Numeri complessi
Se abbiamo $\sqrt{-3}=\sqrt{3}*\sqrt{-1}=\sqrt{3}\,i$
Potenze: $i^0=1, i^1=i, i^2=-1, i^3=i^2*i^1=-i\ldots$

Forma trigonometrica
Preso un numero complesso z = a + ib.
Si calcola prima il modulo $\rho=\sqrt{a^2 b^2}$, per calcolare θ dobbiamo seguire le seguenti regole:

$\frac{\pi}{2}$ se a=0, b>0

$-\frac{\pi}{2}$ se a=0, b<0

non definito se a = 0, b = 0

$arctg\frac{b}{a}$ se a>0, b qualsiasi valore

$arctg\frac{b}{a}+\pi$ se a<0, b >=0

$arctg\frac{b}{a}+\pi$ se a<0, b<0

oppure

$\cos\alpha=\frac{a}{\rho}$

$sen\,\alpha=\frac{b}{\rho}$

θ sarà l'angolo che rispetta il valore di $\cos\alpha$ e $sen\,\alpha$

Infine si scrive: $\rho(\cos\theta+isen\,\theta)$

Ricavare equazione da due soluzioni
Partiamo da due soluzioni $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 - i$.
Scriviamo l'equazione di una retta $ax^2 + bx + c$, poniamo uguale ad $a(x - z_1)(x - z_2)$.
Poniamo quindi a = 1 e sostituiamo il valore delle z:
[x -(1 + 2i)][x – (2 – i)]=
= (x – 1 – 2i) (x – 2 + i) =
= x^2 -2x +xi -x +2 -i -2xi +4i $-2i^2$ =
= x^2 -3x -xi + 3i + 4

Equazioni con i numeri complessi
Un equazione nel campo si risolve come una qualsiasi equazione l'unica cosa che cambia è quando abbiamo sotto radice un numero complesso con la i tipo $\sqrt{6i}$. In questo caso si deve prima trovare la forma trigonometrica del numero e poi applicare la seguente formula:

$$\sqrt[i]{\rho}\left(\cos\frac{(\alpha+2k\pi)}{\text{grado del polinomio}}+i\,sen\frac{(\alpha+2k\pi)}{\text{grado del polinomio}}\right)$$ dove i è il grado del polinomio.

k è un valore che va da 0 al grado del polinomio – 1, e per ogni iterazione che effettuiamo troviamo una soluzione alla nostra equazione (es: grado del polinomio 2 eseguiremo la formula per k = 0 e k = 1.

$x^2-6i=0\rightarrow x^2=6i\rightarrow x=\pm\sqrt{6i}$ otteniamo $a=0\,e\,b=6$ $\rho=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0+36}=6$

$\cos\alpha=\frac{a}{\rho}=\frac{0}{6}=0, sen\,\alpha=\frac{b}{\rho}=1$ $\alpha=\frac{\pi}{2},$ $z=6[\cos\frac{\pi}{2}+isen\frac{\pi}{2}]$

k = 0, $\sqrt{6i}=\sqrt{6}[\cos\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}+i\,sen\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}]=\sqrt{6}[\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}]=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{12}}{2}=\frac{\sqrt{2^2*3}}{2}+i\frac{\sqrt{2^2*3}}{2}=\sqrt{3}+i\sqrt{3}$

Proseguendo per k = 1 otterremo $\sqrt{3}-i\sqrt{3}$

Le soluzioni della nostra equazione sono: $\sqrt{3}\pm\sqrt{3}$

Equazioni con i numeri complessi z e z coniugato

Nota: $z=x+iy$, (coniugato) $\bar{z}=x-i\,y$, $|z|=x^2+y^2$

Un equazione nel campo complesso si risolve come una qualsiasi equazione, ma in alcuni casi possiamo trovarci difronte alla seguente forma:

$z^2+z\bar{z}=1+i$ sostituendo con i valori nelle note otteniamo

$x^2+2xiy+i^2y^2+x^2-i^2y^2-2-i=0$

$x^2+2xiy-y^2+x^2-i^2y^2-2-i=0$

$2x^2+2iy-2+i=0$

$(x^2-2)+i(2y+1)=0$

raccogliendo abbiamo ottenuto un numero immaginario con parte reale (x^2-2) e parte immaginaria $i(2y+1)$.

A questo punto mettiamo le due parti a sistema:

$\begin{Bmatrix} 2x^2-2=0 \\ 2y+1=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2x^2=-2 \\ 2y=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x^2=1 \Rightarrow \quad x_1=1 \text{ e } x_2=-1 \\ 2y+1=0 \end{Bmatrix}$ sostituiamo ora i valori delle x per trovare la parte y immaginaria collegata a loro:

per x = 1 otteniamo ½ e per x = -1 otteniamo – ½ , infine abbiamo che $z=1-i\frac{1}{2}$ e $z=-1-i\frac{1}{2}$

Forma esponenziale

Preso un numero complesso in forma trigonometrica $z=6[\cos\frac{\pi}{2}+isen\frac{\pi}{2}]$ la sua forma esponenziale sarà $6e^{i\frac{\pi}{2}}$.

I numeri complessi in forma esponenziale rendono più semplici le operazioni di moltiplicazione e divisione fra due numeri complessi in forma trigonometrica:

Presi $z_1=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $z_2=3e^{i\frac{\pi}{4}}$

1. **Moltiplicazione:** $z_1*z_2=2*3[\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})+i\,sen(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})]$
2. **Divisione:** $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{3}[\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})+i\,sen(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})]$

Soluzione disequazioni valori assoluti
Il valore assoluto |x| si studia in due casi quando x < 0 e x > 0:

$$|A(x)| < B(x) \rightarrow \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) < B(x) \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ -A(x) < B(x) \end{cases}$$

$$|A(x)| > B(x) \rightarrow \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) > B(x) \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ -A(x) > B(x) \end{cases}$$

Soluzione disequazioni logaritmi

$\log_a A(x) < \log_a B(x)$ e $\log_a A(x) \leq \log_a B(x)$ con a > 1

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases}$$

$\log_a A(x) > \log_a B(x)$ e $\log_a A(x) \geq \log_a B(x)$ con 0 < a < 1

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) > B(x) \end{cases}$$

Una volta fatto questo si risolvono graficamente i sistemi e si prende l'intervallo in comune

Disequazioni esponenziali
Partendo da una generica equazione esponenziale $a^x > b$, si scrivono a e b come equazioni esponenziali con la stessa base, la soluzione si ottiene scrivendo la disequazione dei due esponenti se a > 1 il segno della disequazione non cambia se 0 < a < 1 il segno della disequazione cambia.

