第76讲 直角坐标系下二重积分的计算

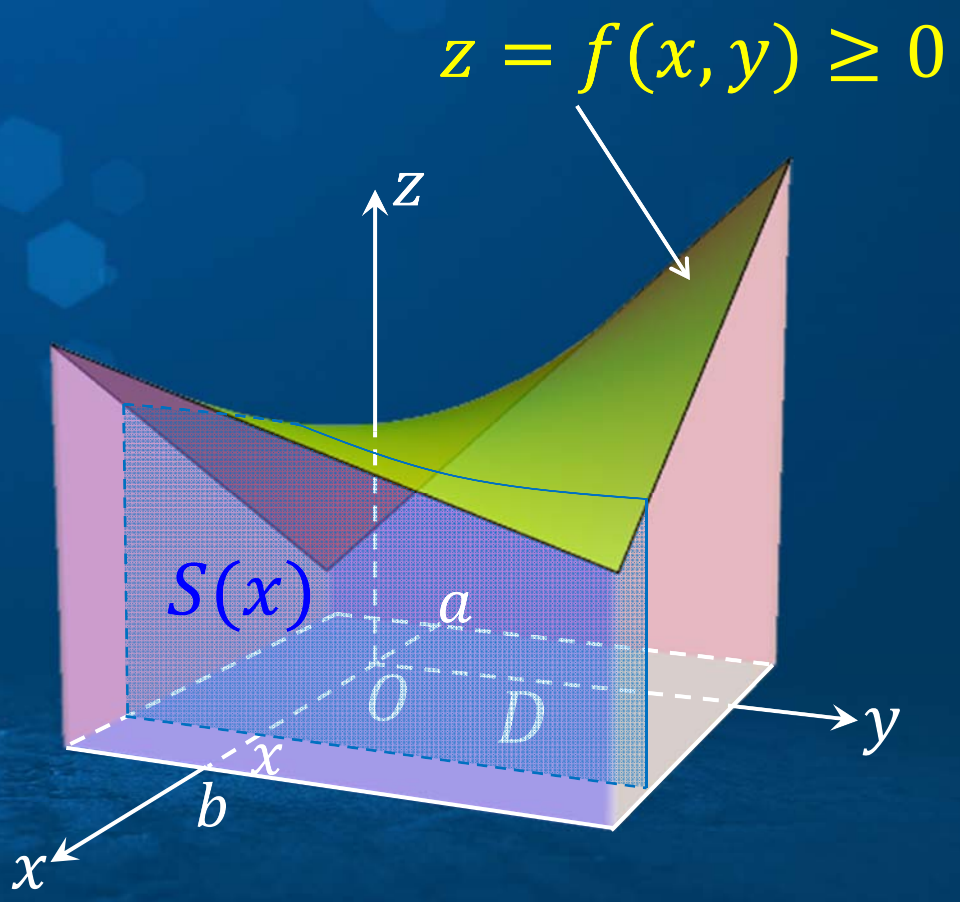
二重积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

