

# Tratamiento de Señales Visuales

## Tema 3: Operadores morfológicos

Álvaro García Martín  
[alvaro.garcia@uam.es](mailto:alvaro.garcia@uam.es)



Escuela Politécnica Superior



Universidad Autónoma de Madrid  
E28049 Madrid (SPAIN)

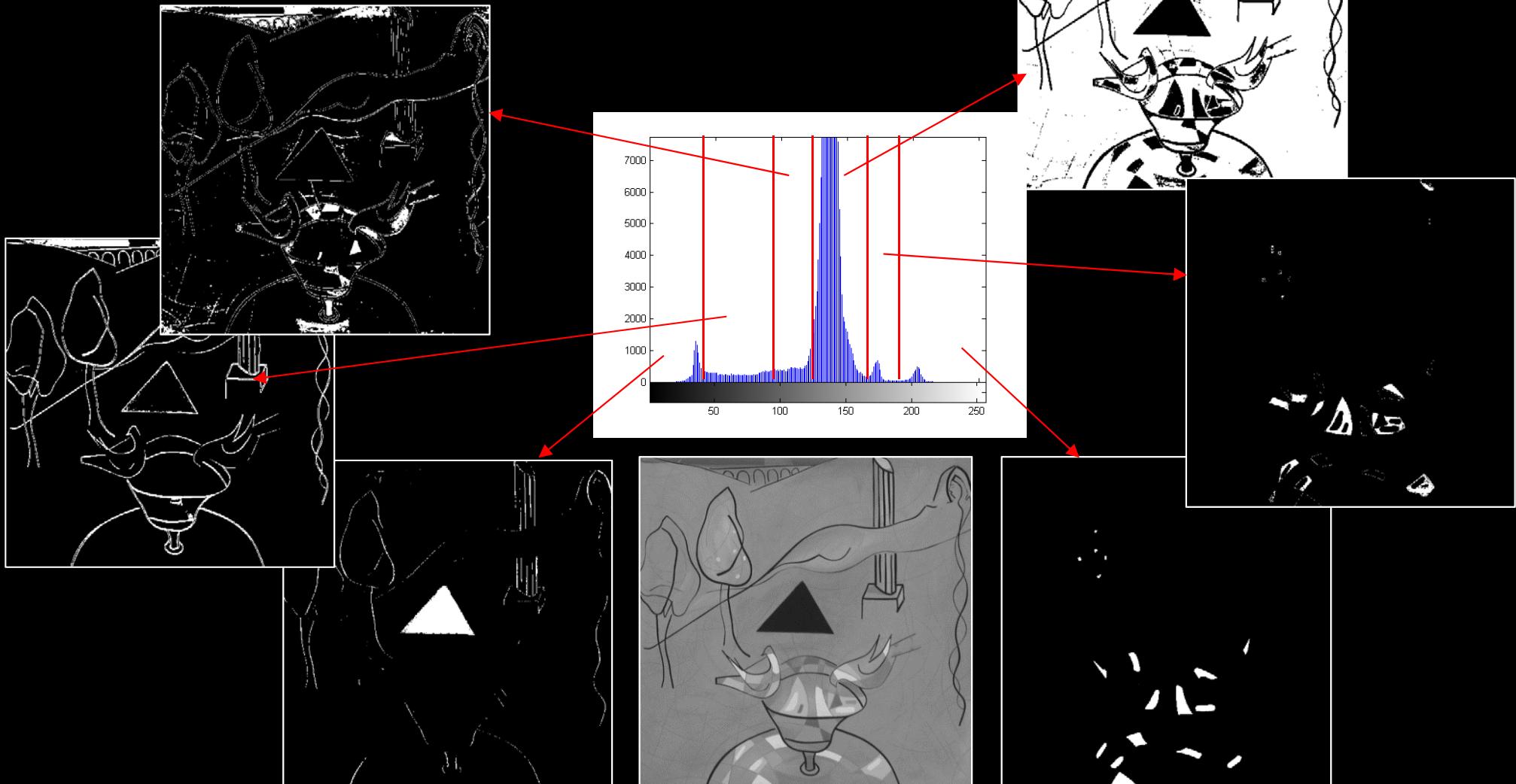


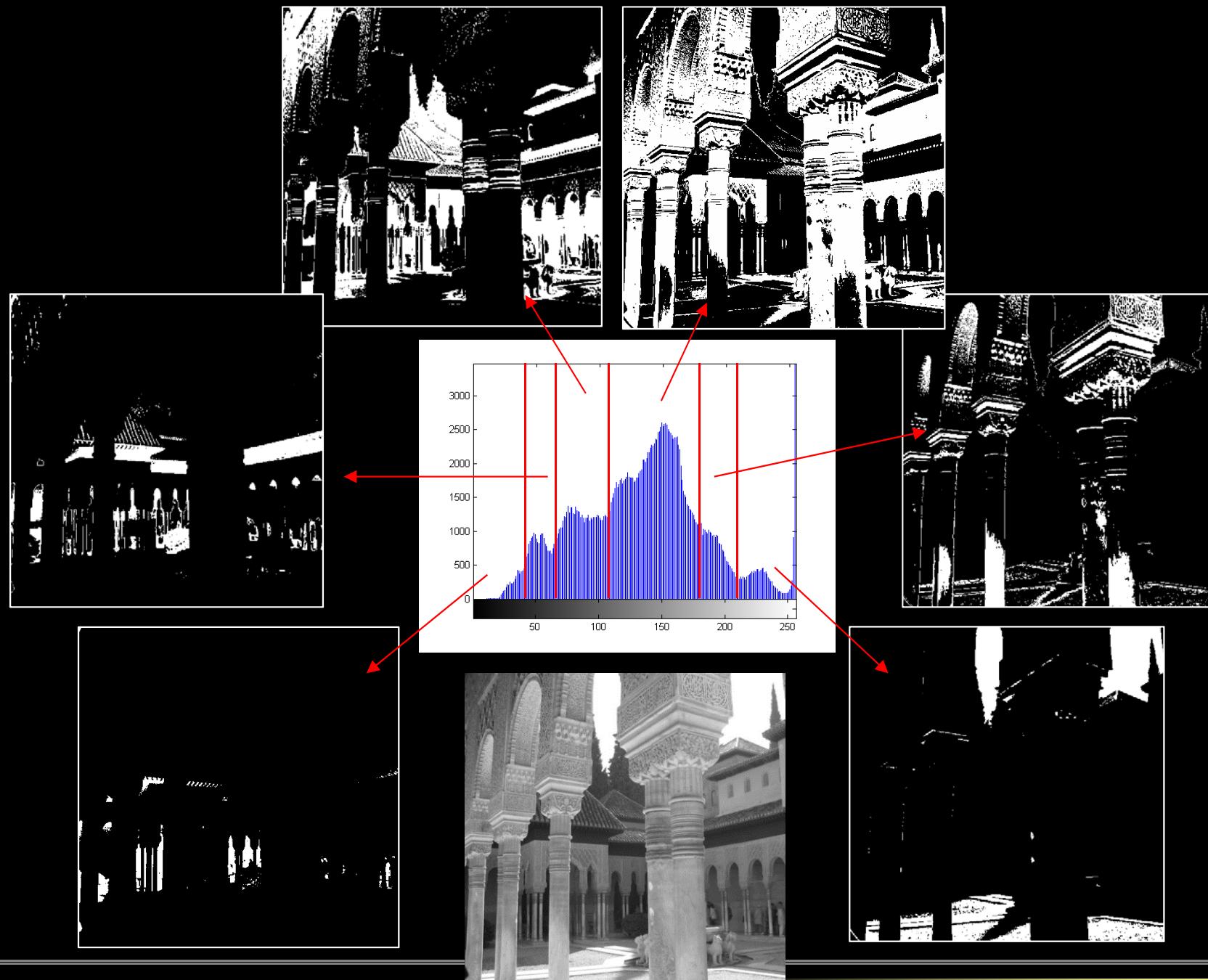
Video Processing  
and Understanding  
Lab

Grupo de Tratamiento e  
Interpretación de Vídeo

1. Aproximación geométrica al tratamiento de imágenes
2. Marco de análisis
3. Dilatación y erosión
4. Gradientes morfológicos
5. Aperturas y cierres
6. Filtrado por reconstrucción

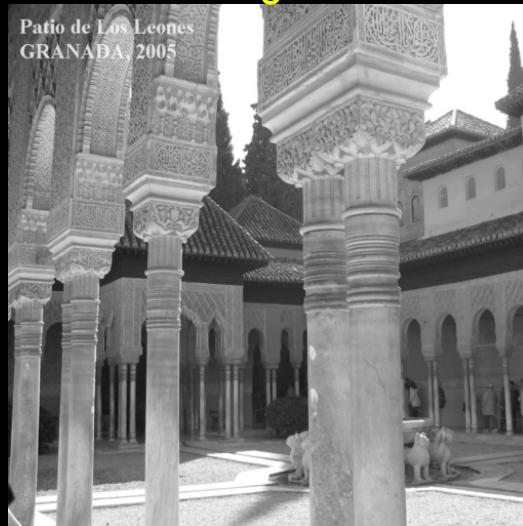
- Modelos de imagen y sus limitaciones:
  - Valor de los pixeles: operadores puntuales





- Señal 2D: interpretación frecuencial, filtrado, transformadas lineales,...

Original



Promedio 5x5



Promedio 15x15



Gradiente > 30



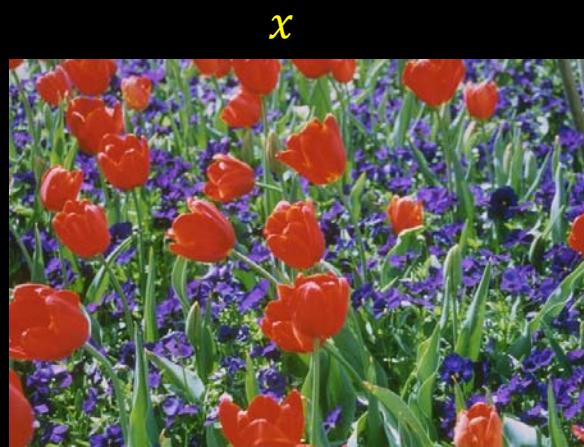
Gradiente > 10



- Retículos y morfología matemática. Esquema general:



- Superposición lineal e imágenes:

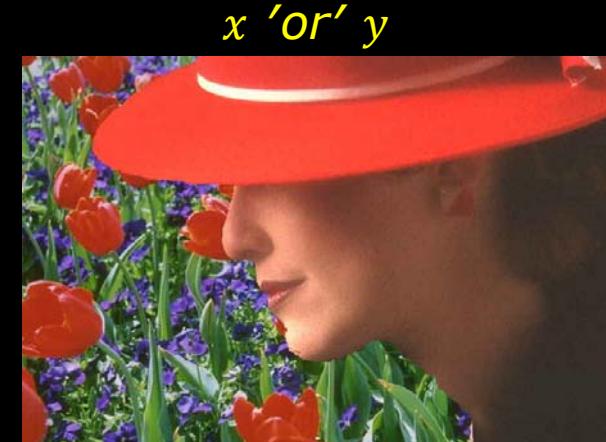


LINEAL

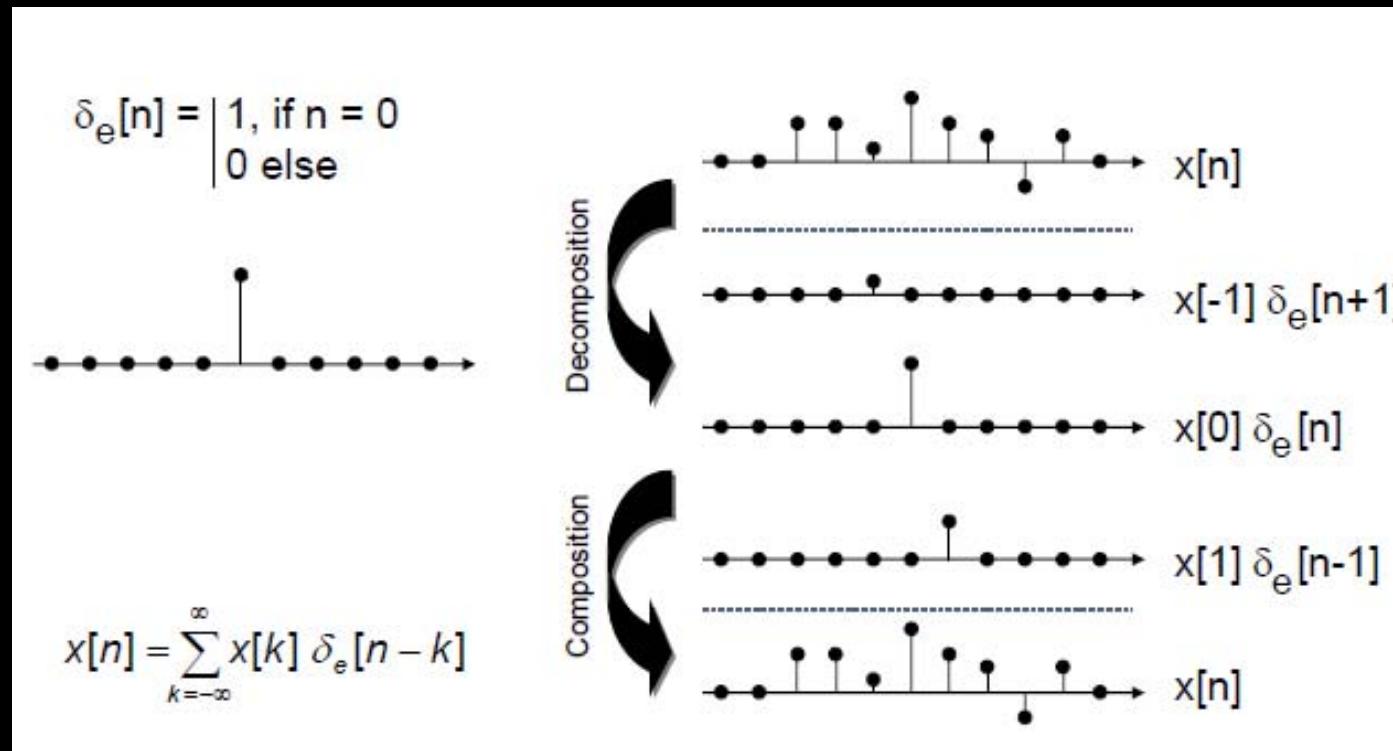


SUPERPOSICIÓN

NO  
LINEAL



- Esquema *tradicional/lineal*:
  - Señales como elementos de un espacio vectorial.
  - El impulso unidad como función básica.
  - Diseño de operadores: convolución, kernel (respuesta al impulso).
  - Variedad de operadores basada en el diseño de kernels o máscaras.



Fuente: P. Salembier, Introduction to geometrical Signal Processing, 2007

- Estructura matemática: espacio vectorial de funciones

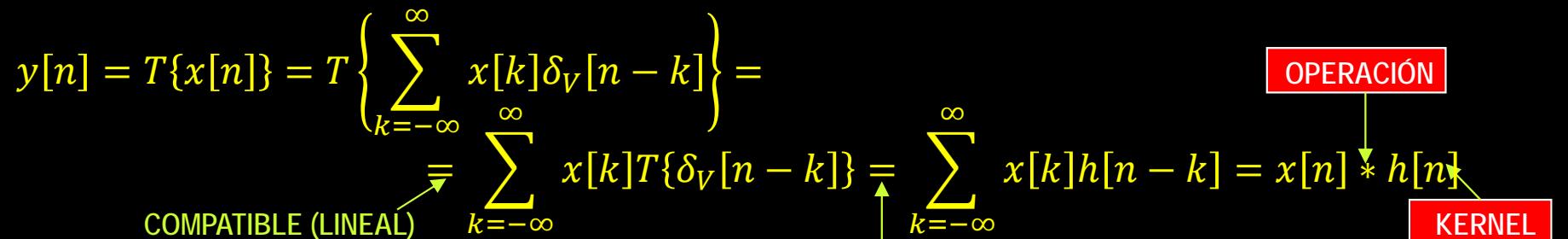
$$V = \langle \{x[n]\}, +, \cdot \rangle, n \in \mathbb{Z}, x[n] \in \mathbb{R}$$

- Elementos: campo de las funciones reales de variable discreta
- Función básica: delta o unidad ( $\delta_V[n]$ )
- Operaciones: adición, producto por un escalar:
- Señal como superposición (suma, producto por un escalar de funciones básicas desplazadas):

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta_V[n - k]$$

- Diseño de operadores (operación + kernel)
  - Preservan la estructura:  $x_1[n] = x_2[n] \Rightarrow T\{x_1[n]\} = T\{x_2[n]\}$
  - Compatibles con las operaciones de la estructura (invariantes a desplazamientos)

$$y[n] = T\{x[n]\} = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta_V[n - k] \right\} =$$



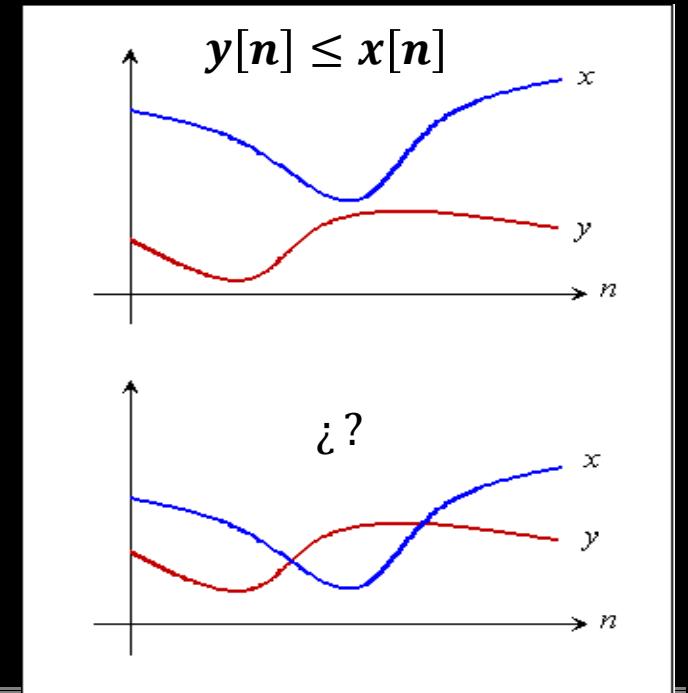
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T\{\delta_V[n - k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k] = x[n] * h[n]$$

- Esquema de análisis basado en *retículos* (morfología matemática):
  - Señales como elementos de un retículo (estructura matemática: conjunto de elementos sobre los que se define una relación parcial de orden  $\leq$ ).

$$L = \langle \{x\}, \vee, \wedge \rangle, x \in \mathbb{R}$$

- Operadores: supremo ( $\vee$ ) e ínfimo ( $\wedge$ ) que son duales.
- Elementos: campo de las funciones reales de variable discreta
  - Sobre este nuevo campo hay elementos en los que no es posible establecer la relación  $\leq$ ),

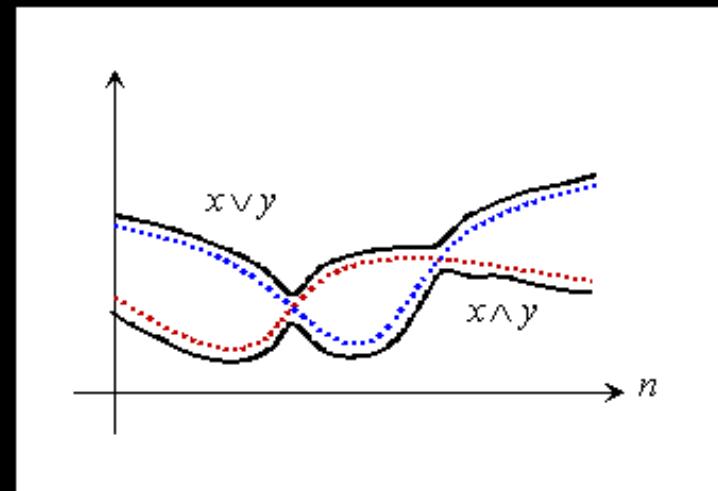
$$x \leq y \Leftrightarrow x[n] \leq y[n], \forall n \in \mathbb{Z}$$



- Esquema de análisis basado en *retículos* (morfología matemática):
  - Elementos: campo de las funciones reales de variable discreta
    - Necesidad de definir el significado de las operaciones ‘sup’ e ‘inf’ sobre este nuevo campo:

$$z = x \vee y \Rightarrow z[n] = \text{Max}\{x[n], y[n]\}, \forall n \in \mathbb{Z}$$

