数学选讲

朱剑枫

2023.7.29

exgcd

exgcd 大家肯定都会了。但不知道是不是都很熟悉原理。

exgcd

exgcd 大家肯定都会了。但不知道是不是都很熟悉原理。
exgcd 递归的时候，能得到 $bx_0 + (a\%b)y_0 = d = \gcd(a, b)$，
$a\%b = a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor b$，那么
$bx_0 + (a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor b)y_0 = ay_0 + b(x_0 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_0) = d$。

exgcd

exgcd 大家肯定都会了。但不知道是不是都很熟悉原理。
exgcd 递归的时候，能得到 $bx_0 + (a\%b)y_0 = d = \gcd(a, b)$，
$a\%b = a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor b$，那么
$bx_0 + (a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor b)y_0 = ay_0 + b(x_0 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_0) = d$。
所以 $x = y_0, y = x_0 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_0$。

exgcd

exgcd 大家肯定都会了。但不知道是不是都很熟悉原理。
exgcd 递归的时候，能得到 $bx_0 + (a\%b)y_0 = d = \gcd(a, b)$，
$a\%b = a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor b$，那么
$bx_0 + (a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor b)y_0 = ay_0 + b(x_0 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_0) = d$。
所以 $x = y_0, y = x_0 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_0$。
可以证明的是，exgcd 所解出来的 x, y 满足 $|x| \leq |b|, |y| \leq |a|$，
也就是说不需要担心中间结果爆 int 的可能。

exgcd

得到 $ax_0 + by_0 = d$ 之后，还要再解 $ax + by = s$。

exgcd

得到 $ax_0 + by_0 = d$ 之后，还要再解 $ax + by = s$。
若 $d \nmid s$，那么显然无解，否则将 x_0 乘上 $\frac{s}{d}$ 后再对 $\frac{b}{d}$ 取模就行。

exgcd
luoguP1516

给定 x, y, m, n, l，求最小的非负整数 t，满足 $x + tm \equiv y + tn \pmod{l}$。

exgcd

luoguP1516

给定 x, y, m, n, l，求最小的非负整数 t，满足 $x + tm \equiv y + tn \pmod{l}$。
板子。将方程移项，则有 $t(m - n) \equiv y - x \pmod{l}$。

exgcd

luoguP1516

给定 x, y, m, n, l，求最小的非负整数 t，满足 $x + tm \equiv y + tn \pmod{l}$。
板子。将方程移项，则有 $t(m-n) \equiv y - x \pmod{l}$。
然后将模 l 改成减去了若干 l，即 $t(m-n) - kl = y - x$，那么这样就可以直接套用 exgcd 了。

给定 n 个方程，分别是 $x \equiv b_i \pmod{a_i}$，要求解出最小的非负整数 x。
$\operatorname{lcm}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \leq 10^{18}$

设 x 是一个解，$x+d$ 也是一个解，那么则必有 $a_i \mid d$，所以最终答案可以表示为 $x \equiv x_0 \pmod{\operatorname{lcm}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}}$。

设 x 是一个解，$x+d$ 也是一个解，那么则必有 $a_i \mid d$，所以最终答案可以表示为 $x \equiv x_0 \pmod{\operatorname{lcm}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}}$。
一个一个将方程加进去，即，对于前 $i-1$ 个方程，维护出通解 $x \equiv x_0 \pmod{m}$，然后再加入第 i 个方程看会有什么变化。

设 x 是一个解，$x+d$ 也是一个解，那么则必有 $a_i \mid d$，所以最终答案可以表示为 $x \equiv x_0 \pmod{\operatorname{lcm}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}}$。
一个一个将方程加进去，即，对于前 $i-1$ 个方程，维护出通解 $x \equiv x_0 \pmod{m}$，然后再加入第 i 个方程看会有什么变化。
则有 $x \equiv x_0 \pmod{m}, x \equiv b \pmod{a}$。

那么我们设 $x = x_0 + zm$，则 $x_0 + zm \equiv b \pmod{a}$，即 $z \equiv b - x_0 \pmod{a}$。
直接解出 z 即可。若无解则说明整个方程无解。

那么我们设 $x = x_0 + zm$，则 $x_0 + zm \equiv b \pmod a$，即 $z \equiv b - x_0 \pmod a$。
直接解出 z 即可。若无解则说明整个方程无解。
在这样之后，则有 $x \equiv x_0 + zm \pmod{\operatorname{lcm}(m, a)}$。

那么我们设 $x = x_0 + zm$，则 $x_0 + zm \equiv b \pmod a$，即 $z \equiv b - x_0 \pmod a$。
直接解出 z 即可。若无解则说明整个方程无解。
在这样之后，则有 $x \equiv x_0 + zm \pmod{\operatorname{lcm}(m, a)}$。
但是在过程中，可能会遇到求 $a \times b \bmod m$ 的情况，其中 $a, b, m \le 10^{18}$。这样的话可以直接使用 `int128`。不想用也可以像快速幂那样写个“快速”乘。

那么如果上面的方程是 $c_i x \equiv b_i \pmod{a_i}$ 呢?

那么如果上面的方程是 $c_i x \equiv b_i \pmod{a_i}$ 呢?
如果 $\gcd(c_i, a_i) = 1$，则可以找到 c_i 的逆元，也就是使得 $c_i y \equiv 1 \pmod{a_i}$ 的 y，给等式两边同时乘上 y。

那么如果上面的方程是 $c_i x \equiv b_i \pmod{a_i}$ 呢?
如果 $\gcd(c_i, a_i) = 1$，则可以找到 c_i 的逆元，也就是使得 $c_i y \equiv 1 \pmod{a_i}$ 的 y，给等式两边同时乘上 y。
那就变成了 $(yc_i)x \equiv x \equiv yb_i \pmod{a_i}$。

那么如果上面的方程是 $c_i x \equiv b_i \pmod{a_i}$ 呢?
如果 $\gcd(c_i, a_i) = 1$，则可以找到 c_i 的逆元，也就是使得 $c_i y \equiv 1 \pmod{a_i}$ 的 y，给等式两边同时乘上 y。
那就变成了 $(yc_i)x \equiv x \equiv yb_i \pmod{a_i}$。
可如果 $\gcd(c_i, a_i) \neq 1$，那么直接将 c_i, b_i, a_i 直接除掉 $\gcd(c_i, a_i)$ 即可。