几何意义 —— 曲顶柱体体积

方法：定积分计算立体体积

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$$



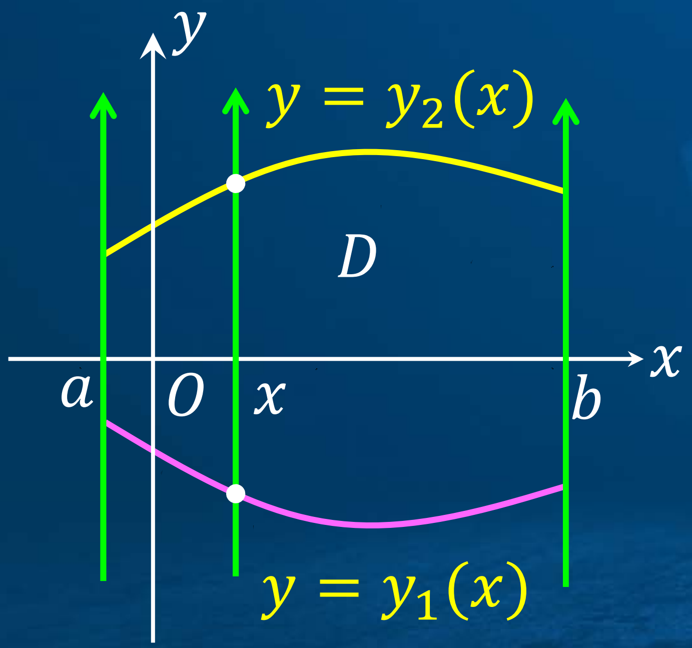
X-型区域上的二重积分计算

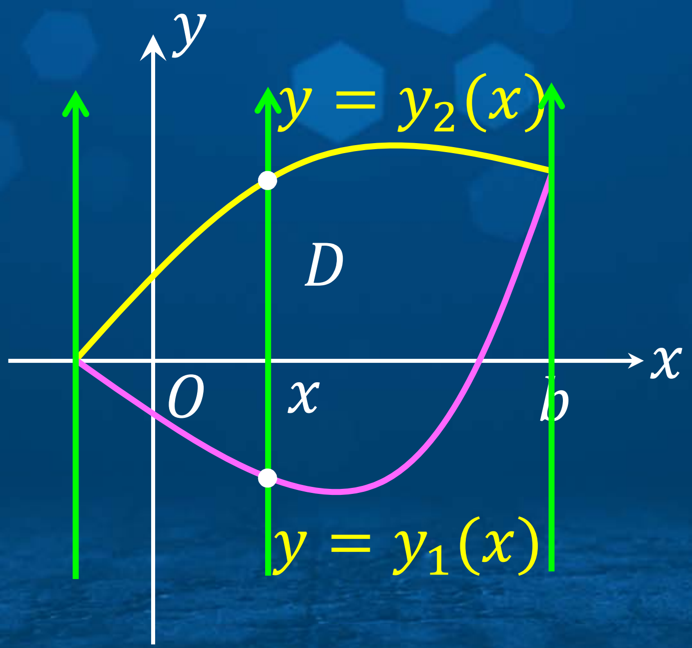
Y-型区域上的二重积分计算

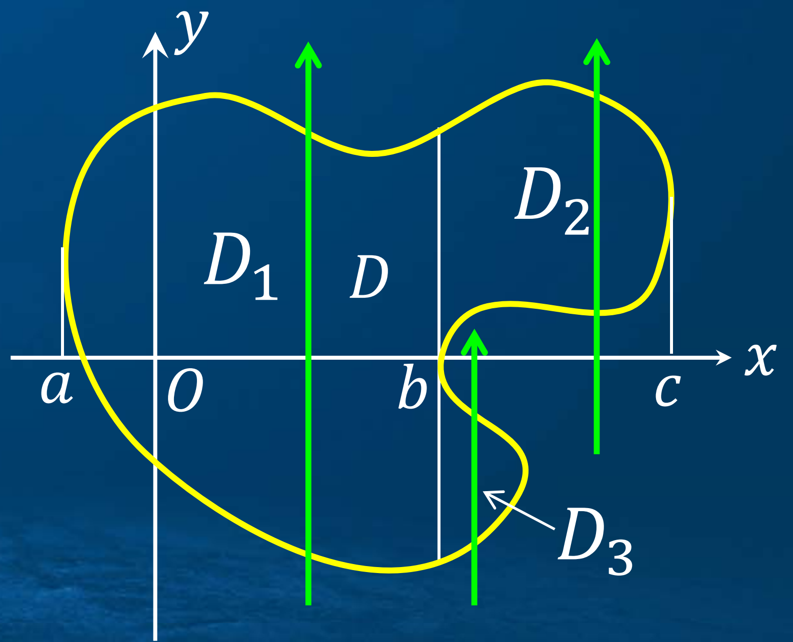
交换累次积分次序方法

对称区域上的二重积分

X-型积分区域







