Nhóm 16
Đề tài: 14

Tên: Phan Văn Thanh

Mssv: 20185405

EULER METHOD

Phương trình Euler ẩn, hiện, hình thang giải phương trinh vi phân với điều kiện ban đầu

Phương pháp số:

- Trong toán học, có một số loại phương trình vi phân thông thường chúng ta có thể giải bằng phương pháp phân tích, đưa ra giải pháp chính xác. Tức là có một phương pháp cụ thể được áp dụng để rút ra một giải pháp chính xác chung.
- <u>Ví dụ:</u>

$$\frac{dy}{dx} = x$$

⇒ Có nghiệm chính xác: $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$, với C là hằng số.

- Trong thực tế, hầu hết các phương trình vi phân không có dạng chuẩn, chúng ta không tìm được nghiệm tổng quát *y (x)*. Đây là trường hợp của hầu hết các phương trình vi phân rút ra từ các mô hình vật lý (cơ, điện, nhiệt, v.v.).

=> Giải pháp.

Phương pháp số:

- Trong trường hợp trên, chúng ta cần sử dụng **phương pháp số** để có thể xác định được nghiệm của phương trình vi phân.
- <u>Chú ý với phương pháp số:</u>

 - Chúng ta nhận được một giải pháp **gần đúng** , không phải là giải pháp chính xác.

 - Giải pháp được tính toán tăng dần, **từng bước.**

- <u>Giới thiệu 3 phương pháp:</u>

 - Phương pháp Euler hiện.

 - Phương pháp Euler ẩn.

 - Phương pháp hình thang.

Bài toán cần giải quyết:

- <u>Bài toán</u>: Cho phương trình

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Ở đây $f(x, y)$, y_0 và x_0 đã biết.
- Tìm giá trị $y(x_0 + h)$, trong đó $h > 0$ gọi là bước.

Các phương pháp:

- Độ dốc của mặt cắt qua $y(t)$ và $y(t+h)$ được thể hiện qua $y'(t)$, $y'(t+\mathrm{h})$ hoặc chính xác hơn là trung bình của: $(y'(t)+y'(t+\mathrm{h}))/2$ tương ứng với 3 phương pháp sau:

➢ Phương pháp Euler hiện (Euler's method hay Forward Euler's method).

➢ Phương pháp Euler ẩn (Backward Euler's method).

➢ Phương pháp hình thang (Trapezoidal method (Heun's method)).

Các phương pháp:

- Ta biến đổi:

$$y(x+h) = y(x) + \int_{x}^{x+h} y'(t)dt$$

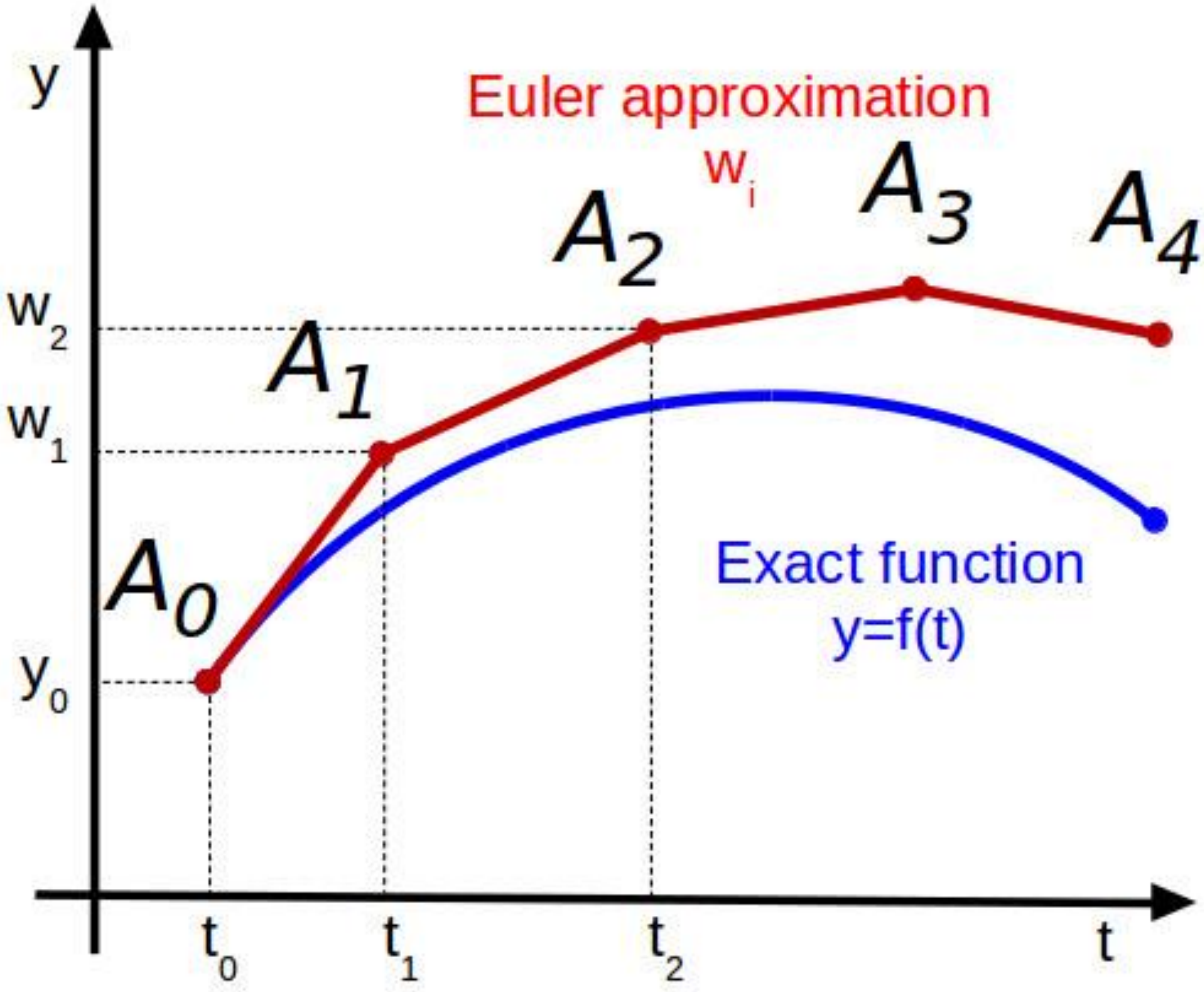
Đặt $t = x + z$ ta được:

$$y(x+h) = y(x) + \int_{0}^{h} y'(x+z)dz$$

=> Ta tìm cách thay thế $\int_0^h y'(x+z)dz$ bằng hàm xấp xỉ.

