一.(16分) 计算

(1)设$z = x^y + \sin(x^2 y)$, $x > 0, y > 0$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, $dz$.

(2) 设$f(x, y, z) = \ln(x + y^2 + z^3)$, $x > 0, z > 0$,求$f(x, y, z)$于点$(1, 1, 1)$处沿方向$(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$的方向导数。

二.(16分) 计算

(1) 设$f(x, y, z) = \ln(1+x^2)+e^y+\sin z$, $g(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, $h(\theta, \varphi) = f \circ g$ 求$h$的Jacobi矩阵。

(2) 方程$x^3 - 7xy + y^3 + 5 = 0$在点$(1, 1)$与$(1, 2)$的近旁分别确定了函数$y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$. 试求$f_1'(1)$和$f_2'(1)$.

三.(10分) 设$f(x)$是于$[a, b]$上可积的非负函数,

(1) 试证明: $\sqrt{f(x)}$于$[a, b]$上可积;

(2) 若$f(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$, 问$\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$于$[a, b]$上是否必可积?若是,请证明;若否,请举例。

四. (16分) 设平面点集$D = \{(x, y); y^2 \le x \le 2 - y, 0 \le y \le 1\}$。求$D$绕$x$轴旋转一周,在空间形成的旋转体$\Omega$的体积和表面积。

明；若否，请举例。

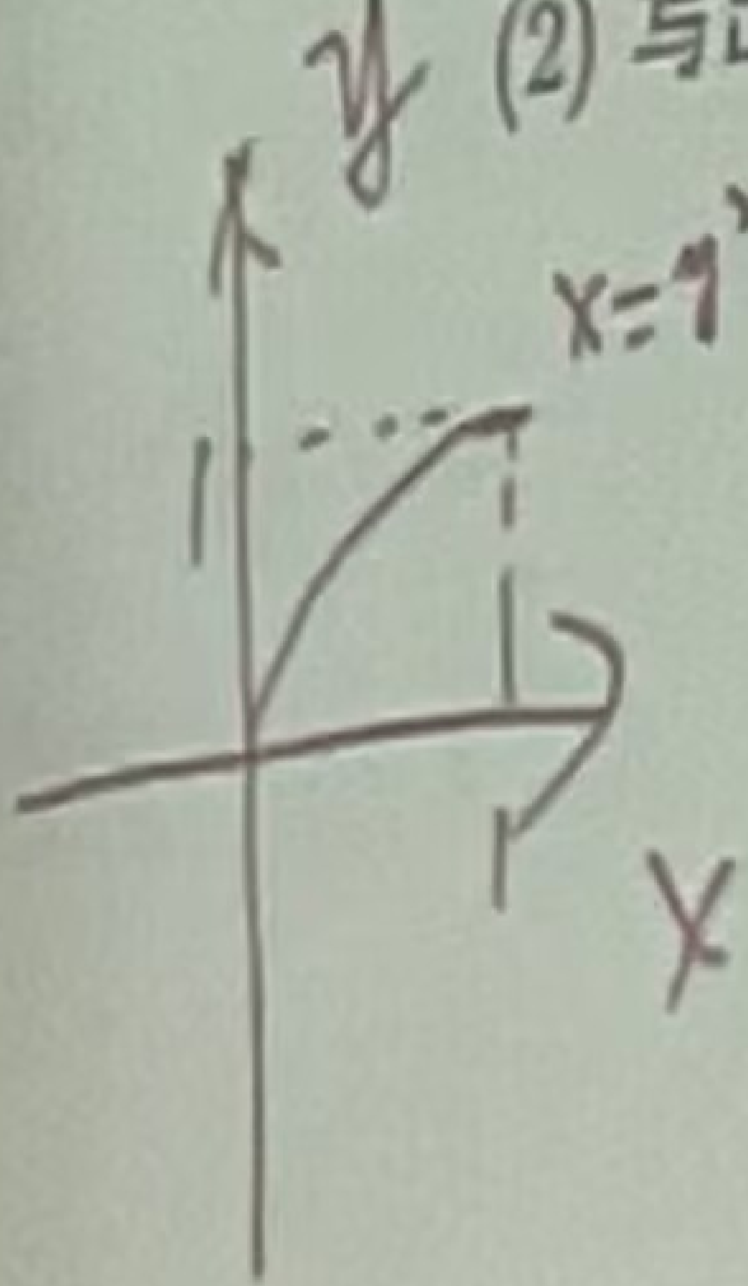
四. (16分) 设平面点集$D = \{(x,y); y^2 \le x \le 2-y, 0 \le y \le 1\}$。求$D$绕$x$轴旋转一周，在空间形成的旋转体$\Omega$的体积和表面积。

8' 8'

五. (16分)