那么如果上面的方程是 $c_i x \equiv b_i \pmod{a_i}$ 呢?
如果 $\gcd(c_i, a_i) = 1$，则可以找到 c_i 的逆元，也就是使得 $c_i y \equiv 1 \pmod{a_i}$ 的 y，给等式两边同时乘上 y。
那就变成了 $(yc_i)x \equiv x \equiv yb_i \pmod{a_i}$。
可如果 $\gcd(c_i, a_i) \neq 1$，那么直接将 c_i, b_i, a_i 直接除掉 $\gcd(c_i, a_i)$ 即可。
正确性证明直接将同余式改写成等式即可。

那么如果上面的方程是 $c_i x \equiv b_i \pmod{a_i}$ 呢?
如果 $\gcd(c_i, a_i) = 1$，则可以找到 c_i 的逆元，也就是使得 $c_i y \equiv 1 \pmod{a_i}$ 的 y，给等式两边同时乘上 y。
那就变成了 $(yc_i)x \equiv x \equiv yb_i \pmod{a_i}$。
可如果 $\gcd(c_i, a_i) \neq 1$，那么直接将 c_i, b_i, a_i 直接除掉 $\gcd(c_i, a_i)$ 即可。
正确性证明直接将同余式改写成等式即可。
这也就是 NOI2018 D2T1。

费马小定理

对于 $a, p(p$ 是质数且 a 不是 p 的倍数)，那么有

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

。

费马小定理

对于 $a, p(p$ 是质数且 a 不是 p 的倍数)，那么有

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

。

证明即假设 $0 < a < p$，那么对于

$$0 < x_1 < x_2 < p, ax_1 \not\equiv ax_2 \pmod p$$

。

费马小定理

对于 $a, p(p$ 是质数且 a 不是 p 的倍数)，那么有

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

。
证明即假设 $0 < a < p$，那么对于

$$0 < x_1 < x_2 < p, ax_1 \not\equiv ax_2 \pmod p$$

。
所以 $\prod_{i=1}^{p-1} i \equiv \prod_{i=1}^{p-1} (ai) \pmod p$，即 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$。

费马小定理

对于 $a, p(p$ 是质数且 a 不是 p 的倍数)，那么有

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

。
证明即假设 $0 < a < p$，那么对于

$$0 < x_1 < x_2 < p, ax_1 \not\equiv ax_2 \pmod p$$

。
所以 $\prod_{i=1}^{p-1} i \equiv \prod_{i=1}^{p-1}(ai) \pmod p$，即 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$。
所以 a 的逆元也正好是 a^{p-2}。一般求逆元都用这个求。

（扩展）欧拉定理

欧拉定理：若 $\gcd(a,p)=1$，则 $a^{\phi(p)} \equiv 1 \pmod p$；
扩展欧拉定理：若 $\gcd(a,p) \neq 1$，则若 $b \leq \phi(p)$，则 $a^b \equiv a^b \pmod p$；
否则若 $b > \phi(p)$，则 $a^b \equiv a^{b \bmod \phi(p)+\phi(p)} \pmod p$。

（扩展）欧拉定理

欧拉定理：若 $\gcd(a, p) = 1$，则 $a^{\phi(p)} \equiv 1 \pmod p$；
扩展欧拉定理：若 $\gcd(a, p) \neq 1$，则若 $b \leq \phi(p)$，则 $a^b \equiv a^b \pmod p$；
否则若 $b > \phi(p)$，则 $a^b \equiv a^{b \bmod \phi(p) + \phi(p)} \pmod p$。
证明与费马小定理其实本质类似，但较为繁琐，可以作为结论直接记下来。

Lucas 定理

对于 n, m 和质数 p，有 $\binom{n}{m} \equiv \binom{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor} \binom{n \% p}{m \% p} \pmod p$。

Lucas 定理

对于 n, m 和质数 p，有 $\binom{n}{m} \equiv \binom{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor}\binom{n\%p}{m\%p} \pmod p$。

首先，对于 $1 < i < p$，有

$$\binom{p}{i} \equiv \frac{p!}{i!(p-i)!} \equiv 0 \pmod p, \binom{p}{0} \equiv \binom{p}{p} \equiv 1 \pmod p$$

。

Lucas 定理

对于 n, m 和质数 p，有 $\binom{n}{m} \equiv \binom{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor}\binom{n\%p}{m\%p} \pmod p$。

首先，对于 $1 < i < p$，有

$$\binom{p}{i} \equiv \frac{p!}{i!(p-i)!} \equiv 0 \pmod p, \binom{p}{0} \equiv \binom{p}{p} \equiv 1 \pmod p$$

。

那么，$\binom{n}{m}$ 是在 n 个球里面选 m 个球。对于前 p 个球，它们只有不选或 p 个全选才有贡献。

Lucas 定理

对于 n, m 和质数 p，有 $\binom{n}{m} \equiv \binom{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor}\binom{n\%p}{m\%p} \pmod p$。

首先，对于 $1 < i < p$，有

$$\binom{p}{i} \equiv \frac{p!}{i!(p-i)!} \equiv 0 \pmod p, \binom{p}{0} \equiv \binom{p}{p} \equiv 1 \pmod p$$

。

那么，$\binom{n}{m}$ 是在 n 个球里面选 m 个球。对于前 p 个球，它们只有不选或 p 个全选才有贡献。

那么对于前 $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ 组，每组 p 个球，它们都是必须不选或全选，所以选的球个数必定是 p 的倍数，且必须是 $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor$ 组全选，这就对应了 $\binom{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor}$。

Lucas 定理

对于 n, m 和质数 p，有 $\binom{n}{m} \equiv \binom{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor}\binom{n\%p}{m\%p} \pmod p$。

首先，对于 $1 < i < p$，有

$$\binom{p}{i} \equiv \frac{p!}{i!(p-i)!} \equiv 0 \pmod p, \binom{p}{0} \equiv \binom{p}{p} \equiv 1 \pmod p$$

