线性代数期中考试答案

第一题

D D C B B

第二题

(1)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2-a & 3-b \end{bmatrix}, \quad a,b\in\mathbb{R}.$$

(2) $t=5$

(3) $K=10$

(4) $\dim N(A^TA)=1$

(5)

$$\hat{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

第三题

(1) 证：设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是该线性方程组的三个线性无关的解，则 $\xi_1-\xi_2, \xi_1-\xi_3$ 是其对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个线性无关的解，因而 $4-rank(A)\geq 2$, 即 $rank(A)\leq 2$, 又显见 A 的前两行线性无关，于是 $rank(A)\geq 2$, 因此 $rank(A)=2$.

(2) 解：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4-2a \end{bmatrix}$$

因 $rank(A)=2$, 故 $4-2a=0$, $4a+b-5=0$, 解得 $a=2$, $b=-3$.

方程组的通解为 $x=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, k_1, k_2 为任意常数.

第四题

(1)

$$A=LU=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第五题

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $N(A)$'s basis:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) $C(A^T)$'s basis:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) $C(A)$'s basis:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

第六题

(a) basis(要满足正交性 $v_1^T v_2 = 0$):

$$v1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) L's basis:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) projection:

$$\begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第七题

(a) 解:

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow x_n = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_p = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix},\ c \in \mathbb{R}.$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A^2 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow x_{n1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_{n2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_p = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}.$$

(b) 证明:ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关,等价于只有 k_1, k_2, k_3 全为 0 时 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0$ 成立。

法一:注意到 $A\xi_1 = 0, A\xi_2 = \xi_1, A\xi_3 = \xi_2, A^2\xi_1 = 0, A^2\xi_2 = 0, A^2\xi_3 = \xi_1$,则有:

$$A^2(k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3) = 0 \Rightarrow k_1A^2\xi_1 + k_2A^2\xi_2 + k_3A^2\xi_3 = k_3\xi_1 = 0.$$

由于 $\xi_1 = 0$,则有 $k_3 = 0$。带入 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0$ 有:

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0 \Rightarrow A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = 0 \Rightarrow k_1A\xi_1 + k_2A\xi_2 = k_2\xi_1 = 0 \Rightarrow k_2 = 0.$$

带入 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0$ 有 $k_1\xi_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$。

法二：$k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3=0$ 等价于 $B\xi=0$，其中

$$B=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1/2+c/2 & -1/2-a\\ 1 & 1/2-c/2 & a\\ -2 & c & b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1/2-c/2 & a\\ 0 & 1 & b+2a\\ 0 & 0 & -1/2\end{bmatrix},\quad \xi=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}.$$

则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3=0\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$。

第八题

(a) $uv^TA=uv^T-u(v^Tu)v^T \quad (v^Tu\neq 1)$
由于 $u,v\in\mathbb{R}^n$, v^Tu 为常数,
所以 $uv^TA=(1-v^Tu)uv^T$, 可得 $\frac{uv^T}{1-v^Tu}A=uv^T$. 又因 $I_nA=I_n-uv^T$,
$\frac{uv^T}{1-v^Tu}A+I_nA=I_n$,
$\left(I_n+\frac{uv^T}{1-v^Tu}\right)A=I_n$, 此时 $v^Tu\neq 1$，成立故 $A^{-1}=I_n+\frac{uv^T}{1-v^Tu}$

(b) 考虑到

$$\begin{bmatrix}I_n & -u\\ 0 & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & u\\ v^T & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & 0\\ -v^T & I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n-uv^T & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}I_n & 0\\ -v^T & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & u\\ v^T & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & -u\\ 0 & I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n & 0\\ 0 & I_m-v^Tu\end{bmatrix}$$

当且仅当 I_m-v^Tu 可逆时，I_n-uv^T 可逆。从而有

$$\begin{aligned}\left(\begin{bmatrix}I_n-uv^T & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}\right)^{-1}&=\begin{bmatrix}I_n & 0\\ v^T & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & -u\\ 0 & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & 0\\ 0 & (I_m-v^Tu)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & 0\\ -v^T & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & u\\ 0 & I_m\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}I_n+u(I_m-v^Tu)^{-1}v^T & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}\end{aligned}$$

从而 $(I_n-uv^T)^{-1}=I_n+u(I_m-v^Tu)^{-1}v^T$.