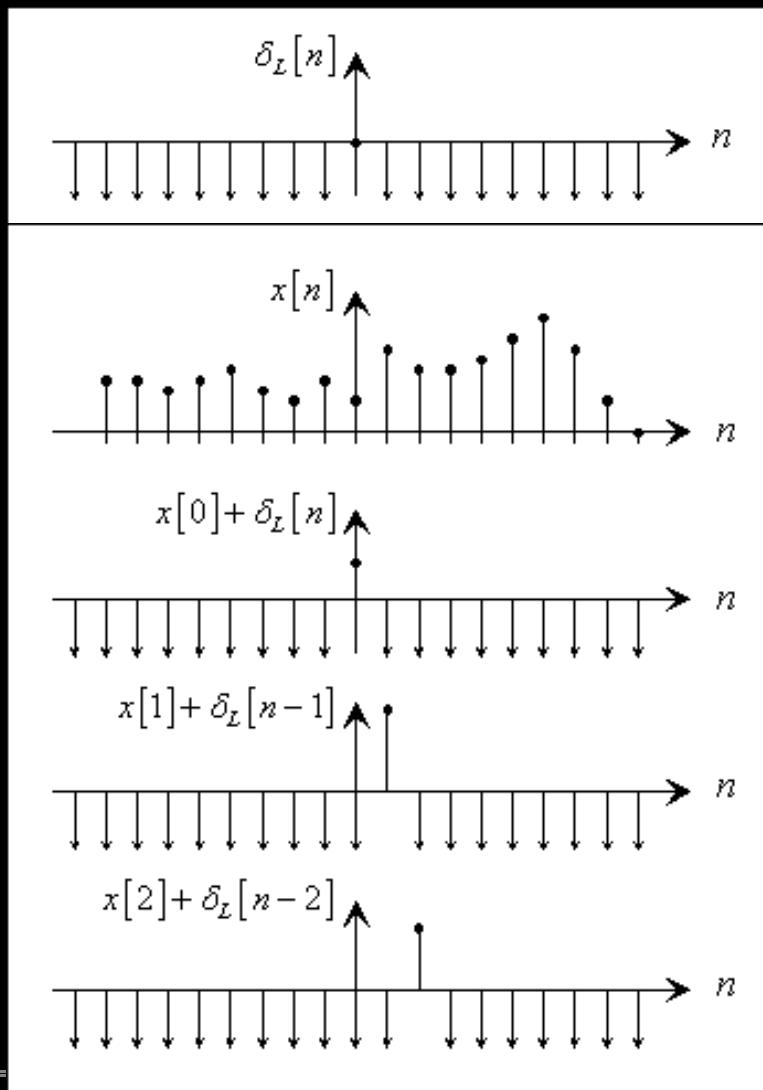
$$z = x \wedge y \Rightarrow z[n] = \text{Min}\{x[n], y[n]\}, \forall n \in \mathbb{Z}$$



- Inclusión de la operación ‘suma por un escalar’ en la estructura

$$L = \langle \{x[n]\}, \vee, \wedge, + \rangle, n \in \mathbb{Z}, x[n] \in \mathbb{R}$$

- Esquema de análisis basado en *retículos* (morfología matemática):
  - El ‘punto’ como función básica ( $\delta_L[n]$ ).



$$\delta_L[n] = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ -\infty & , resto \end{cases}$$

Señal como superposición (supremo+suma por un escalar) de funciones básicas desplazadas:

$$x[n] = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] + \delta_L[n-k])$$

Caso dual: señal como superposición (ínfimo+suma por un escalar) de funciones básicas desplazadas:

$$x[n] = \bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] - \delta_L[n-k])$$

- Esquema de análisis basado en *retículos* (morfología matemática):
    - Diseño de operadores: dilatación y erosión, kernel (elemento estructurante).
      - Preservan la estructura:  $x_1[n] \leq x_2[n] \Rightarrow T\{x_1[n]\} \leq T\{x_2[n]\}$
      - Compatibles con las operaciones de la estructura
      - Invariantes a desplazamientos

# DILATACIÓN

$$y[n] = T\{x[n]\} = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] + \delta_L[n-k]) \right\} =$$

$$= \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} (x|$$

↑

COMPATIBLE

$$= \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] + T\{\delta_L[n-k]\}) = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] + b[n-k]) = x[n] \oplus b[n]$$

↑  
COMPATIBLE                    INvariante

OPERADOR

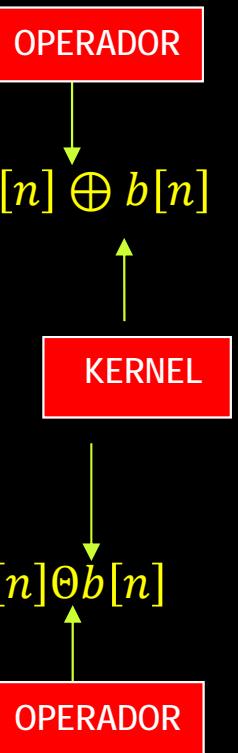
## EROSIÓN

$$y[n] = T\{x[n]\} = T \left\{ \bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] - \delta_L[n-k]) \right\} =$$

$$= \bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] - T\{\delta_L[n-k]\}) = \bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] - b[\mathbf{k} - \mathbf{n}]) = x[n]\Theta b[n]$$

## KERNEL

OPERADOR



- Esquema de análisis basado en *retículos* (morfología matemática):
  - Operadores: combinación erosión/dilatación.

- Elementos estructurantes planos:  $b[n] \in \{0, -\infty\}$
- Dilatación:

$$y[n] = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] + b[n-k]) = \bigvee_{k=-\infty}^{\infty} (x[n-k] + b[k]) = \bigvee_{k/b[k]=0} x[n-k]$$

Máximo de los valores de la señal que coinciden con los ceros del elemento estructurante invertido

- Erosión:

$$y[n] = \bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x[k] - b[k-n]) = \bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x[n+k] - b[k]) = \bigwedge_{k/b[k]=0} x[n+k]$$

Mínimo de los valores de la señal que coinciden con los ceros del elemento estructurante

- Motivación:
  - Baja complejidad computacional: cálculo mínimos/máximos de la señal de entrada
  - El resultado para cada ‘n’ es un valor de la señal de entrada: estabilidad y conservación del rango y de la precisión.
  - Preservan el contraste en los contornos bien definidos.

- Esquema de análisis basado en *retículos* (morfología matemática):
  - Operadores: combinación erosión/dilatación.
    - Procedimiento de aplicación similar al de los operadores lineales:  
Opción1: Inversión del kernel y aplicación sobre cada píxel.  
Opción2: Elemento estructurante como composición de funciones básicas.

$$\begin{aligned} b[n] &= \vee (\delta_L[n], \delta_L[n - 1], \delta_L[n - 2]) \\ \Rightarrow &\begin{cases} y[n] = x[n] \oplus b[n] = \vee (x[n + 2], x[n + 1], x[n]) \\ y[n] = x[n] \ominus b[n] = \wedge (x[n], x[n - 1], x[n - 2]) \end{cases} \end{aligned}$$

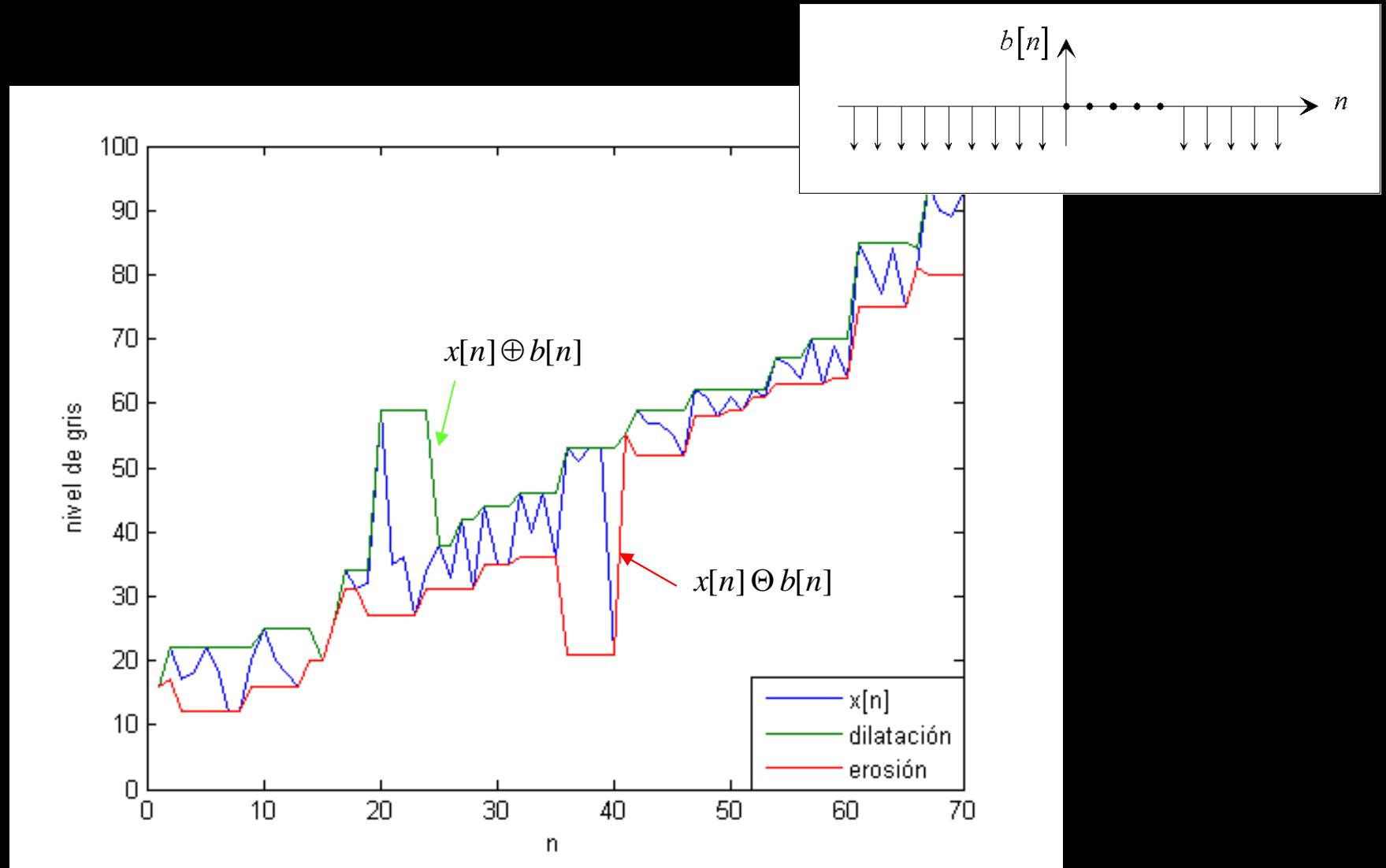
- Comparativa

Principio de superposición	Estructura matemática	Características
Lineal	Espacio vectorial	$V = \langle \{x[n]\}, +, \cdot \rangle$
Min/Max	Retículo (de funciones)	$L = \langle \{x[n]\}, \vee, \wedge, + \rangle$ Orden parcial $\leq$

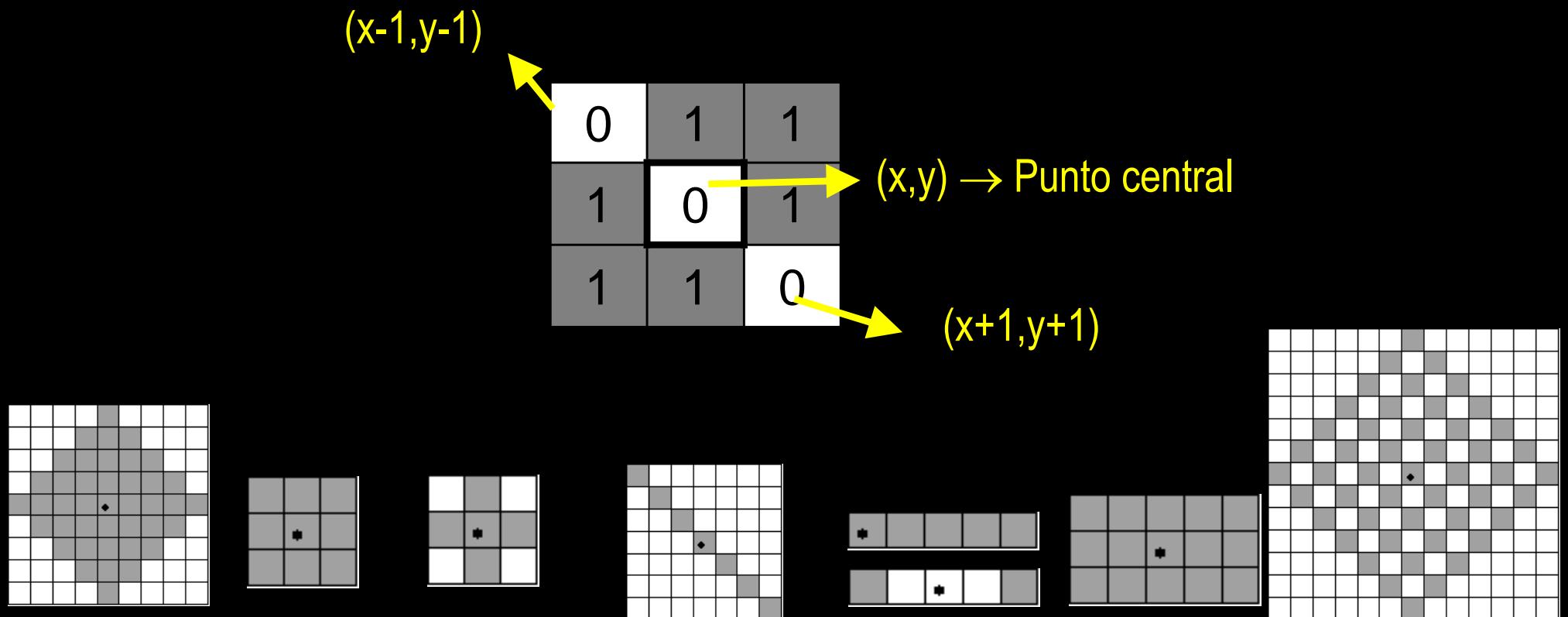
Se puede considerar un retículo especial para imágenes binarias (orden: inclusión, sup: unión, inf: intersección). Pero se suele considerar las imágenes binarias como imágenes en escala de grises con dos niveles y se utiliza el mismo retículo para ambas.

Fuente: P. Salembier, Introduction to geometrical Signal Processing, 2007

- Efecto sobre una señal 1D.



- Imágenes 2D
  - Elementos estructurantes 2D (máscara de convolución)

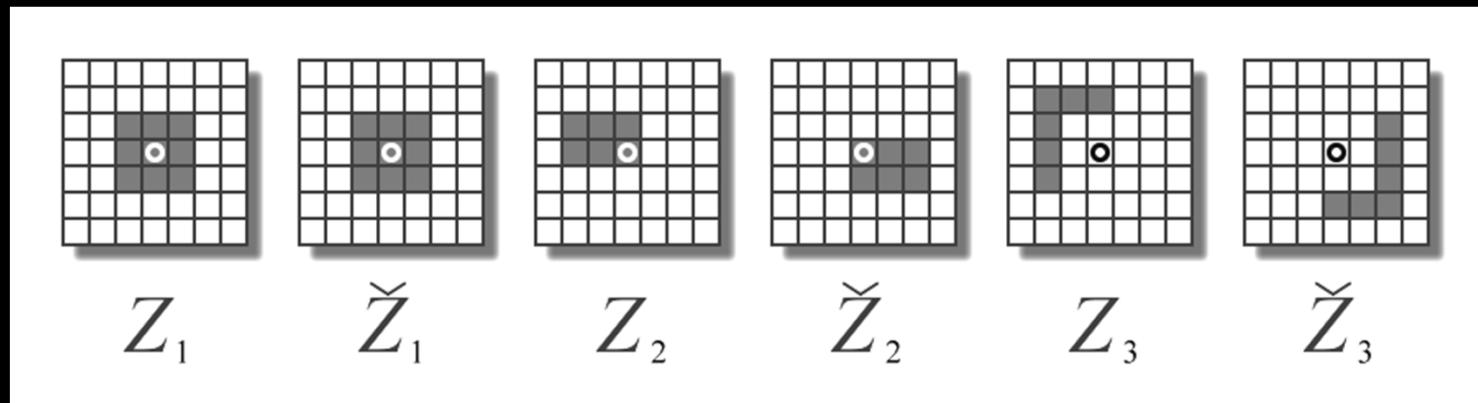


Ejemplos de elementos estructurantes (*kernels*) planos. Los valores oscuros representan ceros y los valores claros representan  $-\infty$ . El punto negro indica el origen de coordenadas.

- Imágenes 2D

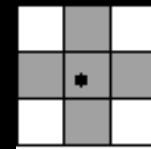
- Elementos estructurantes reflejados 2D ( $\check{Z}$ )

- $\check{Z}(x, y) = Z(-x, -y) = b[k - n] \rightarrow \check{Z}$  es  $Z$  rotado 180º alrededor del origen.
    - Motivaciones históricas.



Ejemplos de elementos estructurantes (*kernels*) planos. Los valores oscuros representan ceros y los valores claros representan  $-\infty$ . El punto negro indica el origen de coordenadas.

## ■ Dilatación para imágenes 2D



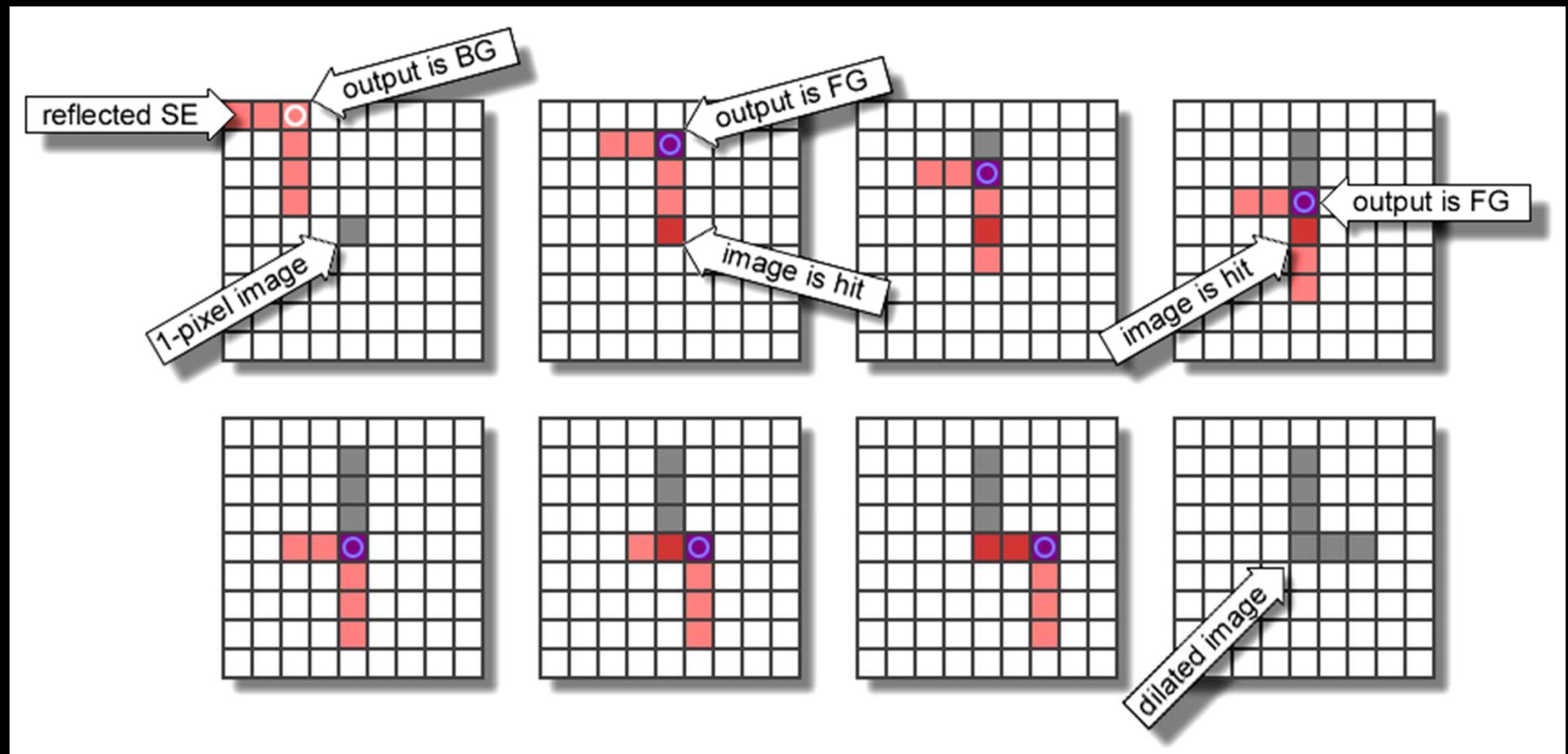
# Elemento estructurante

## Imagen original

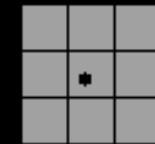
## Imagen dilatada



- Dilatación para imágenes 2D
  - Utilizando elementos estructurantes reflejados 2D ( $\tilde{Z}$ , *reflected SE*)
  - Imágenes binarias: blanco (BG), negro/gris (FG)