。

那么，$\binom{n}{m}$ 是在 n 个球里面选 m 个球。对于前 p 个球，它们只有不选或 p 个全选才有贡献。

那么对于前 $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ 组，每组 p 个球，它们都是必须不选或全选，所以选的球个数必定是 p 的倍数，且必须是 $\lfloor \frac{m}{p} \rfloor$ 组全选，这就对应了 $\binom{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor}$。

而 $n\%p < p$，所以后面 $n\%p$ 个球正好要选 $m\%p$ 个球把 $m\%p$ 的余数消掉。这就是 $\binom{n\%p}{m\%p}$

Lucas 定理

luoguP8688

给定 n, m, k，询问有多少对 (i, j)，满足 $1 \le i \le n, 0 \le j \le \min(m, i)$，且

$$\binom{i}{j} \equiv 0 \pmod{k}$$

$k \le 10^8$ 且是质数，$n, m \le 10^{18}$，数据组数 $T \le 10^5$。

Lucas 定理

luoguP8688

题目等价于算出有多少对 $0 \le i \le n, 0 \le j \le m$，满足

$$\binom{i}{j} \not\equiv 0 \pmod{k}$$

Lucas 定理

luoguP8688

题目等价于算出有多少对 $0 \le i \le n, 0 \le j \le m$，满足

$$\binom{i}{j} \not\equiv 0 \pmod k$$

那么将 n, m 的 k 进制表示写下来，那么由 Lucas 定理，就可以得到这个的条件是在 k 进制下，i 的每一位都大于等于 j 的对应位。

Lucas 定理

luoguP8688

题目等价于算出有多少对 $0 \le i \le n, 0 \le j \le m$，满足

$$\binom{i}{j} \not\equiv 0 \pmod{k}$$

那么将 n, m 的 k 进制表示写下来，那么由 Lucas 定理，就可以得到这个的条件是在 k 进制下，i 的每一位都大于等于 j 的对应位。
所以可以直接数位 dp，设 $f_{a,0/1,0/1}$ 表示 dp 完低 a 位，有多少种方案使得 i 的每一位都大于等于 j 的对应位，且 i 在低 a 位是否大于 n，j 在低 a 位是否大于 m。

Lucas 定理

luoguP8688

题目等价于算出有多少对 $0 \le i \le n, 0 \le j \le m$，满足

$$\binom{i}{j} \not\equiv 0 \pmod{k}$$

那么将 n, m 的 k 进制表示写下来，那么由 Lucas 定理，就可以得到这个的条件是在 k 进制下，i 的每一位都大于等于 j 的对应位。
所以可以直接数位 dp，设 $f_{a,0/1,0/1}$ 表示 dp 完低 a 位，有多少种方案使得 i 的每一位都大于等于 j 的对应位，且 i 在低 a 位是否大于 n，j 在低 a 位是否大于 m。
转移可以暴力枚举 i, j 是等于 n, m 的对应位，还是大于/小于。
然后还有一些比较求和，但这是细节了。

Lucas 定理

luoguP8688

题目等价于算出有多少对 $0 \le i \le n, 0 \le j \le m$，满足

$$\binom{i}{j} \not\equiv 0 \pmod{k}$$

那么将 n, m 的 k 进制表示写下来，那么由 Lucas 定理，就可以得到这个的条件是在 k 进制下，i 的每一位都大于等于 j 的对应位。
所以可以直接数位 dp，设 $f_{a,0/1,0/1}$ 表示 dp 完低 a 位，有多少种方案使得 i 的每一位都大于等于 j 的对应位，且 i 在低 a 位是否大于 n，j 在低 a 位是否大于 m。
转移可以暴力枚举 i, j 是等于 n, m 的对应位，还是大于/小于。
然后还有一些比较求和，但这是细节了。
时间复杂度 $O(T \log n)$。

Lucas 定理

那么对于 $p=2$，$\binom{n}{m}\equiv 1 \pmod 2$ 的条件就是 $n\&m=m$。这在以后很重要。

Lucas 定理

那么对于 $p=2$，$\binom{n}{m} \equiv 1 \pmod 2$ 的条件就是 $n\&m=m$。这在以后很重要。
剩下来的就是一些普通的求组合数内容，比较无聊。

数论函数

设：$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = \prod p_i^{a_i}$

数论函数

设：$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = \prod p_i^{a_i}$
一般记：$\phi(n) = \prod (p_i - 1) p_i^{a_i - 1}$，为 n 以内与 n 互质的数的个数；

数论函数

设：$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = \prod p_i^{a_i}$
一般记：$\phi(n) = \prod (p_i - 1) p_i^{a_i - 1}$，为 n 以内与 n 互质的数的个数；
$d(n) = \prod (a_i + 1)$，为 n 的约数个数；

数论函数

设：$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = \prod p_i^{a_i}$
一般记：$\phi(n) = \prod (p_i - 1) p_i^{a_i - 1}$，为 n 以内与 n 互质的数的个数；
$d(n) = \prod (a_i + 1)$，为 n 的约数个数；
$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k = \prod (1 + p_i^k + p_i^{2k} + \cdots + p_i^{a_i k})$，为 n 所有约数 k 次方之和，显然有 $\sigma_0(n) = d(n)$；

数论函数

设：$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} = \prod p_i^{a_i}$
一般记：$\phi(n) = \prod (p_i - 1) p_i^{a_i - 1}$，为 n 以内与 n 互质的数的个数；
$d(n) = \prod (a_i + 1)$，为 n 的约数个数；
$\sigma_k(n) = \sum\limits_{d|n} d^k = \prod (1 + p_i^k + p_i^{2k} + \cdots + p_i^{a_i k})$，为 n 所有约数 k 次方之和，显然有 $\sigma_0(n) = d(n)$；
这些都可以通过线性筛 $O(n)$ 处理出来。

数论函数

ϕ

为什么 ϕ 长这个样子？对于一个与 n 互质的 x，必有

$$x \equiv b_i \pmod{p_i}, b_i \neq 0$$

数论函数

ϕ

为什么 ϕ 长这个样子？对于一个与 n 互质的 x，必有

$$x \equiv b_i \pmod{p_i}, b_i \neq 0$$

而由于 p_i 两两互质，所以对于任意都不是 0 的 b 序列，在 $\prod p_i$ 以内都有且仅有一个解，所以共有 $\prod (p_i - 1)$ 个与 n 互质的。