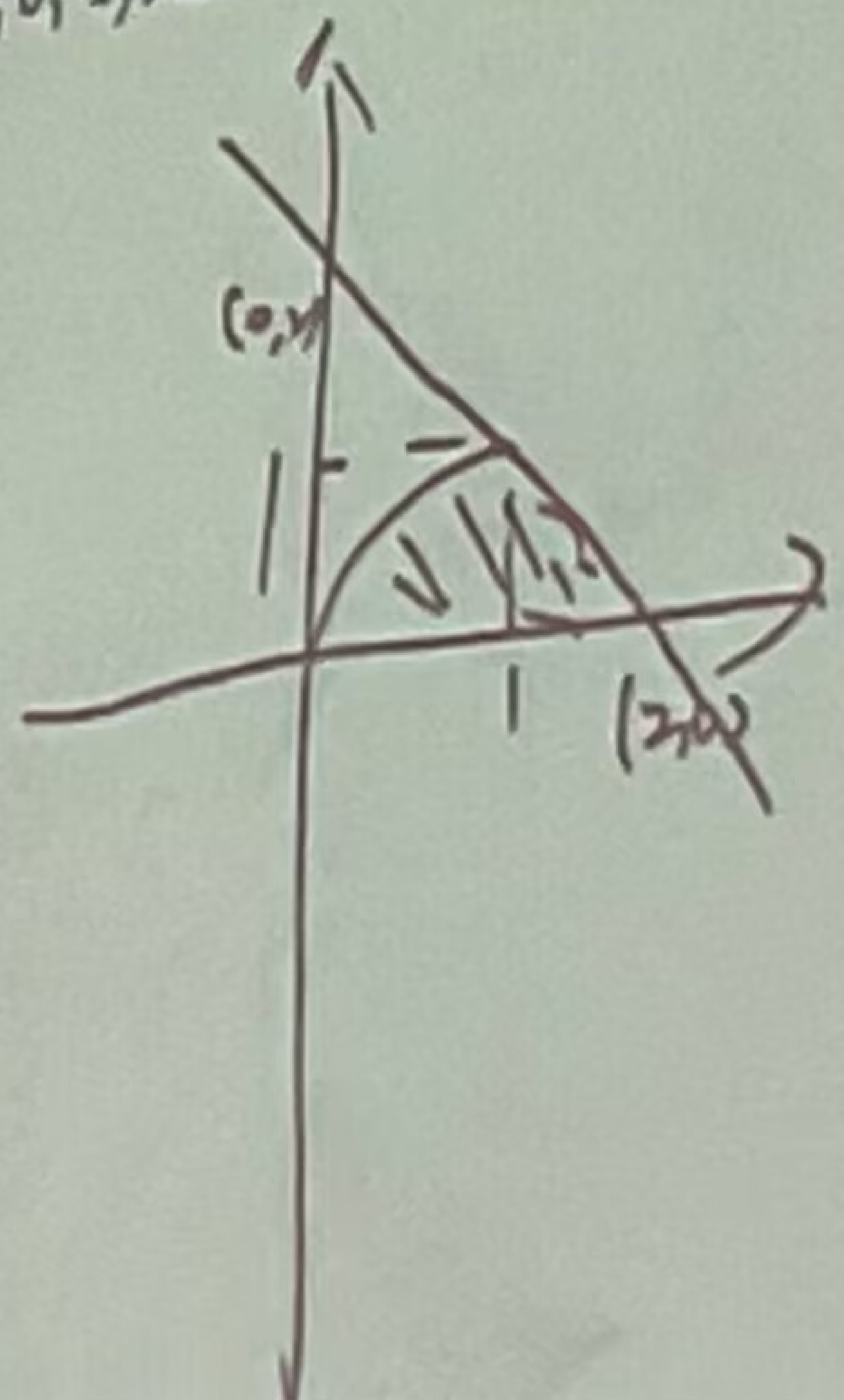
(1) 计算空间曲线$(ae^{-t}\cos t, ae^{-t}\sin t, bt)$，$a>0, b>0$，上每一点处的切向量和曲率。

(2) 写出曲面$z = 6 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$在点$(a,b,4)$处的切平面方程。




$2-y=x$

$y=2-x$



六.(10分) 证明以下命题:

(1) $R^n\ (n\geq 2)$中以原点为心的单位球面$S^{n-1}$是紧致集。

(2) 若$f$是$S^{n-1}$上的连续函数且不为常数，则存在实数$\alpha<\beta$,使得$f(S^{n-1})=[\alpha,\beta]$。

七.(8分) 设$f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$, $x^2+y^2\neq 0$, $f(0,0)=0$. 试证明：$f(x,y)$于$(0,0)$处沿任何方向的方向导数皆存在并且相等，但$f(x,y)$于$(0,0)$处不连续。

八.(8分) 设$D_1,D_2$是$R^n$中区域，$D_1\bigcap D_2\neq\emptyset$. 判断以下命题是否正确。若是，请证明；若否，请举例。

(1) $D_1\bigcup D_2$是区域；

(2) $D_1\bigcap D_2$是区域；

(3) $D_1\backslash\overline{D_2}$是区域。