Disequazioni irrazionali
Con indice pari:

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \qquad \sqrt[n]{A(x)} \leq B(x)$$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq [B(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$$

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^n \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq [B(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{A(x)} \geq B(x)$$

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq [B(x)]^n \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq [B(x)]^n \end{cases}$$

Con indice dispari:

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x) \qquad \sqrt[n]{A(x)} \leq B(x) \qquad \sqrt[n]{A(x)} > B(x) \qquad \sqrt[n]{A(x)} \geq B(x)$$

$$A(x) < [B(x)]^n \qquad A(x) \leq [B(x)]^n \qquad A(x) > [B(x)]^n \qquad A(x) \geq [B(x)]^n$$

Dominio o Campo di esistenza o Insieme di definizione

Per calcolare il dominio di una funzione è necessario tener conto delle condizioni riportate nella tabella seguente. Se ci sono più condizioni esse vanno messe a **sistema** sotto forma di disequazioni.
Il dominio della funzione è dato dalla soluzione del sistema o della singola disequazione.

funzione	condizione	
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	funzione fratta si pone il denominatore $g(x)$ diverso da 0
$y = \sqrt[n]{f(x)}$ **n** numero naturale **pari** diverso da zero	$f(x) \geq 0$	funzione radice n-sima ad indice pari si pone il radicando $f(x)$ maggiore o uguale di 0
$y = \log_a[f(x)]$	$f(x) > 0$	funzione logaritmo si pone l'argomento $f(x)$ maggiore di 0
$y = \log_{g(x)}[f(x)]$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$	funzione logaritmo con una funzione alla base si pone $\begin{cases} l'argomento\ f(x) > 0 \\ la\ base\ g(x) > 0 \\ la\ base\ g(x) \neq 1 \end{cases}$
$y = [f(x)]^{\alpha}$ **α** numero irrazionale	$f(x) > 0$	funzione potenza con esponente un numero irrazionale si pone la funzione alla base $f(x)$ maggiore di 0
$y = f(x)^{g(x)}$	$f(x) > 0$	funzione esponenziale con base una funzione si pone la funzione alla base $f(x)$ maggiore di 0
$y = tan\ [f(x)]$	$f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$	funzione tangente si pone l'argomento $f(x)$ diverso da $\frac{\pi}{2} + k\pi$
$y = cot\ [f(x)]$	$f(x) \neq k\pi$	funzione cotangente si pone l'argomento $f(x)$ diverso da $k\pi$
$y = arcsin\ [f(x)]$	$-1 \leq f(x) \leq 1$	funzione arcoseno si pone l'argomento $f(x)$ compreso o uguale tra -1 e 1
$y = arccos\ [f(x)]$	$-1 \leq f(x) \leq 1$	funzione arcocoseno si pone l'argomento $f(x)$ compreso o uguale tra -1 e 1

osservazione

le seguenti funzioni sono definite $\forall\ x \in R$:
potenza n-sima, radice con indice dispari, esponenziale, seno, coseno, arcotangente, arcocotangente

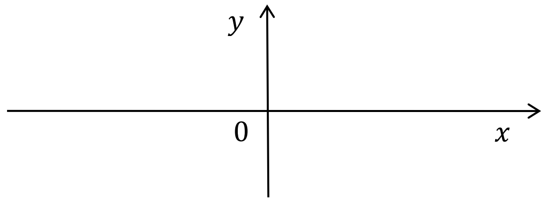
Dominio o Campo di esistenza o Insieme di definizione

esempi di calcolo e rappresentazione grafica del dominio di alcune funzioni

1. $y = x^2 + 3x - 5$

è possibile assegnare qualunque valore alla x. Il dominio è:

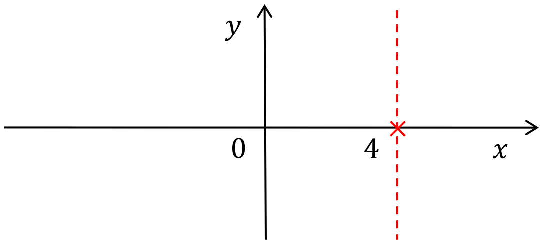
$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$



2. $y = \dfrac{x^2 + 3x - 5}{x - 4}$

si pone il denominatore diverso da zero. Il dominio è:

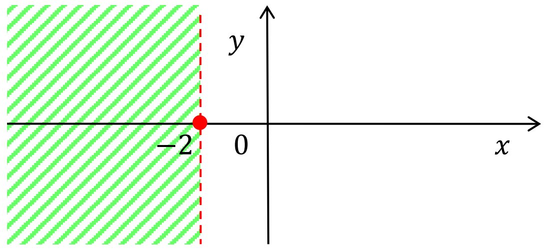
$x - 4 \neq 0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{x \neq 4}$



3. $y = \sqrt{x + 2}$

si pone il radicando maggiore o uguale a zero. Il dominio è:

$x + 2 \geq 0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{x \geq -2}$

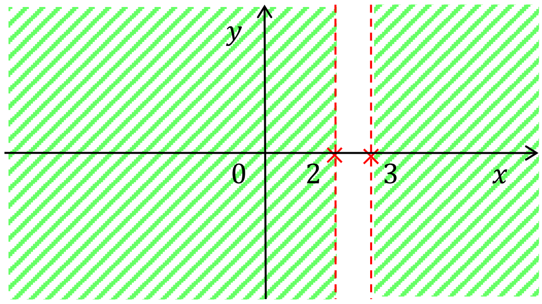


4. $y = ln\left(\dfrac{x - 2}{3 - x}\right)$

si pone l'argomento del logaritmo maggiore di zero e il denominatore diverso da zero. Il dominio è:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3-x} > 0 \\ 3 - x \neq 0 \longrightarrow superflua\ * \end{cases} \rightarrow \left\| \begin{matrix} x - 2 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{matrix} \right. \rightarrow \left\| \begin{matrix} x > 2 \\ x < 3 \end{matrix} \right. \rightarrow \boldsymbol{2 < x < 3}$$