数论函数

ϕ

为什么 ϕ 长这个样子？对于一个与 n 互质的 x，必有

$$x \equiv b_i \pmod{p_i}, b_i \neq 0$$

而由于 p_i 两两互质，所以对于任意都不是 0 的 b 序列，在 $\prod p_i$ 以内都有且仅有一个解，所以共有 $\prod(p_i - 1)$ 个与 n 互质的。而 n 共有 $\prod p_i^{a_i - 1}$ 块 $\prod p_i$，每一块都是一样的，所以 $\phi(n) = \prod(p_i - 1)p_i^{a_i}$。

数论函数

ϕ

为什么 ϕ 长这个样子？对于一个与 n 互质的 x，必有

$$x \equiv b_i \pmod{p_i}, b_i \neq 0$$

而由于 p_i 两两互质，所以对于任意都不是 0 的 b 序列，在 $\prod p_i$ 以内都有且仅有一个解，所以共有 $\prod(p_i - 1)$ 个与 n 互质的。
而 n 共有 $\prod p_i^{a_i - 1}$ 块 $\prod p_i$，每一块都是一样的，所以 $\phi(n) = \prod(p_i - 1)p_i^{a_i}$。
$\phi(n)$ 还有另外一个性质：$\sum\limits_{d|n} \phi(d) = \sum\limits_{d|n} \phi(\frac{n}{d}) = n$。

为什么 ϕ 长这个样子？对于一个与 n 互质的 x，必有

$$x \equiv b_i \pmod{p_i}, b_i \neq 0$$

而由于 p_i 两两互质，所以对于任意都不是 0 的 b 序列，在 $\prod p_i$ 以内都有且仅有一个解，所以共有 $\prod(p_i - 1)$ 个与 n 互质的。
而 n 共有 $\prod p_i^{a_i - 1}$ 块 $\prod p_i$，每一块都是一样的，所以 $\phi(n) = \prod(p_i - 1)p_i^{a_i}$。
$\phi(n)$ 还有另外一个性质：$\sum\limits_{d|n} \phi(d) = \sum\limits_{d|n} \phi(\frac{n}{d}) = n$。
证明即枚举 n 以内 $\gcd(n, i) = d$ 的 i 的个数：$\frac{i}{d}$ 与 $\frac{n}{d}$ 互质。那么每个 i 都会在 $d = \gcd(n, i)$ 处算一次。所以求和等于 n。

数论函数

luoguP2518

有一个 $n \times n$ 的点阵（从 1 到 n），求有多少点和 $(1,1)$ 的连线上面没有别的点。
$n \leq 40000$

数论函数

luoguP2518

首先在第 1 行和第 1 列的点只有 $(1,2)$ 和 $(2,1)$ 能看到。

数论函数

luoguP2518

首先在第 1 行和第 1 列的点只有 $(1,2)$ 和 $(2,1)$ 能看到。
然后 $(1+i,1+j)$ 能看到的条件就是 $\gcd(i,j)=1$。所以题目要求有多少 $i,j<n$，满足 $\gcd(i,j)=1$。

数论函数

luoguP2518

首先在第 1 行和第 1 列的点只有 $(1,2)$ 和 $(2,1)$ 能看到。
然后 $(1+i,1+j)$ 能看到的条件就是 $\gcd(i,j)=1$。所以题目要求有多少 $i,j<n$，满足 $\gcd(i,j)=1$。
假设 $i>j$，那么就有 $\phi(i)$ 种可行的 j，同理，若 $j>i$，那么就有 $\phi(j)$ 种可行的 i，还有个 $i=j=1$。

数论函数

luoguP2518

首先在第 1 行和第 1 列的点只有 $(1,2)$ 和 $(2,1)$ 能看到。
然后 $(1+i,1+j)$ 能看到的条件就是 $\gcd(i,j)=1$。所以题目要求有多少 $i,j<n$，满足 $\gcd(i,j)=1$。
假设 $i>j$，那么就有 $\phi(i)$ 种可行的 j，同理，若 $j>i$，那么就有 $\phi(j)$ 种可行的 i，还有个 $i=j=1$。

所以答案等于 $2+1+\sum_{i=2}^{n-1}\phi(i)+\sum_{j=2}^{n-1}\phi(j)=2\sum_{i=2}^{n-1}\phi(i)+3$。

数论函数

luoguP2398

求 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gcd(i,j)$。

$n \le 10^5$

数论函数

luoguP2398

对于一个 d，我们很难知道有多少对 (i, j)，满足 $\gcd(i, j) = d$，但是很容易知道有多少对 (i, j) 满足 $d \mid \gcd(i, j)$，就是 $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2$。

数论函数

luoguP2398

对于一个 d，我们很难知道有多少对 (i,j)，满足 $\gcd(i,j)=d$，但是很容易知道有多少对 (i,j) 满足 $d \mid \gcd(i,j)$，就是 $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2$。所以对于 $\gcd(i,j)$，可以利用 ϕ 的性质，将它变为 $\sum\limits_{d|\gcd(i,j)} \phi(d)$，也就是 $\sum\limits_{d|i,d|j} \phi(d)$。

数论函数

luoguP2398

对于一个 d，我们很难知道有多少对 (i,j)，满足 $\gcd(i,j)=d$，但是很容易知道有多少对 (i,j) 满足 $d \mid \gcd(i,j)$，就是 $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2$。所以对于 $\gcd(i,j)$，可以利用 ϕ 的性质，将它变为 $\sum\limits_{d \mid \gcd(i,j)} \phi(d)$，也就是 $\sum\limits_{d|i,d|j} \phi(d)$。

那么就把 d 放到最前面枚举 d，即答案等于 $\sum_{d=1}^{n} \phi(d) \sum\limits_{d|i} \sum\limits_{d|j} 1 = \sum_{d=1}^{n} \phi(d) \lfloor \frac{n}{d} \rfloor^2$。

数论函数

?