- Dilatación para imágenes 2D



Elemento estructurante



Imagen original

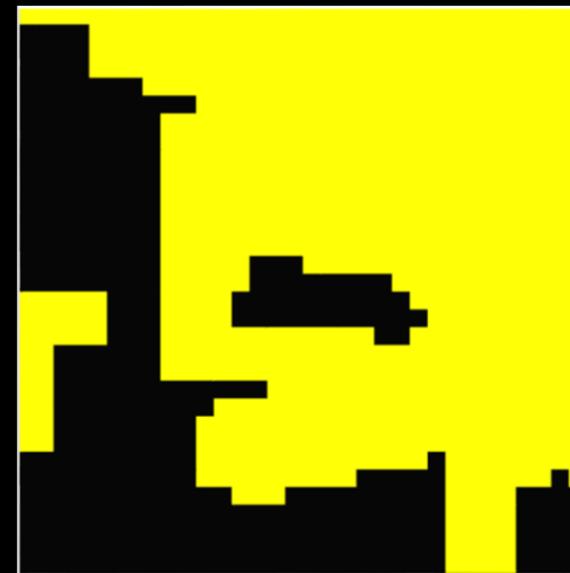
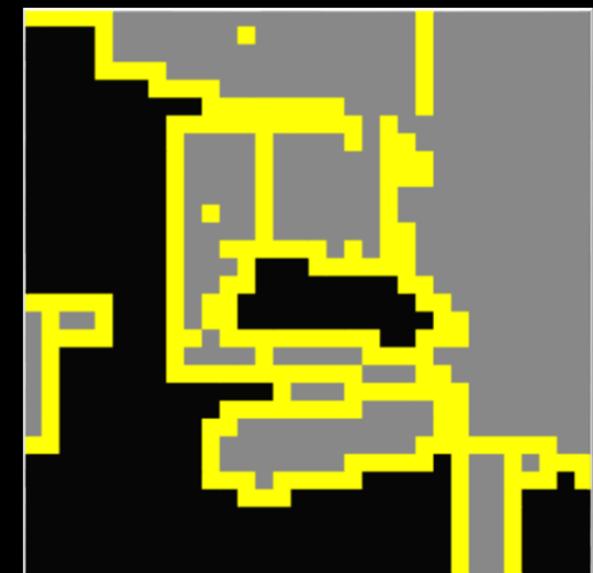


Imagen dilatada



original / dilatación

- Dilatación para imágenes 2D
  - Calculo de dilatación mediante desplazamiento de imágenes
  - Elemento como suma de funciones básicas

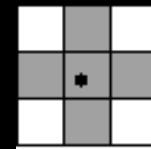


$$b[n] = \vee (\delta_L[n - 1], \delta_L[n], \delta_L[n + 1], \delta_L[n + 2])$$

- Entonces la dilatación se puede calcular mediante:

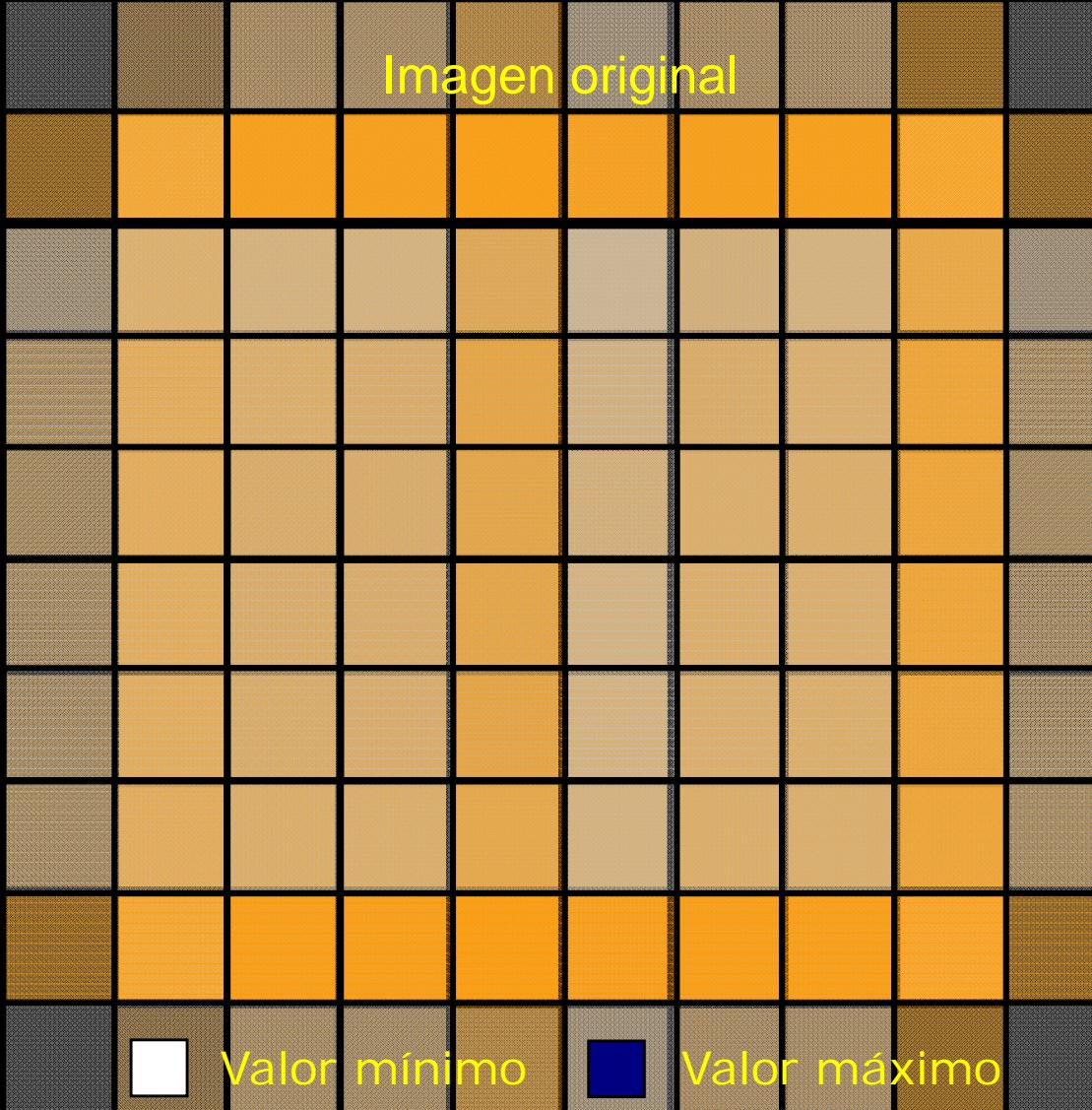
$$\begin{aligned}y[n] &= x[n] \oplus b[n] = \\&\vee (x[n - 1], x[n - 2], x[n], x[n + 1])\end{aligned}$$

- ## ■ Erosión para imágenes 2D

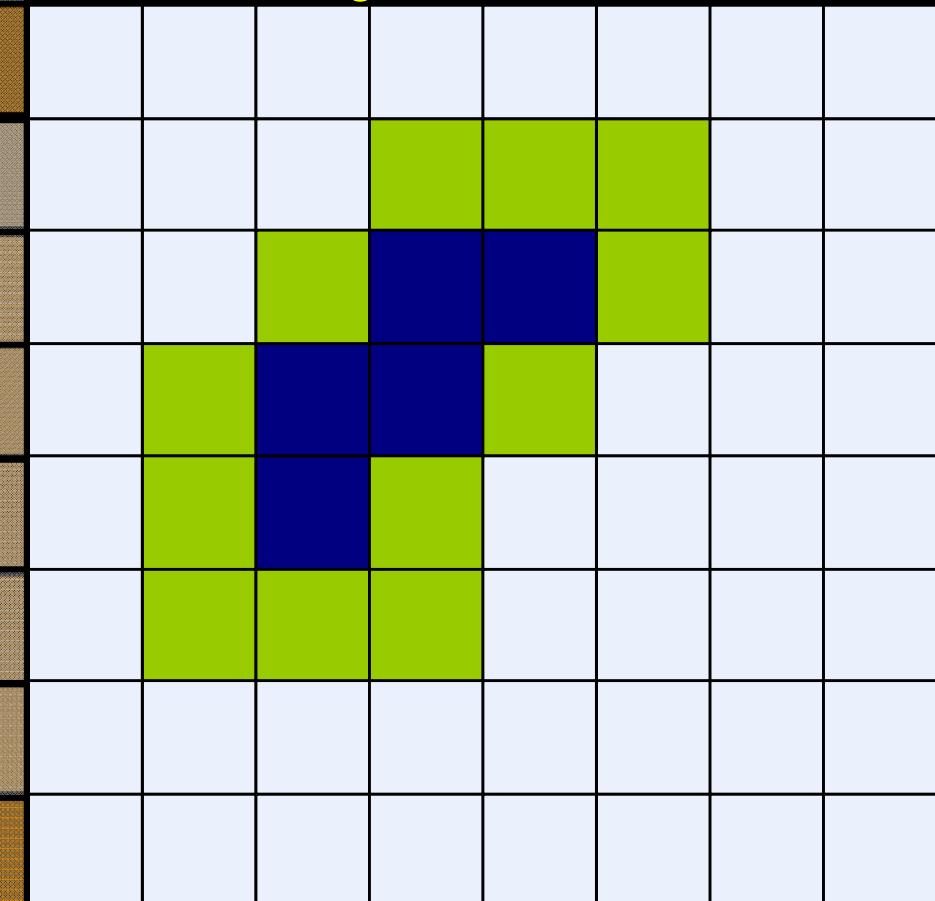


## Elemento estructurante

## Imagen original



## Imagen erosionada



1

## Valor mínimo

1

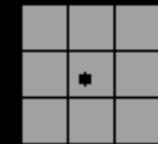
# Valor máximo

1

## Pixel eliminado

## Pixel mantenido

- Erosión de imágenes 2D



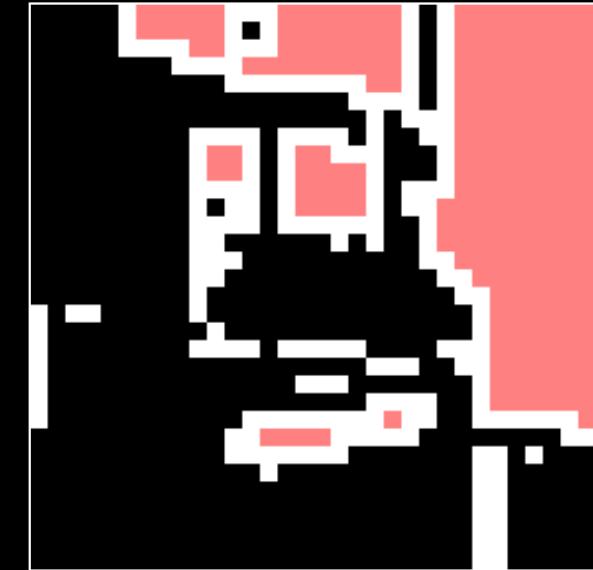
Elemento estructurante



Imagen original



Imagen erosionada



erosión / original

- Erosión para imágenes 2D
  - Calculo de erosión mediante desplazamiento de imágenes

- Elemento como suma de funciones básicas



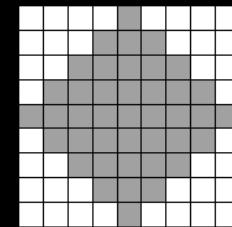
$$b[n] = \wedge (\delta_L[n - 1], \delta_L[n], \delta_L[n + 1], \delta_L[n + 2])$$

- Entonces la erosión se puede calcular mediante:

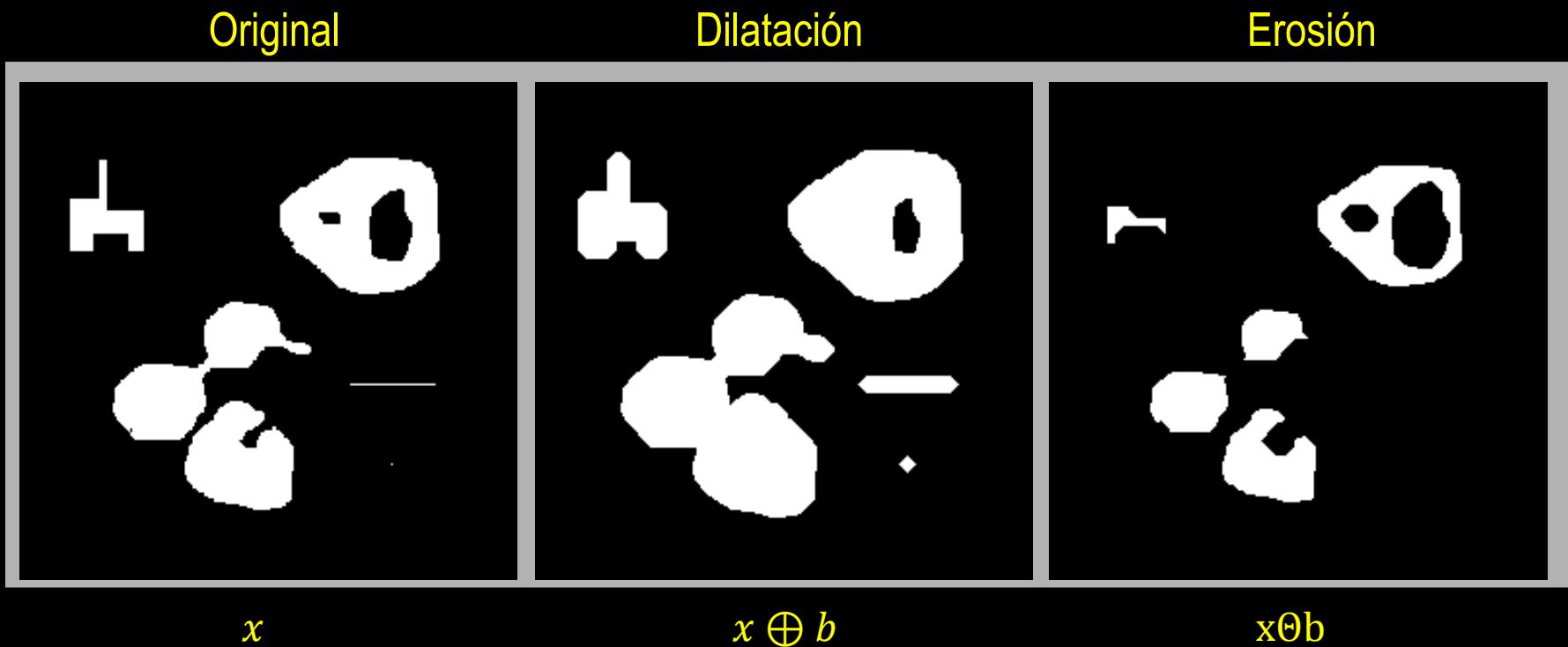
$$y[n] = x[n] \Theta b[n] = \wedge (x[n - 1], x[n], x[n + 1], x[n + 2])$$

- Efecto sobre una imagen binaria.

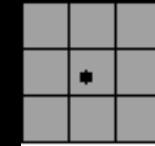
$b[m, n]$



Elemento estructurante



- Efecto sobre una imagen en niveles de gris.



Elemento estructurante

Original



$x$

Dilatación



$x \oplus b$

Erosión



$x \ominus b$

- Propiedades:

- Distribución :

$$(x \vee y) \oplus b = (x \oplus b) \vee (y \oplus b)$$

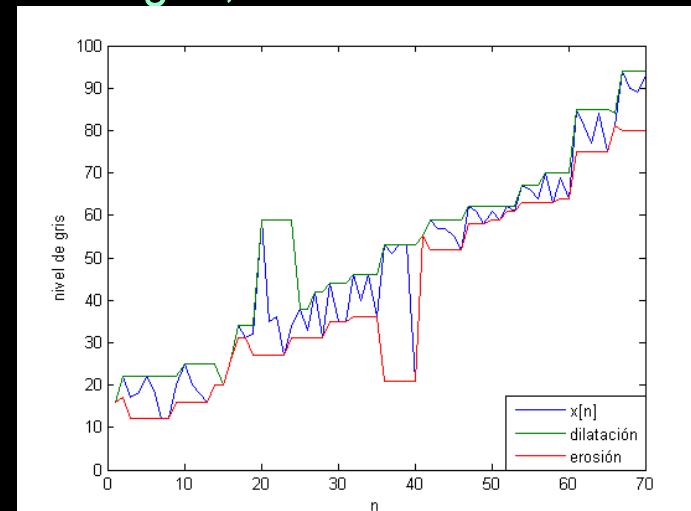
$$(x \wedge y) \Theta b = (x \Theta b) \wedge (y \Theta b)$$

- Composición:

$$x \oplus a \oplus b = x \oplus c, \quad c = a \oplus b$$

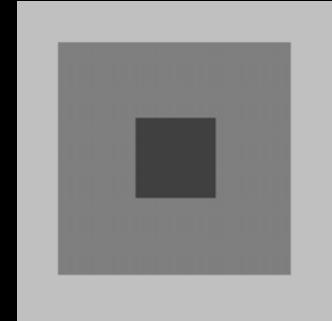
$$x \Theta a \Theta b = x \Theta c, \quad c = a \oplus b$$

- Extensividad: extensivo ( $x \leq T\{x\}$ ) o anti-extensivo ( $T\{x\} \leq x$ ). Si el elemento estructurante incluye el origen, la dilatación es extensiva y la erosión anti-extensiva.



# DILATACION Y EROSION

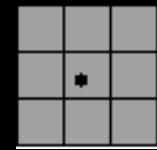
- Propiedades:
- Distribución :



I1



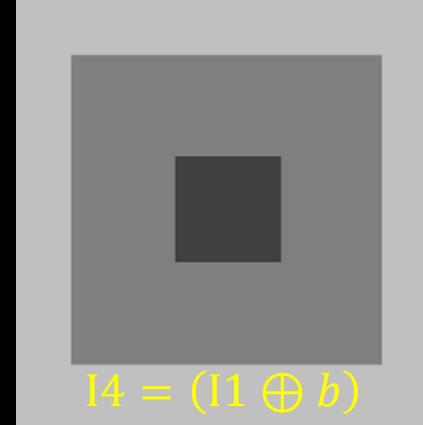
I2



Elemento estructurante



$I3 = \text{Max}(I1, I2)$



$I4 = (I1 \oplus b)$



$I5 = (I2 \oplus b)$

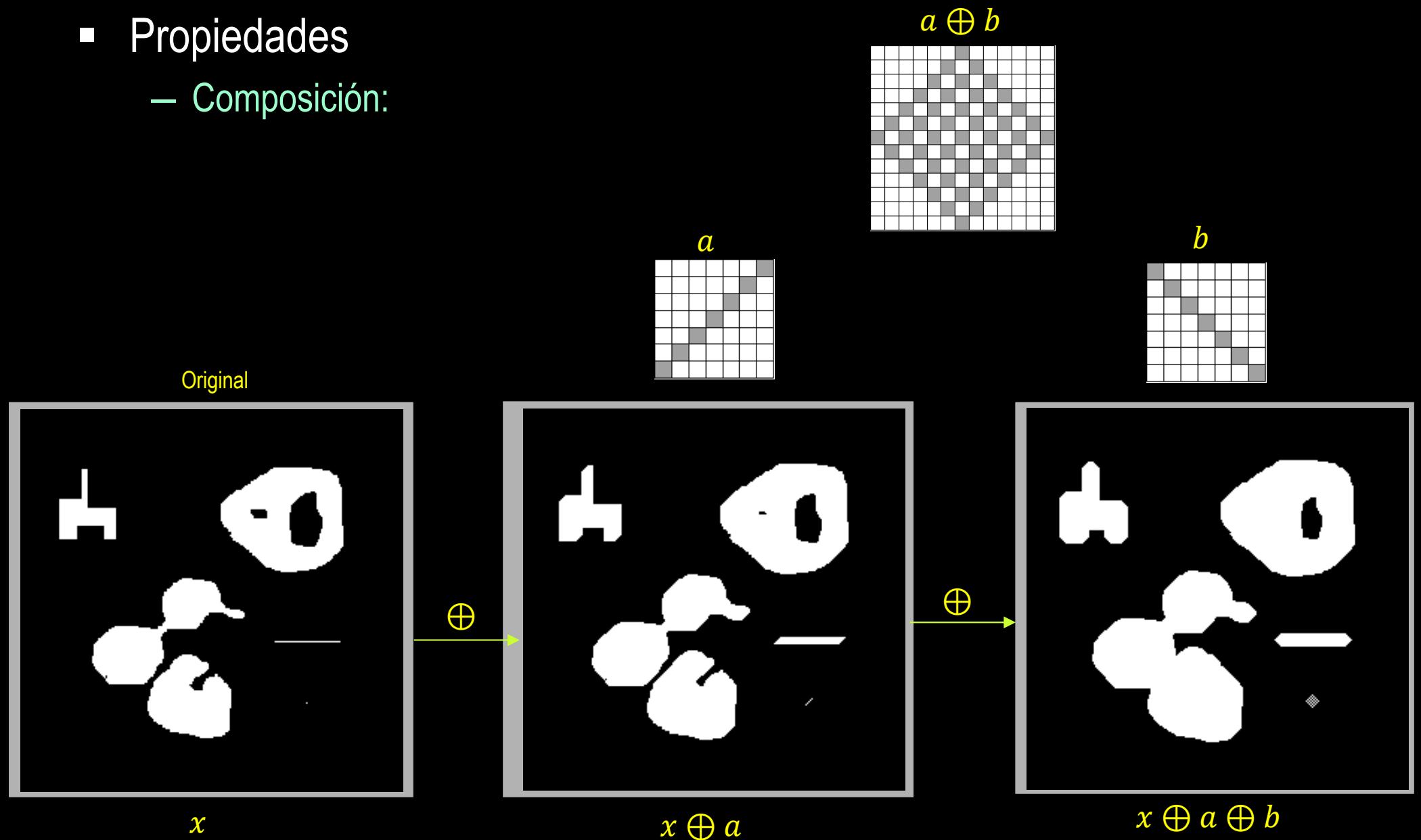


$(I3 \oplus b)$



$\max(I4, I5)$

- Propiedades
  - Composición:



- Ejemplos de aplicación:
  - Reparación (erosion/dilatación).

