

## 20230725

青蛙生日快乐 (*bushi*)

### FFT

#### 题意

有  $n$  只青蛙排成一排青蛙序列在开会，其中第  $i$  只青蛙的叫声大小是  $a_i$ 。

对于任意两只青蛙  $i, j$ ，如果  $i \neq j$ ，则  $a_i \neq a_j$ 。

现在要从青蛙中选出一支青蛙集训队，集训队的成员编号为  $0, 1, \dots, k$ 。

集训队要求：

1. 对于第  $i$  名集训队成员和第  $j$  名集训队成员，假设  $i < j$ ，那一定需要满足第  $i$  名集训队成员在青蛙序列中的位置比第  $j$  名集训队在青蛙序列中的位置更靠前。
2. 对于第  $i$  名集训队成员和第  $j$  名集训队成员，假设  $i < j$ ，那一定需要满足第  $i$  名集训队成员的叫声比第  $j$  名集训队的叫声更小。

你要求出有多少种选出青蛙集训队的方案。

答案对 998244353 取模。

#### 做法

考虑一个暴力的  $dp$ ，设  $f_{i,j}$  表示  $[1, i]$  这个前缀中以  $i$  结尾，长度为  $j$  的 LIS 个数。

转移是容易有的：
$$f_{i,j} = \sum_{z=1}^{i-1} [a_z < a_i] f_{z,j-1} \quad (j \geq 2)。$$

初值为对于  $i$  从 1 到  $n$ ， $f_{i,1} = 1$ 。

注意到  $k$  很小，因此开若干棵线段树/树状数组优化转移即可。复杂度为  $O(nk \log n)$ 。

具体的说，以线段树为例，我们对值域建线段树，转移即为在线段树上查区间和，转移完之后将  $f_{i,j}$  的值修改到对应的线段树上即可。

### G-CAT

#### 题意

做多能选出多个不相交的且和为 0 的区间。

#### 做法

记  $next$  数组表示  $next_i$  是  $i$  右边第一个满足  $\sum_{j=i}^{next_i} a_j = 0$  的数。

考虑选择了  $i$  之后的选择，不难发现是  $\max_{next_i+1 \leq i \leq n} next_i$ 。

发现选择关系构成了一棵树，建树倍增判断是否走出区间即可。

总时间复杂度  $O((n+m) \log n)$ 。

## OIL

### 题意

求  $\sum_{l=1}^n \sum_{r=l+1}^n \sum_{i=l}^{r-1} \maxpre(l, i) \maxsuf(i+1, r)$ 。

### 做法

考虑对于  $i$  求出  $pre_i = \sum_{j=1}^i \maxpre_j$  与  $suf_i = \sum_{j=i}^n \maxsuf_j$ 。

则  $\sum_{i=1}^{n-1} pre_i suf_{i+1}$  即为答案。

(以下表达中  $\maxpre$  可以  $\leq 0$ )

考虑那些  $\maxpre$  会对  $pre$  产生贡献, 发现要  $\maxpre \geq 0$ 。

考虑平衡树, 从 1 枚举到  $n$ , 之前的所有  $\maxpre$  都加  $a_i$  然后插入当前的  $a_i$ , 然后查询大于零的数的和即为  $pre_i$ 。

全局加可以转化为打  $tag$ 。

$suf$  与  $pre$  的求法类似。

时间复杂度为  $O(n \log n)$ 。