$$D = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ a \le x \le b \end{array} \right\}$$

非X-型积分区域的分解

X-型积分区域

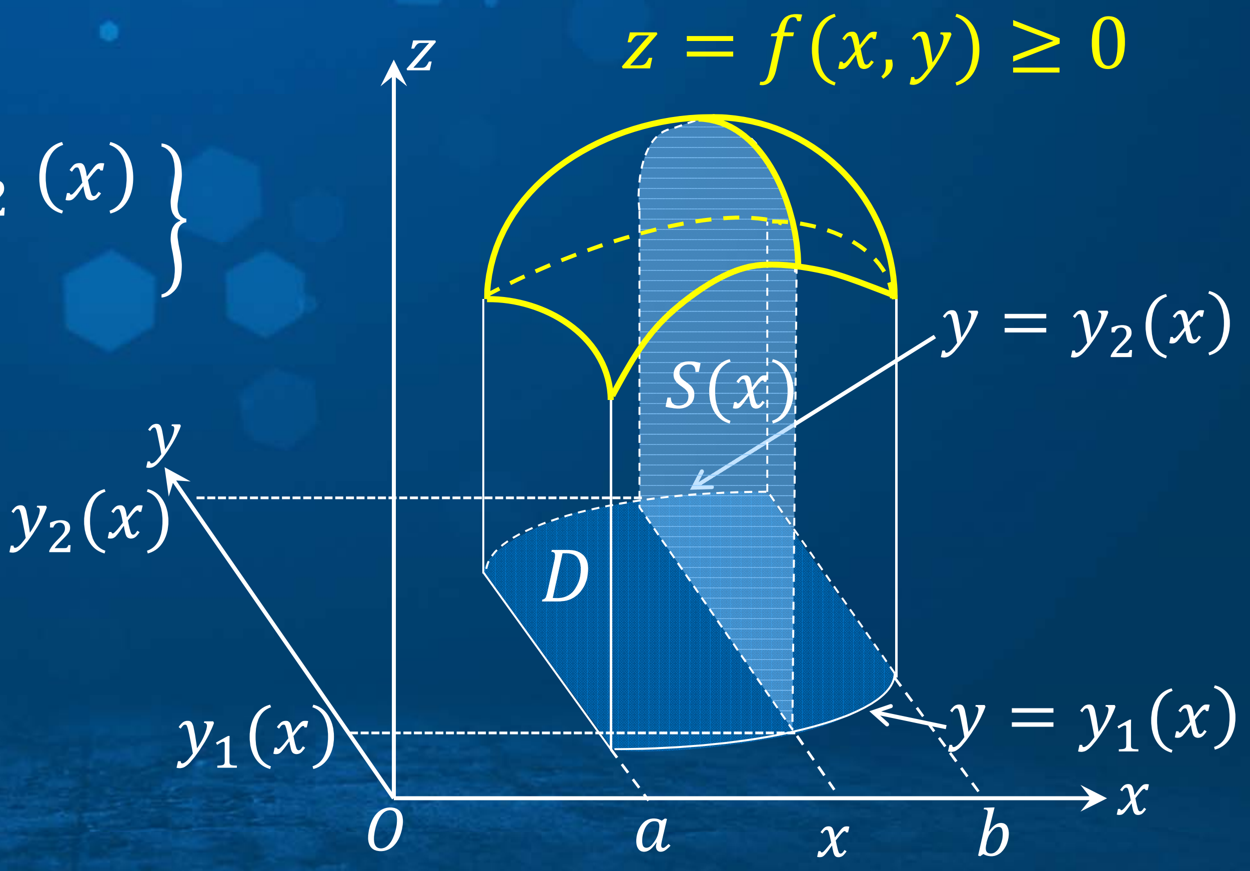
$$D=\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{c}y_1(x)\le y\le y_2(x)\\ a\le x\le b\end{array}\right\}$$