Imagen  
Original

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

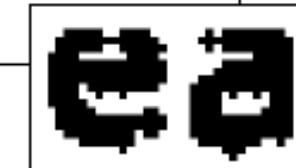


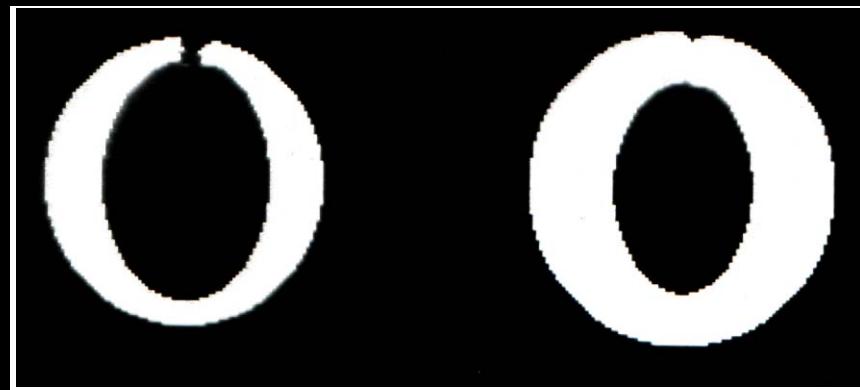
Imagen  
erosionada/  
dilatada

0	1	0
1	1	1
0	1	0

Elemento  
estructurante

- Ejemplos de aplicación:
  - Reparación (dilatación).

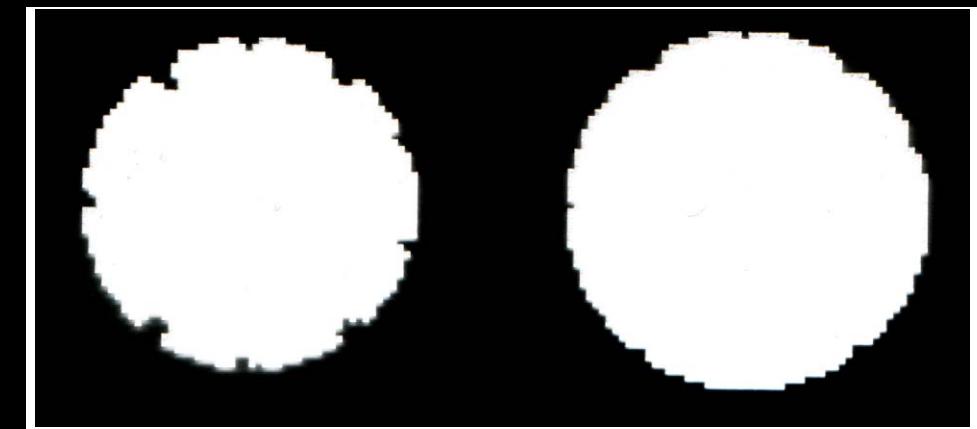
Repara objetos partidos



$x$

$x \oplus a$

Repara imperfecciones

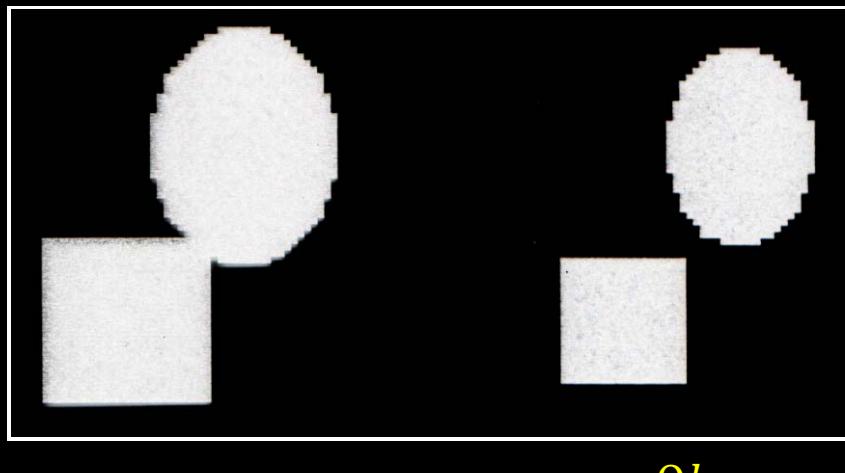


$x$

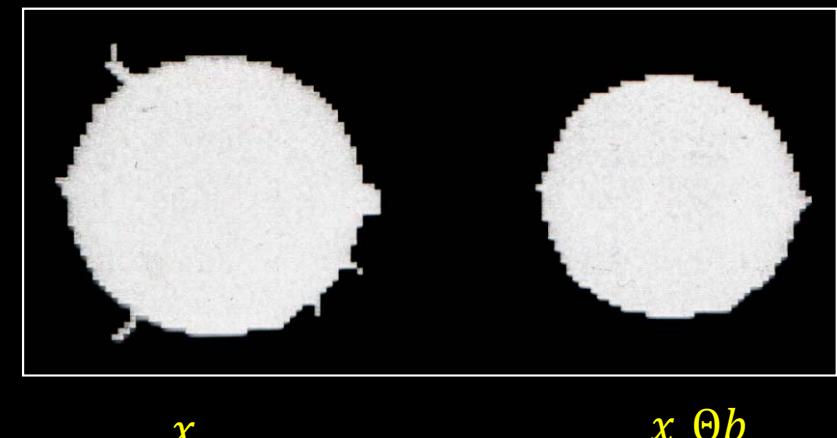
$x \oplus a$

- Ejemplos de aplicación:
  - Reparación (erosión).

Separa objetos



Repara imperfecciones



- Ejemplos de aplicación
  - Simplificación.

$x$



$a?$



$x \oplus a$



- Ejemplos de aplicación
  - Simplificación.

$b?$



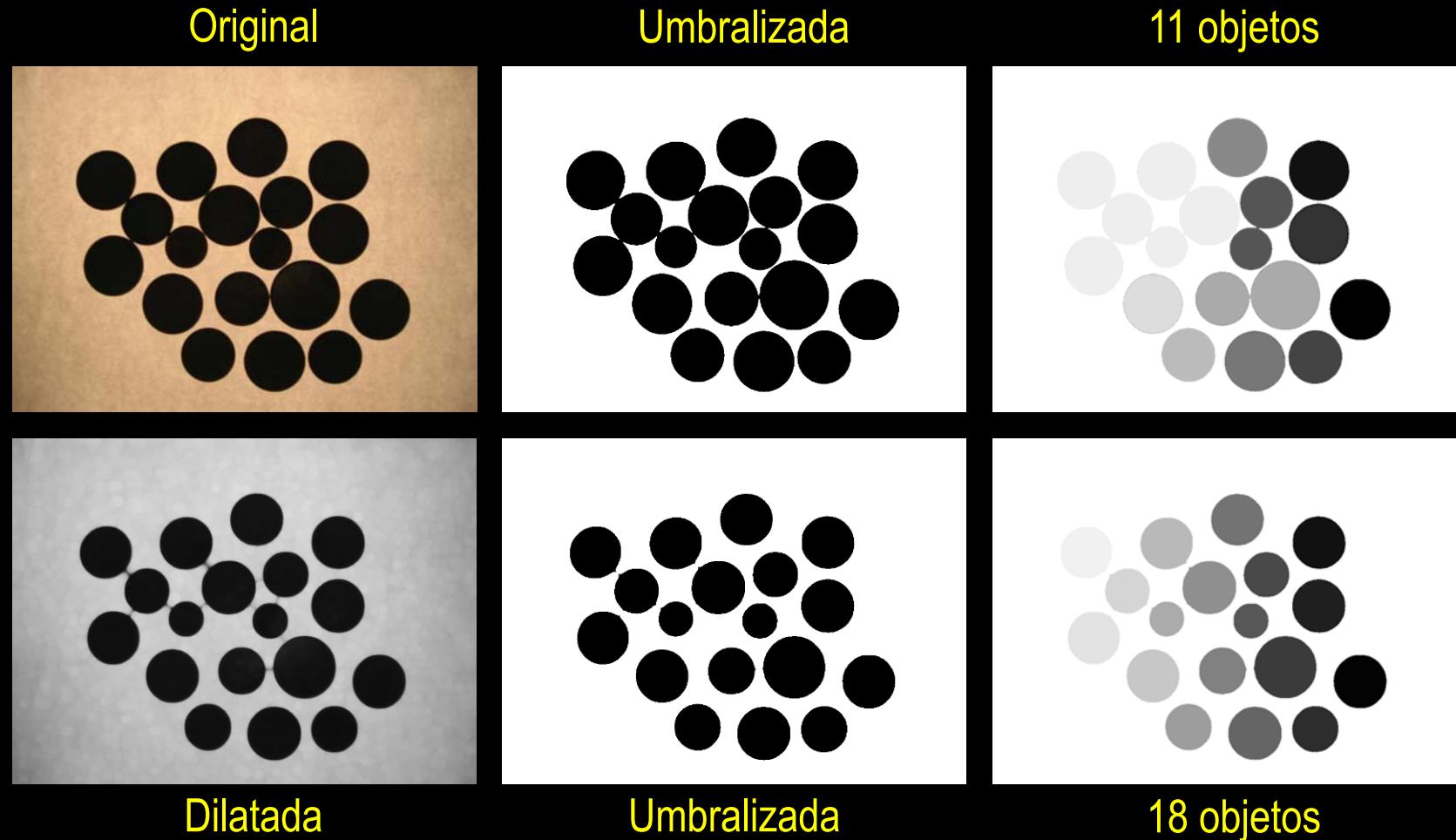
$x$



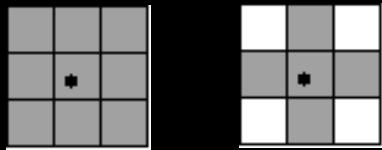
$x \Theta b$



- Ejemplos de aplicación
  - Separación de objetos conectados por efecto de la umbralización.

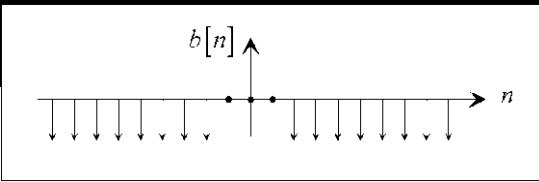
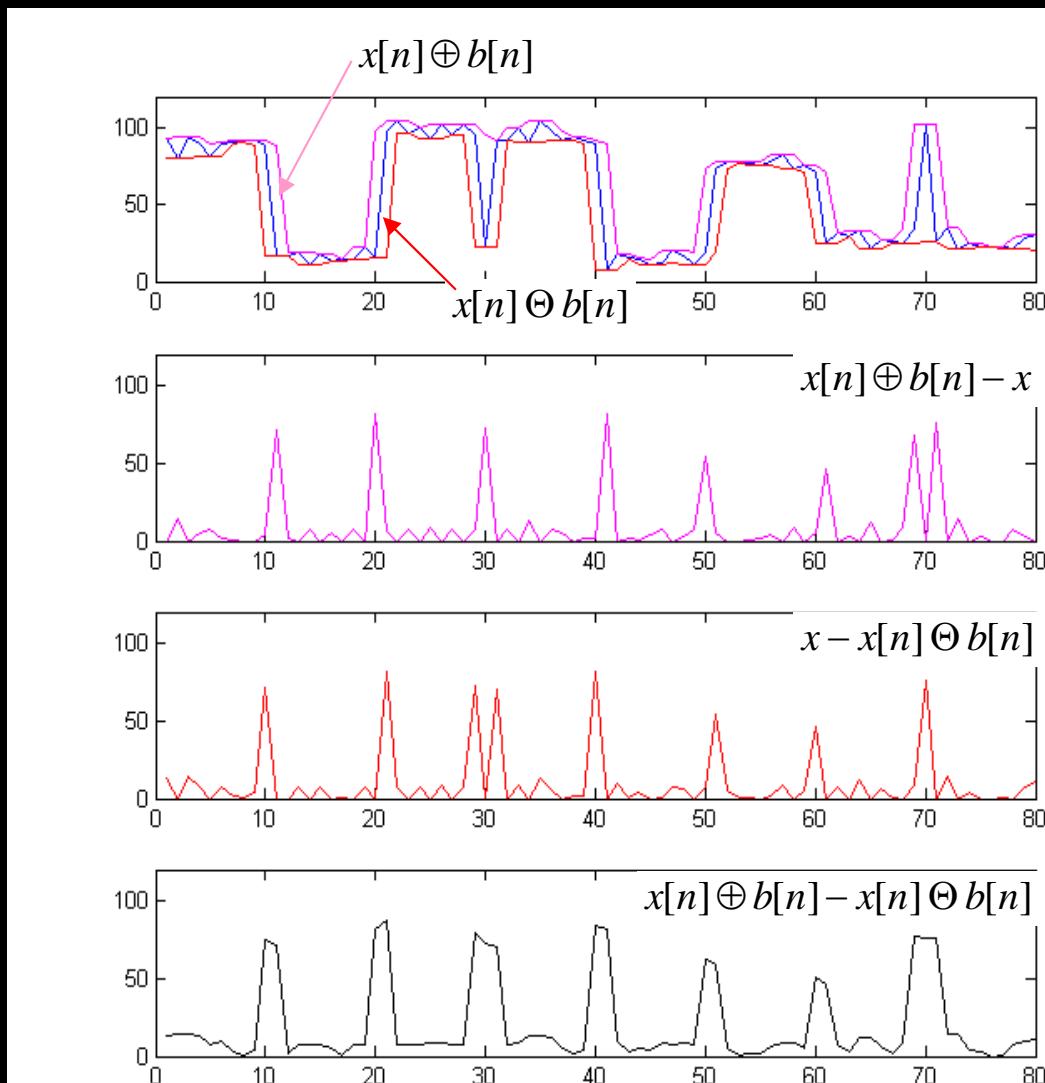


- El objetivo es resaltar los contornos.
- Definiciones:
  - Gradiente por dilatación:  $(x \oplus b) - x$
  - Gradiente por erosión:  $x - (x \ominus b)$
  - Gradiente morfológico:  $(x \oplus b) - (x \ominus b)$
- Se utiliza un elemento estructurante pequeño e isotrópico.



- Efecto:
  - Sobre una señal 1D.
  - Sobre una imagen binaria.
  - Sobre una imagen de niveles de gris.

## Gradientes morfológicos, 1D:



Mínimo elemento estructurante simétrico.

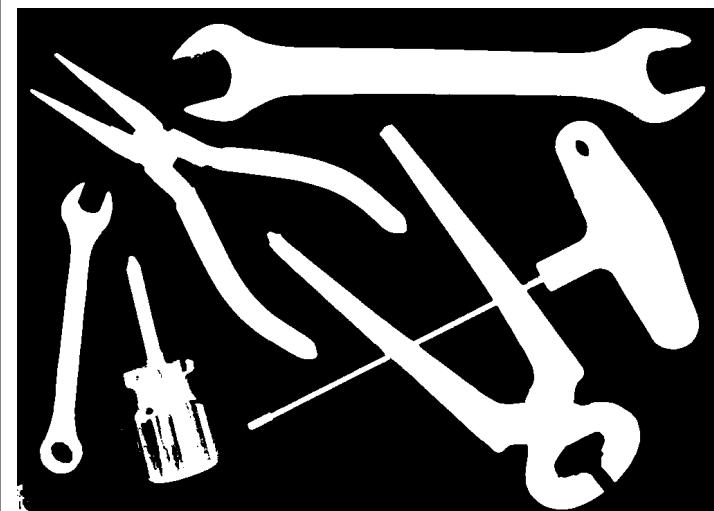
Marca el extremo inferior de las rampas y, en consecuencia, la posición de los mínimos.

Marca el extremo superior de las rampas y, en consecuencia, la posición de los máximos.

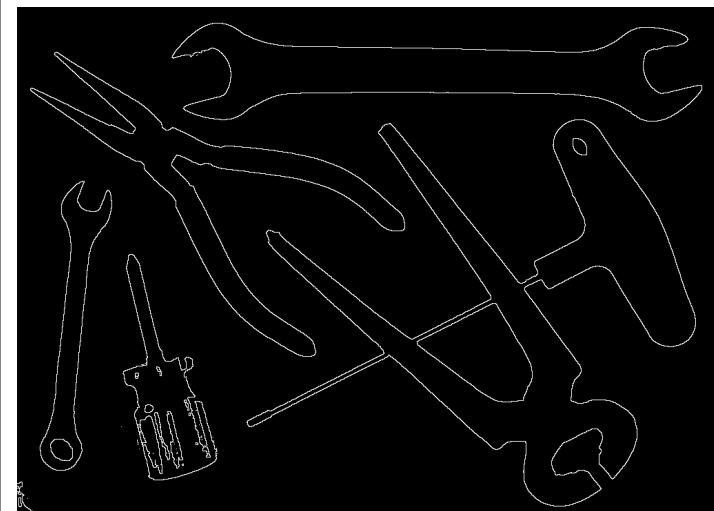
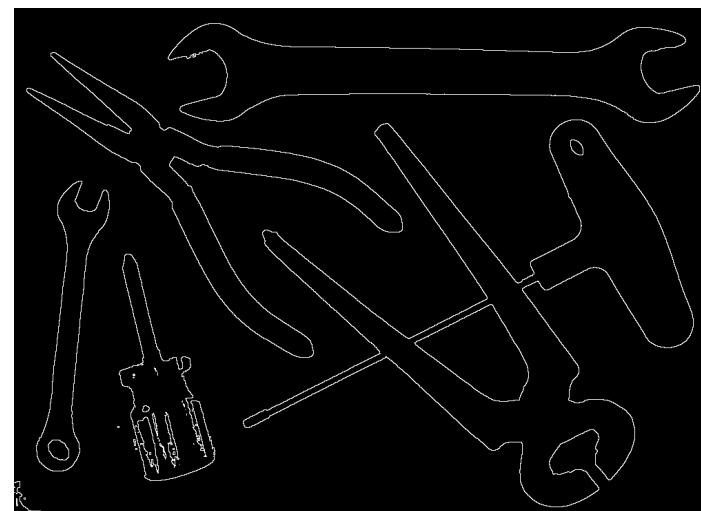
Marca las rampas en sus dos extremos y, en consecuencia, los máximos y mínimos en tres puntos (rampa-valor-rampa)

Gradientes morfológicos, imágenes binarias:

