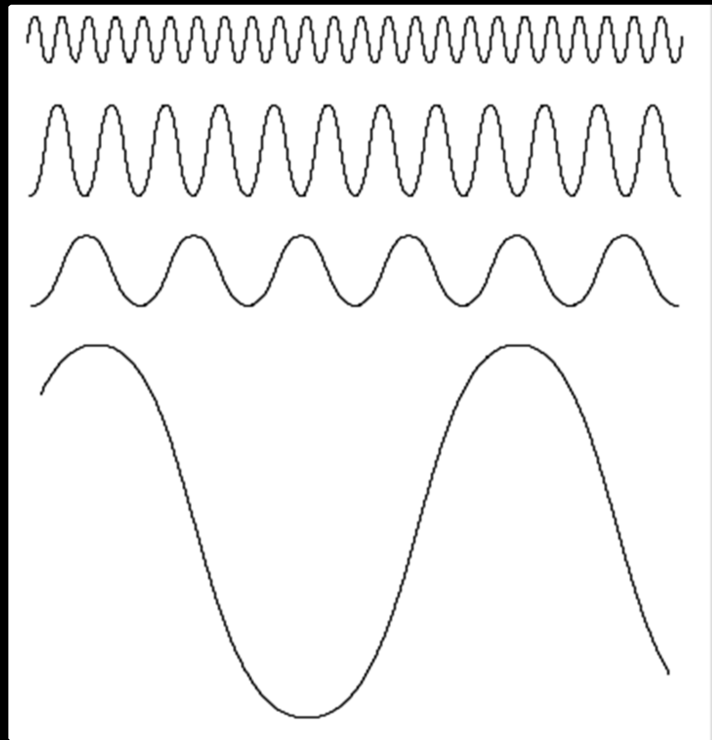
1. Introducción
2. Señales
3. Sistemas
4. Análisis de Fourier
   - Idea intuitiva
   - Transformada de Fourier
   - Respuesta de un sistema LTI a exponenciales periódicas
   - Respuesta de un sistema LTI a señales cualquiera

IDEA INTUITIVA

- Transformada de Fourier: representación de señales



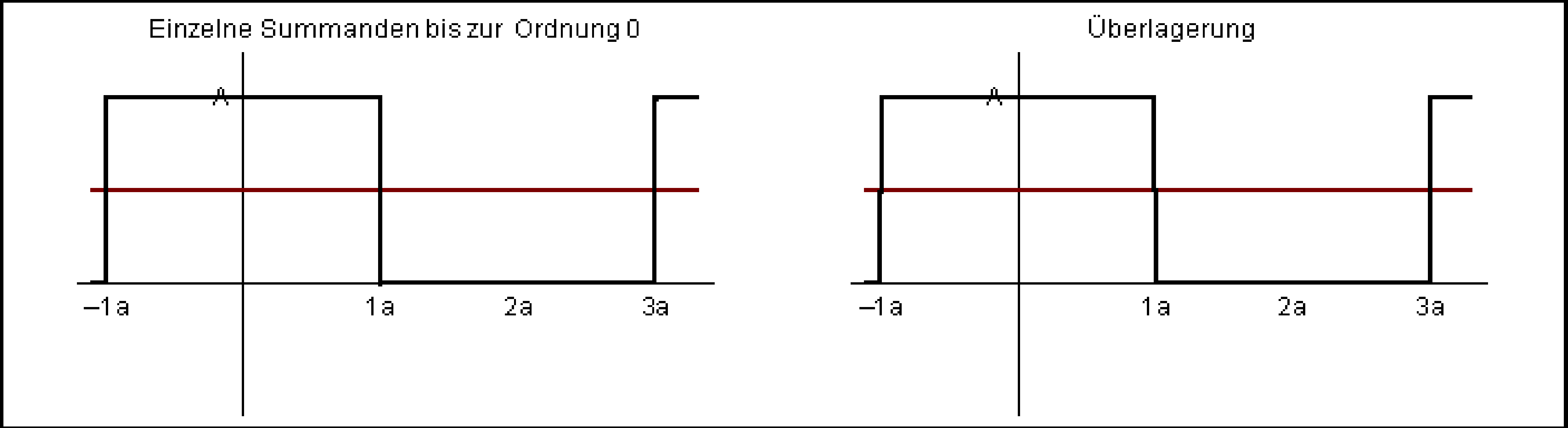
=



Cualquier función periódica se puede expresar como suma de senos y cosenos de diferentes frecuencias, cada una multiplicada por diferentes coeficientes (serie de Fourier)

