

Vorlesung Software Engineering Kapitel 5 Teil 1

Aufgabe 2: Fakultätsfunktion

Gegeben sei folgendes Statement S:

```
S =
int y = 1;
while !(x==1) do
    y = y*x;
    x = x-1;
od
```

a) Beweisen Sie die partielle Korrektheit von

$$\{x = n \wedge x > 0\} S \{y = \text{fac}(n) \wedge n > 0\}$$

mit Hilfe des Hoare-Kalküls, $\text{fac}(n)$ bezeichnet dabei die Fakultätsfunktion.

Hinweis: Verwenden Sie die Invariante $y * \text{fac}(x) = \text{fac}(n) \wedge n \geq x > 0$

b) Beweisen Sie die totale Korrektheit der Hoare-Formel aus a)

$\{x = n \wedge x > 0\}$	(1) Ausgangspunkt
\Rightarrow	(2) Schritt 3 (Abschwächungsregel)
$\{1 * \text{fac}(x) = \text{fac}(n) \wedge n \geq x > 0\}$	(3) Schritt 2 (Zuweisungsaxiom)
<code>int y = 1;</code>	(4)
$\{y * \text{fac}(x) = \text{fac}(n) \wedge n \geq x > 0\}$	(5) Schritt 1 (while-Regel "unten")
<code>while !(x==1) do</code>	(6)
$\{!(x==1) \wedge y * \text{fac}(x) = \text{fac}(n) \wedge n \geq x > 0\}$	(7) Schritt 5 (while-Regel "oben")
\Rightarrow	(8) Schritt 8 (Zuweisungsaxiom)
$\{y * x * \text{fac}(x-1) = \text{fac}(n) \wedge n \geq (x-1) > 0\}$	(9) Schritt 7 (Zuweisungsaxiom)
<code>y = y*x;</code>	(10)
$\{y * \text{fac}(x-1) = \text{fac}(n) \wedge n \geq (x-1) > 0\}$	(11) Schritt 6 (Zuweisungsaxiom)
<code>x = x-1;</code>	(12)
$\{y * \text{fac}(x) = \text{fac}(n) \wedge n \geq x > 0\}$	(13) Schritt 5 (while-Regel "oben")
<code>Od</code>	(14)
$\{x=1 \ \& \ y * \text{fac}(x) = \text{fac}(n) \wedge n \geq x > 0\}$	(15) Schritt 1 (while-Regel "unten")
\Rightarrow	(16) Schritt 4 (Abschwächungsregel)
$\{y = \text{fac}(n) \wedge n > 0\}$	(17) Ausgangspunkt

Ausgangspunkt: Zeile 1/17: Damit geben wir die Vor- und Nachbedingung vor, die wir beweisen wollen

Schritt 1: Zeile 5/15: Wir bringen die Prädikate auf das Format, das eine Anwendung der while-Regel erlaubt (Z. 5: Invariante I, Z. 15: "I und nicht b")

Schritt 2: Wir versuchen, die Prädikate in Zeile 5 mit Zeile 1 zu verbinden. Dazu wenden wir als erstes das Zuweisungsaxiom an und erhalten das Prädikat in Zeile 3.

Schritt 3: Weil aus dem Prädikat in Zeile 1 das Prädikat in Zeile 3 folgt, können wir beide Prädikate durch die Abschwächungsregel miteinander verbinden.

Schritt 4: Nun verbinden wir das Prädikat in Zeile 15 mit dem Prädikat in Zeile 17. Wieder folgt aus Zeile 15 die Zeile 17, deshalb dürfen wir die Abschwächungsregel anwenden.

Schritt 5: Nun müssen wir nur noch den Schleifenkörper betrachten. Wir wenden die while-Regel an (der „untere“ Teil der Regel ist durch die Zeilen 5 und 15 gegeben) und erhalten den „oberen“ Teil in den Zeilen 7 und 13. Dieser Teil ist also noch zu beweisen.

Schritt 6: Wir gehen dazu von Zeile 13 nach oben und wenden das Zuweisungsaxiom an und erhalten Zeile 11.

Schritt 7: Wir machen das gleiche noch einmal und erhalten Zeile 9.

Schritt 8: Da aus dem Prädikat in Zeile 7 das Prädikat in Zeile 9 folgt, können wir wieder die Abschwächungsregel anwenden und sind damit mit dem Beweis fertig.

Totale Korrektheit:

Wir verwenden dazu den Term $t = x$

Falls $y * \text{fac}(x) = \text{fac}(n) \wedge n \geq x > 0$, dann $x \geq 0$

$\{!(x=1) \ \& \ y * \text{fac}(x) = \text{fac}(n) \wedge n \geq x > 0 \ \& \ x==z\}$

$\{x-1 < z\}$

$y = y * x;$

$\{x-1 < z\}$

$x = x-1;$

$\{x < z\}$