2004 年 6 月 四川大学学报(自然科学版) Jun. 2004
第 41 卷第 3 期 Journal of Sichuan University (Natural Science Edition) Vol. 41 No. 3

文章编号:0490-6756(2004)03-0524-04

最优哈密尔顿圈的降度算法

蒲俊, 伊良忠
(西华大学应用数学研究所,成都 610039)

摘要: 由完全图所产生的最小树,形成欧拉图. 通过添加边的方法,将 2 度以上顶点降为 2 度顶点,最后形成最优哈密尔顿圈.

关键词: 完全图; 最小树; 欧拉图; 顶点; 哈密尔顿圈算法
中图分类号:O157.5 **文献标识码:**A

1 引言

货郎问题有两种提法:一种是货郎到各村去卖货,再回到出发点,每村都要串到(不限次数),为其设计一条路线,使得所用旅行售货时间(或路程)最短;另一种是限制货郎到每村一次且仅到一次. 对于后者,其数学模型是在加权图上求一个最优 Hamilton 圈 C_h,即

$$W(C_h) = \sum_{e \in C_h} w(e) = \min\{\text{各个 Hamilton 圈的权}\}$$

这种问题算法难度很大,目前对于后者的算法很多,比如:最邻近法、最小树生成法、最小权匹配法以及改良圈算法等,都是一种近似算法. 货郎问题的有效算法是否存在,是当今图论中面临的一大悬案. 在此,我们通过在完全图中找出最小生成树并生成欧拉图,再从欧拉图出发,根据结点的度,利用三角形边权的比较,并判断该三角形三边是否已存在,来降低结点的度,同时通过添加边或去掉边,最终形成最优哈密尔顿圈.

2 预备知识

(1) 图的定义 图是由一个表示具体事物的点(称为顶点)V 的集合和表示事物之间联系(称为边)E 的集合而构成,记为:$G=(V,E)$,或记为 $G=(V,E,W)$,后者表示带权图,W 表示边权集. $V(G)$表示图 G 顶点的集合,$E(G)$表示图 G 边的集合.

(2) 顶点的度 图 G 中与一个顶点 v_i 关联边的数目称为顶点 v_i 的度,记为 $\deg v_i$.

(3) 圈 图 G 中起点和终点重合且各顶点相异的道路称为圈.

(4) 树 无圈的连通图称为树.

(5) 生成树 若图 G,T 满足 $V(T)=V(G)$,$E(T)E(G)$,则图 T 是图 G 的生成树.

(6) 最小生成树 总权最小的生成树称为最小生成树.

(7) 欧拉回路 通过图 G 中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的回路称为欧拉回路或欧拉环游.

(8) 欧拉图 具有欧拉回路的图,称为欧拉图. 欧拉图的每个顶点都是偶度顶点.

(9) 哈密尔顿回路 恰好包含图 G 中每个顶点一次的回路称为哈密尔顿回路.

(10) 最优哈密尔顿回路 总权最小的哈密尔顿回路称为最优哈密尔顿回路.

3 最优哈密尔顿回路的算法——顶点降度算法

设 $G=(V,E,W)$为 $n(n\geqslant 3)$阶无向完全带权图,且对任意的 $v_i,v_j,v_k\in V$,都满足三角不等式:

收稿日期:2003-08-30

$w_{ij} + w_{jk} \geqslant w_{ik}$. 其中 w_{ij} 表示边 (v_i, v_j) 的权. 我们可以得到求最优哈密尔顿圈的算法如下:

(1) 求 G 的最小生成树 T;

(2) 将 T 中各边均添上一条平行边, 其添加边的权与原对应边的权相同, 得图 G^*, 则图 G^* 为欧拉图;

(3) 在 G^* 中取度大于 2 的结点 $x_1, x_2, \cdots, x_k$, 并找出与该结点相邻的其余结点的集合 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$;

(4) 对 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 中的每一个结点 x_k, 与 Y_k 中任意两个结点 y_i, y_j 构成三角形, 并按 $W(x_k, y_i) + W(x_k, y_j) - W(y_i, y_j) = e_{ij}$ 计算权值. 比较各组 e_{ij} 值, 若 e_{ij} 是最大者, 则从 G^* 中去掉边 (x_k, y_i), (x_k, y_i) 各一条(即可将顶点 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 降次), 并添加边 (y_i, y_j) (从而保证添加边 (y_i, y_j) 的权是各组中的最小者), 得图 G_1^*.

(5) 对图 G_1^*, 按(3), (4)两步重复进行, 一旦重复出现上述三角形或去掉两边时图形断开, 则跳过它, 直到所有顶点的度为 2, 就是最优的 H 回路.

