第41讲 积分的变量替换法

- 计算定积分——牛顿—莱布尼兹公式

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x} = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

↓

$$\boxed{\text{计算} \int f(x)dx}$$

求导法则：

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f[\varphi(x)]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

线性运算法则：$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\mathrm{d}x$

基本公式——导数公式与积分公式

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a \longrightarrow \int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \ (a \neq -1)$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \longrightarrow \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x \longrightarrow \int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$(\sin x)' = \cos x \longrightarrow \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

基本公式——导数公式与积分公式

$$(\tan x)' = \sec^2 x \longrightarrow \int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x + C \longrightarrow \int \sec x \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$$

$$(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \longrightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

不定积分的第一类换元法

不定积分的第二类换元法

定积分的换元法

定理1 设$f(u)$具有原函数$F(u)$, $u=\varphi(x)$可导，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \xlongequal{u=\varphi(x)} \left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)} = F(\varphi(x))+C$$

称为**不定积分的第一类换元积分公式**(也称**配元法**，**凑微分法**)．

例1 求不定积分$\int e^{x^2}\cdot 2x\mathrm{d}x$．

例2 求不定积分$\int \cos(5x+2)\,\mathrm{d}x$.

例3 求不定积分$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$.

例4 求不定积分$\int \tan x\,\mathrm{d}x$.

例5 求不定积分$\int \sec x\,\mathrm{d}x$.

不定积分第一类换元法

$$\underbrace{\int f\,[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{难求}} = \underbrace{\int f(u)\,\mathrm{d}u}_{\text{易求}}\Big|_{u=\varphi(x)}$$

难求 $\xrightarrow[u=\varphi(x)]{}$ 易求

易求 $\xleftarrow[u=\varphi(x)]{}$ 难求

不定积分第二类换元法

定理2 设$x=\varphi(t)$是单调的、可导的函数，并且$\varphi'(t)\neq 0$，又设$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

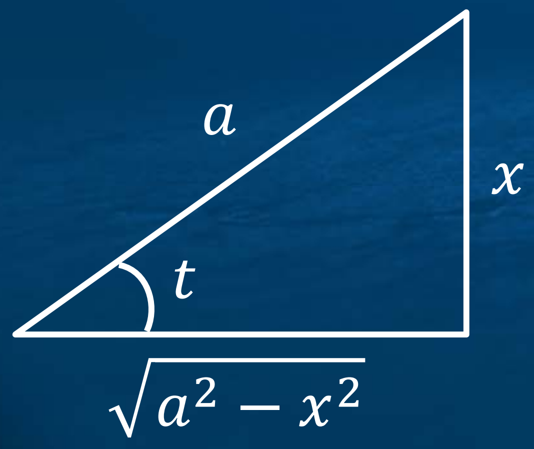
不定积分的第二类换元积分公式

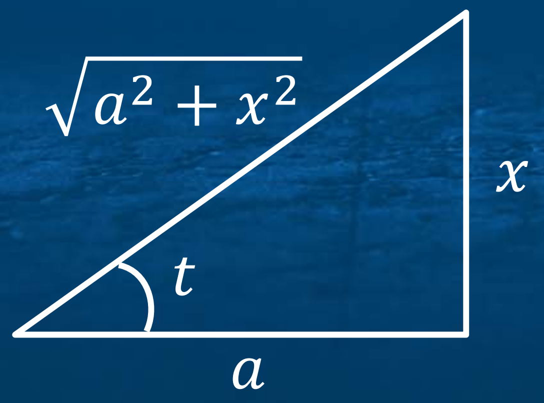
例6 求不定积分$\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

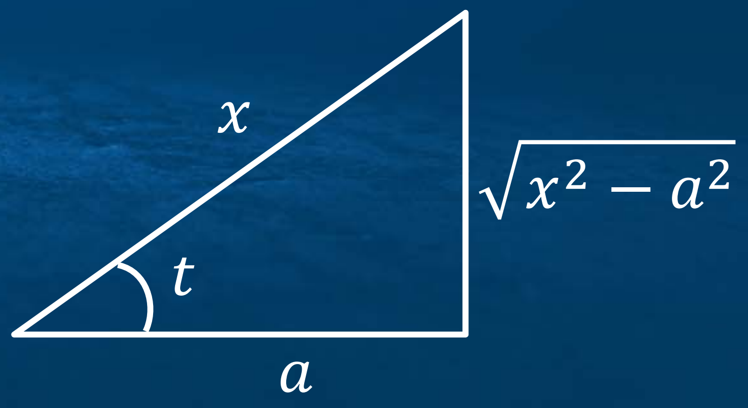
例7 求不定积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\ (a > 0)$. （$x = a\sin t$）

例8 求不定积分 $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,\mathrm{d}x\ (a > 0)$. （$x = a\tan t$）

例9 求不定积分 $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x\ (a > 0)$. （$x = a\sec t$）







定理3 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，函数$x=\varphi(t)$满足：

(1) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$；

(2) $\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)上具有连续的导函数，

且$\varphi(t)\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

定积分的换元公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

定积分变量替换形式上可以看作为三个变化. 依次是：

(1) 积分区间即积分上、下限要对应变化，即“换元先换限”；

(2) 在变换$\boldsymbol{x=\varphi(t)}$下，被积函数$f(x)$变化为$f[\varphi(t)]$.

(3) 积分元素$\mathrm{d}x$变化为$\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{t})\mathbf{d}\boldsymbol{t}$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

说明：(1) 不定积分换元后需回代，定积分换元不需要回代.

(2) 当$\beta<\alpha$, 即区间换为$[\beta,\alpha]$时，结论仍然成立.

(3) 换元公式也可以反过来用：

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x(\text{令}x=\varphi(t))$$

或配元(或凑微分)

配元不换限

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\mathrm{d}\varphi(t).$$

例10 求定积分$\int_4^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

例11 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$ ；

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.