Ý tưởng phương pháp Euler hiện:

- Minh họa phương pháp Euler. Đường cong chưa biết có màu xanh da trời và lời giải gần đúng của nó là đường nhiều cạnh màu đỏ.



Phương pháp Euler hiện:

- Phương pháp này sử dụng đạo hàm $y'(t)$ ở đầu khoảng thời gian: $[t, t + h]$ để ước tính gia số: $\Delta \mathrm{y} = \mathrm{h}\,\mathrm{y}'(\mathrm{t}) \approx \int_0^h y'(x+z)dz$.
- Công thức Euler hiện:

$$\boldsymbol{y}(\mathrm{t}+\mathrm{h}) = \mathrm{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{hy}'(\mathrm{t}) = \mathrm{y}(\mathrm{t}) + hf(t, y(t))$$

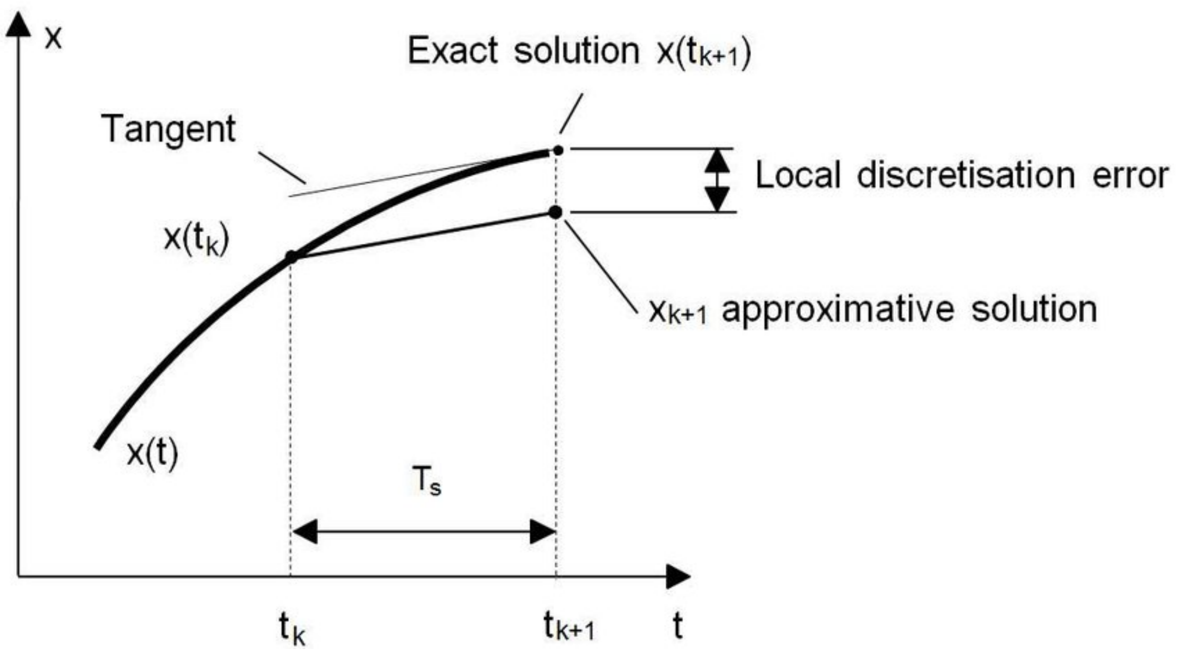
- So sánh với khai triển Taylor của $\mathrm{y}(\mathrm{t}+\mathrm{h})$:

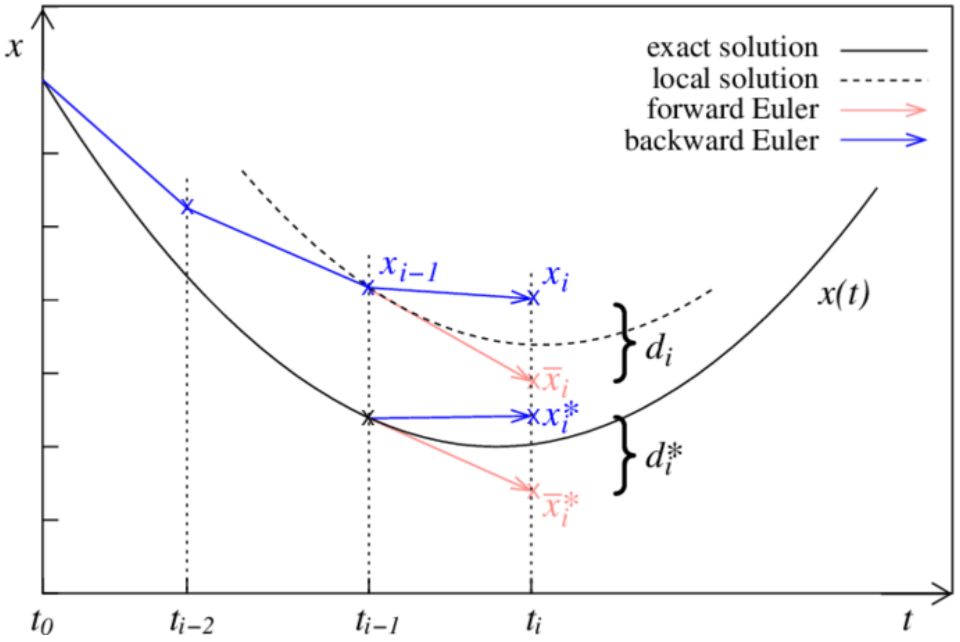
$$\boldsymbol{y}(\mathrm{t}+h) = y(\mathrm{t}) + hy'(\mathrm{t}) + \frac{h^2}{2!}y^{(2)}(\mathrm{t}) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(\mathrm{t}) + \cdots$$

$\Rightarrow$Chúng ta thấy sai số cắt cục bộ của phương pháp là bậc hai: $O(h^2)$.

