图论（图）

张致

July 26, 2023

目录

图的矩阵表示

图的矩阵表示

我们可以写出图的邻接矩阵 A，其中 $A_{i,j}$ 为 i 连向 j 的边权。

假如我们需要求出图上任意两个点经过恰好 k 条边的最短路，那我们只需要求出 A^k，其中矩阵的积为 $\min, +$ 计算。

假如我们需要求出图上任意两个点能否经过小于等于 k 条边到达，那么我们只需要求出 $\vee_{i=0}^{k} A^i$，其中矩阵的积为 $|, *$ 计算。

(传统矩阵乘法为 $+, *$ 计算)

CF402E

给出一个矩阵 A，问是否存在一个正整数 k 使得 A^k 的所有元素都是正数。
$2 \le n \le 2000, 0 \le a_{i,j} \le 50, \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} > 0$。

CF402E

对于每个 $a_{i,j} > 0$，我们令 i 向 j 连一条有向边。

那么 A^k 的 (i,j) 这一项大于 0 当且仅当图上有一条 i 到 j 的恰好经过 k 条边的路径。

那么 $\exists k$，使得 $A^k_{i,j} > 0$ 当且仅当图上 i 可以到达 j。

假如对于一组 i,j，上面 k 不存在，那么原题要求不可能满足，否则，现在整张图都是一个强连通块，因为 $\sum_{i=1}^n a_{i,i} > 0$，所以原题要求必然满足。所以我们只需要判定整张图是否强连通即可。

总复杂度 $O(n^2)$。

PTZ summer 2020 Day3 J

给定 n 个点 m 条边的有向带正边权图，询问 q 次。每次询问 s_i, t_i, k_i，你需要回答从 s_i 走到 t_i，经过至少 k_i 条边的最短路。

$2 \le n \le 50, 1 \le m \le 10000, q \le 10^5, 0 \le k_i \le 10000$。

PTZ summer 2020 Day3 J

考虑设 $f_{k,i,j}$ 表示 i 走恰好 k 步走到 j 的最短路，转移是一个 $\min,+$ 矩阵，记为 G，那么处理出来 $a_i=\min\limits_{200\ge j\ge i}G^{100j}, b_i=\min\limits_{100\ge j\ge i}G^j$。那么我们每次询问相当于问 $(a_{\lfloor k/100\rfloor}b_{k\%100})_{s,t}$，由于是询问单点所以直接 $O(n)$ 即可。

复杂度 $O(200n^3+qn)$。

圆方树

圆方树

当题目于图的割点有关或图是仙人掌时，圆方树是一种方便的用来描述图的结构。

具体的，我们求出图的每个点双分量，对每个点双分量建立一个方点，记原图的点为圆点。我们构造一个新图，令每个圆点向它所在的所有点双分量对应的方点连边，显然最后会呈现一个树结构，使得叶子节点都是圆点。这对我们遍历图或在图上 dp 更加方便。

PTZ summer 2020 Day2 C

给定 n 个点 m 条边的无向连通简单图。一个点集 S 称为凸包，当且仅当 $\forall i,j \in S$，所有从 i 到 j 的简单路径上的点都在 S 内。一条路径称为简单路径当且仅当路径不经过重复点。

求有多少个点集是凸包。

$1 \le n \le 3 \times 10^5, n-1 \le m \le 3 \times 10^5$。

PTZ summer 2020 Day2 C

考虑一个点双里面如果选择两个点在凸包里，那么整个点双都要在凸包里。我们考虑建出圆方树，那么一个凸包就对应了圆方树上的一个连通子图，使得如果包含了一个方点，则包含它的所有邻居。那么树形 dp 即可，复杂度 $O(n+m)$。

优化建图

优化建图

对于一些题目而言，我们直接抽象建图虽然能解决问题，但是复杂度可能不对。这时候我们需要挖掘题目性质，采用数据结构或者其他方式优化我们图的量级。

[SNOI2017] 炸弹

在一条直线上有 n 个炸弹，每个炸弹的坐标是 x_i，爆炸半径是 r_i，当一个炸弹爆炸时，如果另一个炸弹所在位置 x_j 满足 $|x_j - x_i| \le r_i$ ，那么，该炸弹也会被引爆。

你需要对每个 i 计算，假如初始时只把第 i 个炸弹引爆，总共会引爆多少个炸弹。

$1 \le n \le 5 \times 10^5$，保证 x_i 严格递增。

[SNOI2017] 炸弹

我们把每个炸弹看作点，每个炸弹向它可以引爆的炸弹连有向边，那么只需要统计每个点能到达多少个点即可，复杂度 $O(n^2)$。

发现这样太慢了，因为边数很多，我们考虑 l_i, r_i 为第 i 个炸弹左右分别第一个能炸到它的点，连边 $l_i \to i, r_i \to i$，容易发现，在原图中能到达的点对在这个简化的图上也能到达，所以在这个图上统计答案即可。