IDEA INTUITIVA

- Transformada de Fourier: representación de señales



Ejemplo extraído de Curso 'DT228/4 Digital Image Processing', School of Computing at the Dublin Institute of Technology.

Obsérvese que a medida que utilizamos más frecuencias con distinta amplitud (funciones cos y sen), representamos con mayor precisión la función original.

TRANSFORMADA DE FOURIER

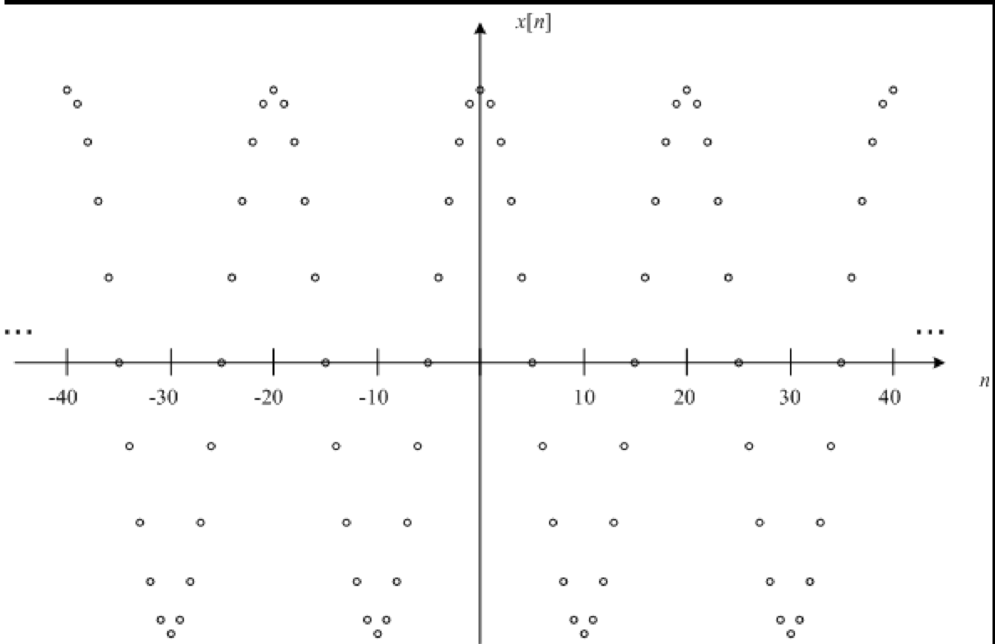
- Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT):
  - Representación compleja: $F\left(e^{j\omega}\right)$ o $F(\omega)$
  - Representa la variación temporal de la señal original