$$S(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

曲顶柱体的体积为：

$$V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



累次积分法

X-型积分区域上二重积分的累次积分法

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

思考：若$f(x,y)$在区域D上不为非负，累次积分法是否适用？

$$f(x,y)=\frac{|f(x,y)|+f(x,y)}{2}-\frac{|f(x,y)|-f(x,y)}{2}=\underbrace{f_1(x,y)-f_2(x,y)}_{\text{非负}}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

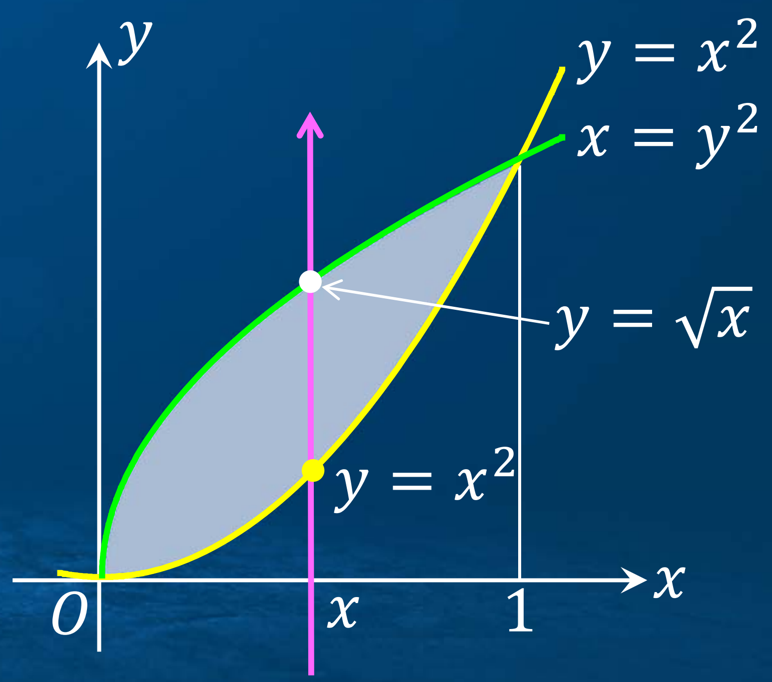
例1 计算二重积分$\iint_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中$D$为抛物线$y=x^2$和$x=y^2$所围成的平面区域．

