南方科技大学

2023-2024 年秋季学期 数学分析 III 期中试卷

本试卷共（8）道大题，满分（100）分

一、（本题满分 10 分）已知 ax^2+axy by^2 $-4xz$

$$F = ax(x+y)\cdot \mathrm{i} + by^2\cdot \mathrm{j} - 4xz\cdot \mathrm{k}$$

是 R^3 上的旋度场. 求常数 a,b 的值，并求其向量势. 无源.

二、求下列幂级数的收敛半径（每小题 8 分，共 24 分）.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n x^{3n}$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-1)^{n^2}x^n$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$.

$|\frac{1}{n}-1| = 1-\frac{1}{n}$ $\quad (1-\frac{1}{n})^{\frac{n^2}{n}}$

<0 $\quad (1-\frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e}\ (n\to\infty)$

三、判断下面数项级数是绝对收敛的，条件收敛的还是发散的，并证明你的结论（每小题 8 分，共 24 分）.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$；（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n^2}{n^2}\right|$；（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$.

$\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$

$\le \frac{1}{n^2}$

$< \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad \frac{\cos 2n+1}{n^2}$

四、（本题满分 10 分）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是正项级数.

$b_n\to 0$ $\quad a_n\to 0$ $\quad (n\to\infty)$.

证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 也收敛. ~~$a_n b_n <$~~ ~~$b_n\downarrow$趋于0~~

五、（本题满分 8 分）设 $a>0$ 是一个常数，定义 $x_n = n - \frac{1}{n}$（$n\ge 2$），讨论级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x_2x_3\ldots x_n}{(a+x_2)(a+x_3)\ldots(a+x_n)}$$

的敛散性.

$\frac{(a+x_2)(a+x_3)\cdots(a+x_n)}{2^{n-1}a^{n-1}}$

$a^{n-1}(x_2\cdots x_n)$

$= a x_2\cdot a x_3\cdots a x_n$

$\le \left(\frac{a+x_2}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{a+x_n}{2}\right)^2$

$n-1$ 项

六、（本题满分 8 分）证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

$\boxed{\frac{(-1)^n}{n}x^n}$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n}}_{单调\downarrow} = -\ln(1+x)$.

七、（本题满分 8 分）对 $x\in(0,+\infty)$，定义 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{nx}$. 连续

（1）证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续；

（2）证明：$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$ 存在且有限.

$\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{x}{n}$

八、（本题满分 8 分）设 $f_n(x)\in C([a,b])$，$n=1,2,\ldots$. 已知 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 证明：存在正整数 M，使得 $|f_n(x)|\le M$ 对任意正整数 n 和任意 $x\in[a,b]$ 成立.

$\forall\varepsilon,\ \exists N(\varepsilon)$ s.t. $n>N(\varepsilon)$，$\forall x\in[a,b]$：$|f_n(x)|<M$.

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.