$$f[n] \xrightarrow{DTFT} F\left(e^{j\omega}\right)$$

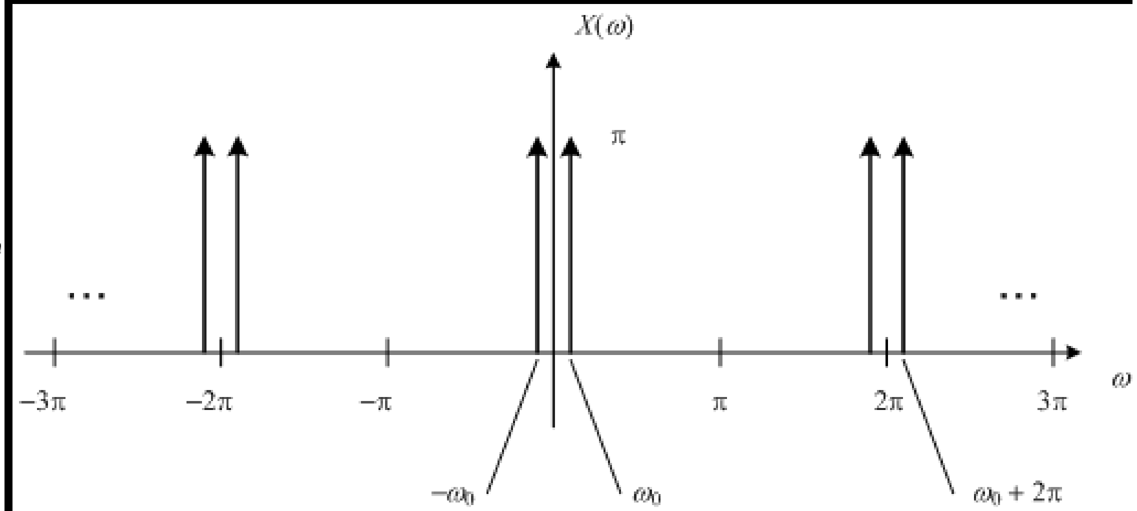
Obsérvese que $e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2k\pi)n}, \forall k \in Z$. Por lo tanto $F\left(e^{j\omega}\right)$ es periódica de periodo 2π

- Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT):
  - ω representa la pulsación (frecuencia) entre -2π y 2π
  - Frecuencias bajas ~0 (+$2k\pi$)
  - Frecuencias altas $\sim\pi$ (+$2k\pi$)

$f[n] = \cos(w_0 n)$



$|F(\omega)|$



Ejemplos extraídos de http://blogs.mathworks.com/steve/2009/12/31/discrete-time-fourier-transform-dtft/

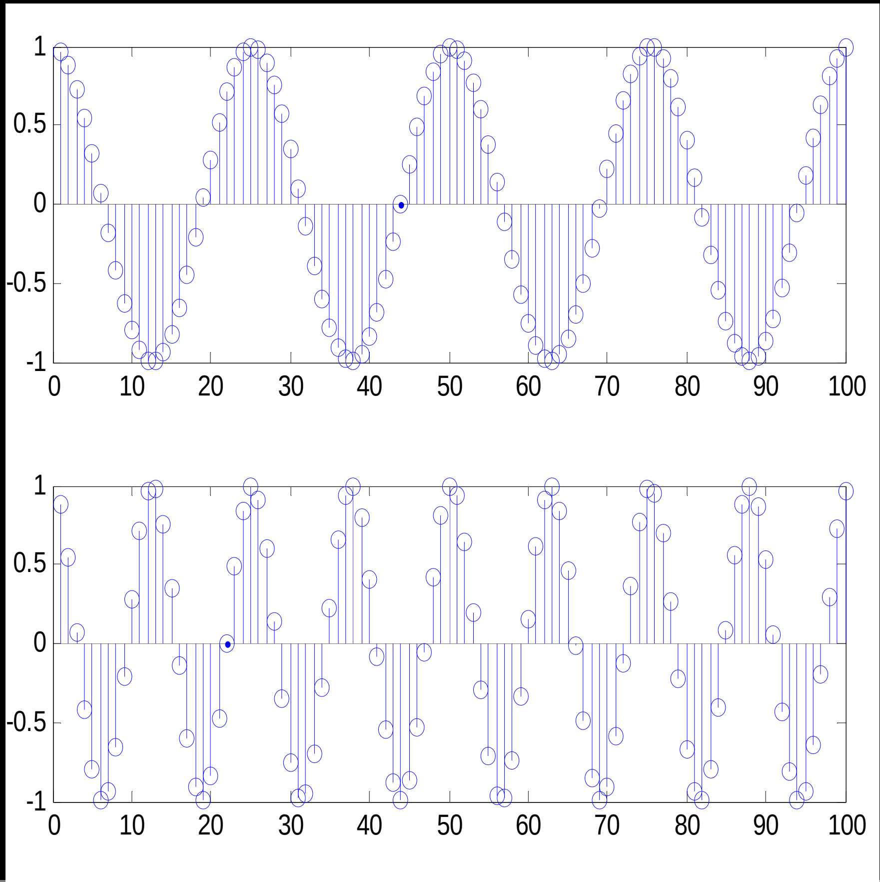
- Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT):
  - Frecuencias bajas ~0 ($+2k\pi$)
  - Frecuencias altas $\sim\pi$ ($+2k\pi$)