注 以上算法中, 第一步最小生成树 T 的算法可采用 Kruskal 算法(避圈法)或采用 Prim 算法; 第二步所得的图 G^* 一定为欧拉图的结论[1]; 第四步取 e_{ij} 中最大者, 其目的是使得添加边的权最小, 从而可使总权达到最小; 第五步按(3), (4)两步重复进行. 由于总的边数及总的顶点数是有限的, 而且整个过程中, 在降低顶点度的同时, 始终保持添加边的权最小, 从而使总权最小. 所以按此算法找到的哈密尔顿圈应该是最优哈密尔顿圈. 以后我们称该算法为降度算法.

例 求图 1 中 G 的最优哈密尔顿圈

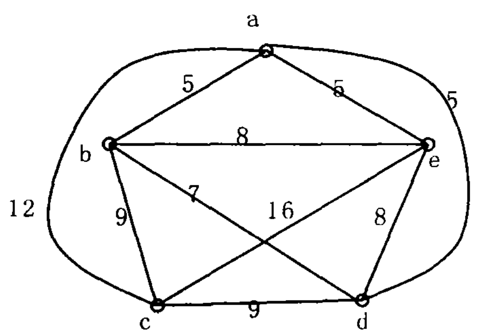

图 1 完全图

第一步: 利用 Prim 算法求最小生成树. 该图的边权矩阵为

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{bmatrix} - & 5 & 12 & 5 & 5 \\ 5 & - & 9 & 7 & 8 \\ 12 & 9 & - & 9 & 16 \\ 5 & 7 & 9 & - & 8 \\ 5 & 8 & 16 & 8 & - \end{bmatrix}$$

最小生成树 T 为: ab, ad, ae, bc. 如图 2 所示.

第二步: 添加平行边得图 G^*, 如图 3 所示.

第三步: 取顶点 a, b (度 >2), 其相邻结点集分别为 $Y1 = \{b, e, d\}$, $Y2 = \{a, c\}$.

第四步: 计算 a, b 分别与 $Y_1 = \{b, e, d\}$, $Y_2 = \{a, c\}$ 的任意两个顶点组成的三角形的边权.

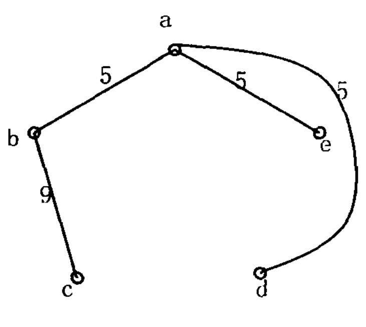

图 2 最小生成述 T

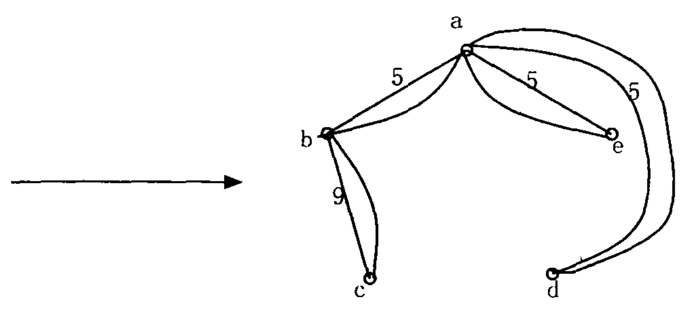

图 3 由最小树产生的欧拉图

对于顶点 a:

$w_{ab} + w_{ae} - w_{be} = 5 + 5 - 8 = 2$; $w_{ae} + w \int ad - w_{ed} = 5 + 5 - 8 = 2$;

$w_{ab} + w_{ad} - w_{bd} = 5 + 5 - 7 = 3$.

对于顶点 b:

$w_{ba}+w_{bc}-w_{ac}=5+9-12=2$.

比较 $w_{ab}+w_{ad}-w_{bd}=5+5-7=3$ 得最大,则从图 3 中,分别去掉一条 E_{ab} 边和 E_{ad} 边,并添加一条 E_{bd} 边,构成图 4.

第五步:重复第三、四步.

对于结点 a(度>2):

$Y_1=\{b,e,d\}$, $w_{ab}+w_{ae}-w_{be}=5+5-8=2$;

$w_{ae}+w_{ad}-w_{ed}=5+5-8=2$; $w_{ab}+w_{ad}-w_{bd}=5+5-7=3$(前面已取,跳过).

对于结点 b(度>2):

$Y_2=\{a,c,d\}$. $w_{ba}+w_{bc}-w_{ac}=5+9-12=2$;

$w_{ba}+w_{bd}-w_{ad}=5+7-5=7$

(去掉边和后图形断开(实际上该三角形与前面已取出的三角形相同),跳过). 比较得 $w_{bc}+w_{bd}-w_{cd}=9+7-9=7$ 最大,则从图 4 中分别去掉一条 E_{bc} 边和 E_{bd} 边,并添一条 E_{cd} 边,构成图 5.