- Vậy nên phương pháp này chính xác hơn nếu h đủ nhỏ để lỗi không tích tụ quá nhanh.
- Phương pháp này có thể không ổn định và là phương pháp hiện.

Ý tưởng phương pháp Euler ẩn:





Phương pháp Euler ẩn:

- Phương pháp này sử dụng đạo hàm $y'(t+\mathrm{h})$ vào cuối khoảng thời gian: $[t, t\ +\ h]$ để ước tính gia số: $\Delta \mathrm{y} = \mathrm{h}\ \mathrm{y}'(\mathrm{t}+h) \approx \int_0^h y'(x+z)dz$.
- Công thức Euler ẩn:

$$\boldsymbol{y}(\mathrm{t}+\mathrm{h}) = \mathrm{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{hy}'(\mathrm{t}+h) = \mathrm{y}(\mathrm{t}) + hf(t+h, y(t+h))$$

- Thay khai triển Taylor của $\mathrm{y}'(\mathrm{t}+h)$ vào biểu thức trên:

$$y'(\mathrm{t}+h) = y'(\mathrm{t}) + hy''(\mathrm{t}) + \frac{h^2}{2!}y^{(3)}(\mathrm{t}) + O(h^3)$$

- Ta được:

$$\boldsymbol{y}(\mathrm{t}+\mathrm{h}) = \mathrm{y}(\mathrm{t}) + \mathrm{hy}'(\mathrm{t}+h) = y(t) + hy'(\mathrm{t}) + h^2y''(\mathrm{t}) + O(h^3)$$

- Chúng ta nhận thấy rằng phương pháp Euler ẩn cũng có lỗi cắt cục bộ bậc hai: $O(h^2)$

Phương pháp Euler ẩn:

- Công thức Euler ẩn:

$$\boldsymbol{y}(\mathrm{t}+\mathrm{h})=\mathrm{y}(\mathrm{t})+hf(t+h, y(t+h))$$

- Ta thấy rằng $\mathrm{y}(\mathrm{t}+\mathrm{h})$ tìm được bằng cách cho $\mathrm{x}=\mathrm{y}(\mathrm{t}+\mathrm{h})$ coi x là ẩn số thì:

$$F(x)\ =\mathrm{y}(\mathrm{t})+hf(t+h, x))-x=0$$

⇒Lý do được gọi là phương pháp ẩn.

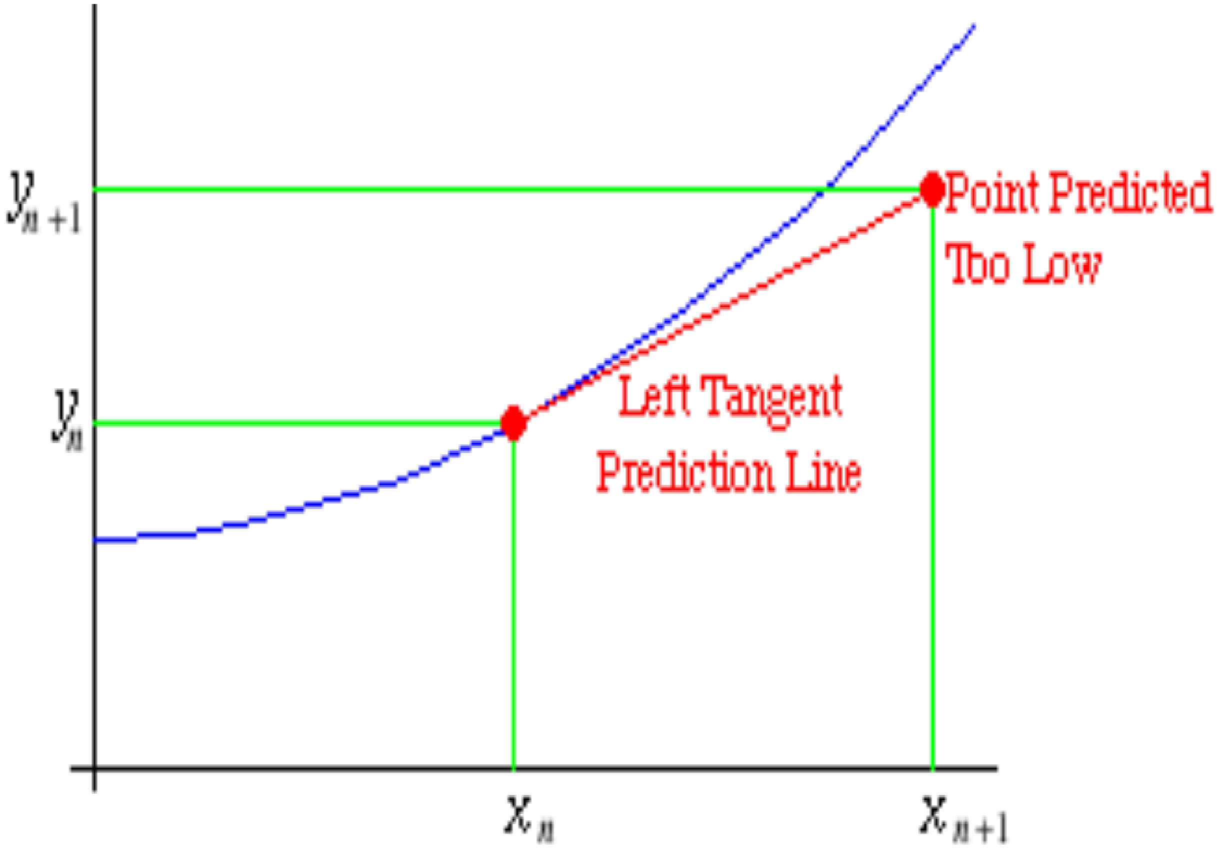
- Ta thấy phương pháp này tốn kém hơn về mặt tính toán so với phương pháp Euler hiện.