对于 $1 \le n \le 10^7$，求 $ans_n = \sum_{i=1}^{n} n \bmod i$

数论函数

?

考虑对于 i，$(n-1) \bmod i$ 和 $n \bmod i$ 的关系：先假设 $n \bmod i$ 大了 1。而当 $i \mid n$ 时，结果应该是 0，而我们算的是 i，所以还要减去 i。

数论函数

?

考虑对于 i，$(n-1) \bmod i$ 和 $n \bmod i$ 的关系：先假设 $n \bmod i$ 大了 1。而当 $i \mid n$ 时，结果应该是 0，而我们算的是 i，所以还要减去 i。

所以先假设 n 比 $n-1$ 的所有数取模都大了 1，最后再减掉 n 的所有约数（n 除外）即可，即 $ans_n = ans_{n-1} + 2n - 1 - \sigma_1(n)$。

对于每个 n，求出有多少长为 n 的排列，满足 $p_i \neq i$。

对于每个 n，求出有多少长为 n 的排列，满足 $p_i \neq i$。
设答案为 f_i，那么考虑 $p_n = i$，如果 $p_i = n$，那么方案数就是 $(n-1) \times f_{n-2}$；

对于每个 n，求出有多少长为 n 的排列，满足 $p_i \neq i$。
设答案为 f_i，那么考虑 $p_n = i$，如果 $p_i = n$，那么方案数就是 $(n-1) \times f_{n-2}$；
否则我们就要求 $p_i \neq n$，那么可以把这个 n 看成 i，方案数 $(n-1) \times f_{n-1}$，所以 $f_n = (n-1) \times (f_{n-1} + f_{n-2})$。

隔板法

计算方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i = m, x_i \geq 1$ 有多少解。

隔板法

计算方程 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = m, x_i \geq 1$ 有多少解。
看成把 m 个球排成一排并分成 n 份，那么有 $m-1$ 个空隙，要分成 n 份就要选 $n-1$ 个空隙隔开，答案就是 $\binom{m-1}{n-1}$。

隔板法

计算方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i = m, x_i \geq 1$ 有多少解。
看成把 m 个球排成一排并分成 n 份，那么有 $m-1$ 个空隙，要分成 n 份就要选 $n-1$ 个空隙隔开，答案就是 $\binom{m-1}{n-1}$。
还有 $\sum x_i \leq m$、$0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq m$。

组合意义

把抽象的问题给一个具体的解释，从而简化问题。

组合意义

把抽象的问题给一个具体的解释，从而简化问题。

计算方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i = m, x_i \geq 1$ 的所有解中 $\prod_{i=1}^{n} x_i$ 的和。

组合意义

把抽象的问题给一个具体的解释，从而简化问题。
计算方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i = m, x_i \geq 1$ 的所有解中 $\prod_{i=1}^{n} x_i$ 的和。
把 $\prod x_i$ 组合意义一下，就是在分出来的每一组球当中，再选择一个代表元。

组合意义

把抽象的问题给一个具体的解释，从而简化问题。

计算方程 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = m, x_i \geq 1$ 的所有解中 $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ 的和。

把 $\prod x_i$ 组合意义一下，就是在分出来的每一组球当中，再选择一个代表元。

对于 n 个组中的球，确定了代表元，可以看成把代表元提出来，它左边的和右边的球也被隔开。

组合意义

把抽象的问题给一个具体的解释，从而简化问题。

计算方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i = m, x_i \geq 1$ 的所有解中 $\prod_{i=1}^{n} x_i$ 的和。

把 $\prod x_i$ 组合意义一下，就是在分出来的每一组球当中，再选择一个代表元。

对于 n 个组中的球，确定了代表元，可以看成把代表元提出来，它左边的和右边的球也被隔开。

也就是说，对于一个 x_i，把它拆成代表元左边的个数 l_i 和代表元右边的个数 r_i。这样给定一组 $\{l\}$ 和 $\{r\}$，就能确定分组情况和代表元了。

组合意义

所以，将问题转化成了：计算有多少组 $\sum_{i=1}^{n} l_i + r_i = m - n$ 的解，且 $l_i, r_i \geq 0$。

组合意义

所以，将问题转化成了：计算有多少组 $\sum_{i=1}^{n} l_i + r_i = m - n$ 的解，且 $l_i, r_i \geq 0$。

l_i, r_i 全部加一，就变成了上面的问题，答案就是 $\binom{m+n-1}{2n-1}$。

组合意义

CF1842G

有一个长为 n 的序列和 v，进行 m 次操作，每次操作随机一个 $1 \le i \le n$，给 a_i 到 a_n 全部加上 v，求最终 $\prod a_i$ 的期望值。
$n \le 5000, m, v \le 10^9$
期望不用管，它就是把所有结果的 $\prod a_i$ 乘起来再除以总方案数 n^m。所以只要求出所有结果 a_i 乘积之和。

组合意义

CF1842G

利用乘法分配律：$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$。

组合意义

CF1842G

利用乘法分配律：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$。
将最终的每个 a_i 改写成：$b_i=a_i+v+v+\cdots+v$，之后算它们的乘积时，我们改为在每个 b_i 里面选择 a_i 或者一个 v，然后把选出来的乘起来求和。

组合意义

CF1842G

利用乘法分配律：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$。
将最终的每个 a_i 改写成：$b_i=a_i+v+v+\cdots+v$，之后算它们的乘积时，我们改为在每个 b_i 里面选择 a_i 或者一个 v，然后把选出来的乘起来求和。
核心思想是这里选 v 时，把这些 v 都看成一个个不同的数。总共会选择 n 个数，所以那么大的 m 意义不大。只需要关心被我们选出来的 v。

组合意义

CF1842G

利用乘法分配律：$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$。
将最终的每个 a_i 改写成：$b_i=a_i+v+v+\cdots+v$，之后算它们的乘积时，我们改为在每个 b_i 里面选择 a_i 或者一个 v，然后把选出来的乘起来求和。
核心思想是这里选 v 时，把这些 v 都看成一个个不同的数。总共会选择 n 个数，所以那么大的 m 意义不大。只需要关心被我们选出来的 v。