(*) perché la condizione è già contenuta algebricamente nella precedente

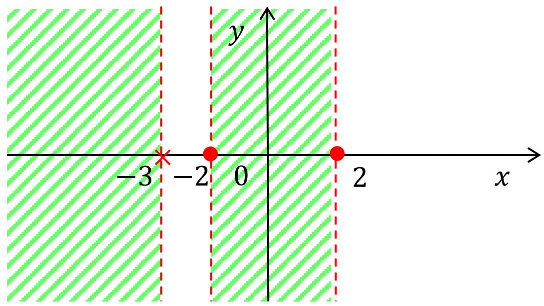


5. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x + 3}}$

si pone il radicando maggiore o uguale a zero e il denominatore diverso da zero. Il dominio è:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+3} \geq 0 \\ x + 3 \neq 0 \longrightarrow superflua\ * \end{cases} \rightarrow \left\| \begin{matrix} x^2 - 4 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{matrix} \right. \rightarrow \boldsymbol{-3} < x \leq -2 \ \lor\ x \geq 2$$

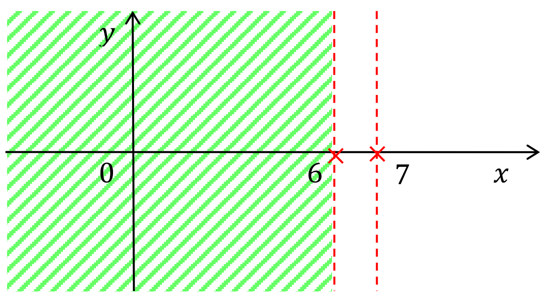
(*) perché la condizione è già contenuta algebricamente nella precedente



6. $y = \dfrac{e^{\sqrt{x-5}}}{\lg(x - 6)}$

si pongono a sistema le condizioni di esistenza della radi-ce, del logaritmo e del denominatore. Il dominio è:

$$\begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ x - 6 > 0 \\ \lg(x - 6) \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x > 6 \\ x - 6 \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x > 6 \\ x \neq 7 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{x > 6 - \{7\}}$$



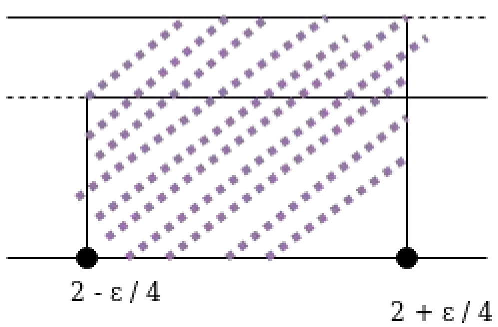
Limiti di funzioni elementari

- **Funzioni potenza $y = x^n$**
  - Se n è pari $\lim_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty$
  - Se n è dispari $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$
- **Funzioni radice $y = \sqrt[n]{x}$**
  - Se n è pari $\lim_{x\to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
  - Se n è dispari $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- **Funzioni esponenziali $y = a^x$**
  - Se a > 1 $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$
  - Se 0 < a < 1 $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$
- **Funzioni esponenziali $y = \log_a x$**
  - Se a > 1 $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$
  - Se 0 < a < 1 $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$

Applicazione definizione limiti

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} (4x-1) = 1 \to |4x-1-1| < \epsilon$$

$$\begin{cases} x<0 \\ -(4x-1-1)<\epsilon \end{cases} \vee \begin{cases} x\geq 0 \\ 4x-1-1<\epsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ -4x+2<\epsilon \end{cases} \vee \begin{cases} x\geq 0 \\ 4x-2<\epsilon \end{cases} \begin{pmatrix} x<0 \\ x>\dfrac{2-\epsilon}{4} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x\geq 0 \\ x<\dfrac{2+\epsilon}{4} \end{pmatrix}$$



Poniamo ora $\dfrac{2-\epsilon}{4} < 4x-2 < \dfrac{2+\epsilon}{4}$

$\dfrac{2-\epsilon}{4}+2 < 4x < \dfrac{2+\epsilon}{4}+2$ dividivamo per 4

$\dfrac{2-\epsilon}{16}+\dfrac{2}{4} < x < \dfrac{2+\epsilon}{16}+\dfrac{2}{4}$

Esercizi limiti

$\lim_{x\to 2} 5e^3 = 5e^3$, $\lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$, $\lim_{x\to 1} \ln x = \lim_{x\to 1} \ln 1 = 0$,

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{6}} \sin x = \lim_{x\to-\frac{\pi}{6}} \sin -\dfrac{\pi}{6} = \lim_{x\to-\frac{\pi}{6}} -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \cos 0 = 1$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3}^x = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3}^{+\infty} = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{x\to 0^+} \ln 0 = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ non esiste

$\lim_{x\to+\infty} (e^x + \ln x) = \lim_{x\to+\infty} e^{+\infty} + \ln +\infty = +\infty + \infty$, $\lim_{x\to e} 3 - \ln x = \lim_{x\to e} 3 - \ln e = 3-1 = 2$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x-2}{e^{x-2}}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{2^+-2}{e^{2^+-2}}\right)^{\frac{1}{2^+-2}}=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{0^+}{1}\right)^{\frac{1}{0^+}}=(0^+)^{+\infty}=0^+$$

Forme indeterminate dei limiti
Forma indeterminata +∞ -∞ (Raccoglimento parziale)

1

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4-x^2-9)=\lim_{x\to-\infty}(-\infty)^4-(-\infty)^2-9=-\infty+\infty \qquad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4-x^2-9)=\lim_{x\to-\infty}x^4\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{9}{x^4}\right)=\lim_{x\to-\infty}-\infty^4\left(1-\frac{1}{-\infty^2}-\frac{9}{-\infty^4}\right)=+\infty(1-0-0)=+\infty$$

2

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{x+1}-e^{4x})=\lim_{x\to+\infty}(e^{\infty+1}-e^{4*\infty})=+\infty-\infty \qquad \text{F.I.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{x+1}-e^{4x})=\lim_{x\to+\infty}e^{x+1}\left(1-\frac{e^{4x}}{e^{x+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{x+1}(1-e^{3x-1})=+\infty(-\infty)=-\infty$$

3

$$\lim_{x\to1^+}[2\ln(x-1)-\ln(x^2-x)]=\lim_{x\to1^+}[2\ln(0)-\ln(0)]=-\infty+\infty \qquad \text{F.I}$$

$$\lim_{(x\to1^+)}\ln(x-1)\left[2-\frac{\ln(x^2-x)}{\ln(x-1)}\right]=\lim_{(x\to1^+)}\ln(x-1)[2-\ln(x^2-x)-\ln(x-1)]=-\infty(2+\infty+\infty)=-\infty$$