Ý tưởng phương pháp hình thang:

- Với phương pháp Euler hiện:

- Với đồ thị hướng lên trên như hình bên, thì ta thấy điểm ước lượng cuối của chúng ta nó sẽ nằm phía dưới đồ thì.

=> Sai số lớn

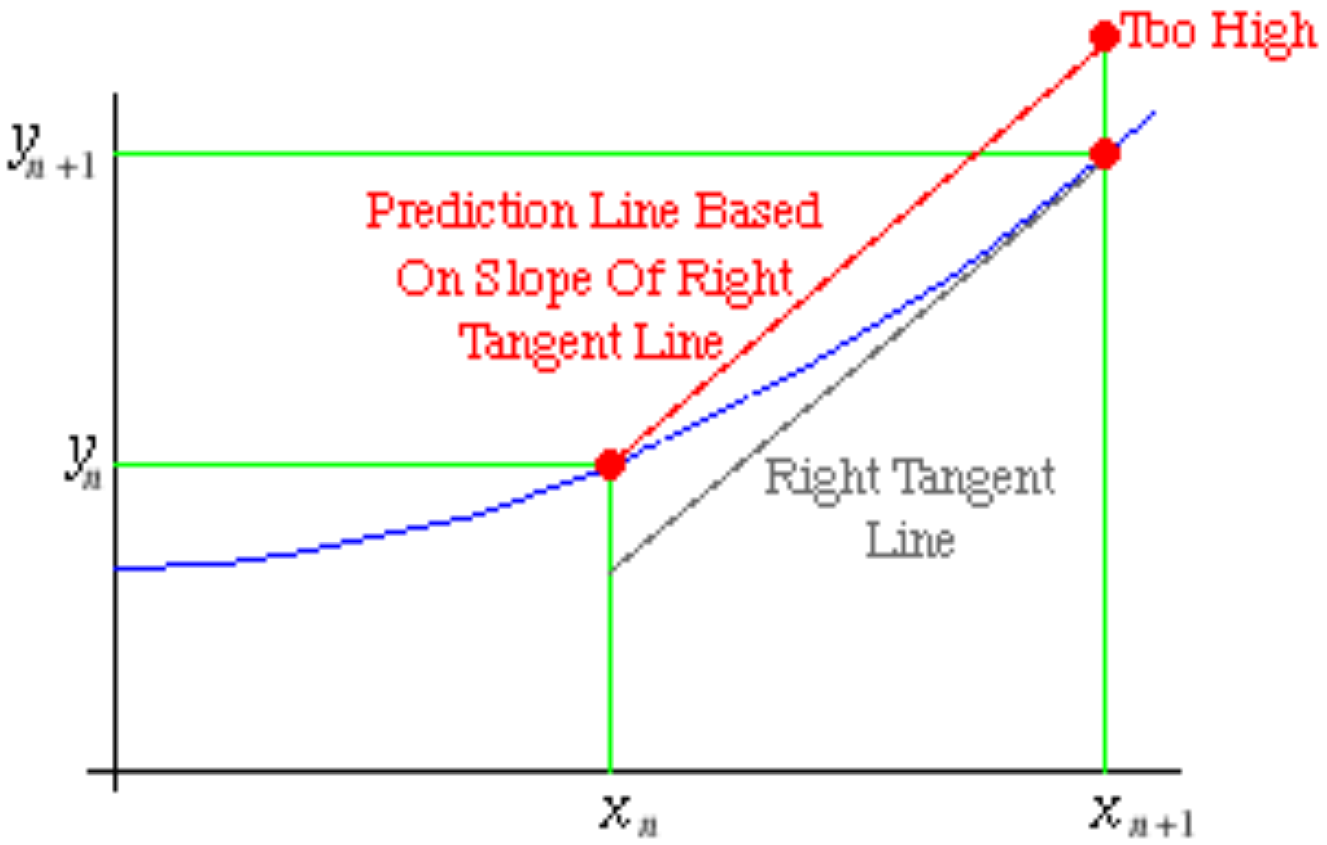


Ý tưởng phương pháp hình thang:

- Với phương pháp Euler ẩn:

- Với đồ thị hướng lên trên như hình bên, thì ta thấy điểm ước lượng cuối của chúng ta nó sẽ nằm phía trên đồ thị.

