Step-1

Let x be such that Ax = b.

Consider again

$$Q(x) = \frac{1}{2} x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} A x - x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} b + \frac{1}{2} b^{\mathsf{T}} b$$

$$= \frac{1}{2} x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} b - x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} b + \frac{1}{2} b^{\mathsf{T}} b$$

$$= -\frac{1}{2} x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} b + \frac{1}{2} b^{\mathsf{T}} b$$

That is, Q(x) is minimum whenever Ax = b.

Step-2

 $Q(x) = \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}Ax - x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}b + \frac{1}{2}b^{\mathsf{T}}b$ We have $Q(x) = \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}Ax - x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}Ax - x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}b$ We have $Q(x) = \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}Ax - x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}b$

Now let x be such that Ax = b. Then we get

$$Q(x) = \frac{1}{2} x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} A x - x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} b$$
$$= \frac{1}{2} x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} b - x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} b$$
$$= -\frac{1}{2} x^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} b$$

Step-3

Thus, we get $Q(x) = -\frac{1}{2}x^{T}A^{T}b$ at the minimum. These equations are called as normal equations in the theory of least squares.