南方科技大学 SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等数学(下) A　　开课单位: 数 学 系

考试时长: 150 分钟　　命题教师: 王融 等

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
分 值	9 分	9 分	12 分	7 分	7 分	8 分	8 分	8 分	8 分	8 分
题 号	11	12								
分 值	8 分	8 分								

本试卷共 12 大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (9 pts) Determine whether the following statements are **true** or **false**? No justification is necessary.

   (1) Equation $r = 2\sin(\theta)$ $(0 \le \theta \le \pi)$ in polar form is a circle of radius 1 centered at (0,1).

   (2) If $f(x,y) = \sin x + \sin y$, then for any direction $\mathbf{u}$, the directional derivative of $f(x,y)$ satisfies $-\sqrt{2} \le D_{\mathbf{u}} f(x,y) \le \sqrt{2}$.

   (3) If $\mathbf{u} \neq 0$, and if $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ and $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, then $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

2. (9 pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

   (1) Let $\mathbf{R} : (x-1)^2 + y^2 \le 1$, then the integral $\iint_{\mathbf{R}} f(x,y)\, dA$ is **not equal to**

   (A) $\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\, dydx$.　　(B) $\int_{-1}^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dxdy$.

   (C) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 f(1 + r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r dr d\theta$.　　(D) $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r dr d\theta$.

   (2) Which formula satisfies the conditions that function $f(x,y)$ has both partial derivatives at $(0,0)$ when $f(0,0) = 0$?

   (A) $\frac{xy}{x^2+y^2}$.　　(B) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

   (C) $\sqrt{x^2+y^2}\, \sin \frac{1}{x^2+y^2}$.　　(D) $\frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$.

(3) If $f(x,y) = 3x + 4y - ax^2 - 2ay^2 - 2bxy$ has only local maxima, then

(A) $2a^2 > b^2$, and $a < 0$. (B) $2a^2 > b^2$, and $a > 0$.

(C) $2a^2 < b^2$, and $a < 0$. (D) $2a^2 < b^2$, and $a > 0$.

3. (12 pts) Please fill in the blank for the questions below.

(1) If a plane is tangent to the surface $x^2 - 2y^2 + z^2 = 2$, and parallel to $x - y + 2z = 0$, then the equation of the plane is ________________.

(2) Let $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$, then $df(1,1,1) =$ ________________.

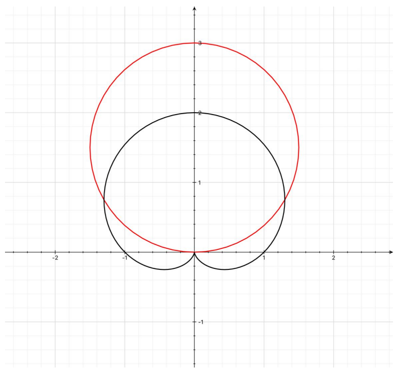
(3) The equation of the plane through the line $x = -1 + 2t, y = 3 + t, z = -t$ and parallel to the line $x = -2t$, $y = t$, $z = 1 - t$ is ________________.

(4) The circulation of the field $\mathbf{F} = \nabla\left(xy^2z^3\right)$ around the ellipse

$$C: \ \mathbf{r}(t) = (\cos t)\,\mathbf{i} + (4\sin t)\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

is ________________.

4. (7 pts) Find the area of region that lies inside the circle $r = 3\sin\theta$ and outside the cardioid $r = 1 + \sin\theta$.



5. (7 pts) Find the points on the curve

$$\mathbf{r}(t) = (12\sin t)\,\mathbf{i} - (12\cos t)\,\mathbf{j} + 5t\,\mathbf{k}$$

at a distance 26π units **along the curve** from the point $(0, -12, 0)$.

6. (8 pts) Find the interval of convergence of the power series $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\ln(n+2)} x^n$.

7. (8 pts) Find the real numbers a, b $(b \neq 0)$, which satisfy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \sqrt{1 - x^2}}{x^a} = b.$$

8. (8 pts) Find the absolute maximum and minimum values of $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$ on the close disk $x^2 + y^2 \le 4$.

9. (8 pts) Evaluate the integral $\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$, where D is the solid bounded above by $z=1$ and below by $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

10. (8 pts) Calculate the line integral $\int_L \sin 2x\,dx + 2(x^2-1)y\,dy$, here L is the curve $y=\sin x$, from $(0,0)$ to $(\pi,0)$.

11. (8 pts) Use the Stokes' Theorem to calculate the circulation of the field $\mathbf{F}$ around the curve C in the indicated direction, here $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$, and C is the boundary of the triangle cut from the plane $x+y+z=1$ by the first octant, counterclockwise when viewed from above.

12. (8 pts) Use the Divergence Theorem to find the outward flux of $\mathbf{F}$ across the boundary of the region D, here $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$; and D is the region cut from the solid cylinder $x^2+y^2 \le 4$ by the planes $z=0$, and $z=1$.