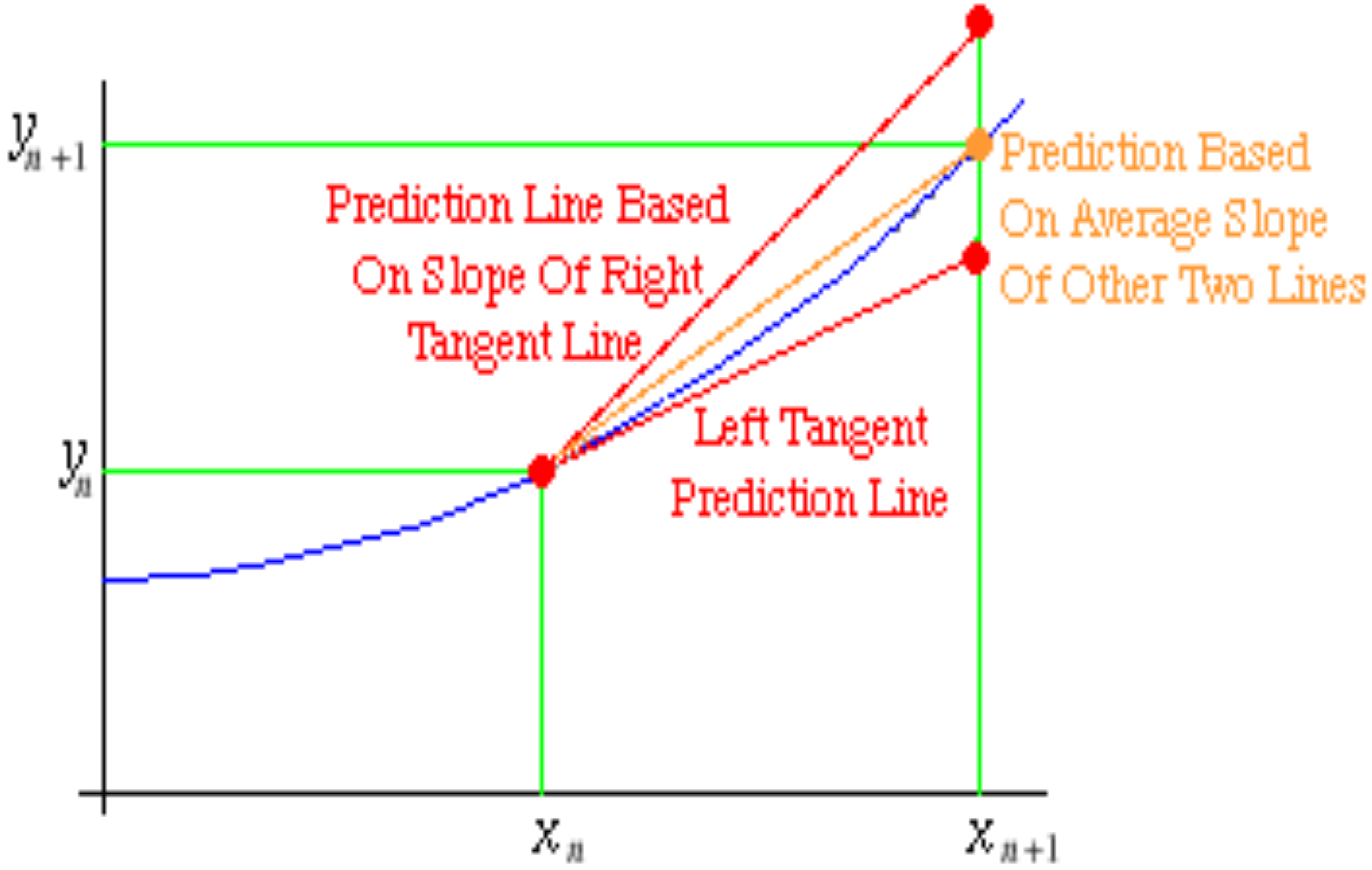
=> Sai số lớn



Ý tưởng phương pháp hình thang:

- Ta thấy nhược điểm của 2 phương pháp nêu trên là đường quá cao và đường quá thấp.

⇒Giá trị trung bình độ dốc của hai tiếp tuyến trái và phải sẽ là giá trị chính xác hơn trong 2 giá trị đó.



Phương pháp hình thang:

- Phương pháp này sử dụng giá trị trung bình của các đạo hàm tại điểm đầu và điểm cuối của khoảng $[t, t + h]$:

$$y'(t + ch) \approx \frac{y'(t) + y'(t + h)}{2}$$

- Khi đó ta có công thức hình thang: $\boldsymbol{y}(t + h) = y(t) + hy'(t + ch) \approx \mathrm{y(t)} + h\frac{y'(t) + y\prime(t+h)}{2}$

$$\approx y(t) + \frac{h}{2}\left[f\big(t, y(t)\big) + f\big(t + h, y(t + h)\big)\right]$$

- Thay khai triển Taylor của $\mathrm{y}'(\mathrm{t} + h)$ vào biểu thức trên ta được:

$$\boldsymbol{y}(t + h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(\mathrm{t}) + O(h^3)$$

=> Sai số cắt cục bộ bậc ba: $O(h^3)$.

Phương pháp hình thang:

- Công thức hình thang:

$$\boldsymbol{y}(t+h) = y(t) + \frac{h}{2}\left[f\big(t, y(t)\big) + f\big(t+h, y(t+h)\big)\right]$$

- Ta thấy rằng $\boldsymbol{y}(\mathrm{t}+\mathrm{h})$ tìm được bằng cách cho $\mathrm{x} = \mathrm{y}(\mathrm{t}+\mathrm{h})$ coi x là ẩn số thì:

$$F(x) \;= \mathrm{y}(\mathrm{t}) + \frac{h}{2}\left[f\big(t, y(t)\big) + f\big(t+h, y(t+h)\big)\right] - x = 0$$

=> Phương pháp hình thang cũng là phương pháp ẩn.

Tóm lại:

- Cách ba phương pháp tìm số gia của hàm $y(t)$:

$$\Delta y = h\,f'(t+ch) \approx h \begin{cases} y'(t) & O(h^2) \\ y'(t+h) & O(h^2) \\ (y'(t)+y'(t+h))/2 & O(h^3) \end{cases}$$

- Có thể được thực hiện lặp đi lặp lại từ điều kiện ban đầu đã biết $y(x_0) = y_0$:

$$y_{n+1} = y_n + h \begin{cases} y'_n \\ y'_{n+1} \\ (y'_n + y'_{n+1})/2 \end{cases} = y_n + h \begin{cases} f(t_n, y_n) \\ f(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))/2 \end{cases}$$

Bài toán phương trình vi phân cấp cao

- Phương trình vi phân cấp k:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

- Với các giá trị ban đầu:

$$y(x_0) = \alpha_0, y'(x_0) = \alpha_1, y^{(2)}(x_0) = \alpha_2, \dots , y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

- Đặt $z_0(x) = y(x)$, $z_1(x) = y'(x)$, $z_2(x) = y''(x), \dots , z_{n-1}(x) = y^{(n-1)}(x)$, $z_n\,(x = y^{(n)}(x)$

Ta được:

$$\begin{cases} \begin{cases} z_1 \\ z_0(x_0) = \alpha_0 \end{cases} \\ \begin{cases} z_2 \\ z_1(x_0) = \alpha_1 \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} z_n \\ z_{n-1}(x_0) = \alpha_{n-1} \end{cases} \end{cases}$$

<=>

$$\begin{cases} z_0(x+h) = z_0(x) + h * z_1(x) \\ z_1(x+h) = z_1(x) + h * z_2(x) \\ \dots \\ z_{n-1}(x+h) = z_{n-1}(x) + h * f(x, z_0(x), \dots, z_{n-1}(x)) \end{cases}$$