Forma indeterminata 0 * ∞

Forma infeterminata ∞ / ∞
Si risolve come +∞ -∞

Forma infeterminata 0 / 0

1)

Primo polinomio

	3	**1**	**-10**
-2		**-6**	**10**
	3	**-5**	**0**

Secondo polinomio

	1	**-5**	**-14**
-2		**-3**	**14**
	1	**-7**	**0**

$$\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(-3x-5)}{(x+2)(x-7)}=\frac{11}{9}$$

2) $\lim_{x\to1}\frac{x^4-x^6}{x^6-x^7}=\frac{x^4(1-x^2)}{x^6(1-x)}=\frac{(1-x)(1+x)}{x^2(1-x)}=\frac{(1+x)}{(x^2)}=2$

3) $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(3x^2-3x)}=\frac{(x-1)^2}{(3x(x-1))}=\frac{x-1}{3x}=\frac{0}{3}$

4) $\lim_{x\to-3}\frac{x^3-9x}{x^2+3x}=\frac{x(x^2-9)}{x(x+3)}=\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=(x-3)=-6$

Limiti notevoli
Funzioni goniometriche

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{bx}=\frac{a}{b} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}=1$$

Funzioni logaritmiche

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln}a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln e=1$$

Funzioni esponenziali

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab} \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\frac{1}{e} \qquad \lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{x}=\ln e=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(a^{bx}-1)}{x}=b\ln a$$

Altri esercizi sui limiti

1) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1}-1}{1-1}=\frac{0}{0} \qquad \text{F.I}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{sqrtx+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-4x-12}{6-x}=\frac{36-24-12}{6-6}=\frac{0}{0} \qquad \text{F.I.}$$

NOTA riduzione di un trinomio di secondo grado: si trovano le due soluzioni x_1 e x_2 e si riduce nella seguente formula $[x-(x_1)][x-(x_2)]$, se ci compare Δ = 0 allora il trinomio è un quadrato di binomio.

$$\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x+2)}{(-x-6)}=\lim_{x\to 6}\frac{-(-x+6)(x+2)}{(-x-6)}=\lim_{x\to 6}(-x-2)=-6-2=-8$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sen\,x}$ ricordando che $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ quindi dividiamo tutto per x:

$$\lim x\to 0\,\frac{\frac{e^x-1-(e^{-x}0-1)}{x}}{\frac{sen\,x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(e^x-1)}{x}+\frac{(e^{-x}-1)}{-x}}{\frac{sen\,x}{x}}=\frac{1+1}{1}=2$$

Rapporto incrementale
Dati una funzione y = f(x), definita in un intervallo [a, b], e due numeri reali c e c + h interni all'intervallo, ai chiama rapporto incrementale di f(relativo a c) il numero: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

Esercizio:
Data la funzione f(x) = x - 1 e c = 3 h = 0,5
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\frac{f(3{,}5)-f(3)}{0.5}=\frac{2{,}5-2}{0.5}=1$$
Per un generico h si usa h nei calcoli:
Data la funzione f(x) = x^2-4x+8 e c = -3
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\frac{9-6h+h^2+12-4h+8-9-12-8}{h}=$$
$$=\frac{-10h+h^2}{h}=\frac{h(h-10)}{h}=h-10$$

Derivate
Esercizi:
$y=\pi \quad y'=0;\quad y=\ln x \quad y'=\frac{1}{x};\quad y=sen\frac{\pi}{4}\quad y'=\cos\frac{\pi}{4};\quad y=\cos\frac{\pi}{4}\quad y'=-sen\frac{\pi}{4}$

$y=4^x \quad y'=4^x\ln 4;\quad y=\log_{10}x \quad y'=\frac{1}{x\log 10};$

Derivata di una costante k per una funzione f(x):
D[k * f(x)] = k * f'(x)

$y=5x \quad y'=5;\quad y=2e^x \quad y'=2e^x;\quad y=5\ln x \quad y'=5\frac{1}{x}=\frac{5}{x};$

$y=-3cosx \quad y'=-3-sen\,x=sen\,x;\quad y=4\log_a e \quad y'=4\frac{1}{x\log_a e}=\frac{4}{x\log_a e};$

$y=\frac{-3}{4}x \quad y'=-\frac{3}{4};\quad y=3*5^x \quad y'=3*5^x\log 5;\quad y=\frac{1}{6}lnx \quad y'=\frac{1}{6}*\frac{1}{x}=\frac{1}{6x};$

Derivata di somme tra funzioni y = f(x) + g(x) **y' =f'(x) + g(x)**

$y=sen\,x-2\cos x+1 \qquad y'=\cos x+2\,sen\,x$

$y=2x-\frac{1}{2}+2^x \qquad y'=2+2^x\ln 2$

$y=4x+2\ln x-3 \qquad y'=4+2(\frac{1}{x})=2(2+\frac{1}{x})$

$y=4^x+3^x-2 \qquad y'=4^x\ln 4+3^x\ln 3$

$y=2^x+\log_3 x \qquad y'=2^x\ln 2+\frac{1}{x\log 3}=2^x\ln 2+\frac{1}{x}*\log_3 e$

Derivata di prodotti tra funzioni y = f(x) * g(x) **y' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)**

$y=x*e^x \qquad y'=e^x+x*e^x=e^x(x+1)$

$y=5e^x*sen\,x \qquad y'=5e^x*sen\,x+5e^x*\cos x=5e^x(senx+\cos x)$

$y=(\ln x-3)*\ln x \qquad y'=\frac{1}{x}*\ln x+(\ln-3)*\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(lnx+lnx-3)=\frac{1}{x}(2\,lnx-3)$

Derivate delle potenze di una funzione f(x)^x = x f(x)$^{x-1}$

$y=x^5 \qquad y'=5x^4$

$y=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3-5x^2+2x-4 \qquad y'=\frac{4}{2}x^3-\frac{6}{3}x^2-10x+2=2x^3-2x^2-10x+2=2(x^3-x^2-5x+1)$

Derivate di y = [f(x)]^a y'=a[f(x)]$^{a-1}$ * f'(x)

$y=(3x^3-5x^2+1)^3 \qquad y'=2(3x^3-5x^2+1)^2*(9x^2-10x)=3x(3x^3-5x^2+1)^2*(9x^2-10x)$