组合意义

CF1842G

设 $f_{i,j}$ 表示选择完前 i 个数里面把什么乘起来后，总共选了 j 个本质不同的 v 的乘积之和（这里本质不同的定义是在 m 次操作中加入的时间不同）。

组合意义

CF1842G

设 $f_{i,j}$ 表示选择完前 i 个数里面把什么乘起来后，总共选了 j 个本质不同的 v 的乘积之和（这里本质不同的定义是在 m 次操作中加入的时间不同）。
如果选择了 a_{i+1}，那么 $f_{i,j} \times a_{i+1} \to f_{i+1,j}$；

组合意义

CF1842G

设 $f_{i,j}$ 表示选择完前 i 个数里面把什么乘起来后，总共选了 j 个本质不同的 v 的乘积之和（这里本质不同的定义是在 m 次操作中加入的时间不同）。

如果选择了 a_{i+1}，那么 $f_{i,j} \times a_{i+1} \to f_{i+1,j}$；

如果选择了一个 v，这个 v 在 i 之前被选择过了，那么 $f_{i,j} \times v \times j \to f_{i+1,j}$；

组合意义

CF1842G

设 $f_{i,j}$ 表示选择完前 i 个数里面把什么乘起来后，总共选了 j 个本质不同的 v 的乘积之和（这里本质不同的定义是在 m 次操作中加入的时间不同）。

如果选择了 a_{i+1}，那么 $f_{i,j} \times a_{i+1} \to f_{i+1,j}$；

如果选择了一个 v，这个 v 在 i 之前被选择过了，那么 $f_{i,j} \times v \times j \to f_{i+1,j}$；

如果选择了一个 v，这个 v，还没选过，那么不仅贡献乘 v，还要钦定它是第几次操作以及位置，$f_{i,j} \times v \times (i+1) \times (m-j) \to f_{i+1,j+1}$。

组合意义

CF1842G

设 $f_{i,j}$ 表示选择完前 i 个数里面把什么乘起来后，总共选了 j 个本质不同的 v 的乘积之和（这里本质不同的定义是在 m 次操作中加入的时间不同）。

如果选择了 a_{i+1}，那么 $f_{i,j} \times a_{i+1} \to f_{i+1,j}$；

如果选择了一个 v，这个 v 在 i 之前被选择过了，那么 $f_{i,j} \times v \times j \to f_{i+1,j}$；

如果选择了一个 v，这个 v，还没选过，那么不仅贡献乘 v，还要钦定它是第几次操作以及位置，$f_{i,j} \times v \times (i+1) \times (m-j) \to f_{i+1,j+1}$。

$ans = \sum_{i=0}^{\min(n,m)} f_{n,i} \times n^{m-i}$。时间复杂度 $O(n^2)$。

翻折法

从 $(0,0)$ 走到 (n,m) 的方案数为 $\binom{n+m}{m}$。
加一个限制：从 $(0,0)$ 走到 (n,m)，且不经过 $y=x+k$ 的方案数：$\binom{n+m}{n}-\binom{n+m}{n+k}$。
$n=m, k=1$ 这个特例就是卡特兰数了。

简单容斥

翻折法就可以算一个简单的容斥。

简单容斥

翻折法就可以算一个简单的容斥。
简单的容斥就可以看成：合法的方案不好算出来，但是可以那总方案减去不合法的方案，其中不合法的方案是好算的。

简单容斥

luoguP5664

有一个 $n \times m$ 的矩阵 a，要求在其中选出若干个数，满足：
至少选择一个数；
每行最多选一个数；
不存在一列，使得这一列选的数超过选的数的总个数的一半。
定义一个选数方案的价值是所有选出来的数的乘积，求所有合法方案的价值和。
$n \leq 100, m \leq 2000$

简单容斥

luoguP5664

前两个条件是好满足的，但最后一个条件在 dp 中直接判断是否满足比较困难。

简单容斥

luoguP5664

前两个条件是好满足的，但最后一个条件在 dp 中直接判断是否满足比较困难。
但是可以发现，最后一个条件不满足，那么这个选数方案只会有一列超过了总数的一半。

简单容斥

luoguP5664

前两个条件是好满足的，但最后一个条件在 dp 中直接判断是否满足比较困难。
但是可以发现，最后一个条件不满足，那么这个选数方案只会有一列超过了总数的一半。
所以考虑拿所有的方案减去不合法的方案。所有方案是简单的。

简单容斥

luoguP5664

对于一个不合法的方案，可以枚举哪一列超过了总数的一半，即它比其它列选的数个数和都多。

简单容斥

luoguP5664

对于一个不合法的方案，可以枚举哪一列超过了总数的一半，即它比其它列选的数个数和都多。

那么有一个暴力 dp：设 $f_{i,j,k}$ 表示 dp 完前 i 行，枚举的一列选了 j 个，其它列选了 k 个的乘积之和。

那么这一列超过一半的方案就是 $\sum\limits_{j \geq k} f_{n,j,k}$。

简单容斥

luoguP5664

对于一个不合法的方案，可以枚举哪一列超过了总数的一半，即它比其它列选的数个数和都多。

那么有一个暴力 dp：设 $f_{i,j,k}$ 表示 dp 完前 i 行，枚举的一列选了 j 个，其它列选了 k 个的乘积之和。

那么这一列超过一半的方案就是 $\sum\limits_{j\geq k} f_{n,j,k}$。

这样 dp 一次 $O(n^3)$，要做 m 次，无法通过。

简单容斥

luoguP5664

对于一个不合法的方案，可以枚举哪一列超过了总数的一半，即它比其它列选的数个数和都多。
那么有一个暴力 dp：设 $f_{i,j,k}$ 表示 dp 完前 i 行，枚举的一列选了 j 个，其它列选了 k 个的乘积之和。
那么这一列超过一半的方案就是 $\sum\limits_{j \geq k} f_{n,j,k}$。
这样 dp 一次 $O(n^3)$，要做 m 次，无法通过。
但只要求 $j \geq k$，所以可以记录 $f_{i,j}$ 表示前 i 行，枚举列的减去其它列的个数为 j，最后只要 $f_{n,j\geq 0}$ 即可。