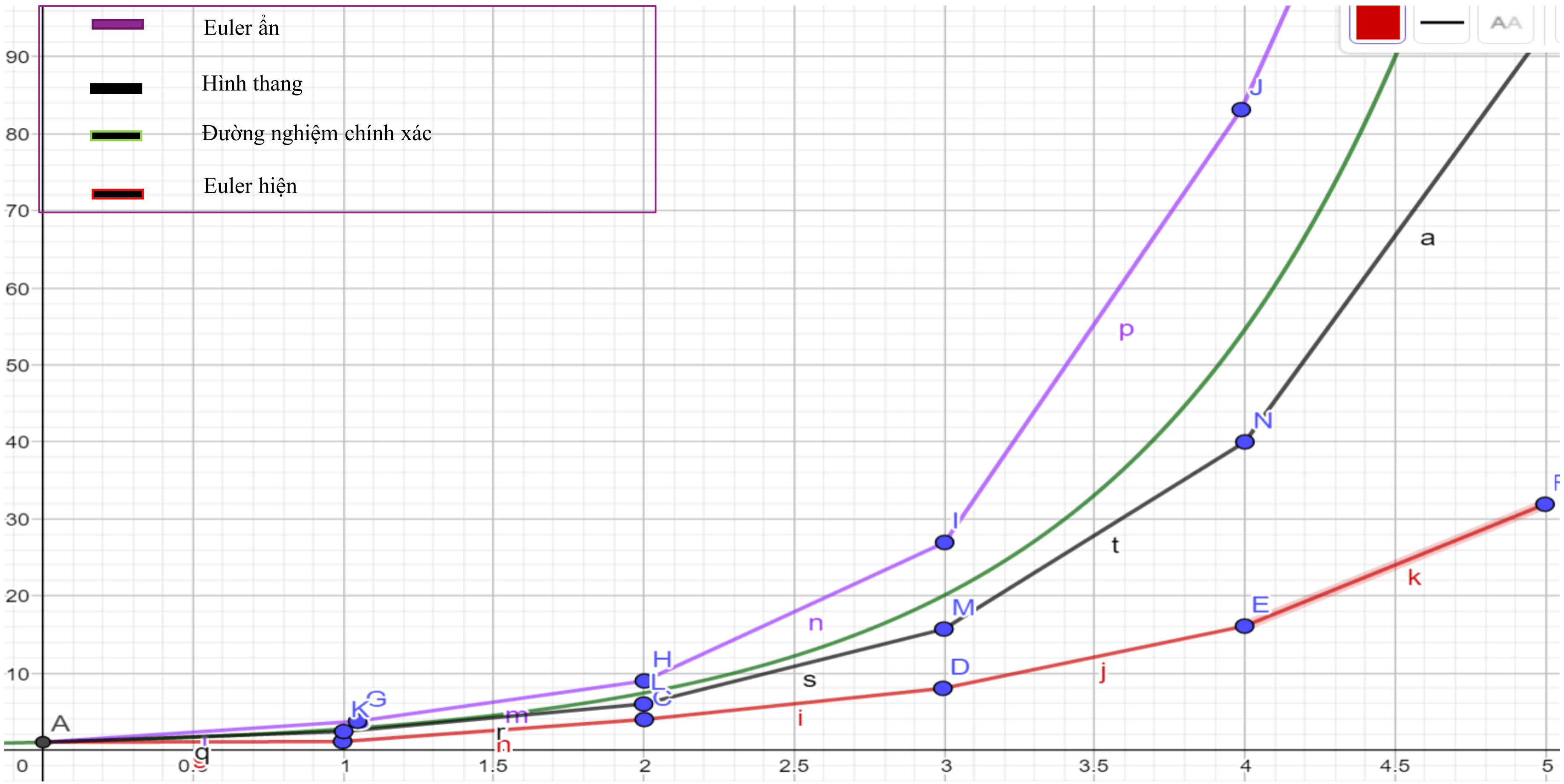
Ví dụ 1: (Hình dạng)

- Giải: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ Đáp án: $y = e^x$
- Chạy chương trình với cả ba phương pháp với $h = 1,$ chạy tới x = 5.

Ta được bảng:

x	Chính xác	Euler hien	Euler an	Hinh thang
0.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.00000	2.71828	2.00000	3.00000	2.50000
2.00000	7.38906	4.00000	9.00000	6.25000
3.00000	20.08554	8.00000	27.00000	15.62500
4.00000	54.59815	16.00000	81.00000	39.06250
5.00000	148.41316	32.00000	243.00000	97.65625

Ví dụ 1: (Hình dạng)



Ví dụ 2: (Bước h và sai số)

- Giải: $y' - y = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^{\frac{t}{2}}\sin(5t) + 5\mathbf{e}^{\frac{t}{2}}\cos(5t) \quad y(0) = 0$
- Đáp án: $y(t) = \mathbf{e}^{\frac{t}{2}}\sin(5t)$
- Với các bước lần lượt $h = 1, h = 0.1, h = 0.001$
- Tại các điểm $t = 1, t = 2, t = 3, t = 4, t = 5.$

Ví dụ 2:

- $h = 1$

t	Chính xác	Euler hiện	Euler ẩn	Hình thang
1	-1.58100	5.00000	8.12890	6.56445
2	-1.47880	13.12890	16.85083	14.20764
3	2.91439	15.59303	21.40711	15.61403
4	6.74580	12.70545	57.44453	26.40636
5	-1.61237	37.11470	245.22019	108.31110

=> Liệu kết quả của phương pháp có đáng tin cậy?