Derivate quoziente di funzioni $\boldsymbol{y=f\frac{(x)}{g(x)}} \qquad \boldsymbol{y'=\frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{(g(x)^2)}}$

$y=\frac{5}{x^3+1} \qquad y'=\frac{-5(3x^2)}{(x^3+1)^2}=\frac{-15(3x^2)}{(x^3+1)^2}$

Derivata di una funzione composta y = f[g(x)] y' = f'[g(x)] g'(x)

$y=2\,sen\,5x \qquad y'=2\cos 5x*5=10\cos 5x$

$y=\frac{1}{2}e^{4x} \qquad y'=\frac{1}{2}e^{4x}*4=2e^{4x}$

$y=\ln(2x^2-x-1) \qquad y'=\frac{1}{2x^2-x-1}*4x-1=\frac{4x-1}{2x^2-x-1}$

$y=e^{\frac{2x}{x-1}} \qquad y'=e^{\frac{2x}{x-1}}*\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}=\frac{-2e^{\frac{2x}{x-1}}}{(x-1)^2}$

$y=\frac{1}{4}tg\,4x^4 \qquad y'=\frac{1}{4}*\frac{1}{\cos^2 4x^4}*16x^3=\frac{16x^3}{4\cos^2 4x^4}=\frac{4x^3}{\cos^2 4x^4}$

$y=\sqrt[3]{x^3-3x} \qquad y'=\frac{3x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^3-3x¿)^2}}=\frac{x^2-3}{\sqrt[3]{(x^3-3x¿)^2}}$

Derivata di y = [f(x)]$^{g(x)}$ y'=[f(x)]$^{g(x)}$ [g'(x) * ln f(x) + g(x) * f'(x) / f(x)

- $y=x^{2x+1}$

$y'=x^{2x+1}*[2*\ln x+\frac{2x+1}{x}]=x^{2x+1}[2\ln x+\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}]=x^{2x+1}[2\ln x+\frac{1}{x}+2]$

- $y=(tg\,x)^{2x}$

$y'=(tg\,x)^{2x}[2\ln tg\,x+\frac{2x*\frac{1}{\cos^2 x}}{tg\,x}]=(tg\,x)^{2x}[2\ln tg\,x+\frac{2x}{\cos^2 x\,tgx}]=2(tg\,x)^{2x}[\ln tgx+\frac{x}{\cos^2 x\,tg\,x}]$

Teorema di Lagrange
Presa una funzione f(x) e un intervallo [a,b], se f(x) è continua, e derivabile allora esiste un punto c all'interno dell'intervallo [a,b] t.c. $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- Esercizio:
f(x) = $2x^2 + x + 1$ [-2; 3]
1) f(x) è continua in R perché il dominio è R essendo polinomiale
2) f'(x) = 4x + 1

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{22-7}{3+2}=\frac{15}{5}=3$$

$$4c+1=3\Rightarrow 4c=2\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

Teorema di Rolle
Presa una funzione f(x) e un intervallo [a,b], se f(x) è continua, derivabile e con f(a) = f(b) allora esiste un punto c all'interno dell'intervallo [a,b] t.c. f'(c) = 0.

- Esercizio:
f(x) = $-x^2 + 3x$ [1, 2]
1) è continua perché polinomiale
2) f'(x) = - 2x + 3
3) f(1) = f(2) → 2 = 2 → 0 = 0, sappiamo quindi che esiste un f'(c) = 0.

$$f'(c)=0\Rightarrow -2c+3=0\Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

Teorema di Cauchy
Presa due funzioni f(x) e g(x) e un intervallo [a,b], se f(x) e g(x) sono continue, derivabili nell'intervallo]a , b[e risulta g'(x) = 0 allora esiste un punto c all'interno dell'intervallo [a,b] t.c.

$$\frac{f'(c)}{g'(b)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

- Esercizio:
f(x) = $-x^2 + 3x$ g(x) = $2x^2$ [1, 4]
1) f(x) e g(x) sono continue.
2) f'(x) = -2x + 3 g'(x) = 4x]1, 4[
3) g'(x) ≠ 0 → 4x ≠ 0 → x ≠ 4, poiché 4 non appartiene all'intervallo allora g(x) ≠ 0 in]1, 4[.

$$\frac{f'(c)}{g'(b)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{-2x+3}{4x}=\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{-2x+3}{4x}=\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}=\frac{-2x+3}{4x}=\frac{-6}{30}$$

$$=\frac{-2x+3}{4x}=\frac{-6}{30}\Rightarrow 30(-2x+3)=-6(4x)\Rightarrow -60x+90=-24x\Rightarrow -36x=-90\Rightarrow x=\frac{90}{36}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$$

Regola di de l'Hopital

Siano f(x) e g(x) due funzioni continue e nulle in $x = x_0$ derivabili in un intorno x_0. Inoltre la derivata g'(x) non deve essere nulla nel suddetto intorno $g'(x) \neq 0$.

Quindi possiamo dire che se esiste il limite finito o infinito $\lim_{x \to x_0} f'(x)$, allora esiste anche $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e risulta: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

La regola di de l'Hopital è molto utile per risolvere forme indeterminate dei limiti:

Forma $\frac{0}{0}$ **e** $\frac{\infty}{\infty}$ **:** la regola si applica derivando f(x) e g(x) e risolvendo il limite poi.

Forma $0 * \infty$ **:**

- Se f(x) = 0 e g(x) =∞ allora abbiamo che: $\lim_{x \to x_0} f(x) * g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
- Se f(x) = ∞ e g(x) = 0 allora abbiamo che: $\lim_{x \to x_0} f(x) * g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

Forma $+\infty - \infty$ **:**

- $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x) * g(x)}}$

Asintoti

Asintoto verticale:

Una funzione ha un asintoto verticale se: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ la retta x = x_0 è un asintoto verticale.

Asintoto Orizzontale:

Una funzione ha un asintoto orizzontale se: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ la retta y = l è un asintoto orizzontale.

Asintoto obliquo:

Una funzione ha un asintoto obliquo se risulta: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, la retta y = mx + q è asintoto obliquo al grafico della funzione, dove $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$.

Studio di funzione

f(x) = $x^3 - 12x$

1) Determiniamo il dominio della funzione: Poiché è un polinomio allora $D: \forall x \in R$ $]-\infty, +\infty[$

2) Controlliamo se la funzione presenta simmetrie (funzione pari o dispari):

Nota: Una funzione è pari se f(-x) = f(x), se f(-x) = - f(x) allora è dispari.