发现每个炸弹最终引爆的炸弹一定是一段区间，统计时记录每个点能达到的编号最大最小值即可，复杂度 $O(n)$。

竞赛图

竞赛图

竞赛图是一种很特殊的图，$\forall i \neq j$，$i \to j$ 和 $j \to i$ 中一定存在恰好一条边。竞赛图因为其稠密性，有着很多良好的性质：

- 竞赛图必有哈密顿路径。特别的，强连通竞赛图一定有哈密顿回路。
- 竞赛图缩点后为完全 DAG。
- ...

CF1514E

交互题，有一张 n 个点的竞赛图，你可以向交互库进行询问。

询问 1：给定 x, y，交互库回答 x, y 之间边的方向。询问次数限制 $9n$。

询问 2：给定 x, S，其中 S 是一个点集。交互库回答是否存在 $k \in S$，使得 $x \to k$ 这条边存在。询问次数限制 $2n$。

你需要利用上面的询问，对于每对点 i, j 回答 i 能否到达 j。

$1 \leq n \leq 100$。

CF1514E

首先，我们尝试找到竞赛图的哈密顿路径。

假如我们已经有路径 $p_1 \to p_2 \to \cdots \to p_{k-1}$，现在想加入点 k。假如 $k \to p_1$ 和 $p_{k-1} \to k$ 其中至少一条边存在，那么我们直接加进去就行了，否则，$p_1 \to k$ 和 $k \to p_{k-1}$ 这两条边存在。

假如我们已知 $p_l \to k$ 和 $k \to p_r$ 这两条边存在，假如 $l+1=r$，那么我们把 k 插在 p_l, p_r 之间即可。

否则，令 $m=\lfloor (l+r)/2 \rfloor$，询问 k 和 p_m 之间边的方向。假如是 $k \to p_m$，那么令 $r=m$；否则令 $l=m$。显然这个过程只会重复 $O(\log n)$ 次，所以求出这条哈密顿路径只需要花 $9n$ 次询问 1。

考虑缩点后竞赛图形如一个完全 DAG，我们试图缩点。假如现在我们有的强连通块为 $S_1 \to S_2 \to \cdots \to S_m$，我们每次拿出一个 S_m 里的点 u，询问 u 和 $\cup_{i=1}^{m-1} S_i$，假如成功，那么 S_{m-1} 和 S_m 必然在同一个强连通块，合并。这个过程至多使用 $n+n$ 次询问 2。

求出缩点后得到答案是简单的。

杂题

CF1239F

给定一个 n 个点，m 条边的无向简单图，你需要保留一个原图的真子集 S，使得 $\forall i \in S$，i 在 S 的导出子图内的度数和 i 在原图的度数在模三意义下相同。

构造方案或报告无解。

$1 \leq n, m \leq 5 \times 10^5$。

CF1239F

设 d_i 为点 i 度数模三的余数。假如存在 $d_i = 0$ 的点，那么就直接把其他点都删了即可。假如有多个连通块，那么只保留一个即可。

假如两个 $d_i = 1$ 的点，那么我们找到一条 $1 - 2 - 2 - \cdots - 1$ 的路径即可（中间 2 的部分可以长度为 0），所以至多一个 1。

先不考虑 1，尝试找到一个只有 2 的简单环，如果有，那么保留这个环即可（特别的，如果整张图就是一个简单环，无解）。现在是一堆 2 的树挂在 1 上。删去 1 之后肯定无解，因为叶子度数肯定为 1 或 0。对于每棵树，我们一定可以找到一个环 $1 - 2 - 2 - \cdots - 1$，假如有两个这样的环，那么我们保留这两个环即可，由于 1 的度数至少为 4，可以知道这样的两个环一定存在。

复杂度 $O(n + m)$。

CF555E

给定一张 n 个点 m 条边的无向图以及 q 组有向点对 (s_i, t_i)。

现在你需要把每条边都定向成有向边，求是否存在一种定向方案，使得 $\forall 1 \le i \le q$， s_i 可以到达 t_i。

$1 \le n, m, q \le 2 \times 10^5$。

CF555E

首先注意到无向图中不存在割边的连通块一定可以被定向成一个强连通块，那么我们把边双连通分量缩起来就变成了树的情况了，直接求 lca 做。

复杂度 $O(n+m+q\log n)$。

作业

作业

- PTZ winter 2021 Day1 D, CF786B, Xmas Contest 2020 G, ABC241E, ARC061C
- 改上午模拟赛
- 做本课件例题

Thank you!