南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等数学(下) A　　开课单位: 数 学 系

考试时长: 120 分钟　　命题教师:

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
分 值	15 分	15 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分

本试卷共 9 大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (15 pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

(1) Let a be a constant, the series $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\sin(n+a)}{n^{1.01}}-\frac{1}{n\ln n}\right)$

(A) converges absolutely.

(B) converges conditionally.

(C) diverges.

(D) converges or not depending on the value of a.

(2) The function $f(x,y)=2x^2+5xy+3y^2-7x+10y$ has

(A) an absolute minimum point.　　(B) an absolute maximum point.

(C) a saddle point.　　(D) none of the above.

(3) Let $f(x,y)$ be a function which is defined on $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$. Assume $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=-2$, and $f_y(0,0)=5$, then which of the following statements must be **correct** ?

(A) $f(x,y)$ is continuous at $(0,0)$.

(B) The directional derivative of f at $(0,0)$ in the direction of $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ is $\frac{7}{2}\sqrt{2}$.

(C) $\lim_{y\to 0} f(0,y)=0$.

(D) $f(x,y)$ is differentiable at $(0,0)$.

(4) The direction of the gradient for the function $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ at the point $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ is the same with the direction of

(A) the outward normal vector on the plane curve $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ at the point $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(B) the inward normal vector on the plane curve $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ at the point $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(C) the outward normal vector on the surface $x^2+y^2+z^2=1$ at the point $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(D) the inward normal vector on the surface $x^2+y^2+z^2=1$ at the point $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(5) The region is given by $R:\ x^2+2y^2\le 4$. Then $\displaystyle\iint\limits_R (4-x^2-2y^2)\,dxdy\ =$

(A) $4\sqrt{2}\pi$. (B) 8π.

(C) $8\sqrt{2}\pi$. (D) none of the above.

2. (15 pts) Please fill in the blank for the questions below.

(1) If a plane Π is parallel to $3y+z=2021$ and tangent to the ellipsoid $3x^2+y^2+z^2=10$, then the equation of the plane Π is ________________.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{(\cos x-1)(e^{2x}-\cos x)}=$ ________________.

(3) The sum of the series $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4\cdot 2!}+\dfrac{1}{8\cdot 3!}+\dfrac{1}{16\cdot 4!}+\cdots+\dfrac{1}{2^n\cdot n!}+\cdots$ is ________________.

(4) The area of the region enclosed by $r^2=\cos 2\theta$ is ________________.

(5) Let C be the curve $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$, then $\displaystyle\int_C x^2\,ds=$ ________________.

3. (10 pts) Find the equation of the plane through point $(1,0,1)$, and perpendicular to the plane $x-2y+3z+2=0$ and the plane $x+2y-3z-2=0$.

4. (10 pts) Find the Maclaurin series for $f(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{1}{1-t}\,dt$, $-1<x<1$.

5. (10 pts) If $f(x,y)=\displaystyle\int_0^{xy}e^{-t^2}\,dt$, then $\frac{x}{y}f_{xx}-2f_{xy}+\frac{y}{x}f_{yy}=\,?$

6. (10 pts) Find

$$J=\int_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{|x|}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2}\,dydx.$$

7. (10 pts) Find the absolute maximum and minimum values of the function $u=xy+2yz$ on the surface $x^2+y^2+z^2=10$.

8. (10 pts) Evaluate the flux of the velocity vector field $\mathbf{F}=xz\,\mathbf{i}+(y^2+e^{xz})\,\mathbf{j}+\sin(x+y)\,\mathbf{k}$ outward the region bounded above by $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, below by $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

9. (10 pts) Calculate the line integral $\displaystyle\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, where $\mathbf{F}=(y^2-y)\,\mathbf{i}+(z^2-z)\,\mathbf{j}+(x^2-x)\,\mathbf{k}$, and C is the curve of intersection of the sphere $x^2+y^2+z^2=1$ and $x+y+z=0$, counterclockwise when viewed from above.

$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　$\ln(\ln x)\Big|_2^{\infty}$ 发散

一、　（15分）单项选择题：

C (1) 设 a 为常数，则级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\sin(n+a)}{n^{1.01}}-\frac{1}{n\ln n}\right)$

(A) 绝对收敛.

(B) 条件收敛.

(C) 发散.

(D) 收敛性与a的取值有关.