$f(-x) = (-x)^3 - 12(-x) = -x^3 + 12$ la funzione è dispari.

3) Intersezione con gli assi:

Intersezione con y:

$\begin{Bmatrix} y = x^3 - 12x \\ x = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} y = 0 \\ x = 0 \end{Bmatrix}$ A = (0,0)

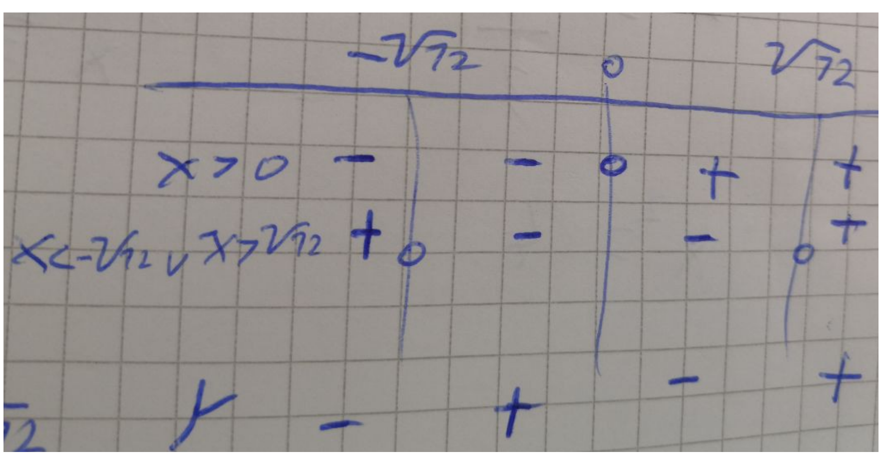
Intersezione con x:

$\begin{Bmatrix} x^3 - 12x = 0 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x^3 - 12x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 12) = 0,$ $x_1 = 0,$ $x_2 = +\sqrt{12},$ $x_2 = -\sqrt{12}$

B = (0,0) C = ($\sqrt{12}$,0) D = ($-\sqrt{12}$,0)

4) Studio del segno della funzione:

$x^3 - 12x > 0 \rightarrow x(x^2 - 12) > 0$ $x > 0,$ $x > \pm\sqrt{12} \Rightarrow x < -\sqrt{12} \vee x > \sqrt{12}$



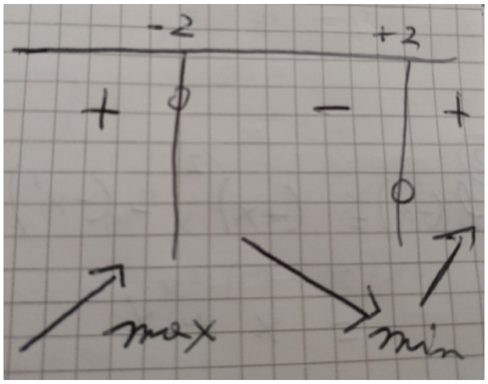
5) Calcolo dei limiti agli estremi del dominio

$\lim_{x \to \pm\infty} x^3 - 12x = \pm\infty$, siccome la funzione è polinomiale non esiste asintoto obliquo.

6) Calcolo della derivata prima e studio del segno per la ricerca di massimi e minimi

y’ = $3x^2$ -12

studio del segno $3x^2 - 12 > 0$, $x^2 = \pm 2$, $x < -2 \vee x > 2$



Abbiamo un punto di massimo e minimo.

Calcoliamo il massimo G = $(-2)^3 - 12\ (-2) = 16$.

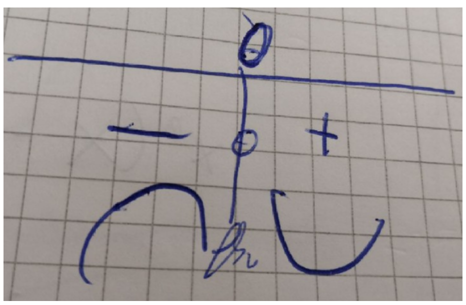
Calcoliamo il minimo H = $(2)^3 - 12\ (2) = -16$.

G = (-2, 16) H = (2, - 16)

7) Calcolo della derivata seconda per la ricerca di punti di flessi

y’’ = 6x

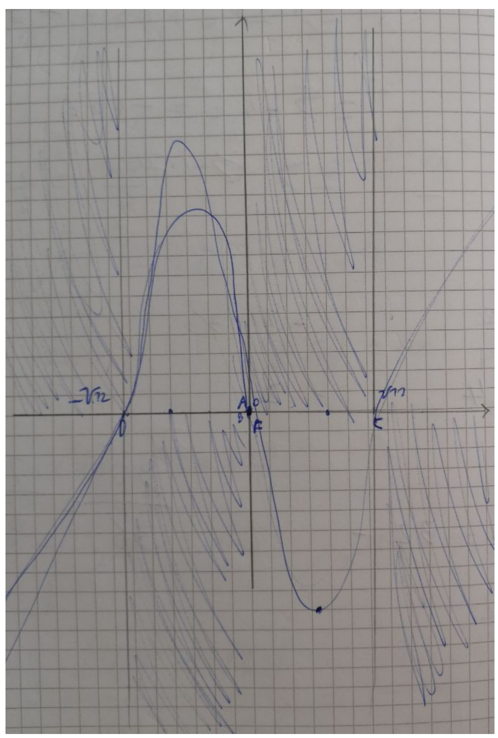
studio del segno 6x > 0, x > 0



Abbiamo un punto di flesso.

$F_1 = (0, 0)$

Disegniamo il grafico della funzione



Integrali indefiniti

Primitiva di una funzione

Una Funzione F(x) è detta primitiva di f(x) nell'intervallo [a,b] se F(x) è derivabile in [a,b] e la sua derivata è f(x). Es: F(x) = x^2 ha come derivata 2x allora x^2 è primitiva di 2x, ma 2x è anche primitiva di $x^2 + 1$, $x^2 - \frac{1}{8}$, notando questa particolarità possiamo dire che $x^2 + c$ sono infinite derivate di 2x.

