图论（树）

张致

July 27, 2023

目录

1. 随机树据
2. 树上倍增
3. 树上差分
4. 一种关于 LCA 的技巧
5. 长链剖分
6. 树的重心
7. 作业

随机树据

随机树据

在题目中树为纯随机生成时，会有一些额外的性质：

- 当第 i 个点的父亲在 $[1, i-1]$ 中等概率随机选取，那么树的高度期望为 $O(\log n)$。
- 当树从所有有标号无根树中随机选取，那么树的高度期望为 $O(\sqrt{n})$。
- ...

树上倍增

树上倍增

倍增在关于树的问题中是一种非常常用的技巧，特别是在刻画树上路径时。

倍增本质上是对一个点到根形成的序列的某个子列的刻画，并不局限于 2^k 级父亲。同时因此，倍增在最深公共祖先问题中在某些方面比其他算法更优秀。

找不到出处的题

给定一棵树，初始时只有根一个点，你需要维护如下操作：

- 给定 u，假如现在树上有 n 个节点，那么新增一个父亲为 u，编号为 $n+1$ 的叶子节点。
- 给定 u, v，询问这两个的 lca。

强制在线，操作共 n 次。
$1 \leq n \leq 3 \times 10^5$。

找不到出处的题

我们尝试使用倍增来求 lca，注意到加入节点 i 时，所有 i 的祖先的倍增数组已经求出，我们可以直接利用来求出 i 的倍增数组。所以加入一个叶子的复杂度就是 $O(\log n)$。

总复杂度 $O(n \log n)$。

[省选联考 2021 A/B 卷] 宝石

给定 n 个点的树，每个节点有一种宝石，第 i 个节点宝石种类为 w_i，宝石总共有 m 种。

你有一个宝石收集器。这个宝石收集器能按照顺序收集至多 c 颗宝石，其收集宝石的顺序为：$P_1, P_2, \ldots, P_c$。更具体地，收集器需要先放入第 P_1 种宝石，然后才能再放入第 P_2 种宝石，之后再能放入第 P_3 种宝石，以此类推。其中 $P_1, P_2, \ldots, P_c$ 互不相等。

你到达一个点后，如果该点上宝石种类和当前收集器中需要放入的种类相同，则你可以把一个该种宝石放进收集器。

询问 q 次，每次给出起点 s_i 与终点 t_i，你需要回答，如果你走从 s_i 到 t_i 的最短路，收集器中最多能收集到几个宝石？(在每次询问中，收集器内初始时没有任何宝石。起点与终点城市集市上的宝石可以尝试被收集)

$1 \le n, q \le 2 \times 10^5$，$1 \le c \le m \le 5 \times 10^4$，$1 \le w_i \le m$。

[省选联考 2021 A/B 卷] 宝石

考虑二分答案 x，如何判定。记 $l = lca(s_i, t_i)$，把路线拆成 s_i 到 l，l 到 t_i 两部分。

对于宝石种类为 P_i 的点 u，记 $f_{u,0}$ 为它向上第一个种类为 P_{i+1} 的点，$g_{u,0}$ 为它向上第一个种类为 P_{i-1} 的点，然后记 $f_{u,j} = f_{f_{u,j-1},j-1}, g_{u,j} = g_{g_{u,j-1},j-1}$。

令 U 为 s_i 向上第一个种类为 P_1 的点（包括自己），V 为 t_i 向上第一个种类为 P_x 的点（包括自己），那么就利用 f, g 倍增判定 x 是否可行即可。

