# 数学分析III期中试卷 · 回忆版

by: Xiaoqing

**一、$R^3$内，$\vec{F}=(yz,xz,xy)$**

1. 证明：$\vec{F}$是有势场，并求出它的势函数；
2. 证明：$\vec{F}$是旋度场，并求出它的向量势.

**二、判断下列级数的敛散性**

$(1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2}{n\sqrt{n}} \quad (2)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$

**三、求出下列幂级数的收敛半径**

$(1)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{n}{9}x^n \quad (2)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1^n+2^n+3^n+4^n+5^n} \quad (3)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}x^n$

**四、$f,g$ 在 $R^3$上，$f,g,fg$ 都是调和函数. 对于任意的$\vec{p}\in R^3$, $\nabla f(\vec{p})$，$\nabla g(\vec{p})$不为零向量. 证明：对于任意的$\vec{p}\in R^3$，$gradf(\vec{p})$和$gradg(\vec{p})$垂直.**

**五、数列$\{a_n\}$是严格递增的正项数列，$b_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$. 证明：$\{a_n\}$有界当且仅当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.**

**六、$x\in(0,+\infty)$，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{nx}$.**

1. 证明：$f(x)$在$(0,+\infty)$连续；
2. 证明：$\lim\limits_{x\to 0^+}$ 存在.

**七、数列$\{a_n\},\{b_n\}$：**

$s_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \qquad t_n=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t_n$ 的 ***Cauchy*** 乘积是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}s_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的 ***Cauchy*** 乘积是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}s_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t_n$ 的 ***Cauchy*** 乘积是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 都收敛. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n=0$.

**八、将$\frac{1}{2-e^x}$展开成 *Maclaurin* 级数的形式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，求$a_n$的表达式 (表达式为无穷级数形式)**