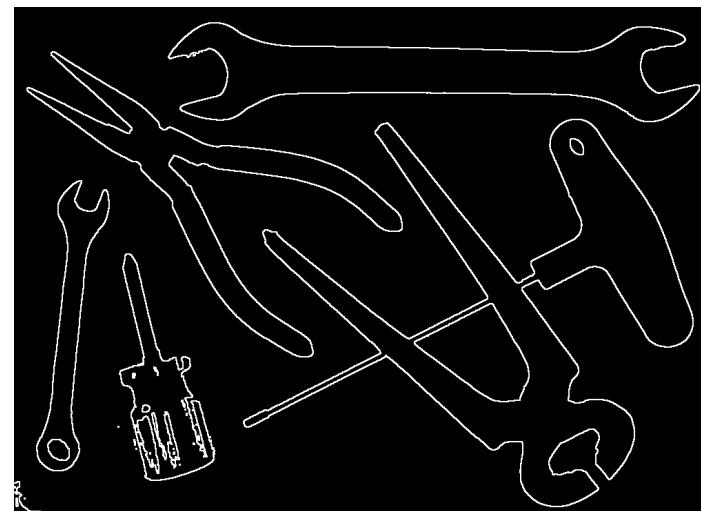
$x$



$(x \oplus b) \text{ XOR } x$

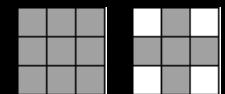


$x \text{ XOR } (x \ominus b)$

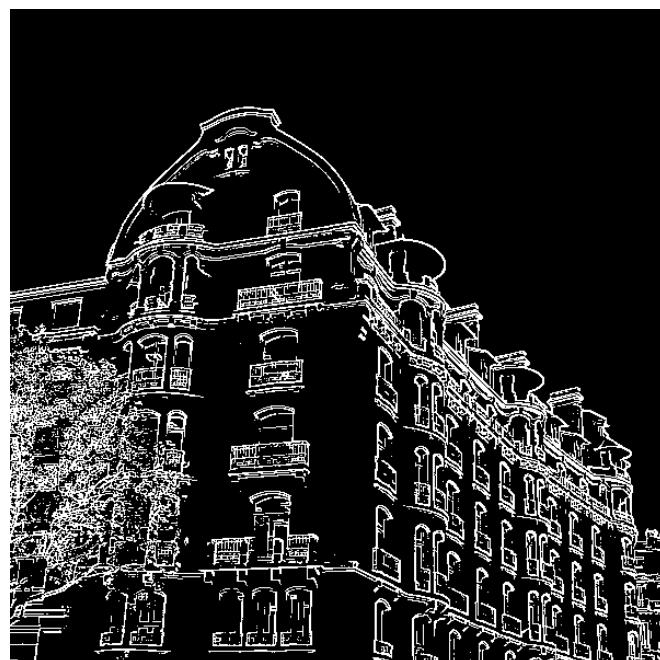


$(x \ominus b) \text{ XOR } (x \oplus b)$

Mínimos elementos estructurantes:

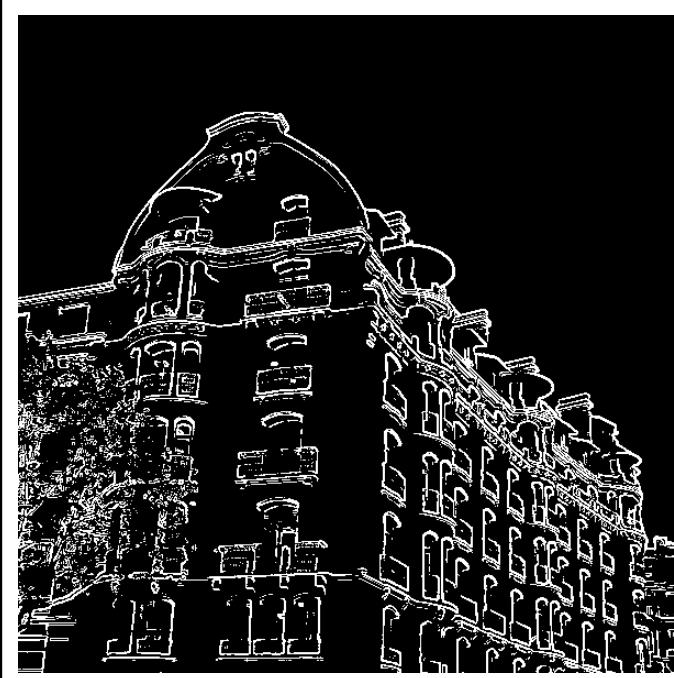


Gradientes umbralizados, imágenes en niveles de gris:

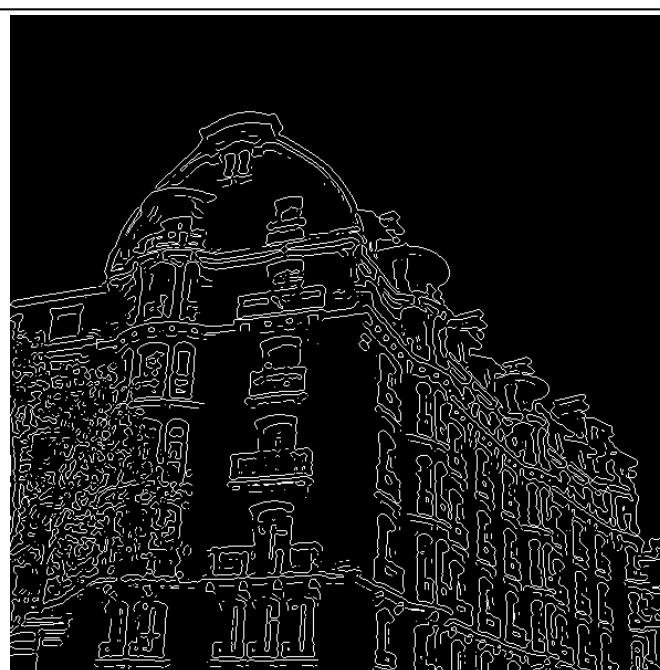


$$(x \oplus b) - x$$

Sobel.



LoG.



- Composición de los dos operadores básicos:

- Apertura:  $\gamma_b(x) = (x\Theta b) \oplus b$

- Cierre:  $\varphi_b(x) = (x \oplus b)\Theta b$

Elemento  
estructurante

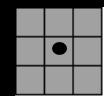
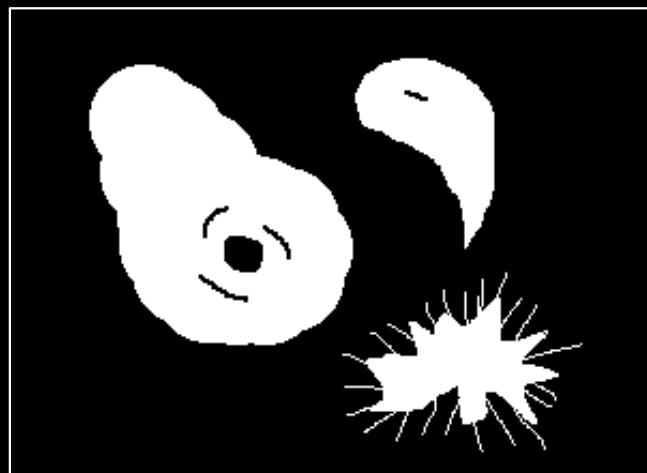


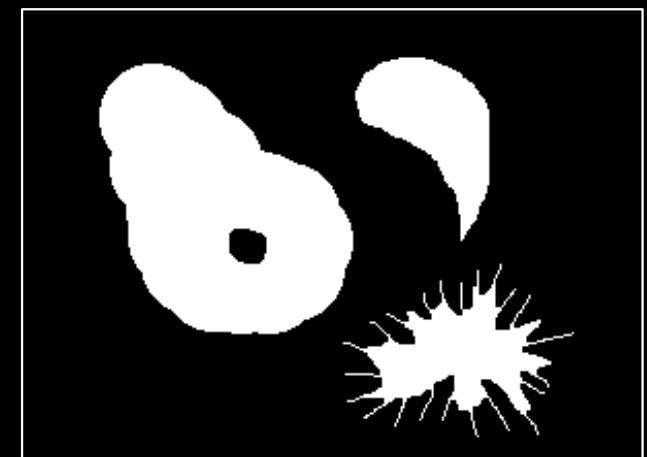
Imagen de entrada



Apertura

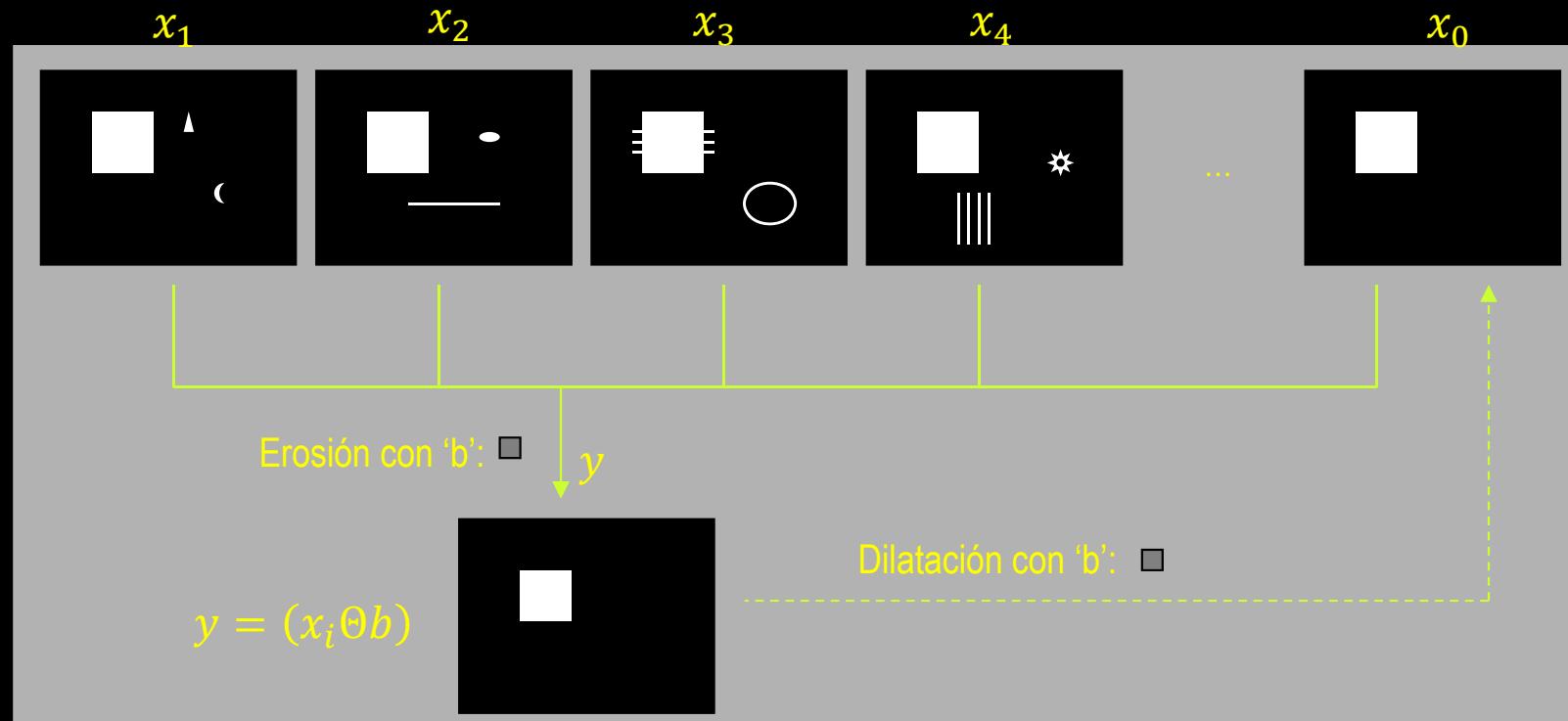


Cierre



- Interpretación en el retículo

$x_i$  : familia (infinita) de imágenes cuya erosión con 'b' es y



Apertura:

$$x_0 = \bigwedge_{k=-\infty}^{\infty} (x/x_i \Theta b = y)$$

$$x_0 = (y \oplus b) = (x_i \Theta b) \oplus b$$

$$x_0 = \gamma_b(x_i)$$

Anti-extensiva:  $x_0 = \gamma_b(x_i) \leq x_i$

Idempotente:  $\gamma_b(x_0) = x_0$

- Propiedades:

- Preservan la estructura:

$$x \leq y \Rightarrow x\Theta b \leq y\Theta b \Rightarrow (x\Theta b) \oplus b \leq (y\Theta b) \oplus b \Rightarrow \gamma_b(x) \leq \gamma_b(y)$$

Análogamente:  $\varphi_b(x) \leq \varphi_b(y)$

- Extensividad:

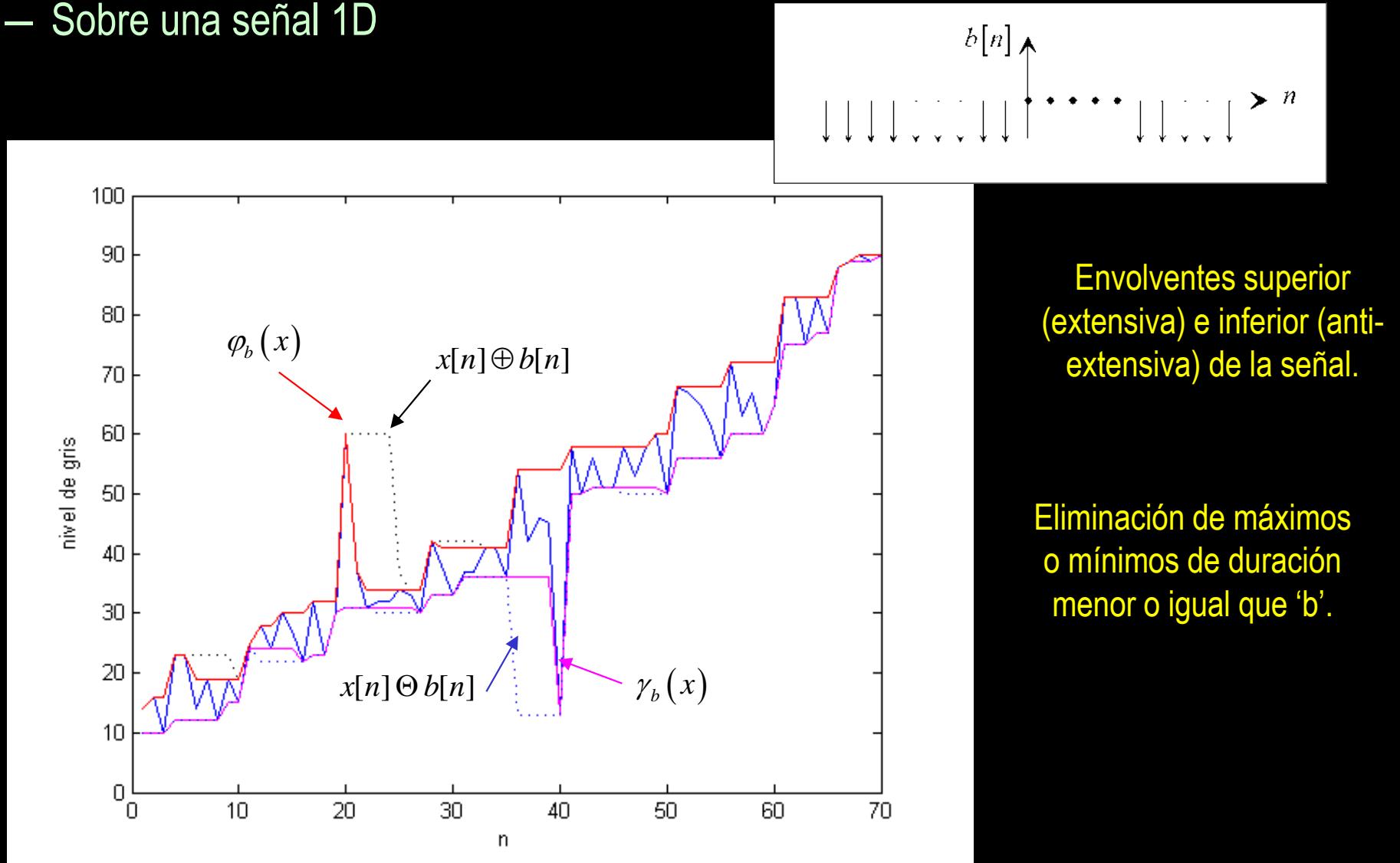
- $\gamma_b(x) \leq x$ , anti-extensiva;  $x \leq \varphi_b(x)$ , extensiva. No depende de  $b$ .

- Son idempotentes:

$$\gamma_b(\gamma_b(x)) = \gamma_b(x) , \varphi_b(\varphi_b(x)) = \varphi_b(x)$$

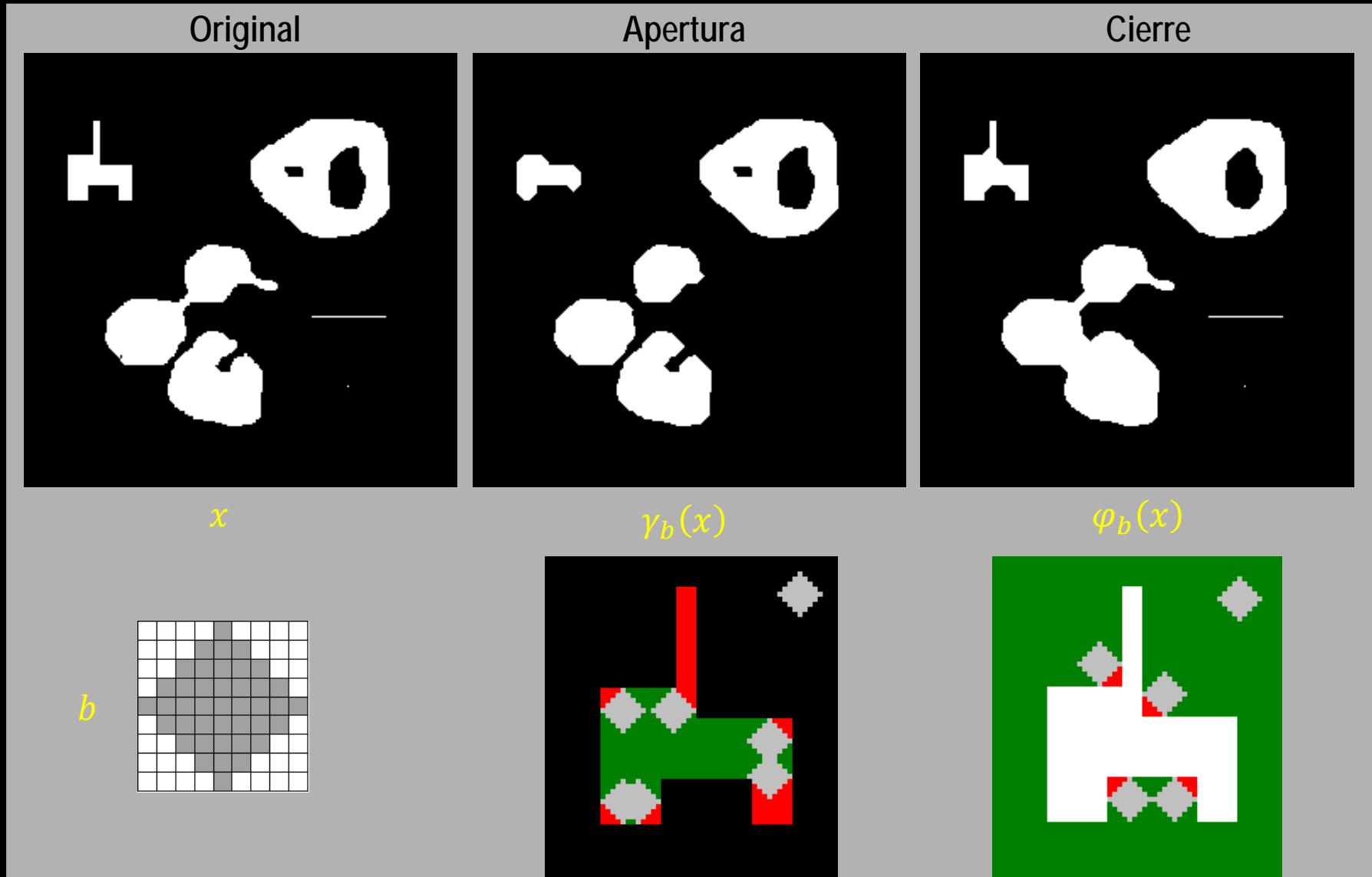
- Invariantes frente a desplazamientos del elemento estructurante.

