南方科技大学

2023-2024 学年秋季学期 数学分析 I 期中试卷

本试卷共（7）道大题，满分（100）分

一、计算题（要求写出详细的计算过程，每小题 5 分，共 35 分）

（1）求极限 $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

（2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\tan\dfrac{1}{n}+\cos\dfrac{1}{n})^n$.

（3）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})$.

（4）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)\tan x+2\sin^2 x}{x^2}$.

（5）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{|x|}{n})^{\frac{n}{x}}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)$.

（6）设 $f(x)=(x+1)^{x+2}$，求 $f'(1)$.

（7）设 $f(x)=\arctan\dfrac{x}{1-x}$，求 $f'(x)$.

二、（本题满分 10 分）使用数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+2n+5}{n^2-3n-1}=4$.

三、（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，且 $f(x)>x$ 对任意实数 x 成立. 设 a 是一个实数，定义数列 $\{a_n\}$ 如下：$a_1=a$，$a_{n+1}=f(a_n)$（$n\geq 1$）. 证明：数列 $\{a_n\}$ 无界.

四、（本题满分 10 分）设 $a_n=\sin 1+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$. 请判断数列 $\{a_n\}$ 是否收敛，并证明你的结论.

五、（本题满分 10 分）证明：关于 x 的方程

$$e^x+x^3-2x+1=0$$

至少有一个实数解.

六、（本题满分 15 分）函数 $f(x)$ 定义如下：

当 $|x|\geq 1$ 时，$f(x)=0$；当 $|x|<1$ 时，$f(x)=e^{-\frac{1}{1-x^2}}\sin\dfrac{1}{1-x^2}$.

证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

七、（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上严格单调的连续函数. 证明：存在 $\xi\in[0,1]$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\left(f(\frac{1}{2^n})+f(\frac{2}{2^n})+\ldots+f(\frac{2^n}{2^n})\right)=f(\xi).$$