

南方科技大学
2020-2021 年秋季学期 数学分析 I 期中试卷

一 判断题 (将每题的结果写在答卷上, 认为正确写 T, 认为错误写 F, 不需写出理由, 每小题 4 分, 共 28 分)

(1) 设函数 f 在 $x=0$ 处连续. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$.

(2) 若 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h^2)-f(x)}{h^2}$ 存在, 则 f 在 x 处连续.

(3) 存在数列 $\{a_n\}$, 使得每个实数都是 $\{a_n\}$ 的极限点.

(4) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则 f' 在 (a,b) 上有界.

(5) 若函数 f 在区间 I 上一致连续, 且 f 存在反函数 f^{-1} , 则 f^{-1} 在其定义域上也一致连续.

(6) 若函数 f 在区间 I 上连续且是单射, 则 f 在 I 上严格单调.

(7) 若函数 f, g 均在区间 I 上一致连续, 且对任意 $x \in I$ 均有 $|g(x)| > 1$, 则 $\frac{f}{g}$ 也在区间 I 上一致连续.

二 计算下列函数的导数 (需给出详细的求解过程, 每小题 4 分, 共 12 分)

(1) $y = \log_x 2$ ($x > 0, x \neq 1$); (2) $y = x^x$ ($x > 0$); (3) $y = |\sin x|^3$.

三 (请给出详细的证明过程, 本题满分 10 分)

设 $0 < x < 1$, 证明: $2x < \ln \frac{1+x}{1-x} < \frac{2x}{1-x^2}$.

四 (请给出详细的证明过程, 本题满分 10 分)

设函数 f 在 \mathbb{R} 上可导, 且对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $f'(x) = f(x)$. 证明: 存在实常数 C , 使得 $f(x) = Ce^x$.

五 (请给出详细的证明过程, 本题满分 10 分)

已知函数 f 在 \mathbb{R} 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. 证明: f 在 \mathbb{R} 上有最小值.

六 (请给出详细的证明过程, 本题满分 10 分)

设函数 f 在 $[x_0, x_0 + \delta]$ 上连续, 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ 存在. 证明: f 在 x_0 处有右导数, 且 $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$.

七 (请给出详细的证明过程, 本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且对于任意 $x \in (0, +\infty)$, $|f'(x)| < \frac{1}{x^2}$. 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

八 （请给出详细的证明过程，本题满分 5 分）

设 f 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上有二阶导数，且 $f(a) = f(b) = 0$. 设 $x_0 \in (a, b)$ ，证

明：存在 $\xi \in (a, b)$ 满足 $f''(\xi) = \frac{2f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}$.

九 （请给出详细的证明过程，本题满分 5 分）

仅使用有限覆盖定理，证明闭区间上的连续函数必然一致连续.