第四章 随机变量的数字特征

随机变量的概率特性
- 分布函数CDF
- 密度函数PDF
- 频率函数PMF

特点 全面、详细、完整

不足 复杂、重点不突出

问题

怎样粗线条地描述随机变量的特性?

简单明了、特征鲜明、直观实用

第四章 随机变量的数字特征

§1 随机变量的期望
§2 方差和标准差
§3 协方差和相关系数
§4 条件期望和预测
§5 矩生成函数
§6 近似方法

问题 怎样粗线条地描述随机变量的特性?

数字特征

例 甲、乙两射手进行打靶训练，每人各打了100发子弹，成绩如下：

甲：

环数	8	9	10
次数	15	40	45

乙：

环数	8	9	10
次数	35	10	55

怎样评估两人的射击水平？

分析 两人的总环数分别为

甲： $8\times15+9\times40+10\times45=930$ （环）

乙： $8\times35+9\times10+10\times55=920$ （环）

每枪平均环数为

甲： $8\times\dfrac{15}{100}+9\times\dfrac{40}{100}+10\times\dfrac{45}{100}=9.3$ （环）

乙： $8\times\dfrac{35}{100}+9\times\dfrac{10}{100}+10\times\dfrac{55}{100}=9.2$ （环）

平均值的概念广泛存在

例如 某班级某课程考试的平均成绩

电子产品的平均无故障时间

某地区的日平均气温和日平均降水量

某地区水稻的平均亩产量

某地区的家庭平均年收入

某国家国民的平均寿命

问题 question 怎样定义随机变量的平均值概念？

例 甲、乙两射手进行打靶训练，每人各打了100发子弹，成绩如下：

甲：

环数	8	9	10
次数	15	40	45

乙：

环数	8	9	10
次数	35	10	55

怎样评估两人的射击水平？

进一步分析 记甲每枪击中的环数为 X,因为射击次数较多, 故可认为X的频率函数为

X	8	9	10
p_k	0.15	0.40	0.45

则甲射手每枪平均环数为

$$8\times 0.15+9\times 0.40+10\times 0.45=9.3$$

即平均环数为

$$E(X)\triangleq\sum_{k=1}^{3}x_k p_k$$

(一) 离散型 r.v 的数学期望

定义 设 r.v X的频率函数为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$P\{X=x_k\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<+\infty$，则称

$$E(X)\triangleq\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k=\sum_{k=1}^{\infty}x_kP\{X=x_k\}$$

为r.v X的**数学期望(期望、均值).**

“数学期望”(Expectation, Expected value)的由来

“数学期望”是历史上沿用下来的一个名词，可理解为在数学上对r.v进行计算期望得到的值，即平均值

例 某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式. 付款额根据使用寿命 X 来确定:

寿命(年)	$X\le 1$	$1<X\le 2$	$2<X\le 3$	$X>3$
付款(元)	1500	2000	2500	3000

假设 $X\sim EXP(0.1)$, 试求该商店出售一台电器的平均收费额.

解 设出售一台电器的收费额为 Y, 频率函数为

$$P\{Y=1500\}=P\{X\le 1\}=\int_0^1 \frac{1}{10}e^{-x/10}dx=0.0952$$

$$P\{Y=2000\}=P\{1<X\le 2\}=\int_1^2 \frac{1}{10}e^{-x/10}dx=0.0861$$

$$P\{Y=2500\}=P\{2<X\le 3\}=\int_2^3 \frac{1}{10}e^{-x/10}dx=0.0779$$

$$P\{Y=3000\}=P\{X>3\}=\int_3^\infty \frac{1}{10}e^{-x/10}dx=0.7408$$

即

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

例　某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式. 付款额根据使用寿命 X 来确定:

寿命(年)	$X \le 1$	$1 < X \le 2$	$2 < X \le 3$	$X > 3$
付款(元)	1500	2000	2500	3000

假设$X \sim EXP(0.1)$,试求该商店出售一台电器的平均收费额.

解　设出售一台电器的收费额为 Y, 频率函数为

Y	1500	2000	2500	3000
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408

$$\therefore \quad E(Y) = \sum_{k=1}^{4} y_k P\{Y = y_k\}$$

$$= 1500 \times 0.0952 + 2000 \times 0.0861 + 2500 \times 0.0779 + 3000 \times 0.7408$$

$$= 2732.17$$

即商店出售一台电器平均收费额为 2732.17 元.

例 设 $X \sim P(\lambda)$, 求 $E(X)$.

解 X 的频率函数为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots$$

$\therefore$ X 的均值为

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

令 $k-1=i$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

例 设 $X \sim b(n,p)$, 求 $E(X)$.

解 $$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$\forall\, p,q\in(0,1)$, 令

$$\varphi(p,q)\stackrel{\Delta}{=}\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} \equiv (p+q)^n$$

$$\therefore\quad \frac{\partial\varphi}{\partial p}=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^{k-1}q^{n-k}\equiv n(p+q)^{n-1}$$

特别令 $q=1-p$, 则有

$$E(X)=p\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^{k-1}q^{n-k}$$

$$=p\cdot n(p+q)^{n-1}=np$$

常见分布的数学期望

分布	概率分布	期望
0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	np
$P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$	λ

问题 在数学期望的定义中，为什么要求

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<+\infty \ ?$$

分析 由高等数学知

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<+\infty \Rightarrow E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k \text{收敛}$$

且 $E(X)$与 $x_k p_k$ 出现的先后位置无关！

注 若 $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k=+\infty$, 则称 $E(X)$不存在.