X-型平面区域上二重积分的累次积分法

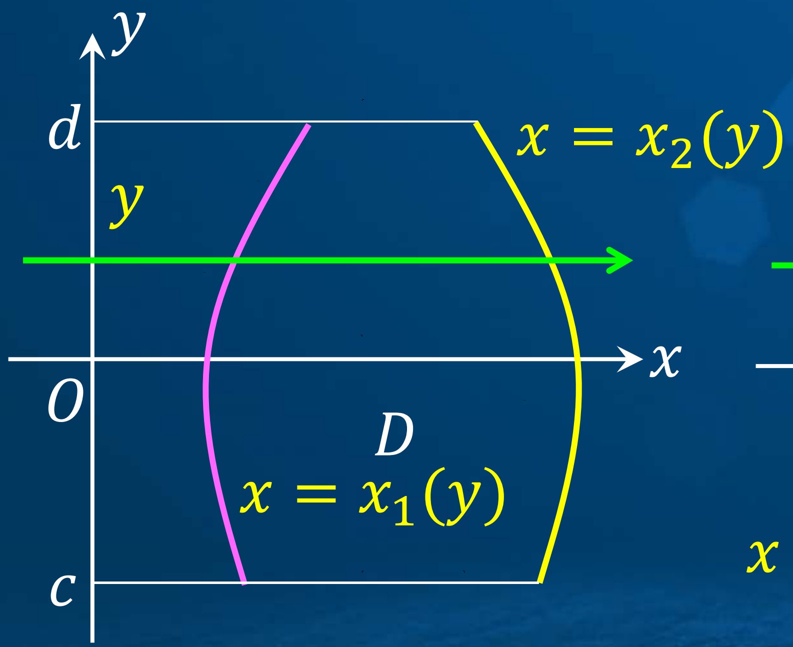
第一步: 画积分区域草图，确定类型，
投影区域到x轴，确定x积分限

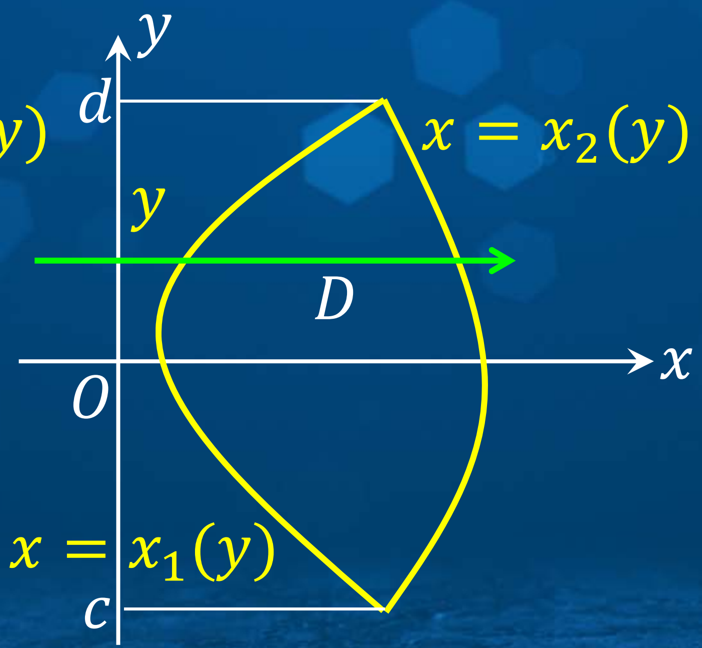
第二步: 在x范围内作与y轴同向的直线
穿过区域D，确定y的积分限

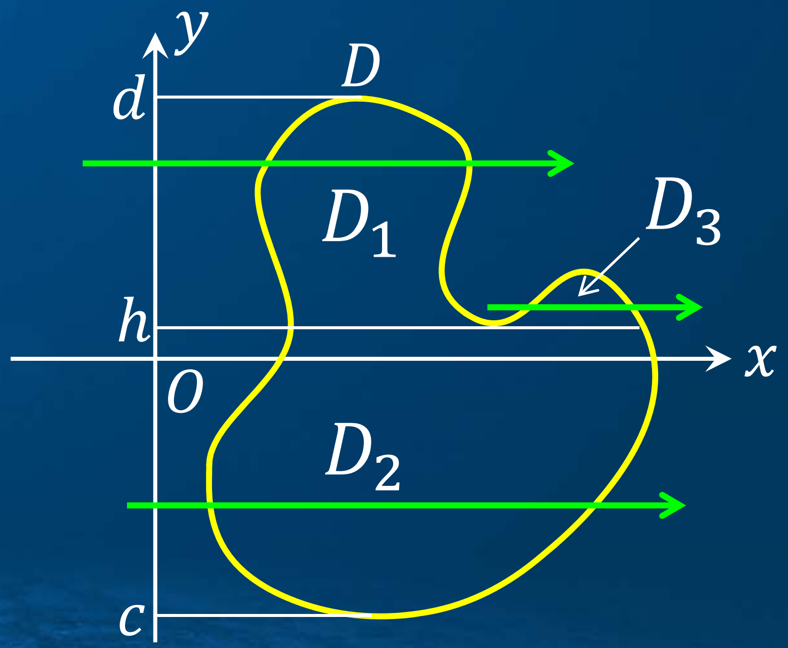
第三步: 根据积分限，计算累次积分



Y-型积分区域







$$D = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{c} x_1(y) \le x \le x_2(y) \\ c \le y \le d \end{array} \right\}$$