复杂度 $O((n+q)\log^2 n)$。

树上差分

树上差分

当需要对链进行操作，可以离线的时候，树上差分非常好用。

树上差分本质上是维护父亲减去所有儿子的差分数组，使得对链修改时只需要改 $O(1)$ 个点，还原时也可以 $O(n)$ 全部还原。

[NOIP2015 提高组] 运输计划

给定一个点数为 n 的带非负边权的树，以及树上的 m 条链（可能有交），一条链的长度为链上所有边的边权和。

你现在可以把恰好一条边的边权变为 0，你需要使得这 m 条链的长度的最大值最小。

$1 \leq n, m \leq 3 \times 10^5$。

[NOIP2015 提高组] 运输计划

我们可以二分答案 x，对于链长已经小于等于 x 的链，我们可以忽略，那么我们只需要求出一条边权最大的边，使得剩余所有链都包含这条边。

我们预处理 lca 后，就可以用树上差分在 $O(n+m)$ 的复杂度内求出每条边被多少条链包含。

复杂度 $O((n+m)\log n+(n+m)\log W)$，其中 W 为边权和。

一种关于 LCA 的技巧

一种关于 LCA 的技巧

考虑对于有根树而言，求 $dep_{lca(u,v)}$ 可以视为，对 u 到根的路径链加一，然后求 v 到根路径上的和。

[LNOI2014] LCA

给出一个 n 个节点的有根树。
一个点的深度定义为这个节点到根的距离 $+1$。
设 $dep[i]$ 表示点 i 的深度，$\mathrm{LCA}(i,j)$ 表示 i 与 j 的最近公共祖先。
有 m 次询问，每次询问给出 l,r,z，求 $\sum_{i=l}^{r} dep[\mathrm{LCA}(i,z)]$。
$1 \le n,m \le 50000$。

[LNOI2014] LCA

离线，将 $\sum_{i=l}^{r} dep[\mathrm{LCA}(i,z)]$ 拆成 $\sum_{i=1}^{r} dep[\mathrm{LCA}(i,z)]$ 和 $\sum_{i=1}^{l-1} dep[\mathrm{LCA}(i,z)]$。

$\sum_{i=1}^{r} dep[\mathrm{LCA}(i,z)]$，相当于令 $\forall 1 \le i \le r$，i 到根的路径加一，然后询问 z 到根的链和。对询问排序后重链剖分即可。

复杂度 $O((n+q)\log^2 n)$。

长链剖分

长链剖分

在题目与树的深度/链长/直径有关的时候，长链剖分是一种常见的技巧。特别是在 dp 状态涉及子树深度时，长剖可以用来优化 dp。

长链剖分和重链剖分类似，设子树深度最深的儿子作为长儿子，其他为短儿子，长儿子对应的边为长边，连通的长边构成长链。可以证明，从任意点到根节点至多经过 $O(\sqrt{n})$ 条长链。

同时，由于长链的性质，可以很快地解决一些和深度有关的问题，比如 $O(n\log n) - O(1)$ 求 k 级祖先。

[POI2014]Hotel 加强版

给定大小为 n 的树，边权全为 1，求三元组 (i,j,k) 的数量使得 $1\le i<j<k\le n$ 且 i,j,k 在树上两两的距离完全相同。

$1\le n\le 10^5$。

[POI2014]Hotel 加强版

令 $f_{u,j}$ 为 u 子树内离 u 距离恰为 j 的点的数量。

令 $g_{u,j}$ 为 u 子树内，满足如下条件的点对 v,w 的数量：令 v,w 的 lca 为 l，那么 v,w 离 l 的距离相等且 l 离 u 的距离恰为 v 离 l 的距离减 j。

写出转移式子，当加入 u 的儿子 v 时：

- $ans \leftarrow g_{v,j}f_{u,j-1} + g_{u,j}f_{v,j-1}$
- $g_{u,j+1} \leftarrow f_{u,j+1}f_{v,j}$
- $f_{u,j+1} \leftarrow f_{v,j}$
- $g_{u,j-1} \leftarrow g_{v,j}$

注意到，如果暴力转移，那么复杂度是 $O(len_v)$，其中 len_v 为 v 子树的深度。同时，从长儿子继承状态是 $O(1)$ 的。所以总复杂度是所有长链的长度和即为 $O(n)$。