In generale se una funzione f(x) ammette una primitiva F(x), allora ammette infinite primitive del tipo F(x) + c. Quindi $D[F(x)+c]=F'(x)=f(x) \forall c \in R$. Se F(x) è una primitiva di f(x), allora le funzioni F(x) + c, con c numero reale qualunque, sono tutte e solo primitive di f(x).

Integrale indefinito

L'insieme di tutte le primitive F(x) + c di f(x), con c numero reale qualunque è detto integrale indefinito della funzione f(x) e si indica con $\int f(x) d(x)$. Es: $\int 2x\, d(x) = x^2 + c$.

Condizione sufficiente di integrabilità

Se una funzione è continua in [a,b], allora ammette primitive nello stesso intervallo.

Proprietà degli integrali indefiniti

1. **Prima proprietà di linearità:** L'integrale definito di una somma di funzioni integrabili è uguale alla somma degli integrali indefiniti delle singole funzioni:
   $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, infatti derivando entrambi i membri otteniamo:
   $D[\int [f(x)+g(x)]dx] = D[\int f(x)dx] + D[\int g(x)dx] = f(x)+g(x)$.
   $ES: \int (3x^2 + \cos x) dx = \int 3x^2 dx + \int \cos x\, dx = x^3 + sen\, x + c$
2. **Seconda proprietà di linearità:** L'integrale del prodotto di una costante per una funzione integrabile è uguale al prodotto della costante per l'integrale della funzione:
   $\int k * f(x) dx = k * \int f(x) dx$.
   Derivando entrambi i membri si ottiene $D[\int k * f(x) dx] = k * D[\int f(x) dx] = k * f(x)$.
   $ES: \int 4\cos x\, dx = 4 \int \cos x\, dx = 4\, sen\, x$

Alcuni integrali

x^a con $a \neq -1$

$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ infatti se deriviamo $D[\frac{x^{a+1}}{a+1} + c] = \frac{1}{a+1} * (a+1) x^{a+1-1} = x^a$

$\int dx = x + c$ $\quad\int dx = \int 1 * dx = \int x^0 dx = x + c$

$\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$ $\quad\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{3} + c$ $\quad perché\ \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ sia per x < 0 che x > 0

Integrali della funzione esponenziale

$\int e^x dx = e^x + c$ $\quad D[e^x + c] = e^x;$

$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} + a + c$ $\quad D[\frac{1}{\ln a} * a^x + c] = \frac{1}{\ln a} * a^x * \ln a = a^x$

Integrali delle funzioni seno e coseno

$\int sen\,x\,dx=-\cos x+c\,;\quad \int \cos x\,dx=sen\,x+c\,;\quad \int \frac{1}{\cos^2 x}=tg\,x+c\,;\quad \int \frac{1}{sen\,x}dx=-cotg\,x+c$

Integrali le cui primitive sono le funzioni inverse circolari

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=arcsen\,x+c\,;\quad \int \frac{1}{1+x^2}dx=arctg\,x+c$

Integrali le cui primitive sono funzioni composte

Se abbiamo $\int f(g(x))*g'(x)=F(g(x))\,;\quad ES:\int 3x^2\sin(x^3)dx=-\cos x^3+c$

$\int [f(x)]^a f'(x)dx=\frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1}+c \qquad con\,a\neq-1$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c$

$\int f'(x)e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+c$

$\int f'(x)a^{f(x)}dx=\frac{a^{f(x)}}{\ln a}+c$

$\int f'(x)sen\,f(x)dx=-\cos f(x)+c$

$\int f'(x)\cos f(x)dx=sen\,f(x)+c$

$\int f'\frac{(x)}{\cos^2 f(x)}dx=tg\,f(x)+c$

$\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)}dx=-cotg\,f(x)+c$

$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}dx=arcsen\frac{f(x)}{|a|}+c$

$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}dx=\frac{1}{a}arctg\frac{f(x)}{a}+c$

Integrazione per sostituzione

Quando l’integrale non è di risoluzione immediata può essere utile applicare il metodo di sostituzione, che consiste nell’effettuare un cambiamento di variabile che consenta di riscrivere l’integrale in una forma che sappiamo risolvere.

Esempio:

$\int 2x\cos x^2\,dc$ poniamo t = x^2, calcoliamo il differenziale *d*t = 2x dx.

Sostituiamo nell’integrale e risolviamo: $\int 2x\cos x^2\,dx=\int \cos t\,dt=sen\,t+c$, scriviamo il risultato in funzione di x: $\int 2x\cos x^2\,dx=sen\,x^2+c$.

In generale per calcolare $\int f(x)dx$ con il metodo di sostituzione, si pone x = g(t) oppure t = $g^{-1}(x)$ dove g(t) è invertibile con g’(t) continua e diversa da 0. Si calcola poi il differenziale dx o dt, lo si sostituisce nell’integrale, ottenendo un integrale nella variabile t e se è possibile lo si calcola, infine si scrive il risultato in funzione di x.

Integrazioni per parti

Date due funzioni f(x) e g(x) derivabili, con derivata continua in un intervallo [a,b], possiamo scrivere l'integrale $\int f(x)*g'(x)dx=f(x)*g(x)-\int f'(x)*g(x)dx$.

f(x) viene chiamato fattore finito e g'(x)dx fattore differenziale. Nell'applicazione della formula il fattore finito viene solo derivato, mentre il fattore differenziale viene integrato.