简单容斥

luoguP5664

对于一个不合法的方案，可以枚举哪一列超过了总数的一半，即它比其它列选的数个数和都多。
那么有一个暴力 dp：设 $f_{i,j,k}$ 表示 dp 完前 i 行，枚举的一列选了 j 个，其它列选了 k 个的乘积之和。
那么这一列超过一半的方案就是 $\sum\limits_{j \geq k} f_{n,j,k}$。
这样 dp 一次 $O(n^3)$，要做 m 次，无法通过。
但只要求 $j \geq k$，所以可以记录 $f_{i,j}$ 表示前 i 行，枚举列的减去其它列的个数为 j，最后只要 $f_{n,j\geq 0}$ 即可。
单次 dp $O(n^2)$，总复杂度 $O(n^2m)$。

宿营

一个 $n \times m$ 的网格，可以选择在里面搭帐篷（有四个方向），且如果同一行/同一列有两个帐篷，那么它们必须相对。求合法方案数。
如果一行/一列有大于两个帐篷，那么不合法。
$n, m \leq 3000$

宿营

设 $f_{i,j}$ 表示 $n = i, m = j$ 时的答案，那么考虑最后一行：

宿营

设 $f_{i,j}$ 表示 $n = i, m = j$ 时的答案，那么考虑最后一行：
如果有两个，那么就选择两列，并且直接删除最后一行和两列；

宿营

设 $f_{i,j}$ 表示 $n = i, m = j$ 时的答案，那么考虑最后一行：
如果有两个，那么就选择两列，并且直接删除最后一行和两列；
如果一个没有，直接删除最后一行；

宿营

设 $f_{i,j}$ 表示 $n = i, m = j$ 时的答案，那么考虑最后一行：
如果有两个，那么就选择两列，并且直接删除最后一行和两列；
如果一个没有，直接删除最后一行；
如果有一个且这个所在列上没有，那钦定一列删掉；

宿营

设 $f_{i,j}$ 表示 $n=i, m=j$ 时的答案，那么考虑最后一行：
如果有两个，那么就选择两列，并且直接删除最后一行和两列；
如果一个没有，直接删除最后一行；
如果有一个且这个所在列上没有，那钦定一列删掉；
否则找到这一列的另外一个，删去它所在的行就行。

宿营

设 $f_{i,j}$ 表示 $n=i,m=j$ 时的答案，那么考虑最后一行：
如果有两个，那么就选择两列，并且直接删除最后一行和两列；
如果一个没有，直接删除最后一行；
如果有一个且这个所在列上没有，那钦定一列删掉；
否则找到这一列的另外一个，删去它所在的行就行。
时间复杂度 $O(nm)$。

luoguP9035

求有多少个长为 n 的数组满足：$0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ 且 $a_{n-1} + a_n \leq k + 1$。
$n, k \leq 10^7$，询问组数 $T \leq 2 \times 10^5$。

luoguP9035

设 $t = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$，则显然有 $a_{n-1} \leq t$。

luoguP9035

设 $t = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$，则显然有 $a_{n-1} \leq t$。
那么如果 $a_n \leq t$，$a_{n-1} + a_n \leq k + 1$ 的限制就满足了；

luoguP9035

设 $t = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$，则显然有 $a_{n-1} \le t$。
那么如果 $a_n \le t$，$a_{n-1} + a_n \le k + 1$ 的限制就满足了；
否则 $a_{n-1} \le k + 1 - a_n \le \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$，那么我们设 $a'_n = k + 1 - a_n$，则将 a_n 替换为 a'_n，那么就跟上面的问题一样了。

luoguP9035

设 $t = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$，则显然有 $a_{n-1} \le t$。
那么如果 $a_n \le t$，$a_{n-1} + a_n \le k+1$ 的限制就满足了；
否则 $a_{n-1} \le k+1-a_n \le \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$，那么我们设 $a'_n = k+1-a_n$，则将 a_n 替换为 a'_n，那么就跟上面的问题一样了。
预处理阶乘，每次询问即可 $O(1)$ 回答。

luoguP7322

定义一个长为 n 的排列的价值为：有多少 p_i，满足存在一个长为 k 的区间，p_i 是最大值。
求所有排列价值之和。
$n, k \leq 5 \times 10^5$

luoguP7322

为了方便，先将大小反转，即要求 p_i 是最小值。
那么对每个 i（这是数值）分别计算它作为最小值时的贡献。

luoguP7322

为了方便，先将大小反转，即要求 p_i 是最小值。
那么对每个 i（这是数值）分别计算它作为最小值时的贡献。
为了不算重，有一种方法是在最靠左的区间来算它。

luoguP7322

为了方便，先将大小反转，即要求 p_i 是最小值。
那么对每个 i（这是数值）分别计算它作为最小值时的贡献。
为了不算重，有一种方法是在最靠左的区间来算它。
剩下来就是推式子了。

qaq

给定长度为 n 的序列 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 和 m，求出有多少长为 n 的字符串数组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，满足：
字符集大小是 m；
a_i 长度是 b_i；
a_{i+1} 是 a_i 的子序列。
$10^7 \geq b_1 > b_2 > \cdots > b_n > 0, m \leq 10^9$。

qaq

不妨将整个字符串序列倒过来，要求 a_{i-1} 是 a_i 的子序列，那么现在只要考虑在一个字符串中间塞字符。

qaq

不妨将整个字符串序列倒过来，要求 a_{i-1} 是 a_i 的子序列，那么现在只要考虑在一个字符串中间塞字符。
考虑如何将每种方案只计数一次：我们在将某个字符插在某个原字符串的某个字符之前时，强制要求新插的字符与原字符串的这个字符不同即可。

qaq

不妨将整个字符串序列倒过来，要求 a_{i-1} 是 a_i 的子序列，那么现在只要考虑在一个字符串中间塞字符。
考虑如何将每种方案只计数一次：我们在将某个字符插在某个原字符串的某个字符之前时，强制要求新插的字符与原字符串的这个字符不同即可。
证明考虑贪心地识别一个序列是不是另一个序列的子序列。

qaq

所以如果插在原字符串的某个字符之前，方案数是 $m-1$，插在末尾则是 m 种。处理第 i 和 $i+1$ 个串之间时枚举多少个字符插在了 i 的末尾即可。

qaq

所以如果插在原字符串的某个字符之前，方案数是 $m-1$，插在末尾则是 m 种。处理第 i 和 $i+1$ 个串之间时枚举多少个字符插在了 i 的末尾即可。
最后将第一个串和相邻两个串的答案乘起来就是最终答案。时间复杂度 $O(b)$。