- Efecto
  - Sobre una señal 1D



- Efecto

- Sobre una imagen binaria

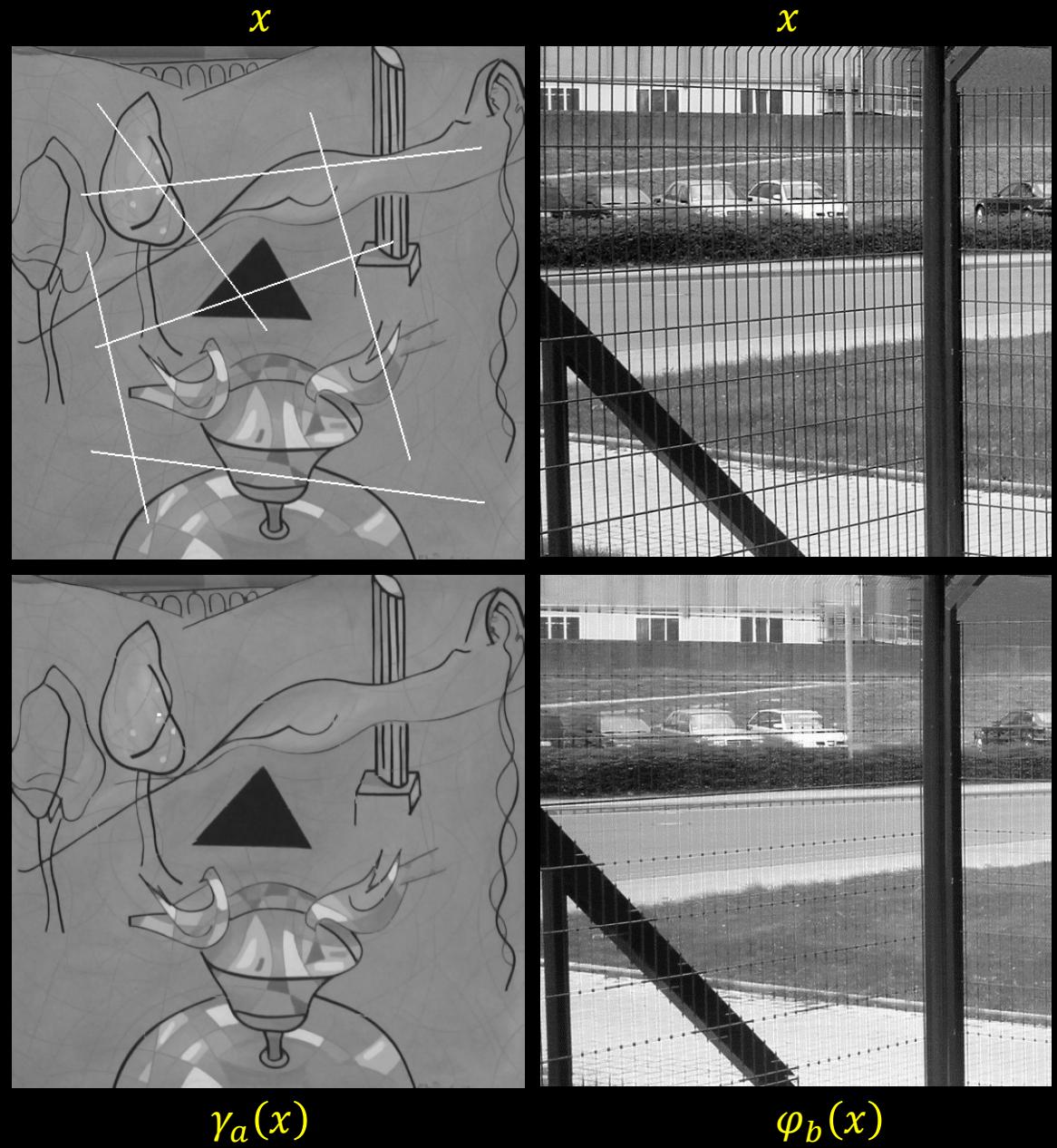
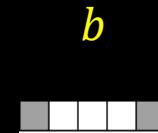
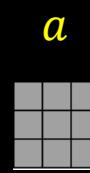


- Efecto:
  - Sobre una imagen de niveles de gris



$$b \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$$

- Ejemplos de aplicación:
  - Eliminación de objetos de acuerdo a su nivel de gris (apertura o cierre) y a su geometría (elección de un elemento estructurante mayor).



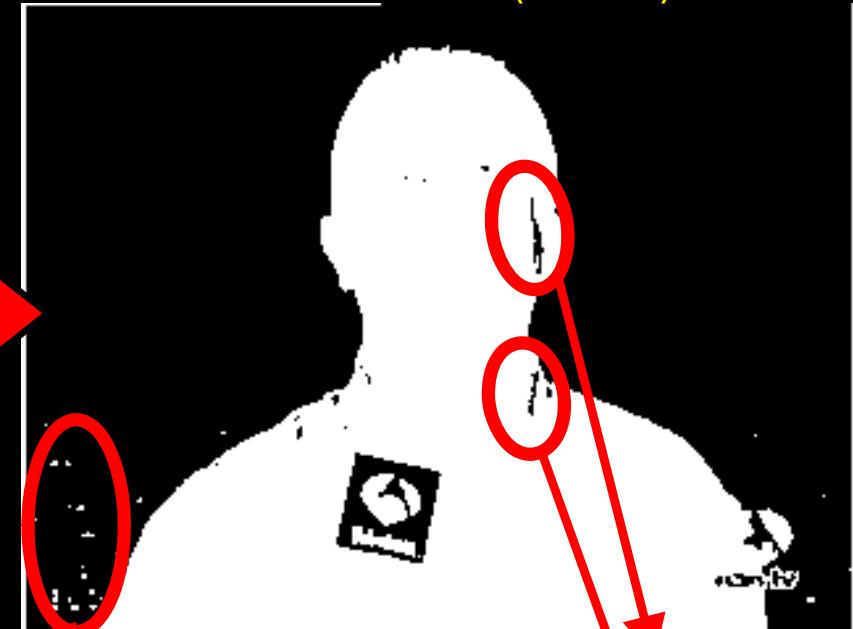
- Ejemplos de aplicación
  - Segmentación de objetos:

Para segmentar un objeto del fondo usamos una simple umbralización. Funciona más o menos bien, pero aparecen algunos puntos mal clasificados.

Imagen de entrada



Umbralizada ( $\text{u}=130$ )



Falsos  
positivos

Falsos  
negativos

Solución: utilizar morfología para arreglar los falsos

Imagen umbralizada



Cierre 2 ( $x \oplus b \oplus b$ )  $\ominus b \ominus b$



Elimina falsos  
negativos

Apertura 1 ( $x \ominus b$ )  $\oplus b$



Elimina falsos  
positivos

Erosion 2 ( $x \ominus b \ominus b$ )



Elimina píxeles  
de los bordes

El resultado es la máscara para segmentar el objeto.



¿Para qué se hacen las dos últimas erosiones?



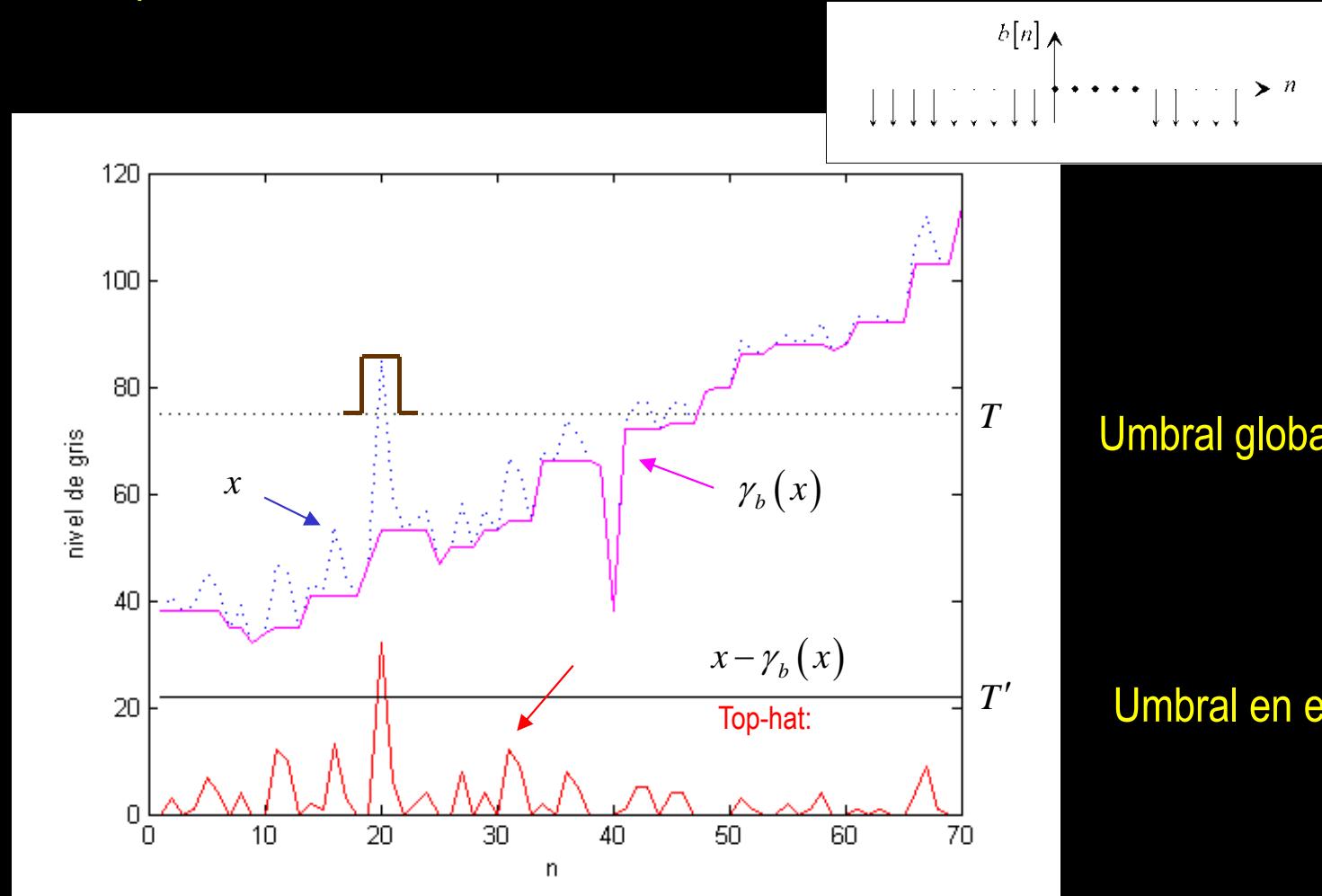
- Ejemplos de aplicación:
  - Detección de objetos de un tamaño determinado:
    - Top-hat: objetos que aparecen como máximos relativos:

$$x - \gamma_b(x)$$

- Dual top-hat: objetos que aparecen como mínimos relativos:

$$\varphi_b(x) - x$$

Top-hat sobre una señal 1D:



Top-hat sobre una señal 2D:

Imagen original



$x$

Imagen umbralizada



$x > T_1$

'Top-hat' umbralizado

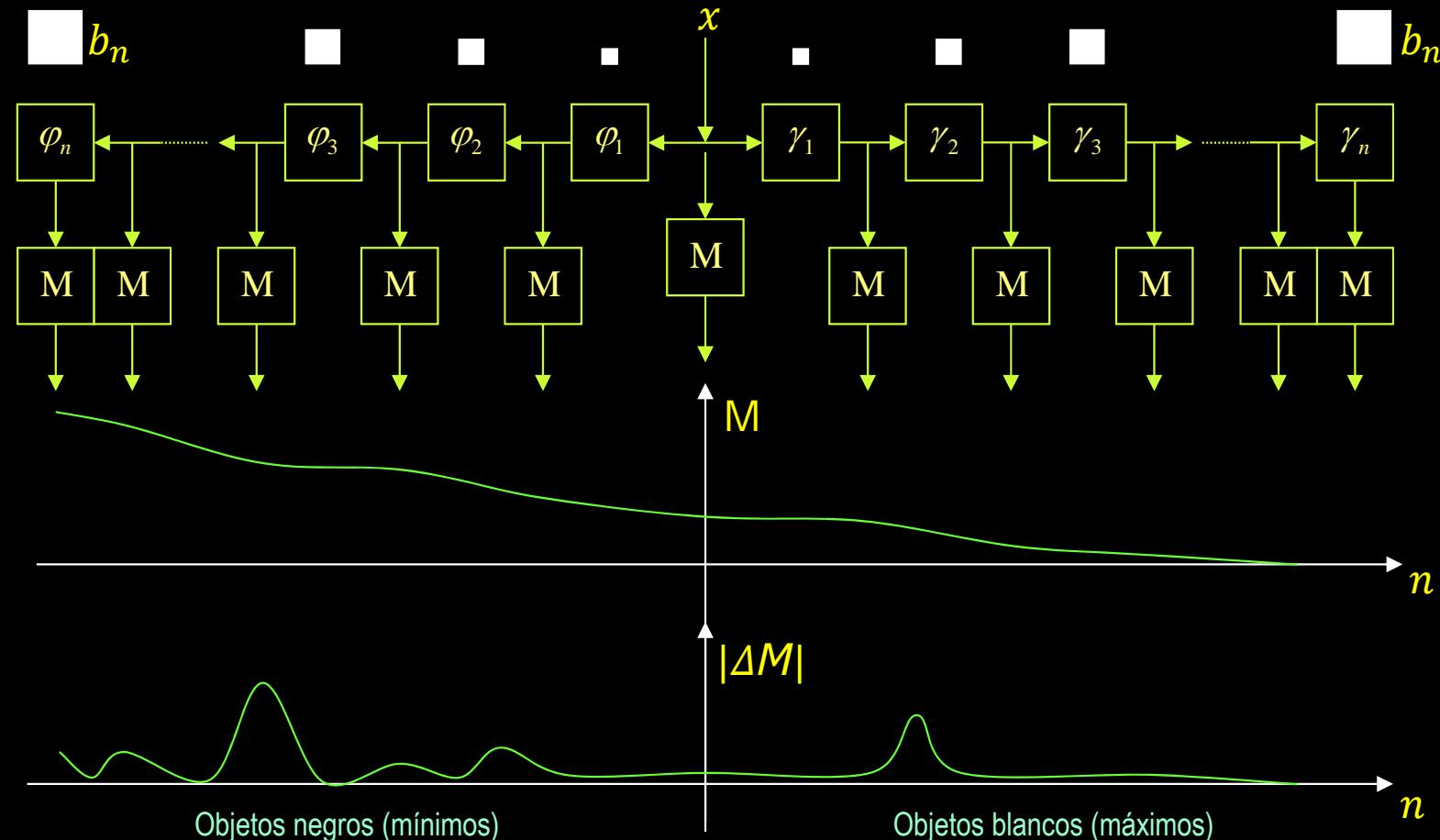


$[x - \gamma_b(x)] > T_2$

- Ejemplos de aplicación:

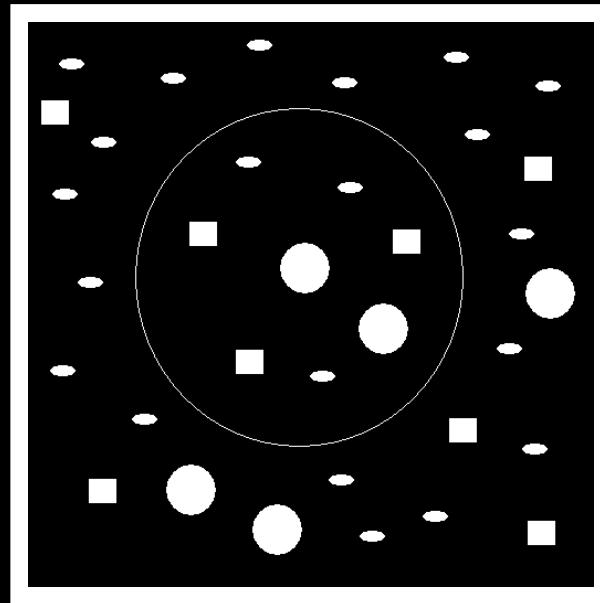
- Granulometría: caracterización de la distribución de tamaños de los objetos de una imagen a partir de bancos de filtros de aperturas y cierres.

- Sucesión de aperturas/cierres de elemento estructurante ‘creciente’ y medición ( $M$ ) tras cada operación del área, por ejemplo, de los objetos presentes.

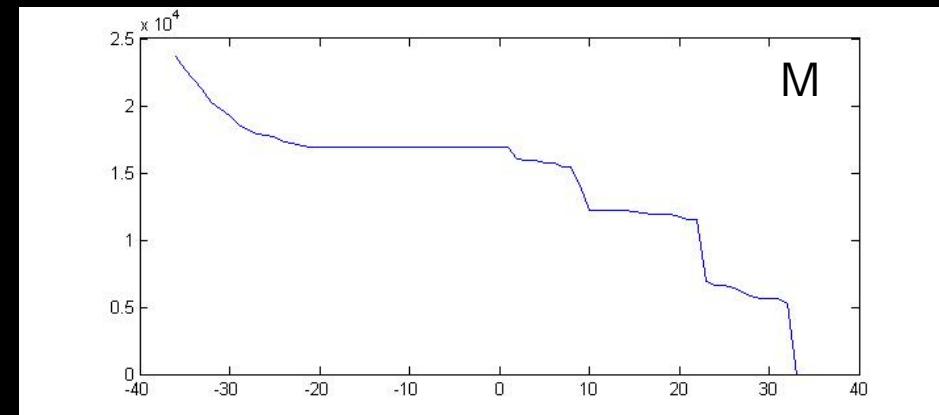


- Granulometría sobre una imagen binaria:

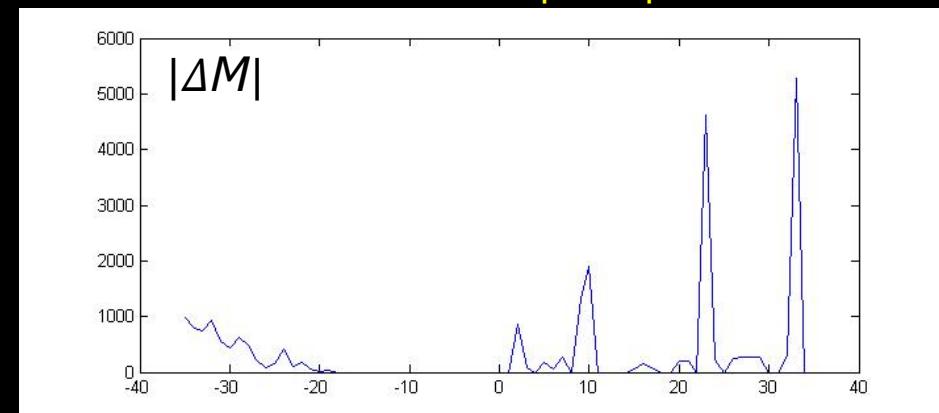
Imagen original



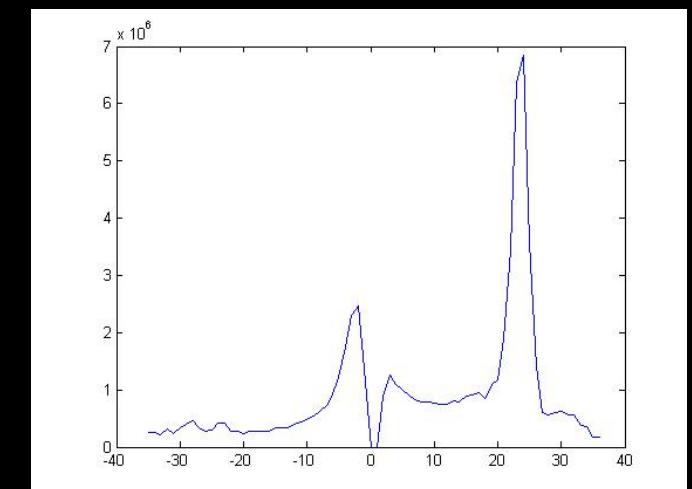
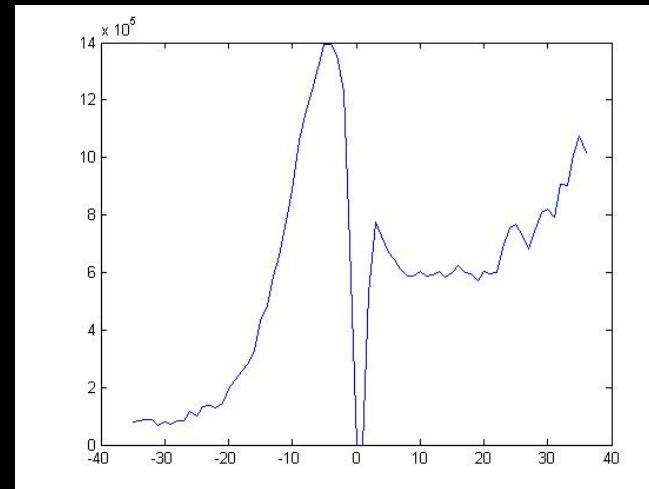
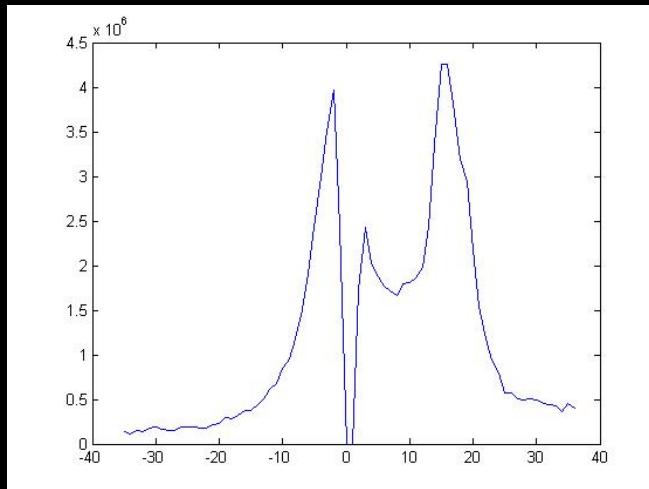
Área de la imagen resultante de cada etapa