树的重心

树的重心

直径和重心都是树非常重要的特征。重心的定义为使得删去后剩余子树最大点数最小的点，但是它有其他更有用的定义。

[ZJOI2015] 幻想乡战略游戏

给定 n 个点的无根树，点有非负点权 d_i，边有正边权。有 Q 次操作：

- 修改某个 d_i，保证修改后 d_i 非负。
- 查询 $\min_u\{\sum_{i=1}^n dis(u,i)d_i\}$，其中 $dis(u,v)$ 为 u,v 两个点在树上的最短距离。

$1 \le n, Q \le 10^5$。

原题作为动态点分树板子还有个每个点度数不超过 20 的限制，但是我们有一个更简单的做法不需要这个限制。

[ZJOI2015] 幻想乡战略游戏

事实上，使得要求式子最小的点 u 即为树的带权重心，这也是重心的其中一个定义。

我们令 1 作为根，求出每个子树点权和 sz_i，那么重心就是满足 $sz_1 \le 2sz_u$ 且使得 sz_u 最小的 u，这是重心的另一个定义。

那么假如我们已经获得了一个重心子树内的点 v，我们只需要不断令 $v \leftarrow fa_v$，直到 $2sz_v \ge sz_1$ 即可找到重心，这个过程我们可以用树状数组/线段树维护子树的点权和，配合倍增做到 $O(\log^2 n)$。

那么我们怎么找到 v 呢？考虑把点按 dfs 序排列为 p_i，那么一个点的子树对应这个排列的一个连续段，所以我们找到最小的 v，使得 $2\sum_{i=1}^{v} d_{p_i} \ge sz_1$，这个 v 一定在重心的子树内。我们二分查找到这个 v 即可。

总复杂度 $O(q\log^2 n + n)$。

CF1667E

对于所有点数为 n 的树，如果其满足对于所有 $i \in [2, n]$，与 i 相连的 j 中恰有一个点 j 满足 $j < i$ ，那么我们称其为好树。

$\forall 1 \le i \le n$，求出来有多少好树满足重心为 i。

重心定义满足为删去该点后形成的所有连通块大小均小于 $\frac{n-1}{2}$ 的点。

数据范围 $3 \le n \le 2 \times 10^5$ 且 n 为奇数。

CF1667E

设 f_i 为以 i 为根的子树大小超过 $m=\frac{n+1}{2}$ 的方案。
那么有：

$$f_i=\sum_{j=m}^{n}\binom{n-i}{j-1}(i-1)(n-j-1)!(j-1)!$$

其中 $\binom{n-i}{j-1}(j-1)!$ 为选择 $j-1$ 个点挂在 i 的子树内的方案，$(n-j-1)!$ 为子树外的点选父亲的方案，$i-1$ 为 i 选父亲的方案。

CF1667E

$$
\begin{aligned}
f_i &= (n-i)!(i-1)\sum_{j=m}^{n}\frac{(n-j-1)!}{(n-i-j+1)!}\\
&= (n-i)!(i-1)!\sum_{j=m}^{n}\binom{n-j-1}{i-2}\\
&= (n-i)!(i-1)!\sum_{j=i-2}^{n-m-1}\binom{j}{i-2}\\
&= (n-i)!(i-1)!\binom{n-m}{i-1}
\end{aligned}
$$

考虑设 g_i 为 i 为重心的方案数。考虑某个点 $j(j>i)$ 向父亲跳的过程，那么 i 是 j 的祖先的概率为 $\frac{1}{i}$。

那么有:

$$
g_i = f_i - \frac{\sum_{j=i+1}^{n} g_j}{i}
$$

复杂度 $O(n)$。

作业

作业

- CF1707C, [NOIP2013 提高组] 货车运输, CF980E, CF1060E, CF1499F
- 改上午模拟赛
- 做本课件例题

Thank you!