你的世界

给定一颗 n 个点的无根树和 m，每个点有权重 $a_i(a_i \geq 0)$。对于一棵这样的树，定义它的权值是带权重心的编号。

求所有满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = m$ 的 a_i 的分配方案的权值之和。

$n \leq 2 \times 10^5, m < 10^7$ 且 m 是奇数。

你的世界

由于 m 是奇数，所以重心是唯一的。

你的世界

由于 m 是奇数，所以重心是唯一的。
对每个点，直接计算它是中心的方案数不是很好算，仍然拿总方案数减去不合法方案数，也就是某个子树权值和 $> \frac{m}{2}$ 的方案。

你的世界

由于 m 是奇数，所以重心是唯一的。
对每个点，直接计算它是中心的方案数不是很好算，仍然拿总方案数减去不合法方案数，也就是某个子树权值和 $> \frac{m}{2}$ 的方案。
那么就要求 i 个点，权值和 $> \frac{m}{2}$ 的方案数，递推考察 f_i 和 f_{i-1} 的关系即可。

网格图

有一个 $n \times m$ 的网格图，初始在 $(0,0)$，问有多少种走法（每步向下/向右)，使得经过 $n \times m$ 个网格恰好一次后回到 $(0,0)$。
$n, m \leq 10^6$

网格图

首先，画一下可以发现，对角线走法一定一样。

网格图

首先，画一下可以发现，对角线走法一定一样。
根据一些扩欧相关知识，则每 $d = \gcd(n, m)$ 步走法一致。

网格图

首先，画一下可以发现，对角线走法一定一样。
根据一些扩欧相关知识，则每 $d = \gcd(n, m)$ 步走法一致。
那么只要不在 d 的整数倍提前走到 $(0, 0)$ 就行，于是向下走 i，向右 $d - i$，则只要 $\gcd(n, i) = \gcd(m, d - i) = 1$。

连通性

Floyd 判连通性，但是最外层的 k 只循环到 $n-m$，问有多少张图满足这样的 Floyd 跑出来的是正确的结果。

$n,m \le 100$，多组询问，组数 $\le 10^5$

连通性

称前 $n-m$ 个点是白点，后 $n-m$ 个点是黑点。
题目等价于：后 m 个点不会将前 $n-m$ 个点的连通块再连起来，
且单独后 m 个点的连通块是一个完全图。

连通性

称前 $n-m$ 个点是白点，后 $n-m$ 个点是黑点。
题目等价于：后 m 个点不会将前 $n-m$ 个点的连通块再连起来，且单独后 m 个点的连通块是一个完全图。
那么，先设 b_i 表示 i 个点，每个连通块都是完全图的方案，那么枚举最后一个点所在连通块大小就行。

连通性

然后对于前后都有的点，相当于后面的点是“附加”再白点上面的，所以要求白点联通，黑点任意连边。
于是 $f_{i,j}$ 表示 i 个白点，j 个黑点（它们是有编号的）组成的合法图个数，转移类似上面，需要一些辅助数组。

连通性

然后对于前后都有的点，相当于后面的点是“附加”再白点上面的，所以要求白点联通，黑点任意连边。
于是 $f_{i,j}$ 表示 i 个白点，j 个黑点（它们是有编号的）组成的合法图个数，转移类似上面，需要一些辅助数组。
询问的时候枚举有 i 个黑点是没有和白点连边的。时间复杂度 $O(n^4+tn)$。

连通性 2

有 $2^n - 1$ 个长为 n 的 01 串，它们是除了全 0 以外的所有串。
现在选出其中的一些串，构造一个选出的串的图：若两个串按位与非 0，则他们之间有边。
对于一个连通块，设它们总共有 i 个位置有 1，则权值是 a_i。一张图的权值是所有连通块权值的乘积。
现在求所有 $2^{2^n-1} - 1$ 种选串方案的权值之和。
$n \leq 5000$

连通性 2

首先，对于 i，求出 $1 \sim i$ 位置都有 1，且它们联通的选串方案之和 g_i（串长也是 i）。

连通性 2

首先，对于 i，求出 $1 \sim i$ 位置都有 1，且它们联通的选串方案之和 g_i（串长也是 i）。
每个连通块一定包含了若干位置的 1，而且别的连通块不包含这些位置。

连通性 2

首先，对于 i，求出 $1 \sim i$ 位置都有 1，且它们联通的选串方案之和 g_i (串长也是 i)。
每个连通块一定包含了若干位置的 1，而且别的连通块不包含这些位置。
直接求不好求，考虑拿总方案减去不合法方案。不合法方案即有些位置和第 i 个位置不在同一个连通块里面，减掉就行。

连通性 2

首先，对于 i，求出 $1 \sim i$ 位置都有 1，且它们联通的选串方案之和 g_i（串长也是 i）。
每个连通块一定包含了若干位置的 1，而且别的连通块不包含这些位置。
直接求不好求，考虑拿总方案减去不合法方案。不合法方案即有些位置和第 i 个位置不在同一个连通块里面，减掉就行。
这样就求出了 g_i。

连通性 2

现在求 f_i 表示在所有串长为 i 且所有位置都出现过 1 的情况下的权值之和，转移可以直接枚举有多少位置和 i 在一个连通块。

连通性 2

现在求 f_i 表示在所有串长为 i 且所有位置都出现过 1 的情况下的权值之和，转移可以直接枚举有多少位置和 i 在一个连通块。

答案就是 $\sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i} f_i$

时间复杂度 $O(n^2)$。

作业

- luoguP4774, luoguP2606, luoguP2568
- luoguP4921/4931, luoguP4562, luoguP4187
- luoguP4448

以后?

- luoguP4213, luoguP1587
- 容斥：luoguP3270, luoguP4448（$O(n^2)$），luoguP8329