Ví dụ 2:

- $h = 0.1$

t	Chính xác	Euler hiện	Euler ẩn	Hình thang
1	-1.58100	-0.97167	-2.15610	-1.53727
2	-1.47880	0.65270	-3.74975	-1.41289
3	2.91439	7.30209	-2.56727	2.92505
4	6.74580	15.56128	-6.18061	6.76083
5	-1.61237	21.95465	-38.47541	-1.12732

Ví dụ 2:

- $h = 0.001$:

t	Chính xác	Euler hiện	Euler ẩn	Hình thang
1	-1.58100	-1.57443	-1.58756	-1.58099
2	-1.47880	-1.45453	-1.50310	-1.47880
3	2.91439	2.96851	2.86013	2.91439
4	6.74580	6.86429	6.62681	6.74581
5	-1.61237	-1.28498	-1.94141	-1.61232

Ví dụ 2: (bảng sai số)

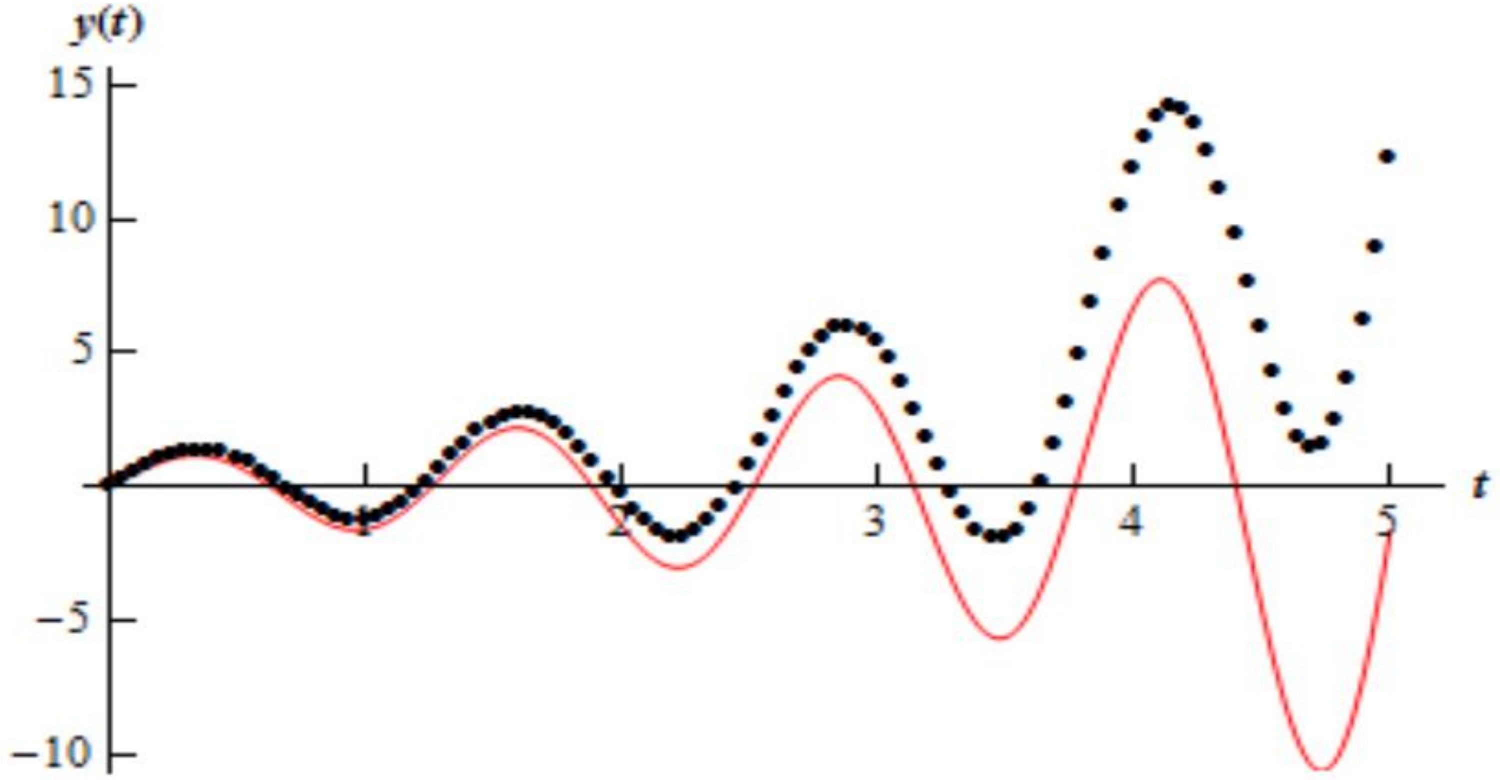
- $h = 0.1$:

t	Euler hiện	Euler ẩn	Hình thang
1	38.5%	36%	2.7%
2	144%	154%	4.5%
3	150%	188%	0.36%
4	130%	190%	0.22%
5	1460%	2286%	30%

$h = 0.001$

t	Euler hiện	Euler ẩn	Hình thang
1	0.4%	0.4%	0.0006%
2	1.6%	1.6%	0%
3	1.8%	1.9%	0%
4	1.7%	1,7%	0.0001%
5	20.3%	20.4%	0.003%

Ví dụ 2: ảnh minh họa



Ví dụ 3: bài toán cauchy với ptvp cấp k

- Giải: $y'' + 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$
- Với h = 0.1, X = 1.
- Nghiệm đúng: $y = e^{-x}(2\cos(x) + 3\sin(x))$.

Ví dụ 3:

x	Chính xác	Euler hien	Hinh thang
x: 0.00000	2.00000	2.00000	2.00000
x: 0.10000	2.07163	2.10000	2.07000
x: 0.20000	2.09279	2.13800	2.08980
x: 0.30000	2.07224	2.12564	2.06799
x: 0.40000	2.01792	2.07324	2.01292
x: 0.50000	1.93692	1.98985	1.93193
x: 0.60000	1.83555	1.88335	1.83143
x: 0.70000	1.71935	1.76048	1.71696
x: 0.80000	1.59309	1.62697	1.59328
x: 0.90000	1.46089	1.48763	1.46436
x: 1.00000	1.32621	1.34640	1.33355