(二) 连续型 r.v 的数学期望

定义 设 r.v X 的概率密度函数为 $f(x)$, 若

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx<+\infty$$

则称

$$E(X)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$

为 r.v X的**数学期望(期望、均值)**.

注意离散型和连续型情形的形式一致性

注 若$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx=+\infty$, 则称 $E(X)$不存在.

例 设 $X \sim U(a,b)$, 求 $E(X)$.

解 X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\therefore\quad E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

$$=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2}$$

$$=\frac{a+b}{2}$$

例 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 $E(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu+\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\mu\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx+\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx\right)$$

$$=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt$$

$$=\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}+0$$

$$=\mu$$

例 设某元器件的寿命 X服从指数分布,其密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, x>0\\ 0\ ,\quad x\le 0\end{cases}$$

求 X的数学期望 $E(X)$.

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$

$$=\int_0^{\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$$

$$=\theta\cdot\int_0^{\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}d(\frac{x}{\theta})$$

$$=\theta\cdot\int_0^{\infty}te^{-t}dt$$

$$=\theta$$

即该元器件的平均寿命为 θ.

分布	概率密度	期望
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ

工程背景

如果某产品的平均寿命为

$$\theta = 10^k \quad （小时）$$

则称该产品为" k级"产品 $(k = 1, 2, \cdots)$. k越大(级别越高), 失效率 10^{-k}越低,则产品的平均寿命越长,可靠性越高.

在航空、航天、军事、医疗等领域，通常要求元器件达9级以上，这意味着该元器件的平均寿命至少为

$$\frac{10^9}{365 \times 24} \approx 114160 \text{ (年)}$$

问题

由一万个9级元器件组成的电子设备的平均寿命为多少年?

$$\frac{10^9}{365 \times 24 \times 10^4} \approx 11.4 \text{ (年)}$$

例 设 r.v X服从标准 Cauchy分布, 其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\quad -\infty<x<\infty$$

计算 $E(X)$.

解

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dx^2}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\infty}=\infty$$

故 $E(X)$不存在.

定理（马尔可夫Markov不等式）

设r.v. X满足 $P\{X \ge 0\}=1$, 且 $E(X)$ 存在，则

$$P\{X \ge t\} \le \frac{E(X)}{t}.$$

证 只证离散型情形，连续情形完全类似.

$$E(X)=\sum_{x} xp(x) = \sum_{x<t} xp(x)+\sum_{x\ge t} xp(x)$$

因 X 只取非负值，故和式中每一项都是非负的.

因此，

$$E(X) \ge \sum_{x\ge t} xp(x) \ge \sum_{x\ge t} tp(x) = tP\{X \ge t\}.$$

即

$$P\{X \ge t\} \le \frac{E(X)}{t}.$$

对于一般的非负r.v，
无论其概率分布，该结论都成立

例. 随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty$$

求$E(X)$.

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2}e^{-|x|}dx=0$$

2.随机变量函数的数学期望

设已知随机变量X的分布，我们需要计算的不是X的期望，而是X的某个函数的期望，比如说$g(X)$的期望. 那么应该如何计算呢？

(三) r.v 的函数的数学期望

实际背景

飞机机翼受到的压力为

$$W = kV^2$$

其中 V 是风速, $k(>0)$ 是常数,问机翼受到的平均压力多大?

一般地 设已知

$$X \sim f(x) \quad \text{(概率函数)}$$

$$y = g(x) \quad \text{(普通函数)}$$

则要求

$$E(Y) = E[g(X)]$$

一般的思路

1. $X \sim f(x), Y = g(X) \Rightarrow Y \sim f_Y(y)$
2. $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$

是否可以不求$g(X)$的分布而只根据X的分布求得$E[g(X)]$呢？

下面的基本公式指出，答案是肯定的.

公式的重要性在于: 当我们求$E[g(X)]$时，不必知道$g(X)$的分布，而只需知道X的分布就可以了. 这给求随机变量函数的期望带来很大方便.

定理 设 $y = g(x)$ 为普通函数, 则

① 设 X 为离散型r.v, 其频率函数为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \cdots$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)| \cdot p_k < +\infty$, 则

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$$

② 设 X 为连续型r.v, 其概率密度为 $f(x)$,

若 $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty$, 则

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

注意二者的形式一致性

例 设风速 $V \sim U(0,a)$, 设飞机机翼受到的正压力 W 与风速的关系是 $W = kV^2 \ (k > 0$常数 $)$.求 $E(W)$.

解 V的密度函数为

$$f(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & 0 < v < a \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\therefore \quad E(W) = \int_{-\infty}^{\infty} kv^2 f(v)dv$$

$$= \frac{k}{a}\int_0^a v^2 dv$$

$$= \frac{1}{3}ka^2$$

即飞机机翼受到的平均正压力为 $\frac{1}{3}ka^2$.