一、　（9分）判断题:

(1) 极坐标方程 $r = 2\sin(\theta)$ $(0 \le \theta \le \pi)$ 在 xy-平面所对应的图形是以 $(0, 1)$ 为圆心、半径为 1 的圆.

(2) 设$f(x, y) = \sin x + \sin y$, 则对任意方向 $\mathbf{u}$, 函数 $f(x, y)$ 的方向导数满足$-\sqrt{2} \le D_{\mathbf{u}}f(x, y) \le \sqrt{2}$.

(3) 若 $\mathbf{u} \neq 0$, 且满足 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ 以及 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, 则必有 $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

二、　（9分）单项选择题:

(1) 设 $\mathbf{R} : (x-1)^2 + y^2 \le 1$, 则积分 $\iint_{\mathbf{R}} f(x, y)\, dA$ 不等于

(A) $\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dydx$.　　(B) $\int_{-1}^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dxdy$.

(C) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 f(1 + r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot rdrd\theta$.　　(D) $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot rdrd\theta$.

(2) 设 $f(0, 0) = 0$, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时，$f(x, y)$ 为如下四式之一，则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处两个偏导数都存在的是

(A) $\frac{xy}{x^2+y^2}$.　　(B) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

(C) $\sqrt{x^2 + y^2}\ \sin\frac{1}{x^2+y^2}$.　　(D) $\frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$.

(3) 若 $f(x, y) = 3x + 4y - ax^2 - 2ay^2 - 2bxy$ 只有局部极大值, 则

(A) $2a^2 > b^2$, 且 $a < 0$.　　(B) $2a^2 > b^2$, 且 $a > 0$.

(C) $2a^2 < b^2$, 且 $a < 0$.　　(D) $2a^2 < b^2$, 且 $a > 0$.

三、　（12分）填空题:

(1) 与曲面 $x^2 - 2y^2 + z^2 = 2$ 相切, 且与平面 $x - y + 2z = 0$ 平行的平面方程为________________.

(2) 设 $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$, 则 $df(1, 1, 1) =$ ________________.

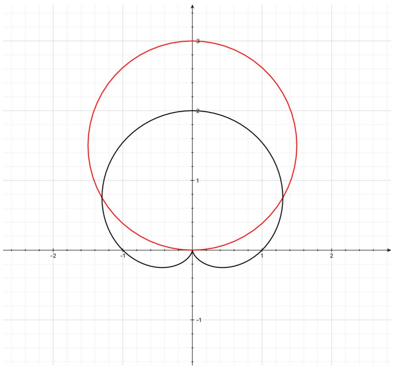
(3) 过直线 $x = -1 + 2t, y = 3 + t, z = -t$ 且平行于直线 $x = -2t, y = t, z = 1 - t$ 的平面方程为________________.

(4) 向量场 $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$ 绕椭圆

$$C:\ \mathbf{r}(t) = (\cos t)\,\mathbf{i} + (4\sin t)\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

的环量为 ________________.

四、　（7分）设 D 是（如下图所示）在圆 $r = 3\sin\theta$ 的内部，而不在心形线 $r = 1 + \sin\theta$ 的内部，的区域. 求区域 D 的面积.



五、（7分）求在曲线

$$\mathbf{r}(t) = (12\sin t)\,\mathbf{i} - (12\cos t)\,\mathbf{j} + 5t\,\mathbf{k}$$

上且距离点 $(0,-12,0)$ 的弧长为 26π 的点的坐标.

六、（8分）求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{\ln(n+2)}x^n$ 的收敛域.

七、（8分）若

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\sqrt{1-x^2}}{x^a} = b,$$

这里 a 、b 为实常数，且 $b\neq 0$, 求 a 和 b 的值.

八、（8分）求函数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$ 在闭圆盘 $x^2+y^2\leq 4$ 上的最大值和最小值（即全局极大值和全局极小值）.

九、（8分）计算积分 $\displaystyle\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$, 这里 D 是夹在平面 $z=1$ 和曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 之间的区域.

十、（8分）计算曲线积分 $\displaystyle\int_L \sin 2x\,dx + 2(x^2-1)y\,dy$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

十一、（8分）用Stokes' 定理计算向量场 $\mathbf{F}$ 绕有向闭曲线 C 的环量，这里 $\mathbf{F}=y\,\mathbf{i}+xz\,\mathbf{j}+x^2\,\mathbf{k}$ ，而闭曲线 C 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的区域边界，当从上方往下看时，C 是逆时针方向.

十二、（8分）用散度定理计算向量场 $\mathbf{F}$ 通过区域 D 的边界从内向外的通量, 这里 $\mathbf{F}=x^2\,\mathbf{i}+y^2\,\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k}$ ；区域 D 是圆柱体 $x^2+y^2\leq 4$ 夹在平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分.