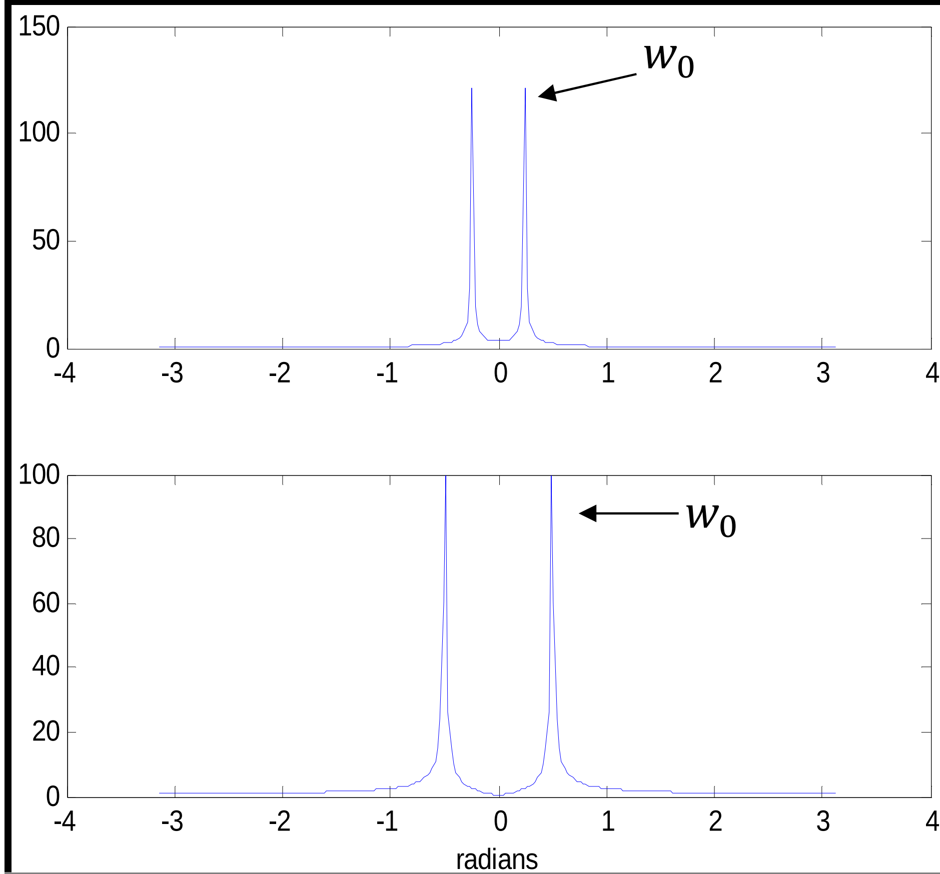
$f[n] = \cos(w_0 n)$

$|F(\omega)|$

$w_0 = 0.25$

$T_0 = \frac{2\pi}{w_0} \approx 25$

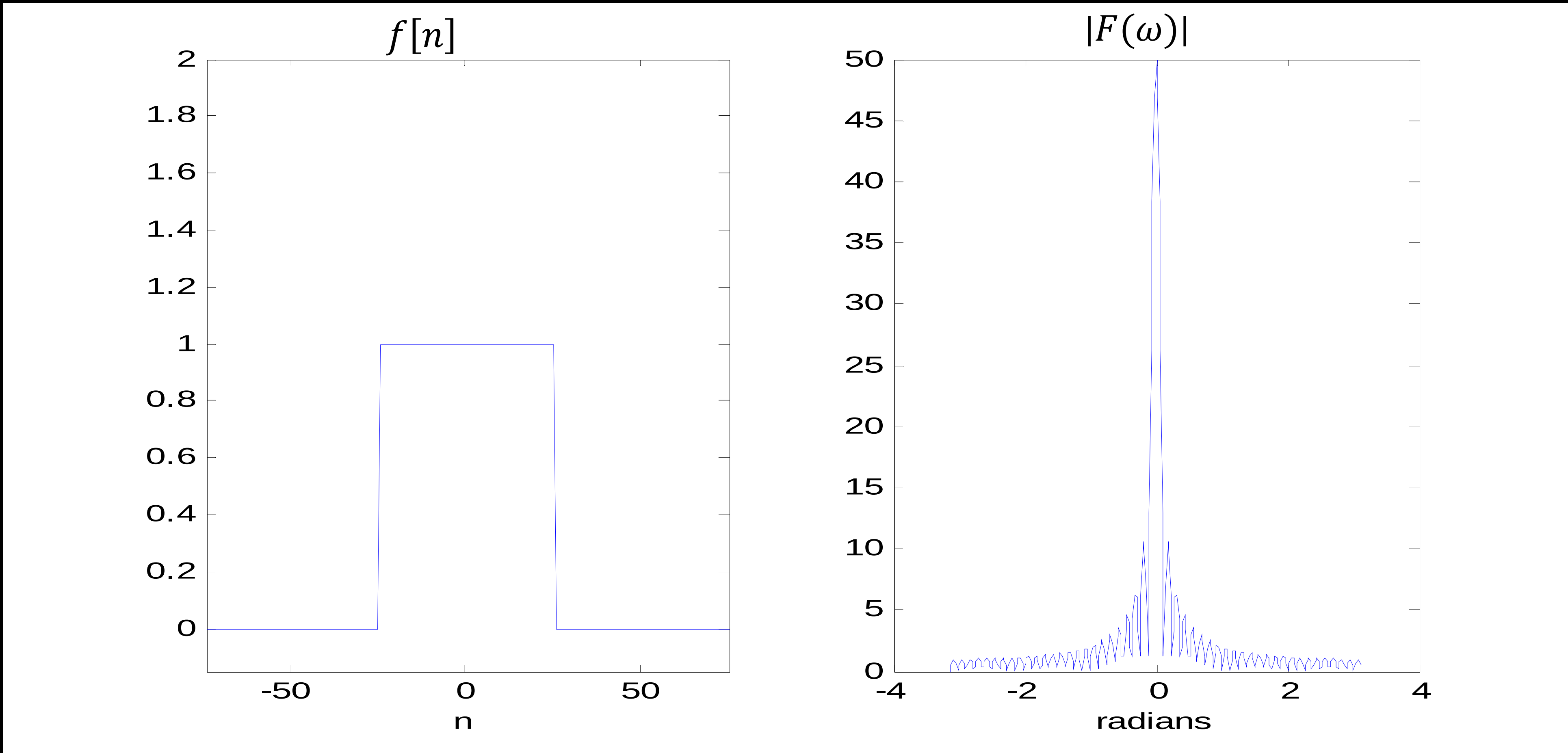