推广的定理 设 $z=g(x,y)$ 为二元函数, 则

① 设 X,Y 的联合频率函数为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

若 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|g(x_i,y_j)|p_{ij}<+\infty$, 则

$$E(Z)=E[g(X,Y)]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

② 设 X,Y 的联合密度为 $f(x,y)$,若

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x,y)|f(x,y)dxdy<\infty,$$

则

$$E(Z)=E[g(X,Y)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

注：公式可推广到一般的高维随机变量

例 设(X,Y)的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}15xy^2, 0\le y\le x\le 1,\\ 0 \quad , \quad 其它,\end{cases}$

试求$E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$.

一般的思路

$$f(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$f_X(x),\ f_Y(y)$$

$$\Downarrow$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy$$

另一种方法

$$\boxed{g(x,y)=x}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dxdy$$

例 设(X,Y)的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}15xy^2, 0\le y\le x\le 1,\\ 0\ ,\quad 其它,\end{cases}$

试求$E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$.

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy=\iint_{0\le y\le x\le 1} x\cdot 15xy^2dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x 15x^2y^2dy=\frac{15}{3}\int_0^1 x^5dx=\frac{5}{6}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy=\frac{5}{8}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy$$

$$=\iint_{0\le y\le x\le 1} xy\cdot 15xy^2dxdy=\frac{15}{28}$$

例 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0. 3	0.3

求 $E(3X^2+5)$

$$E(3X^2+5)$$

$$=[3\cdot(-2)^2+5]\cdot 0.4+[3\cdot 0^2+5]\cdot 0.3+[3\cdot 2^2+5]\cdot 0.3$$

$$=13.4$$

例 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

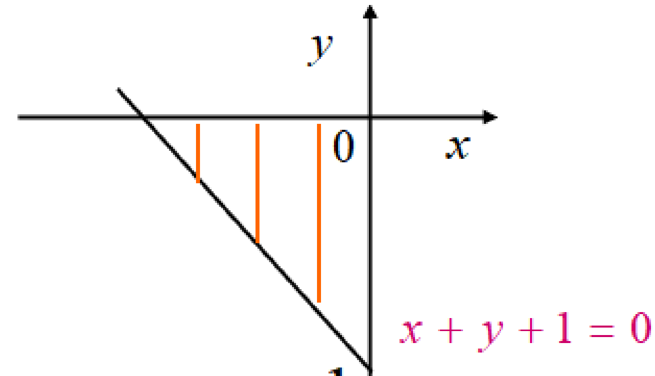
求$Y=e^{-2X}$的数学期望.

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}e^{-x}ex$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{3}$$

例 设(X,Y)在区域A上服从均匀分布，其中A为x轴，y轴和直线$x+y+1=0$所围成的区域.

求EX，$E(-3X+2Y)$，EXY.



解

$$f(x,y)=\begin{cases}2,(x,y)\in A\\0,\text{其它};\end{cases}$$

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2dy=-\frac{1}{3}$$

$$E(-3X+2Y)=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{0}2(-3x+2y)dy=\frac{1}{3}$$

$$EXY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2ydy=\frac{1}{12}$$

(四) 数学期望的基本性质

① 设 $a \le X \le b \quad (a.e)$, 则 $a \le E(X) \le b$

② 设 c 为常数, 则 $E(cX) = cE(X)$

③ 设 X、Y 为r.v, 则有 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

④ 设 X, Y 相互独立,则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$

几个推论

1. 若 $X = c \quad (a.e)$, 则 $E(X) = c$

2. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为常数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为r.v, 则

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 则

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2) \cdots E(X_n)$$

例 已知随机变量 X 服从参数为2的泊松分布，则随机变量$Z=3X-2$的数学期望 $EZ=$ ______.

本题要求熟悉泊松分布的有关特征，并会利用数学期望的性质求随机变量线性函数的期望.

由于 X 服从参数为 2 的泊松分布，

则 $EX=2,$

所以 $EZ=E(3X-2)=3EX-2=4$

例 设二维 r.v. (X,Y) 的 d.f. 为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x(1+3y^2), & 0<x<2,0<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$E(X), E(Y), E(X+Y), E(XY)$.

例 设二维 r.v. (X, Y) 的 d.f. 为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}x(1+3y^2), & 0<x<2, 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$E(X), E(Y), E(X+Y), E(XY)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$

$$=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{4}xdx\int_0^1(1+3y^2)dy=\frac{4}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^2 \frac{1}{4} xdx \int_0^1 y(1+3y^2)dy = \frac{5}{8}$$

由数学期望性质

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) = \frac{4}{3}+\frac{5}{8}=\frac{47}{24}$$

$$E(XY)\overset{\boxed{X,Y\text{独立}}}{=} E(X)\cdot E(Y)=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{6}$$

课后作业 **P116：6、15、20、21、31**

1. 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

求 (1) $Y=2X$; (2) $Y=e^{-2X}$ 的数学期望.

2. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 12y^2, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $E(X^2+Y^2)$.