非Y-型积分区域的分解

Y-型积分区域上二重积分的累次积分法

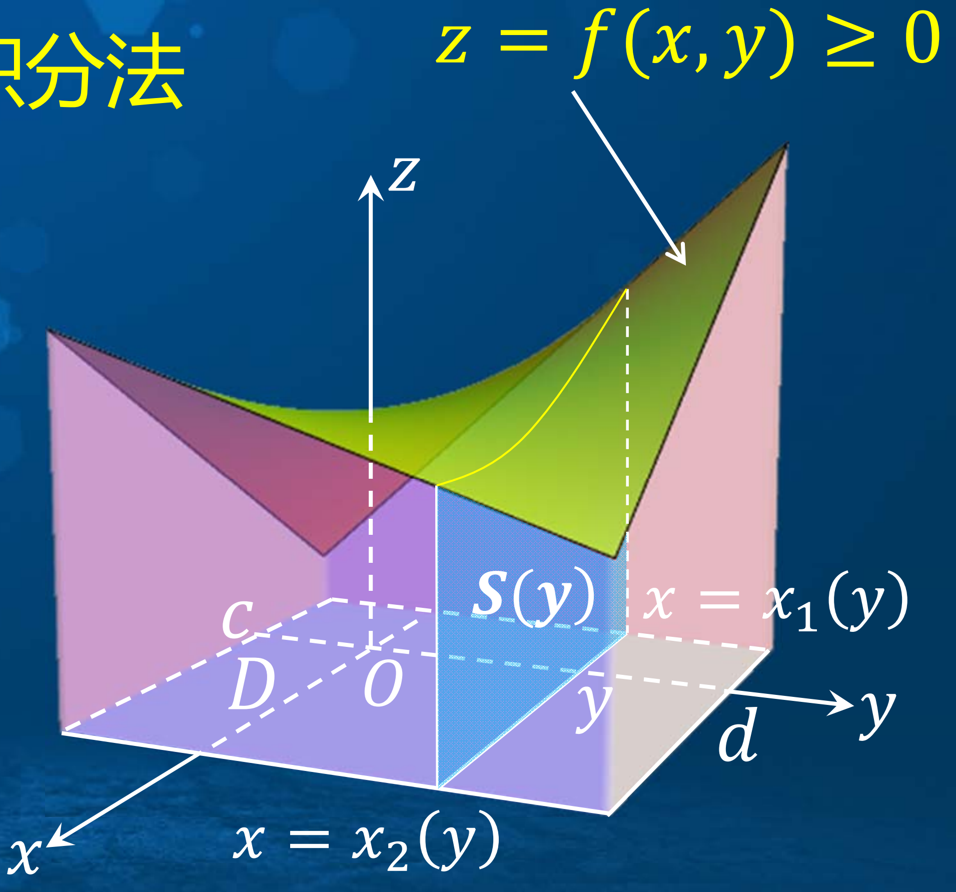
$$D=\left\{(x,y)\middle|\begin{array}{c}x_1(y)\le x\le x_2(y)\\ c\le y\le d\end{array}\right\}$$

$$S(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

曲顶柱体的体积为：

$$V=\int_c^d S(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



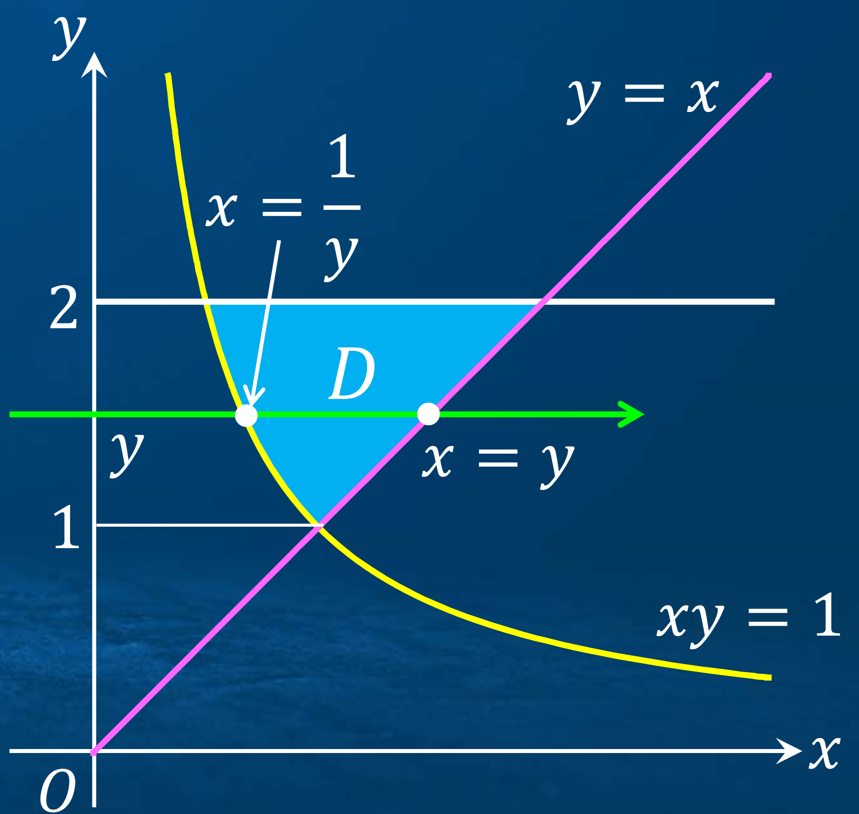
例2 计算二重积分$\iint_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$，其中区域$D$由直线$y=2, y=x$和双曲线$xy=1$所围成．

