

第一部分 选择题 (每题 4 分, 总共 20 分)

1. 下列各函数中可以作为某随机变量的分布函数的是 ().

$$(A) F_1(x) = \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty \quad (B) F_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(C) F_3(x) = e^{-x}, -\infty < x < +\infty \quad (D) F_4(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan x, -\infty < x < +\infty$$

2. 随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} ce^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, 则 $E(X) = ()$

$$(A) \frac{1}{2} \quad (B) 1 \quad (C) 2 \quad (D) \frac{1}{4}$$

3. 设 (X, Y) 为二维随机向量, 则 X 与 Y 不相关的充分必要条件是 ().

$$(A) X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立} \quad (B) E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$(C) D(XY) = D(X) \cdot D(Y) \quad (D) E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(0, 3^2)$, 设 X_1, X_2, \dots, X_9 和

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_9 \text{ 分别是来自两总体的简单随机样本, 则统计量 } U = \frac{\sum_{i=1}^9 X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^9 Y_i^2}} \text{ 服从分}$$

布是 ().

$$(A) t(9) \quad (B) t(8) \quad (C) N(0, 81) \quad (D) N(0, 9)$$

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 是正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 若统计量

$$K \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2 \text{ 为 } \sigma^2 \text{ 的无偏估计, 则 } K \text{ 的值应该为 } ().$$

$$(A) \frac{1}{2n} \quad (B) \frac{1}{2n-1} \quad (C) \frac{1}{2n-2} \quad (D) \frac{1}{n-1}$$

第二部分 填空题 (每空 2 分, 总共 20 分)

1. 甲口袋有 2 只白球、4 只黑球; 乙口袋有 2 只白球、3 只黑球. 从甲口袋任取一球放入乙口袋, 然后从乙口袋中任取一球, 此时从乙口袋中取出的是白球的概率为_____.
2. 已知事件 $P(A) = 0.4$, $P(A \cup \bar{B}) = 0.8$, 且 A 与 B 相互独立, 那么 $P(\bar{B} | A) =$ _____.
3. 若随机事件 A, B 相互独立, $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.2$, 那么 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) =$ _____.
4. 已知事件 B_1, B_2, B_3 的概率有 $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$, $P(B_1 B_2) = 0$, $P(B_1 B_3) = P(B_2 B_3) = \frac{1}{16}$, 那么 $P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) =$ _____.
5. 随机变量 X, Y 相互独立且都服从泊松分布 $P(3)$, 则 $\text{Cov}(2X - Y, X + Y) =$ _____.
6. $X \sim b(n, p)$, 且 $E(X) = 2, D(X) = 1$, 则 $P\{X > 1\} =$ _____.
7. 随机变量 X 的密度函数 $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则 X^3 的数学期望为_____.
8. 已知 $E(X) = 0, D(X) = 4$, 则 $E[(3X - 2)^2] =$ _____.
9. 设 X_1, X_2, \dots, X_{20} 为来自于均匀分布总体 $U(-1, 1)$ 的一组独立同分布容量为 20 的样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} X_i$, 那么 $D(3\bar{X}) =$ _____.
10. 设 X_1, X_2, \dots, X_{10} 为来自于总体 X 的一组独立同分布容量为 10 的样本, 总体方差 $D(X) = 3$. 记 $\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$, 那么 $E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 - 10(\bar{X})^2\right) =$ _____.

第三部分 问答题 (每题 10 分, 总共 60 分)

1. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$. 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

2. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 3y, & 0 < x < 2, 0 < y < \frac{x}{2}. \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

3. 设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + axy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$

试求: (1) a ; (2) $P\{X+Y \geq 1\}$; (3) X 与 Y 是否相互独立?

4. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$,

其中 $\theta > 0$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是 X 的简单随机样本, x_1, x_2, \dots, x_n 是 X 的样本观察值,

- (1) 求 θ 的最大似然估计量; (2) 求 θ 的矩估计量.

5. 设某机器生产的零件长度（单位：cm） $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，今抽取容量为 16 的样本，测得样本均值 $\bar{x} = 10$ ，样本方差 $s^2 = 0.16$ 。

(1) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

(2) 检验假设 $H_0: \sigma^2 \leq 0.1$ （显著性水平为 0.05）。

(附注) $u_{0.95} = 1.645$, $u_{0.975} = 1.96$,

$t_{0.95}(16) = 1.746$, $t_{0.95}(15) = 1.753$, $t_{0.975}(15) = 2.132$,

$\chi_{0.95}^2(16) = 26.296$, $\chi_{0.95}^2(15) = 24.996$, $\chi_{0.975}^2(15) = 27.488$.

（此处均指为下分位点，下同。）

6. 甲、乙两车床生产同一种零件，现从这两车床生产的零件中分别抽取 5 个和 6 个，测得其外径（单位：mm）：

甲	15.0	14.5	15.2	15.5	14.8	
乙	15.2	15.0	14.8	15.2	15.0	15.0

假定其外径服从正态分布。在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，问乙车床加工精度是否比甲的高？（经计算知 $S_1^2 = 0.145$, $S_2^2 = 2.267 \times 10^{-2}$ ）

(附注) $t_{0.95}(11) = 1.796$, $t_{0.95}(10) = 1.812$, $t_{0.95}(9) = 1.833$,

$t_{0.975}(11) = 2.201$, $t_{0.975}(10) = 2.228$, $t_{0.975}(9) = 2.262$,

$\chi_{0.95}^2(11) = 19.68$, $\chi_{0.95}^2(10) = 18.31$, $\chi_{0.95}^2(9) = 16.92$.

$\chi_{0.975}^2(11) = 21.92$, $\chi_{0.975}^2(10) = 20.48$, $\chi_{0.975}^2(9) = 19.02$.

$F_{0.95}(4,5) = 5.19$, $F_{0.95}(5,6) = 4.39$, $F_{0.95}(5,4) = 6.26$, $F_{0.95}(6,5) = 4.95$,

$F_{0.975}(4,5) = 7.39$, $F_{0.975}(5,6) = 5.99$, $F_{0.975}(5,4) = 9.36$, $F_{0.975}(6,5) = 6.98$.