Ví dụ 4: bài toán cauchy với ptvp cấp k

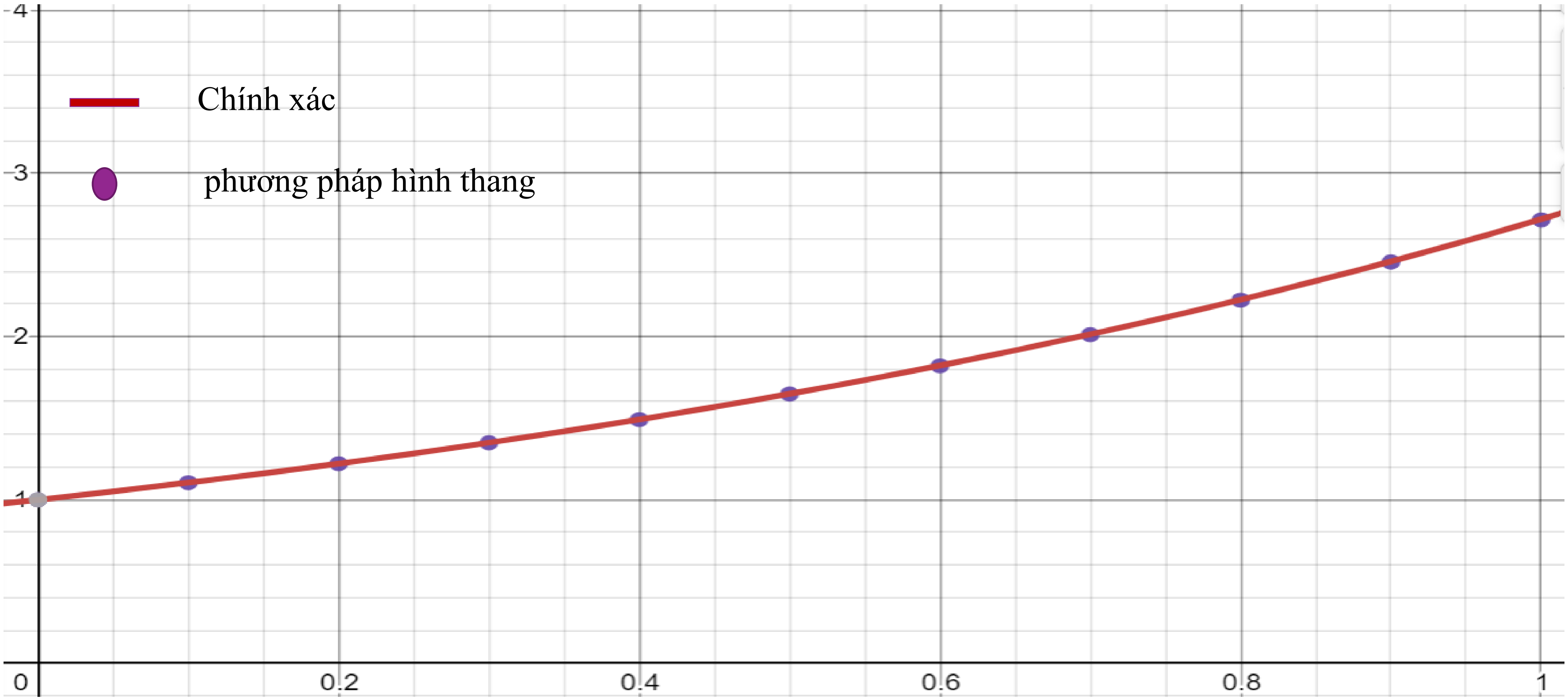
- Giải: $y''' - y'' + y' - y = 0$
- Với $y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1.$
- Cho $h = 0.1.$
- $X = 1.$

=> Đáp án: $y = e^{x}.$

Ví dụ 4:

x	Chính xác	Euler hien	Hinh thang
x: 0.00000	1.00000	1.00000	1.00000
x: 0.10000	1.10517	1.10000	1.10500
x: 0.20000	1.22140	1.21000	1.22103
x: 0.30000	1.34986	1.33100	1.34923
x: 0.40000	1.49182	1.46410	1.49090
x: 0.50000	1.64872	1.61051	1.64745
x: 0.60000	1.82212	1.77156	1.82043
x: 0.70000	2.01375	1.94872	2.01157
x: 0.80000	2.22554	2.14359	2.22279
x: 0.90000	2.45960	2.35795	2.45618
x: 1.00000	2.71828	2.59374	2.71408

Ví dụ 4:



Thuật toán:

- <u>Phương pháp Euler hiện:</u>
- Input: y' = f(x, y). h, x0, y0, X.
- Output: y(x). Result[ ]
- Thuật toán

$$x = x0; \; y = y0;$$
$$for\ i = 0\ to\ \frac{X - x0}{h}$$
$$\{ \quad Result[y] = y;$$
$$y = y + h * f(x, y)$$
$$x = x + h; \quad \}$$

Thuật toán:

- <u>Phương pháp Euler ẩn:</u>
- Input: y’ = f(x, y). h, x0, y0, X.
- Output: y(x). Result[ ]
- Thuật toán

$$x = x0; \; y = y0;$$

$$for\; i = 0\; to \frac{X - x0}{h}$$

$$\{ \quad Result[i] = y;$$

$$y = y + h * f\,(x + h, y + h * f(x, y))$$

$$x = x + h; \quad \}$$

Thuật toán:

- Phương pháp Euler ẩn:
- Input: y' = f(x, y). h, x0, y0, X.
- Output: y(x). Result[ ]
- Thuật toán

$$x = x0;\ \ y = y0;$$

$$for\ i = 0\ to \frac{X - x0}{h}$$

$$\{ \quad Result[i] = y;$$

$$y = y + 0.5 * h * (f(x, y) + f\ (x + h, y + h * f(x, y))$$

$$x = x + h; \quad \}$$

Thuật toán:

- Giải phương trình vi phân cấp k (bài toán cauchy): (Với phương pháp hình thang)
- Input: $y^{(k)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(k-1)}(x)\right) = F\ (x, f[])$, x0, h, X.   Bậc pt: k;
- $Y[\,]$: $Y[0] = y(x0), y[1] = y'(x0), y[2] = y''(x0)$ ...
- Output: Result[]
- Thuật toán:

```
x = x0;  Z[] = Y[];  Z1[];  Z2[];
for i = 0 to (X – x0)/h
{     Result[i] = Z[0];
      for j = 0 to n – 2
            Z2[j] = Z[j] + h * Z[j + 1];
      Z2[n - 1] = Z[n - 1] + h * F(x, Z);
      for j = 0 to n – 2
            Z1[j] = Z[j] + 0.5 * h * (Z[j + 1] + Z2[j + 1]);
      Z1[n - 1] = Z[n - 1] + 0.5 * h * (F(x, Z) + F(x + h, Z2));
      x = x + h;
      Z = Z1;    }
```