Y-型平面区域上二重积分的累次积分法

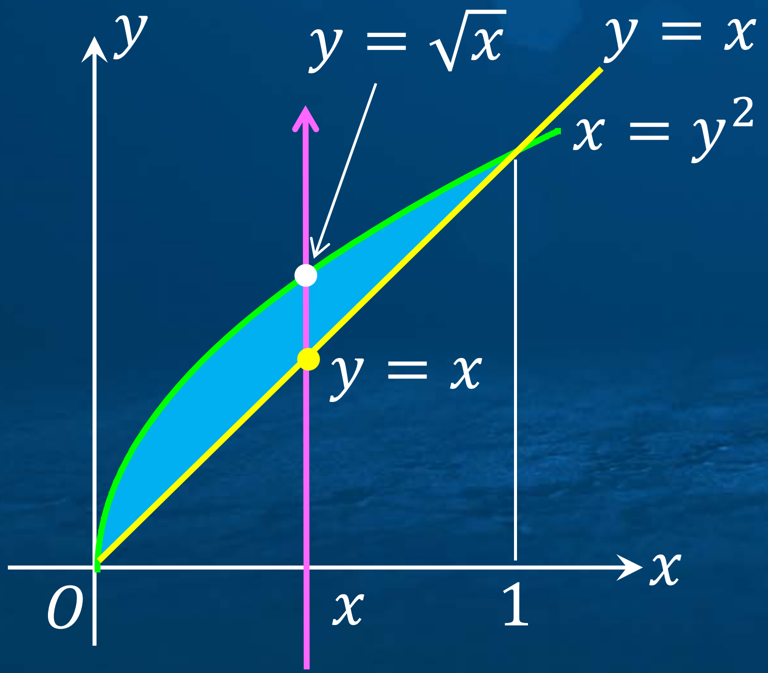
第一步: 画积分区域草图，确定类型，投影区域到y轴，确定y积分限

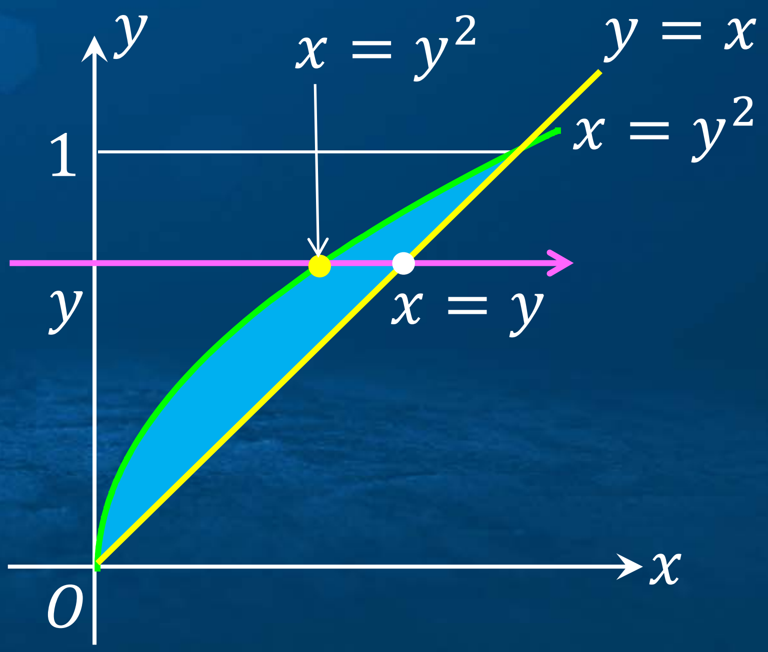
第二步: 在y范围内作与x轴同向的直线穿过区域D，确定x的积分限

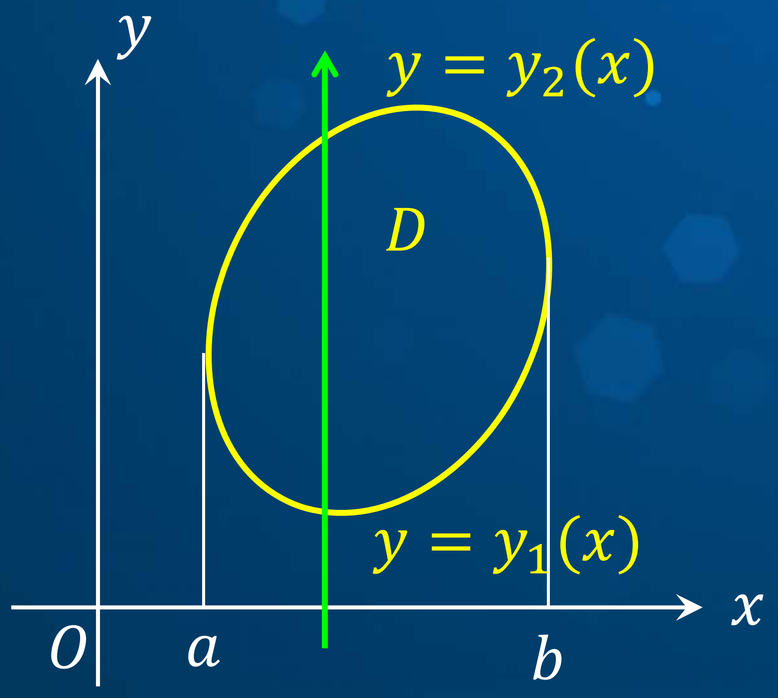
第三步: 根据积分限，计算累次积分

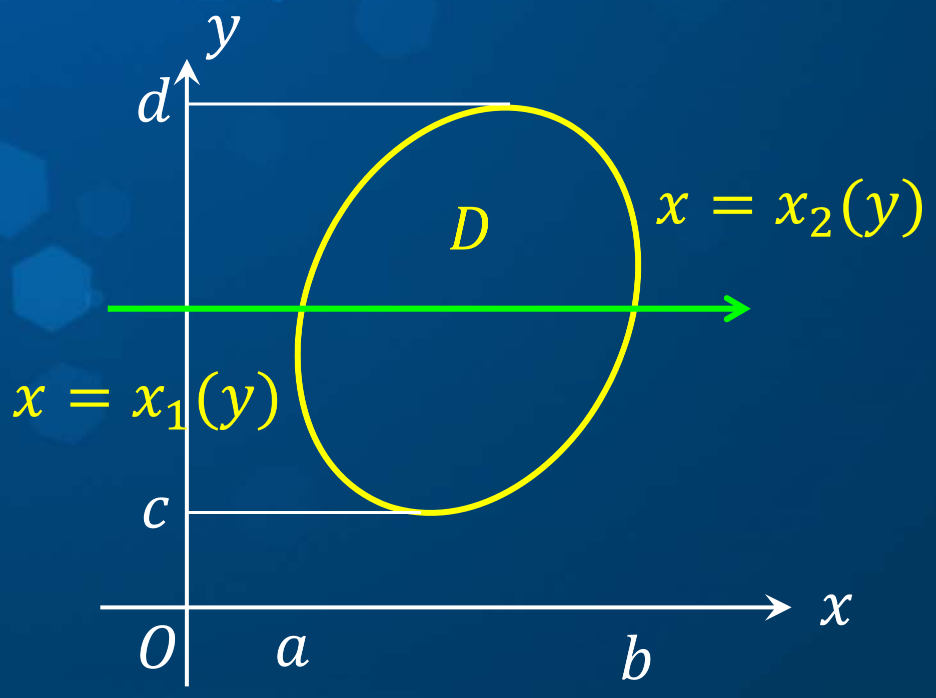


例3 计算二重积分$\iint_D \frac{\sin y}{y} \mathrm{d}\sigma$，其中$D$由直线$y=x$及抛物线$x=y^2$所围成.