Variación de área en cada etapa: espectro de formas



## — Granulometría sobre texturas



- Preservación de los contornos en operaciones morfológicas de simplificación.
- Dadas una señal de entrada,  $x$ , y una señal marcador,  $y$ , un proceso de reconstrucción preserva las componentes conexas de  $x$  marcadas por  $y$ :

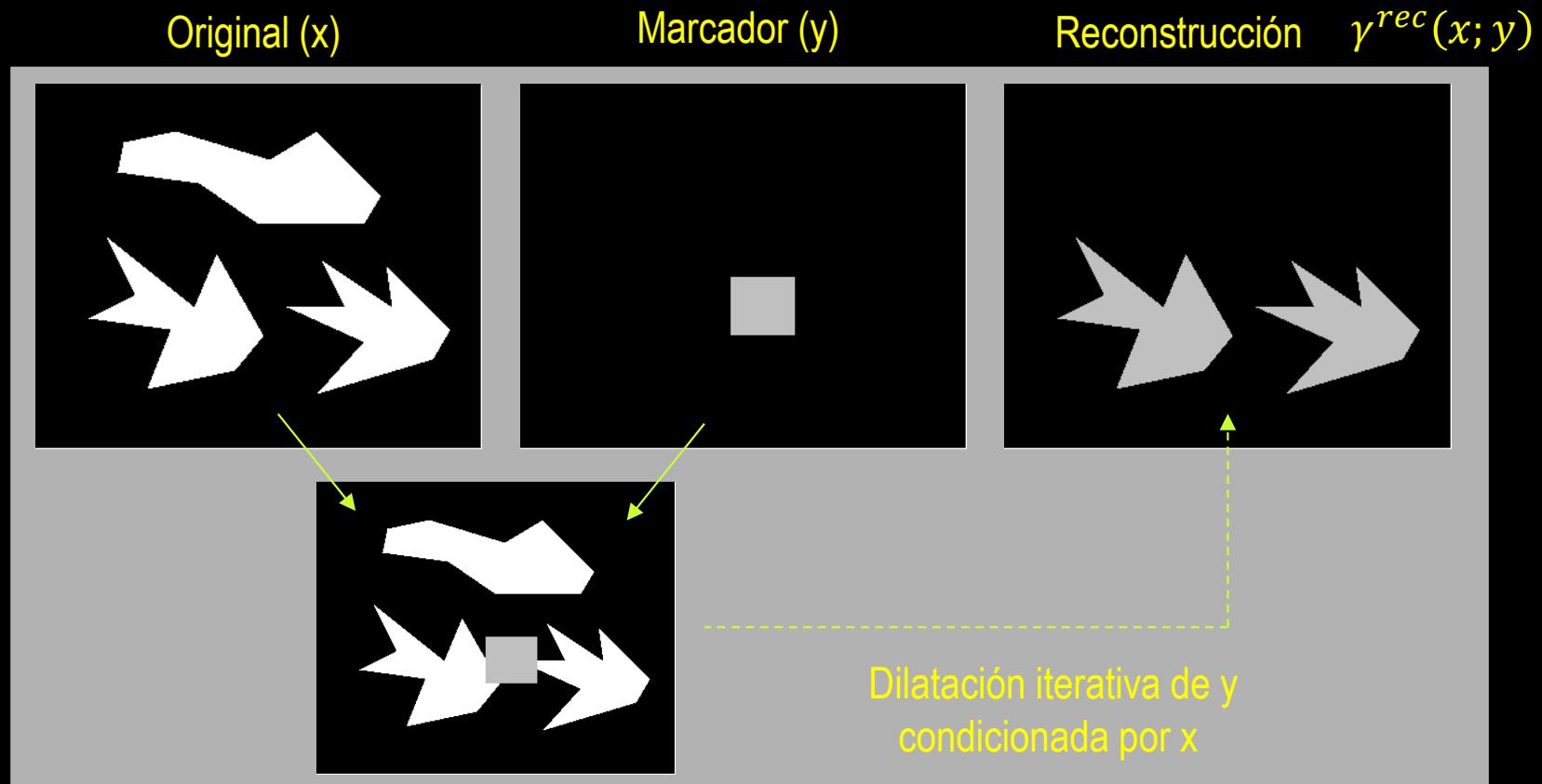
— Apertura por reconstrucción:

$$\gamma^{rec}(x; y)$$

— Cierre por reconstrucción:

$$\varphi^{rec}(x; y)$$

- Apertura por reconstrucción



- Propiedades:

- Preservan la estructura:

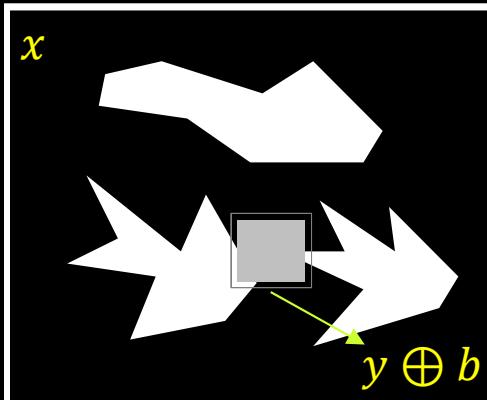
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow \begin{cases} \gamma^{rec}(x_1; y) \leq \gamma^{rec}(x_2; y) \\ \varphi^{rec}(x_1; y) \leq \varphi^{rec}(x_2; y) \end{cases}$$

- Extensividad:  $\gamma^{rec}(x; y) \leq x$ , anti-extensiva;  $x \leq \varphi^{rec}(x; y)$ , extensiva.
  - Ambas son idempotentes:
  - Conclusión:  $\gamma^{rec}$  es una apertura y  $\varphi^{rec}$  es un cierre.

- Proceso iterativo de obtención de la reconstrucción.

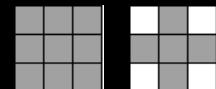
Cálculo de la reconstrucción de  $x$  con  $y$ :  $\gamma^{rec}(x; y)$

1<sup>a</sup> Iteración



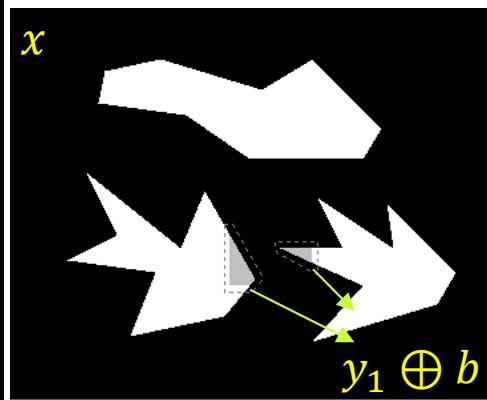
$$y_1 = (y \oplus b) \wedge x$$

Elementos estructurantes  
adecuados según la conectividad:



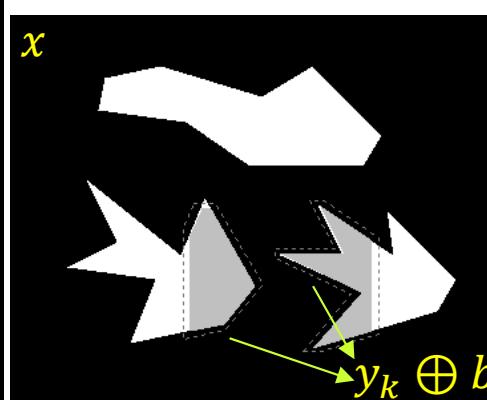
8      4

2<sup>a</sup> Iteración



$$y_2 = (y_1 \oplus b) \wedge x$$

$k^a$  Iteración



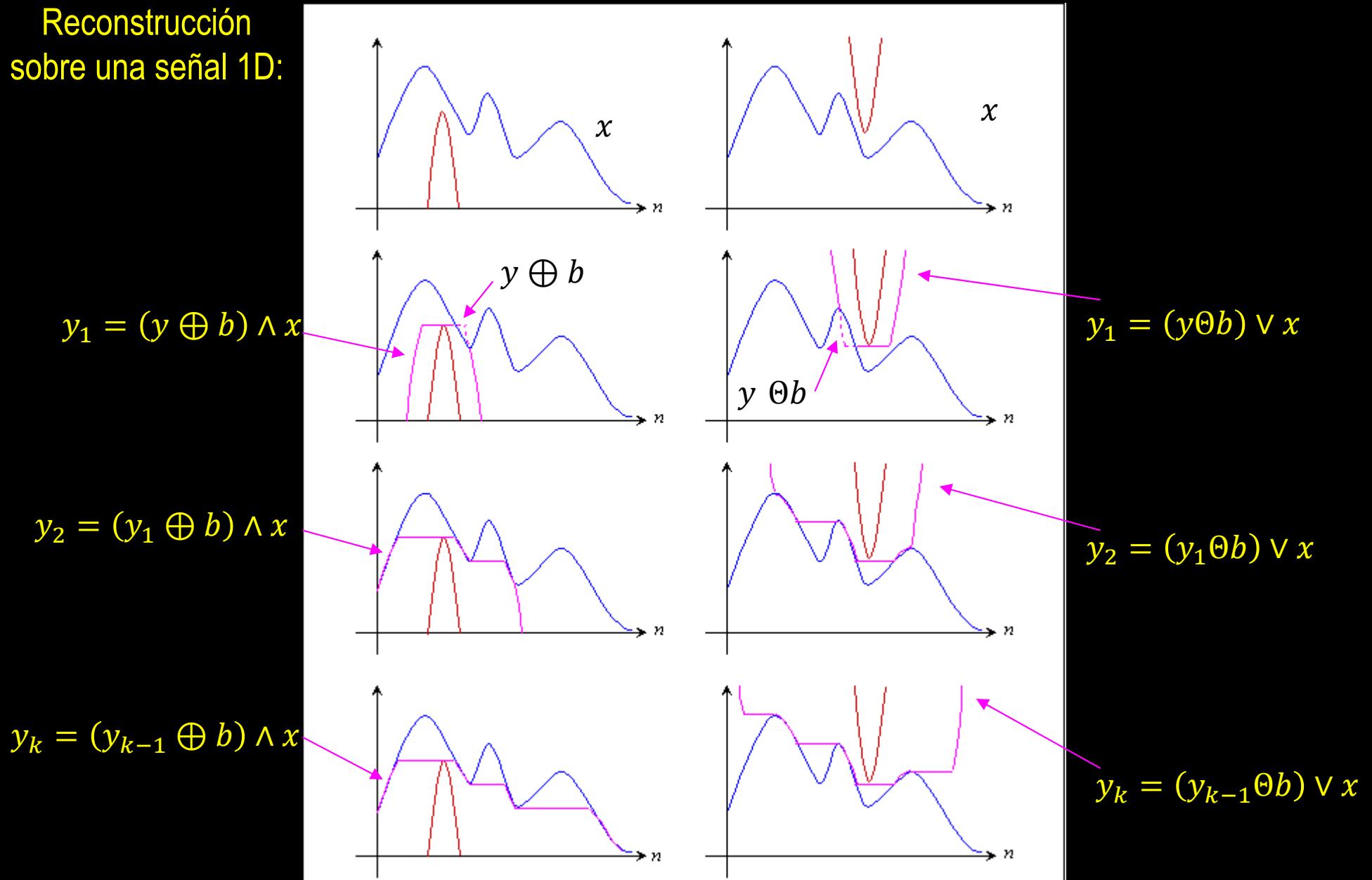
$$y_k = (y_{k-1} \oplus b) \wedge x$$

Resultado

$$\gamma^{rec}(x; y) = y_\infty$$

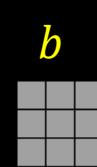
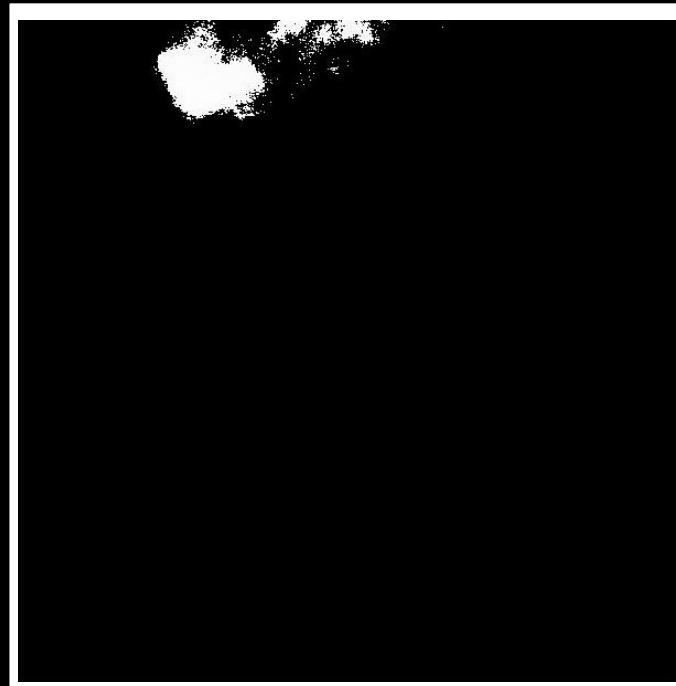
...

Reconstrucción  
sobre una señal 1D:



- Reconstrucción sobre una señal 2D

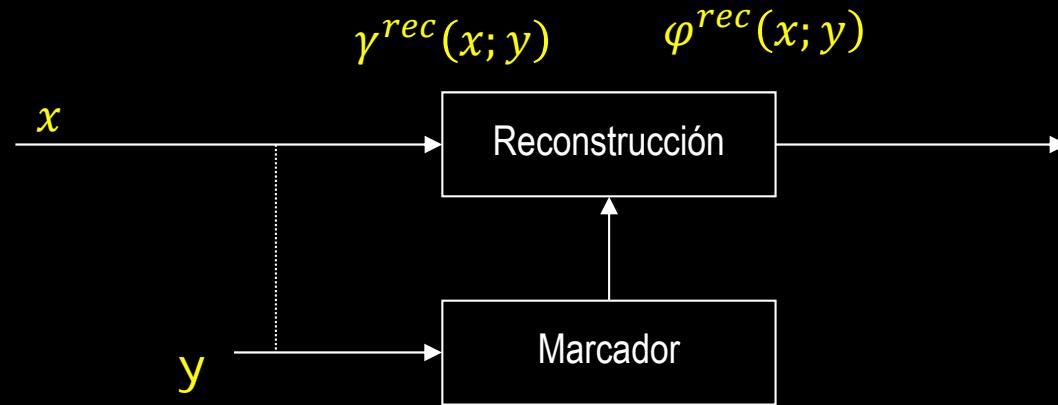
$$y = (x > 250) \text{ AND } x$$



$$\gamma^{rec}(x; y) = y_\infty$$

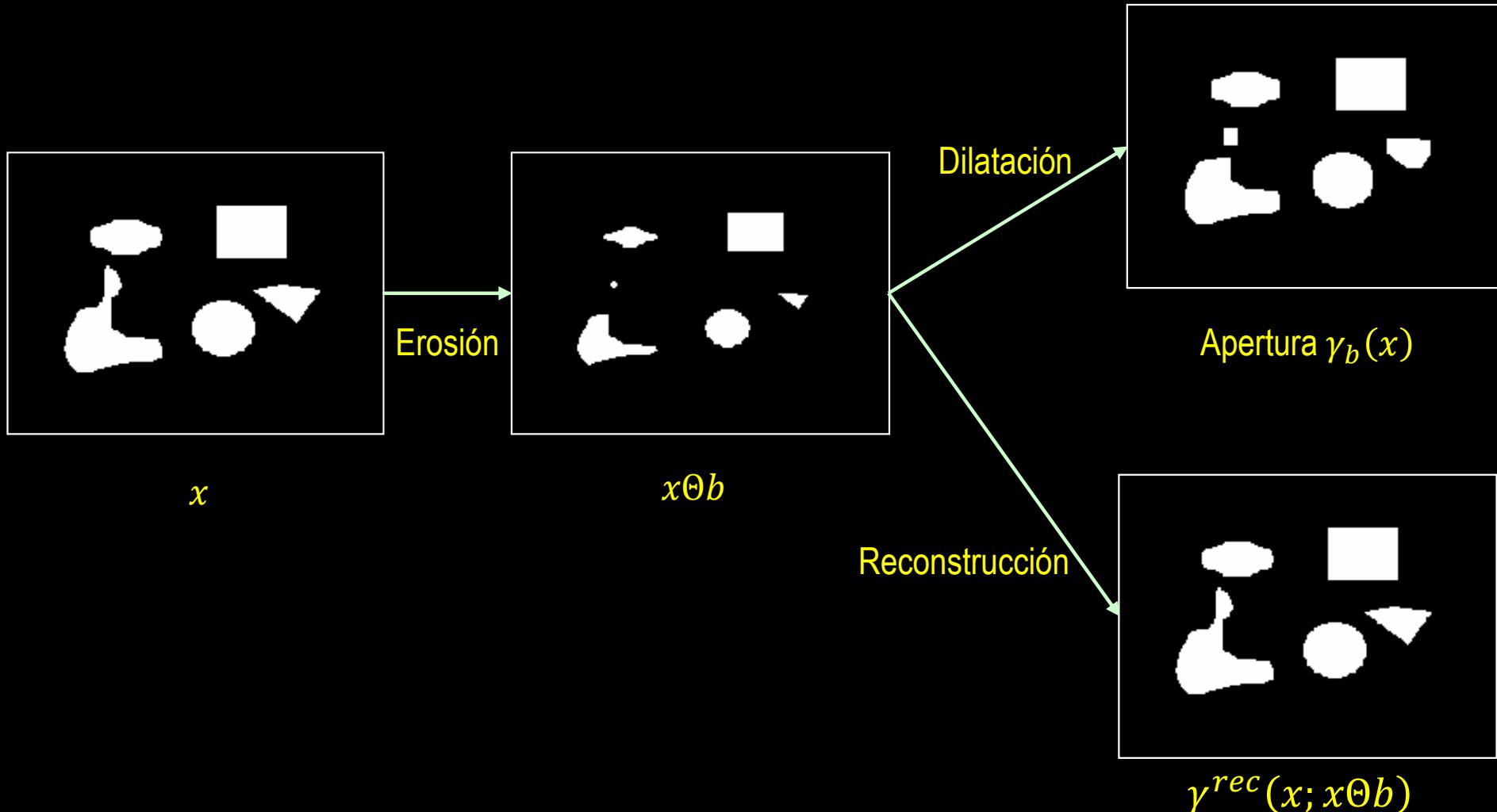


- Filtros por reconstrucción



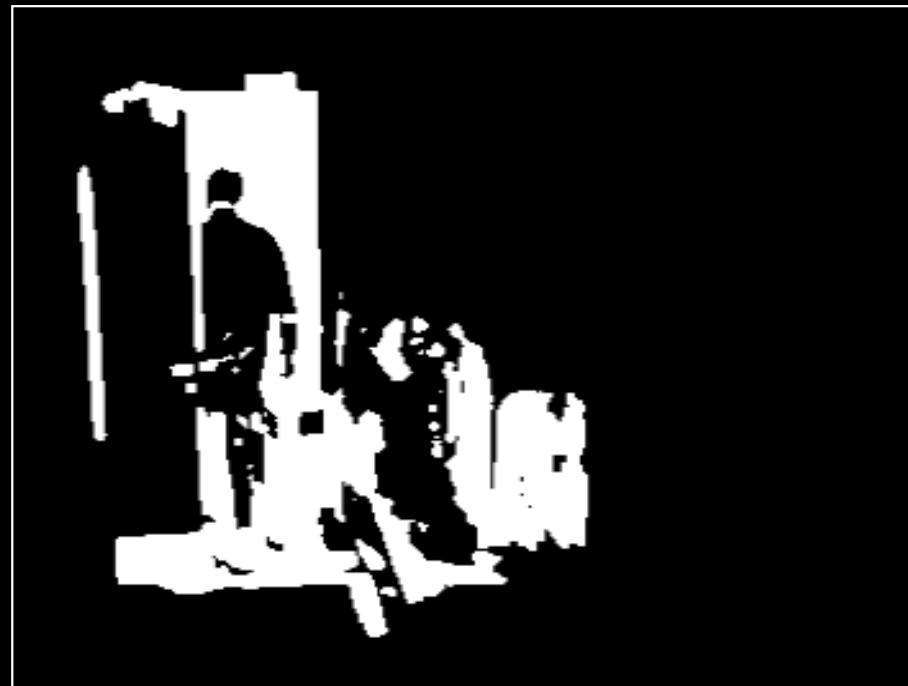
- Los criterios de selección del marcador dan lugar a distintos tipos de filtros.

