南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高 等 代 数 II　　　　**开课单位:** 数 学 系
考试时长: 110 分钟　　　　**命题教师:** 邬 龙 挺

题 号	1	2	3	4	5	6
分 值	16 分	24 分	10 分	15 分	15 分	20 分

本试卷共 (6) 大题, 满分 (100) 分.
(考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)
考生答卷可使用中文、英文或中英文结合.
本试卷数学记号与课程讲义相同，如有疑问可以询问监考老师.

设 K 为 $\mathbb{C}$ 的子域. 以下若无特别说明，我们总假设线性变换或矩阵都定义于域 K 上.

1. (16 分) 判断题. (对于下面每个论断，说明其正确与否，对的打勾 $\surd$，错的打叉 $\times$. 不需要解释理由).

✓ (a) 幂等变换（即满足 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$ 的线性变换）总可对角化.

✓ (b) 两个 3 阶幂零矩阵相似当且仅当它们的最小多项式相同.

✓ (c) 幂零变换是循环的当且仅当其 Jordan 标准形只包含一个 Jordan 块.

✗ (d) 两个 n 阶方阵合同当且仅当它们的秩相同.

2. (24 分) 简答题. (直接写出答案，不需解释理由)

(a) 设 N 为 5 阶幂零矩阵，其中 $\mathrm{rank}(N)=3$, $\mathrm{rank}(N^2)=1$，写出 N 的一个 Jordan 标准形.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(b) 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{M}_n(K)$ 为 n 阶方阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}0, & 若\ i=j,\\ 1, & 若\ i\neq j.\end{cases}$$

求 A 的最小多项式.

$$\begin{cases} x-1 & n=1 \\ (x-1)(x-n+1) & n>1 \end{cases}$$

(c) 求二次型

$$q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$

的秩（也即其 Gram 矩阵的秩）.

$n-1$

(d) 数列 $\{x_n\}_{n\geq1}$ 满足 $x_{n+3}=3x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n$，其中 $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=4$，求数列 $\{x_n\}_{n\geq1}$ 的通项公式.

$(n-1)^2$

对于下面的每一个问题，考生需要尽可能详尽地写出答题细节，以使每道题的解答清晰完整.

3. (10 分) 求下面矩阵 A 的 Jordan 标准形 (不用计算转移矩阵):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

4. (15 分) 证明: 任一 n 阶复数域上的可逆矩阵 A 都存在平方根, 也即存在 n 阶矩阵 B 使得 $A = B^2$.

5. (15 分) 设 V 是 n 维 K-向量空间, f 是 V 上的一个非退化双线性函数。证明:

   (1) 任给 V 上的双线性函数 φ, 存在 V 上唯一的一个线性变换 $\mathscr{A}_\varphi$, 使得

   $$\varphi(u, v) = f(\mathscr{A}_\varphi(u), v), \quad \forall u, v \in V;$$

   (2) 令 $\sigma : \varphi \mapsto \mathscr{A}_\varphi$, 则 σ 是线性空间 $\mathrm{Bil}(V)$ 到 $\mathrm{Hom}_K(V, V)$ 的同构映射.

6. (20 分) 设 $\mathscr{N}$ 为 n 维向量空间 V 上的幂零变换, 且 $\mathscr{N}$ 在基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 下的矩阵为一 Jordan 块, 证明:

   (1) 包含 v_n 的 $\mathscr{N}$ 不变子空间就是 V 本身;

   (2) 任一非零 $\mathscr{N}$ 不变子空间都包含 v_1;

   (3) V 不能分解成两个非零 $\mathscr{N}$ 不变子空间的直和;

   (4) 子空间

   $$V_i = \mathrm{span}(v_1, \cdots, v_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

   且仅这些子空间为 $\mathscr{N}$ 不变子空间.