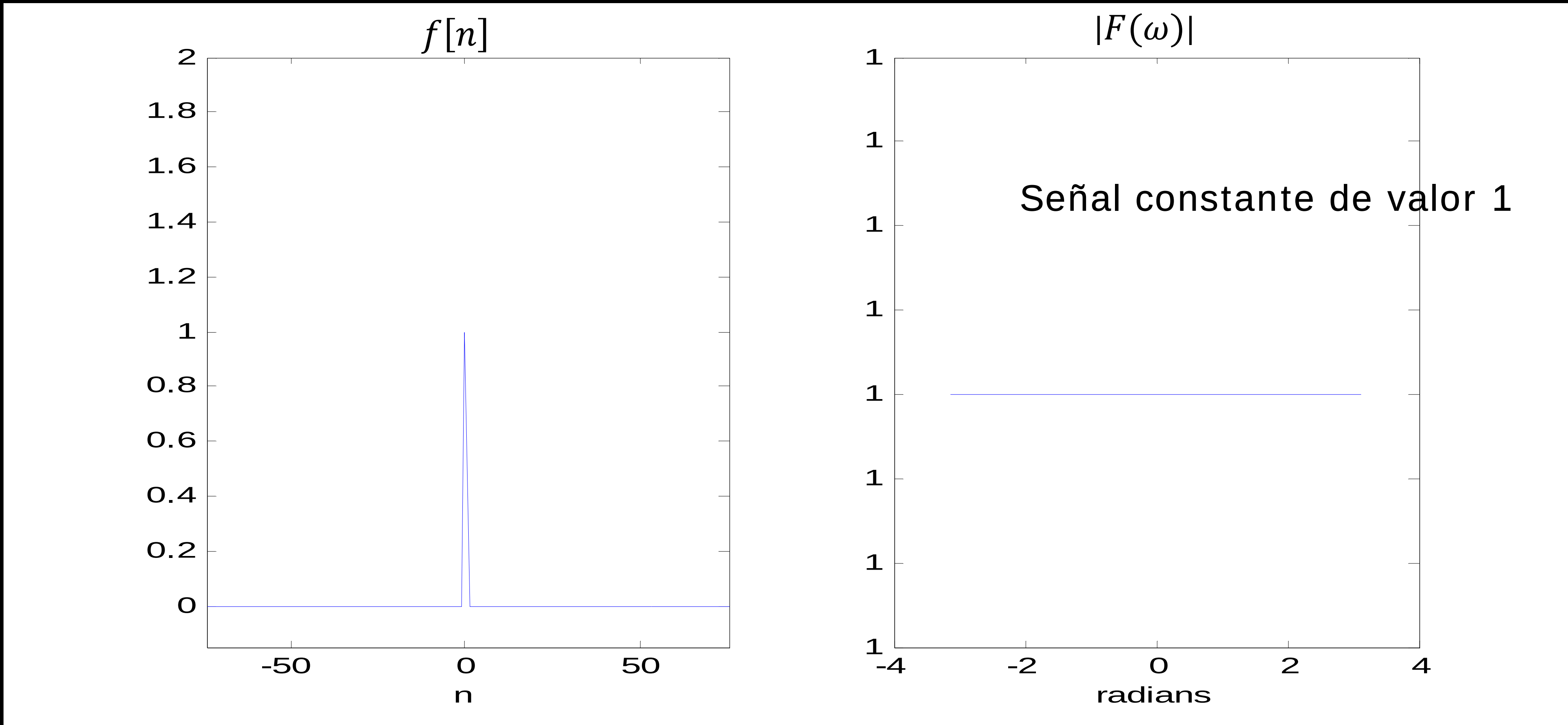
$w_0 = 0.5$

$T_0 = \frac{2\pi}{w_0} \approx 12$

- Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT):
  - Frecuencias bajas ~0 ($+2k\pi$)
  - Frecuencias altas $\sim\pi$ ($+2k\pi$)



- Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT):
  - Frecuencias bajas ~0 (+$2k\pi$)
  - Frecuencias altas $\sim\pi$ (+$2k\pi$)