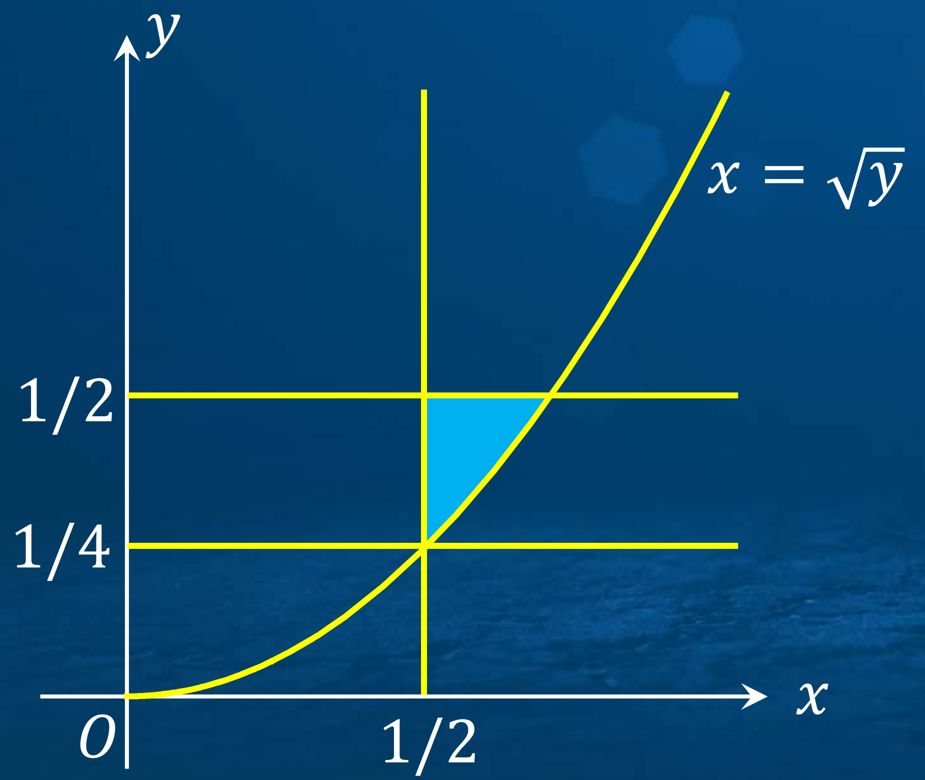


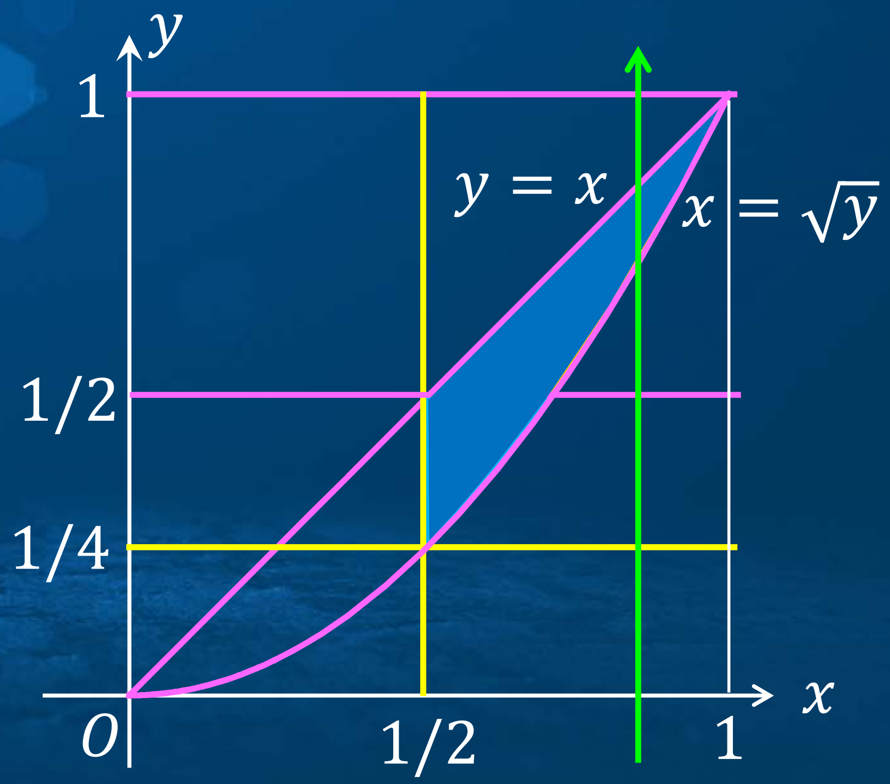




$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

例4 计算累次积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x.$





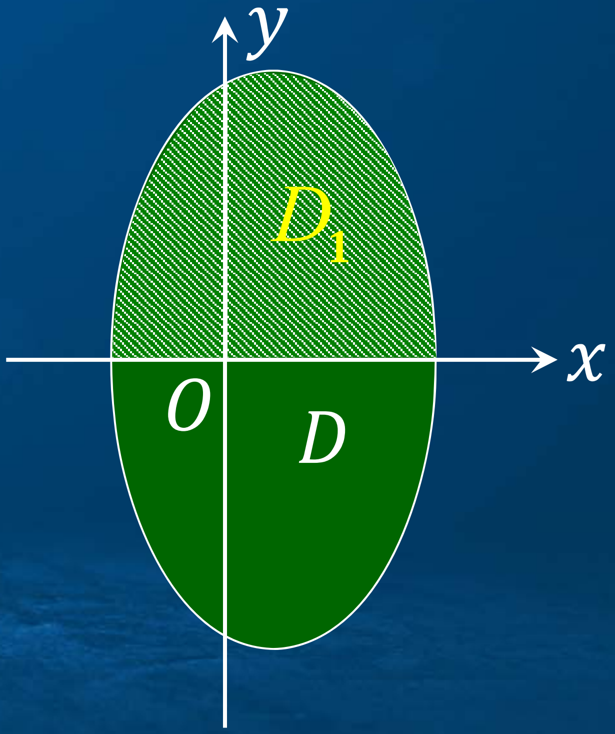
设函数$f(x,y)$在闭区域上连续, 积分域D 关于x 轴对称, D位于x 轴上方的部分为D_1, 在 D 上

(1) 如果$f(x,-y)=f(x,y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 如果 $f(x,-y)=-f(x,y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0.$$



偶倍奇零

例5 计算$I=\iint_D \boxed{x\ln(y+\sqrt{1+y^2})}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由$y=4-x^2$，$y=-3x$，$x=1$左侧所围成的区域.

被积函数关于x为奇函数

$$\iint_{D_1} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

被积函数关于y为奇函数

$$\iint_{D_2} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$