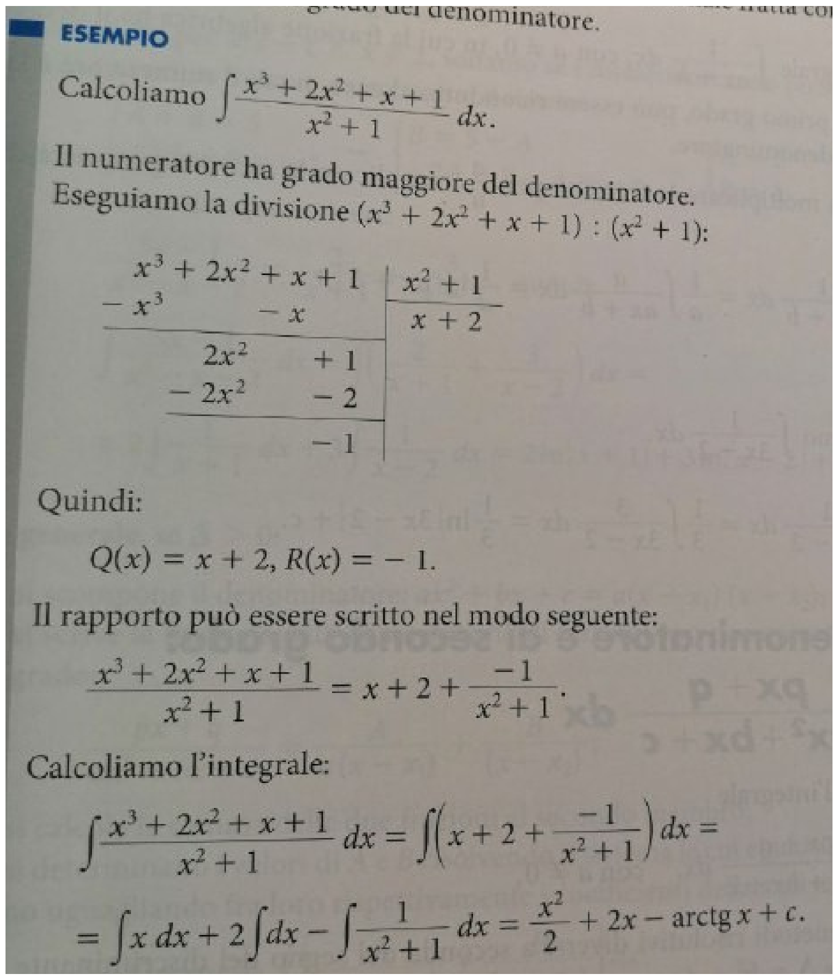
Esempio: $\int \underbrace{x}_{g'}\underbrace{\ln x}_{f} dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+c=\frac{x^2}{2}(\ln x-\frac{1}{2})+c$

Abbiamo scelto x dx come fattore differenziale in quanto sappiamo calcolare la primitiva di x. Del fattore finito ln x sappiamo calcolare la derivata, che si semplifica con la primitiva di x, in modo da ottenere un integrale più semplice da calcolare.

Integrazione di funzioni razionali fratte

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}$$

Primo caso, numeratore maggiore del denominatore



grado del denominatore.

ESEMPIO

Calcoliamo $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1}dx$.

Il numeratore ha grado maggiore del denominatore.
Eseguiamo la divisione $(x^3+2x^2+x+1):(x^2+1)$:

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & +2x^2 & +x+1 & x^2+1 \\ -x^3 & & -x & \overline{x+2} \\ \hline & 2x^2 & +1 & \\ & -2x^2 & -2 & \\ \hline & & -1 & \end{array}$$

Quindi:

$Q(x)=x+2,\ R(x)=-1.$

Il rapporto può essere scritto nel modo seguente:

$$\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1}=x+2+\frac{-1}{x^2+1}.$$

Calcoliamo l'integrale:

$$\int\frac{x^3+2x^2+x+1}{x^2+1}dx=\int\left(x+2+\frac{-1}{x^2+1}\right)dx=$$
$$=\int x\,dx+2\int dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}+2x-\text{arctg}\,x+c.$$

Secondo caso, numeratore è la derivata del denominatore

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c$$

Terzo caso, il denominatore è di primo grado

$\int \frac{1}{ax+b}\,dx$ in questo caso basta moltiplicare per a e riotteniamo il caso precedente:

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+c$$

Quarto caso, il denominatore è di secondo grado

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx$$

In generale, se $\Delta > 0$:

- si scompone il denominatore: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- si scrive la frazione data come somma di frazioni con denominatore di primo grado:

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)};$$

- si calcola la somma delle due frazioni al secondo membro;
- si determinano i valori di A e B risolvendo il sistema le cui equazioni si ottengono uguagliando fra loro rispettivamente i coefficienti della x e i termini noti;
- si risolve l'integrale $\int \left[\frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}\right] dx$.

In generale, se $\Delta = 0$:

- si scompone il denominatore: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$;
- si scrive la frazione data come somma di due frazioni:

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_1)^2};$$

- si calcola la somma delle frazioni al secondo membro;
- si determinano i valori di A e B risolvendo il sistema le cui equazioni si ottengono uguagliando rispettivamente i coefficienti della x e i termini noti;
- si risolve l'integrale $\int \left[\frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_1)^2}\right] dx$.

Integrale definito
Data una funzione f(x), continua in [a;b[, si chiama integrale definito esteso all'intervallo [a;b] il valore del limite per Δx_{max} che tende a 0 della somma $\overline{S}$: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta xmax \to 0} \overline{S}$

Se a > b abbiamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Proprietà integrale indefinito
Additività rispetto all'intervallo di integrazione
Se f(x) è integrabile su [a;c] e a < b < c, allora è integrabile anche sugli intervalli [a;b] e [b;c]; viceversa se a < b < c e f(x) è integrabile negli intervalli [a;b] e [b;c], allora lo è anche su [a;c]. Si ha:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Integrale della somma di funzioni
Se f(x) e g(x) sono funzioni integrabili su [a;b], allora lo è anche la loro somma f(x) + g(x), e risulta:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Integrale del prodotto di una costante per una funzione
Se f(x) è una funzione integrabile su [a;b], allora lo è anche la funzione k*f(x), con k ∈ R, e risulta:

$$\int_a^b k * f(x)\,dx = k * \int_a^b f(x)\,dx$$

Confronto tra gli integrali di due funzioni
Se f(x) e g(x) sono due funzioni continue e tali che f(x) ≤ g(x) in ogni punto dell'intervallo [a;b], allora l'integrale da a a b di f(x) è minore o uguale all'integrale di g(x): $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Integrale del valore assoluto di una funzione
Se f(x) è una funzione continua nell'intervallo [a;b], allora il valore assoluto dell'integrale da a e b della f(x) è minore o uguale all'integrale del valore assoluto della f(x): $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f'(x)|\,dx$

Integrale di una funzione costante
Se una funzione f(x) è costante nell'intervallo [a;b], cioè f(x) = k, allora l'integrale da *a* a *b* della f(x) è uguale al prodotto di k per (b – a): $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

Teorema della media

Se f(x) è una funzione continua in un intervallo [a;b], esiste almeno un punto z dell'intervallo tale che:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)*f(z) \qquad \text{con } z \in [a;b]$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se una funzione f(x) è continua in [a;b], allora esiste la derivata della sua funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ per ogni punto x dell'intervallo [a;b] ed è uguale a f(x), cioè: F'(x) = f(x). Ovvero F(x) è una primitiva di f(x).