- Filtros por reconstrucción
  - Apertura mediante reconstrucción de la erosión

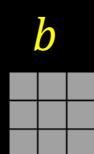


- Filtros por reconstrucción
  - Apertura mediante reconstrucción de la erosión
    - Eliminación de ruido.

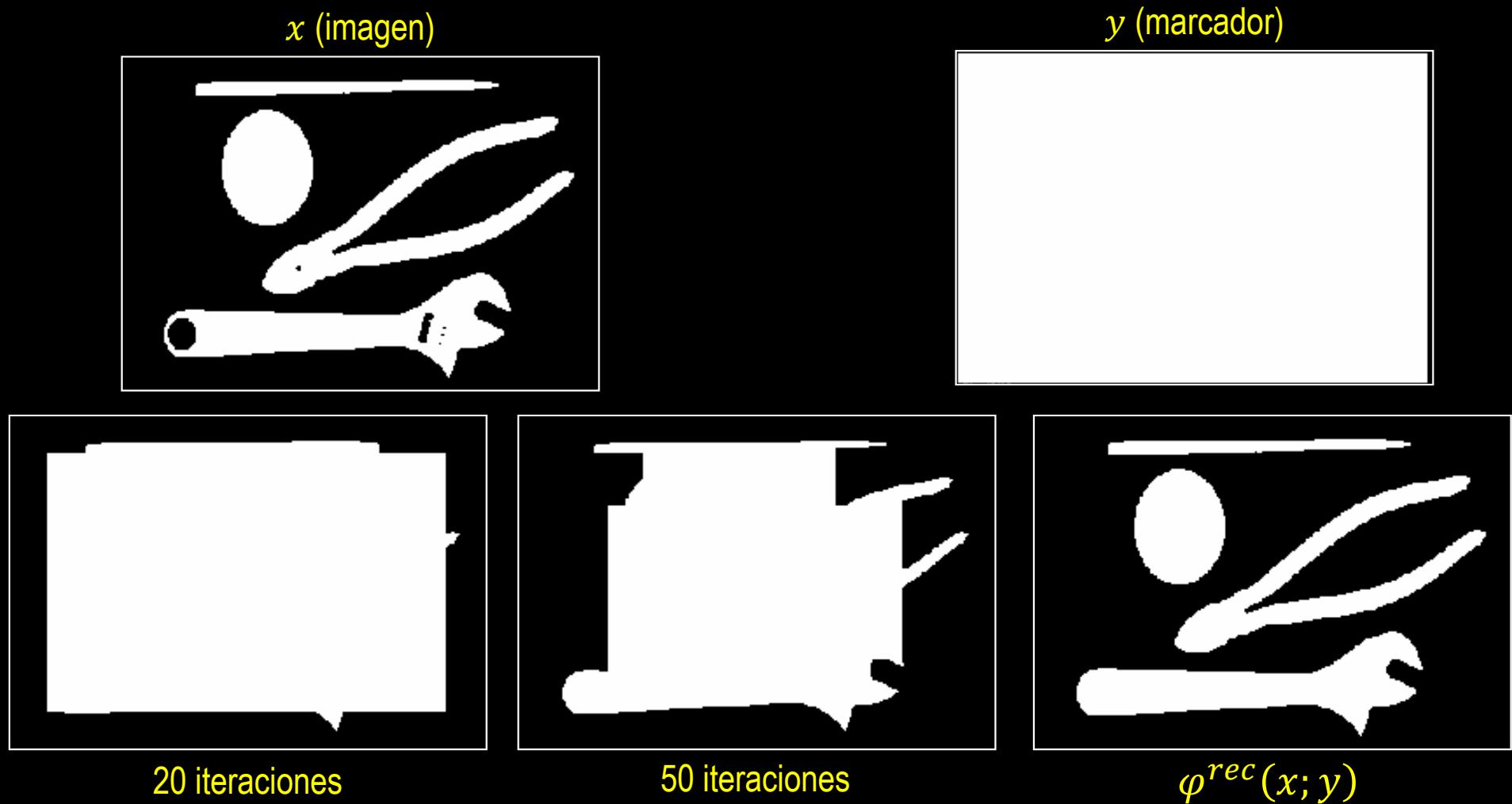
*x*



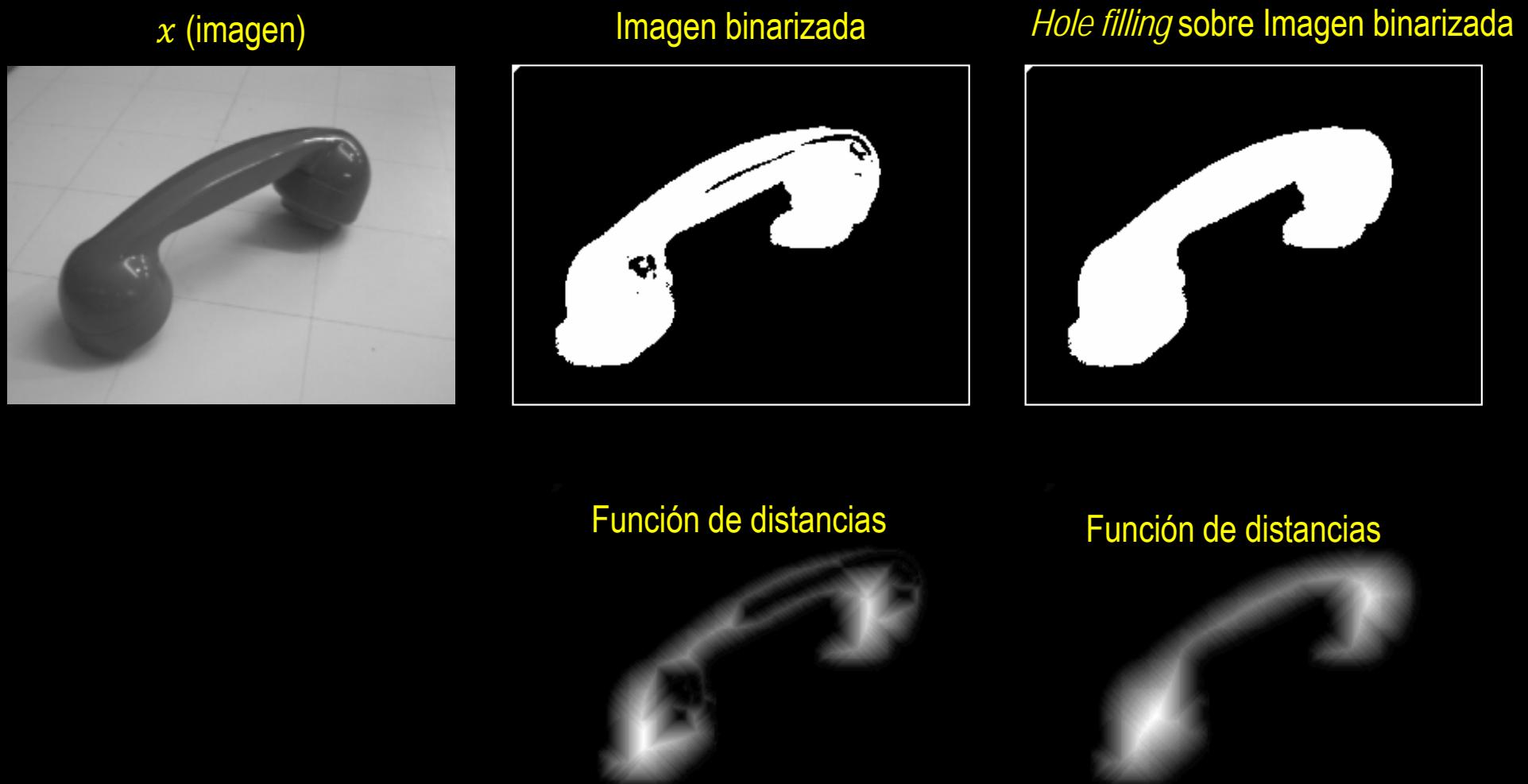
$$y^{rec}(x; y) = y_\infty$$



- Filtros por reconstrucción
  - Rellenado de agujeros (*Hole Filling*)

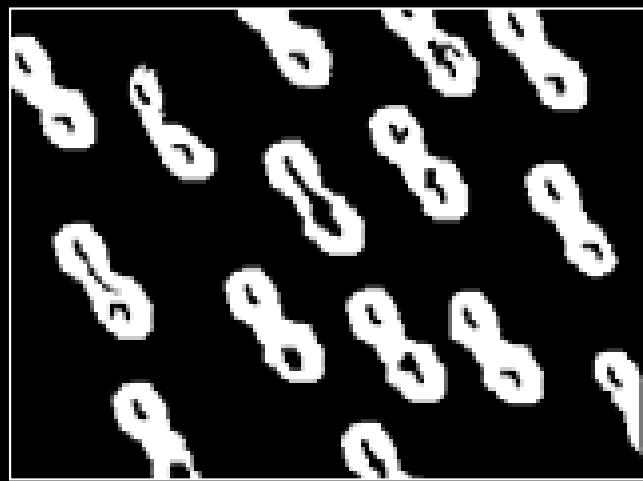


- Filtros por reconstrucción
  - Rellenado de agujeros (*Hole Filling*)

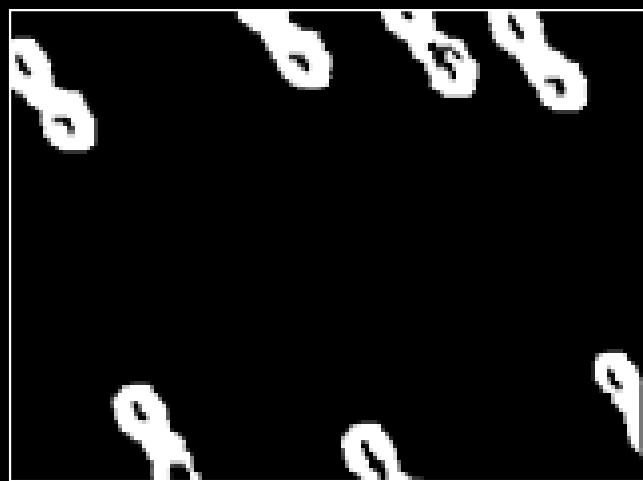


- Filtros por reconstrucción
  - Eliminación de objetos parcialmente visibles

$x$  (imagen)



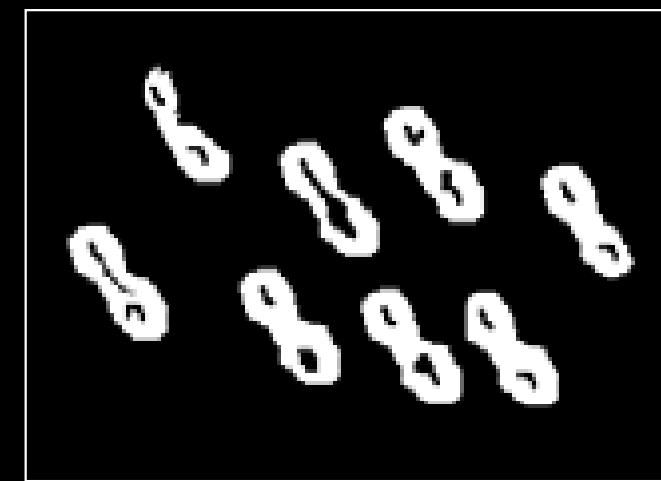
$\gamma^{rec}(x; y)$



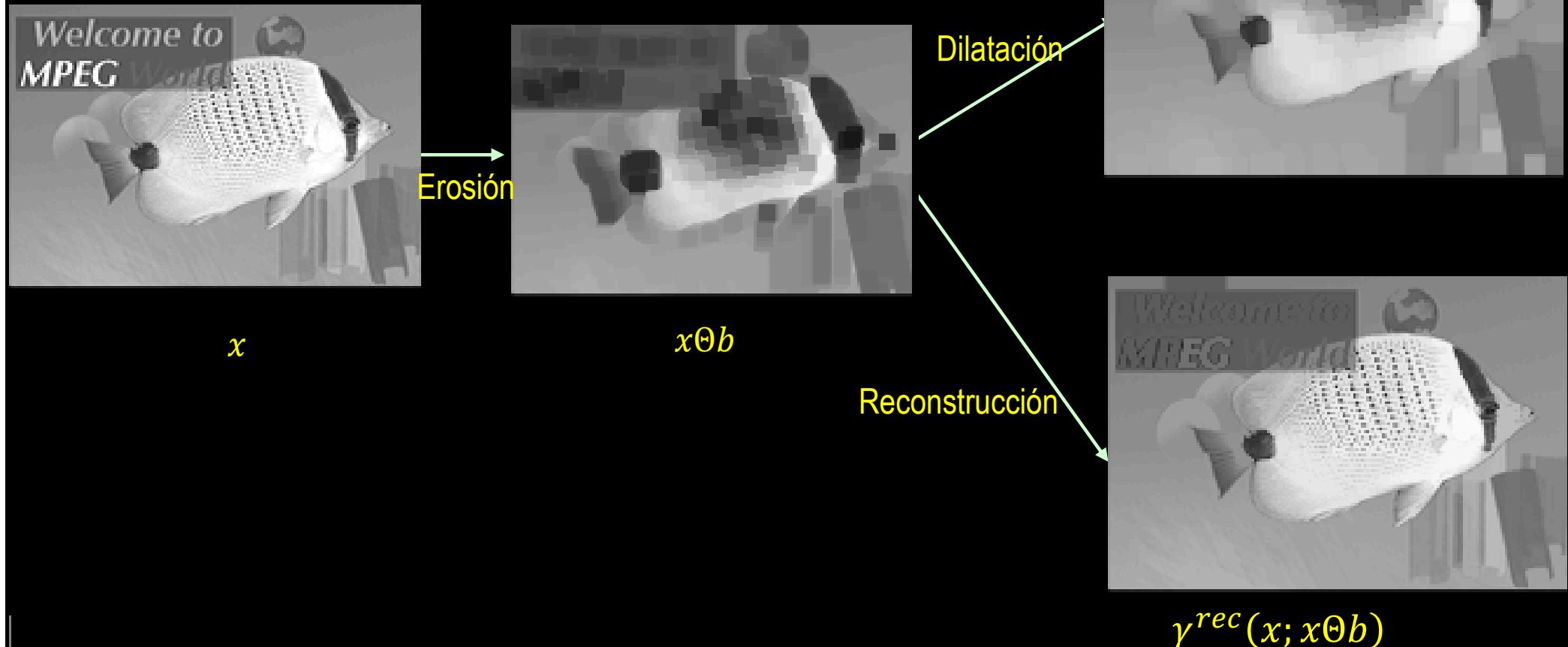
$y$  (marcador)



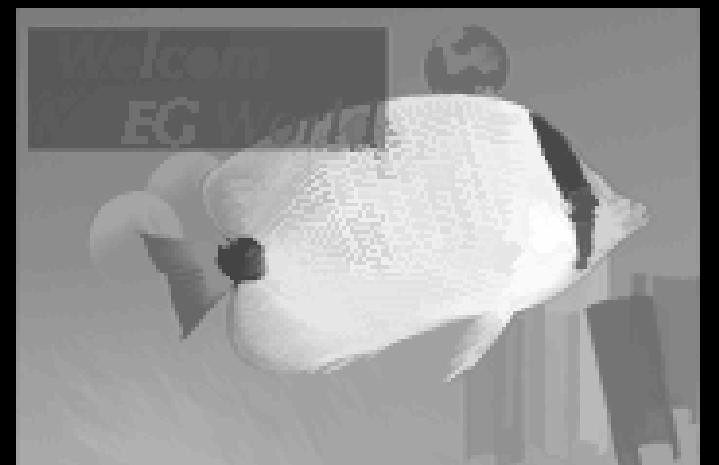
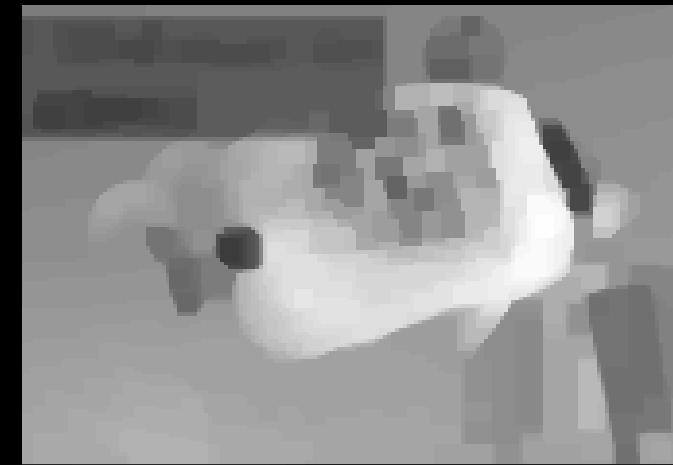
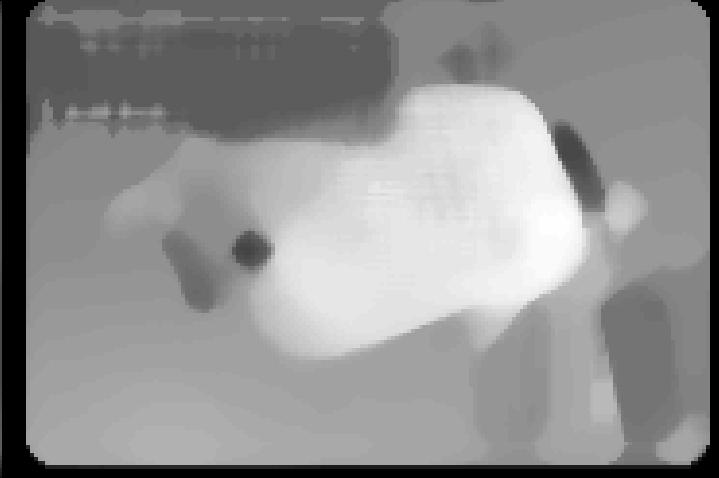
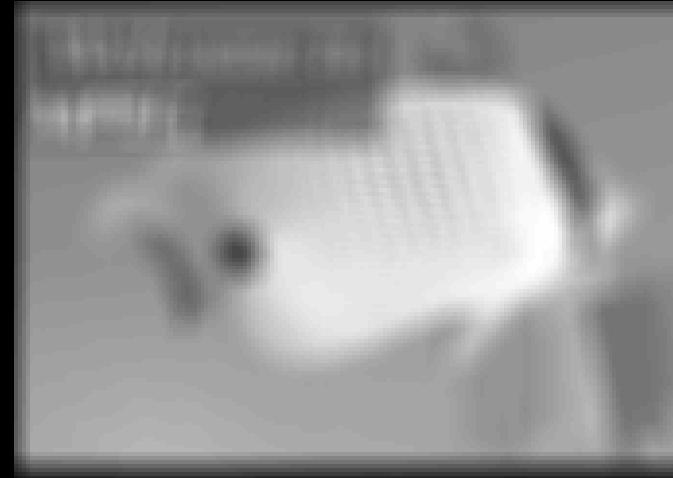
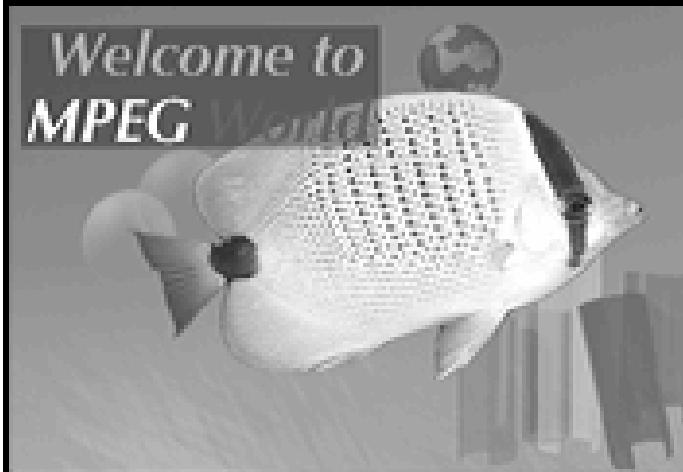
Top-hat  
 $x - \gamma^{rec}(x; y)$



- Filtros por reconstrucción
  - Apertura mediante reconstrucción de la erosión (imágenes en escala de grises)



- Filtros por reconstrucción
  - Apertura mediante reconstrucción de la erosión (imágenes en escala de grises)



- Filtros por reconstrucción

- Cierre mediante reconstrucción de la dilatación (imágenes en escala de grises)

$$\varphi^{rec}(x; x \oplus b)$$

Cierre  $\varphi_b(x)$

Original  $x$



Marcador  $y = x \oplus b$



Reconstrucción  $\varphi^{rec}(x; y)$



Erosión iterativa de  $y$   
condicionada por  $x$