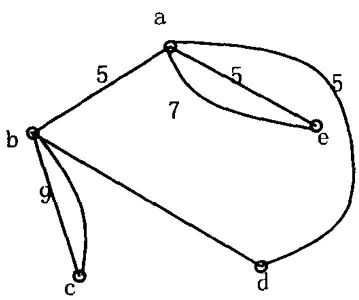

图 4 第一次降度后的图形

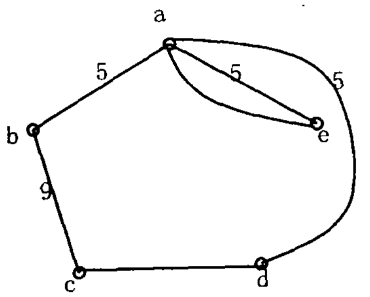

图 5 第二次降度后的图形

第 6 步:重复第三、四步.

对于结点 a(度>2):

$Y_1=\{b,e,d\}$. $w_{ab}+w_{ae}-w_{be}=5+5-8=2$;

$w_{ae}+w_{ad}-w_{ed}=5+5-8=2$; $w_{ab}+w_{ad}-w_{bd}=5+5-7=3$(前面已取,跳过).

至此,从图 5 中分别去掉一条 E_{ab} 边和 E_{ae} 边,并添加一条 E_{be} 边,构成图 6;从图 5 中分别去掉一条 E_{ae} 边和 E_{ad} 边,并添加一条 E_{ed} 边,构成图 7.

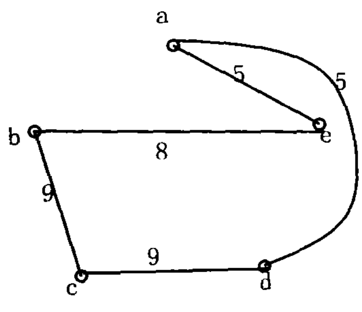

图 6 最优哈密尔顿回路之一

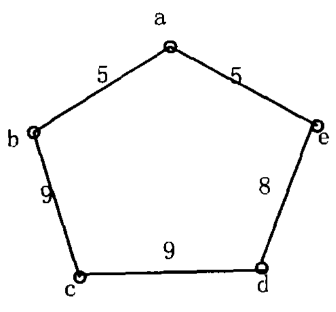

图 7 最优哈密尔顿回路之二

图 6 的总权 $=5+5+9+9+8=36$;图 7 的总权 $=5+9+9+8+5=36$. 它们都是最优哈密尔顿回路.

4 算法比较

对于最优哈密尔顿回路的近似算法很多,但有些算法得到的结果有可能最好,也有可能最坏,也有的算法得到的结果相对较好.

在上例中,如果用最邻近算法得:从 a 点出发的 H 回路有 4 条,abdeca(权为 48),aebdca(权为 41),

aedbca(权为 41)和 adebca(权为 42),没有最优 H 回路;从 b 出发的 H 回路有 2 条,baedcb(权为 36)和 badecb(权为 43),含有最优 H 回路.可见此算法误差大.

如果采用最小生成树法得:从 b 点出发的 H 回路有 4 条,bcaedb(权为 41),bcadeb(权为 42),baedcb(权为 36),badecb(权为 43).可见这种算法误差也大;如果采用最小权匹配法得:从 a 出发的 H 回路有 2 条,aedcba(权为 36),adcbea(权为 36),与此降度法结果相同.

该算法优点是:

(1) 算法思路清晰简单.在最小树生成的欧拉图中,采用添加边和去掉边的办法,利用循环语句,将度大于 2 的所有结点降为 2 度结点;

(2) 结果较优.首先,生成的最小树总权最小;

(3) 在降低结点的度时,始终是去掉权最大的边而添加权最小的边,从而使得最后的哈密尔顿回路最优,而且可以得到多条最优哈密尔顿回路(如果存在的话).

参考文献:

[1] 耿素云.集合论与图论[M].北京:北京大学出版社,1998.
[2] 曹立明,魏兵,周强.图论及其在计算机科学中的应用[M].北京:中国矿业大学出版社,1995.
[3] 王树禾.图论及其算法[M].北京:中国科学技术出版社,1990.
[4] F 哈拉里(美)著,李慰萱译.图论[M].上海:上海科学技术出版社,1980.
[5] 肖位枢.图论及其算法[M].北京:航空工业出版社,1993.

An algorithm on optimum Hamiltonian cycle

PU Jun, *YI Liang-zhong*
(Institute of Applied Mathematics, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: Authors obtain a new algorithm, which is called trigonometric algorithm, to find out the optimum Hamiltonian cycle using minimum spanning tree and Euler's diagrams.

Key words: complete graph; minimum spanning tree; Euler's diagrams; Hamiltonian cycle algorithm