$\frac{1}{n^{1.01}} > \left|\frac{\sin(n+a)}{n^{1.01}}\right|$ 绝对收敛

$f_{xx}=4$　$f_{yy}=6$　$f_{xy}=5$

(2) 函数$f(x,y)=2x^2+5xy+3y^2-7x+10y$ 有　C

(A) 一个全局极小值点.　　(B) 一个全局极大值点.

(C) 一个鞍点.　　(D) 以上都不对.

~~B~~ C (3) 设 $f(x,y)$ 是一个定义在 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$ 上的函数. 若 $f(0,0)=0$, $f_x(0,0)=-2$, 且 $f_y(0,0)=5$, 则下列哪一个叙述是正确的?

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(B) f 在点 $(0,0)$ 处沿方向 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 的方向导数是 $\frac{7}{2}\sqrt{2}$. 一定是0　　$D_u f_0=\nabla f\cdot\vec{u}$ 方向导数的定义

(C) $\lim_{y\to 0}f(0,y)=0$.　　$\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=5$　$\to 0$　　$\frac{f(0+tu_1,tu_2)-f_0}{t}$

(D) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

(4) 函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 的梯度方向与下面哪一个向量的方向相同?

(A) 平面曲线 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 在点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 处的外法向方向.

(B) 平面曲线 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 在点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 处的内法向方向.

(C) 曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 处的外法向方向.

(D) 曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 处的内法向方向.

(5) 区域 $R: x^2+2y^2\le 4$，则 $\iint\limits_R(4-x^2-2y^2)\,dxdy=$　A.

(A) $4\sqrt{2}\pi$.　　(B) 8π.

(C) $8\sqrt{2}\pi$.　　(D) 以上都不对.

二、　（15分）填空题：

$(6x,2y,2z)=\lambda(0,3,1)$ 代入

(1) 与平面 $3y+z=2021$ 平行, 且与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=10$ 相切的平面的方程为 $3(y-3)+(z-1)=0$.　$y=3$... $3y+z\pm10=0$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{(\cos x-1)(e^{2x}-\cos x)}=$ ____________.

(3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot 2!}+\frac{1}{8\cdot 3!}+\frac{1}{16\cdot 4!}+\cdots+\frac{1}{2^n\cdot n!}+\cdots$ 的和为 ____________.

(4) 由曲线 $r^2=\cos 2\theta$ 所围成的平面区域的面积为 ____________.

(5) 设 C 为 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$, 那么 $\int_C x^2\,ds=$ ____________.　$\int_C x^2 ds=\int_C y^2 ds$

三、　（10分）求通过点 $(1,0,1)$ 且同时垂直于平面 $x-2y+3z+2=0$ 和平面 $x+2y-3z-2=0$ 的平面的方程.

$I=\frac{1}{2}\int_C(x^2+y^2)\,ds=\frac{a^2}{2}\int_C ds$

$=\pi a^2$.

$\oint_C$

四、（10分）求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{1-t}\,dt,\ -1<x<1,$ 的 Maclaurin 级数.

五、（10分）设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}\,dt$, 则 $\frac{x}{y}f_{xx}-2f_{xy}+\frac{y}{x}f_{yy}=?$

六、（10分）计算

$$J=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{|x|}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2}\,dydx.$$

交换积分次序

七、（10分）求函数 $u=xy+2yz$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=10$ 的最大值和最小值.

八、（10分）设速度场为 $\mathbf{F}=xz\,\mathbf{i}+(y^2+e^{xz})\,\mathbf{j}+\sin(x+y)\,\mathbf{k}$，且 D 是夹在曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$（顶部）和曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$（底部）之间的区域. 求 $\mathbf{F}$ 向外穿过 D 的边界的通量.

九、（10分）计算曲线积分 $\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, 这里$\mathbf{F}=(y^2-y)\,\mathbf{i}+(z^2-z)\,\mathbf{j}+(x^2-x)\,\mathbf{k}$, 曲线$C$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从上往下看， C 是逆时针方向.

八. $\iint_{\partial D}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint_D \mathrm{div}\vec{F}\,dv=\iiint_D(z+2y+0)\,dv$

$=\iiint_D z\,dv$

$=\iint_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}}dx\,dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\,dz$

九. $\oint_C\vec{F}\,d\vec{r}=\iint \nabla\times\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$