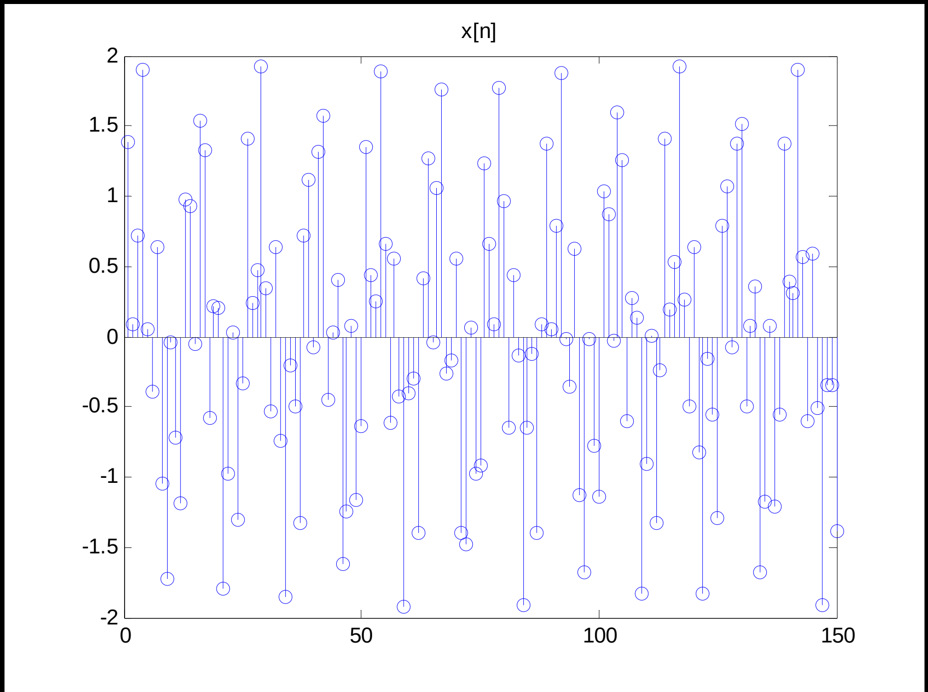


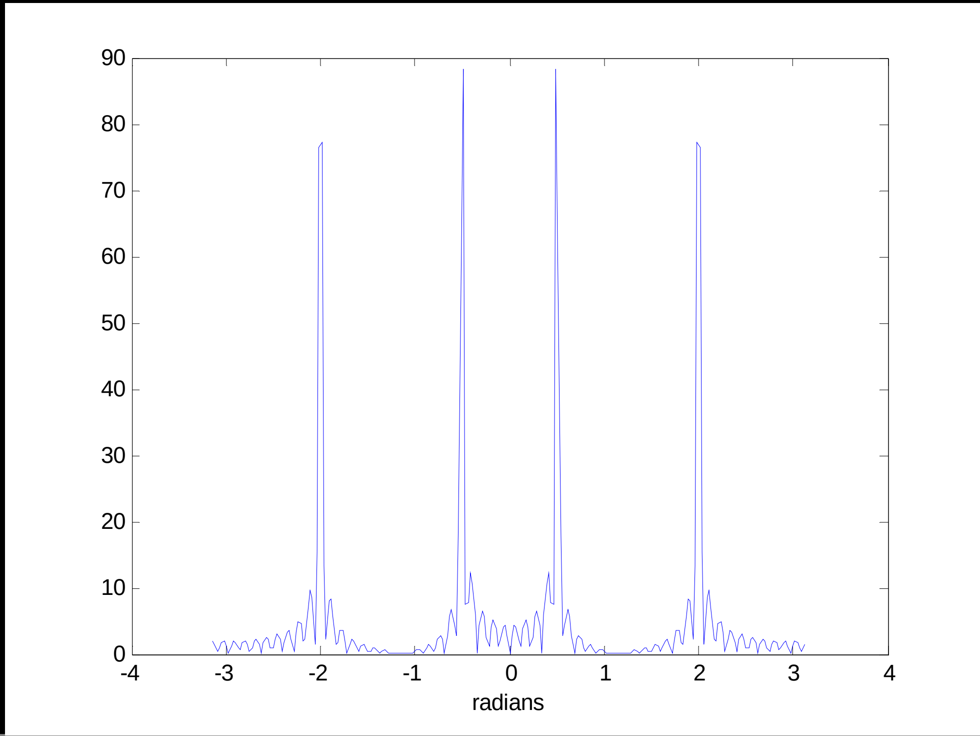
- Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT):
  - Linealidad (sistemas LTI)

$$\mathrm{x[n]} = \sin(0.5n) + \sin(2n)$$

$$w_1 = 0.5, \qquad w_2 = 2$$

$$|F(\omega)|$$





- Respuesta de un sistema LTI a señales cualquiera

$$f[n] \xrightarrow{LTI} g[n] = f[n] * h[n]$$

$$F(e^{j\omega}) \xrightarrow{LTI} G(e^{j\omega}) = F(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

→ Ventaja computacional: convolución (costosa) versus multiplicación