条件频率函数的性质

① $P\{X = x_i \mid Y = y_j\} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots)$

② $\sum_{i=1}^{\infty} P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = 1$

这两条性质说明：
条件频率函数也是一种频率函数

条件密度函数的性质

① $f_{X|Y}(x \mid y) \geq 0$

② $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(u \mid y)du = 1$

从而可以定义条件期望(conditional expectation)和条件方差(conditional variance)

这两条性质说明：
条件密度函数也是一种密度函数

给定 $X=x$ 的情况下，Y 的**条件期望**定义为

$$E(Y|X=x)=\sum_y y p_{Y|X}(y|x) \qquad \text{（离散情形）}$$

$$E(Y|X=x)=\int y f_{Y|X}(y|x)dy \qquad \text{（连续情形）}$$

更一般地, 函数 $h(Y)$ 的条件期望

$$E[h(Y)|X=x]=\sum_y h(y) p_{Y|X}(y|x) \qquad \text{（离散情形）}$$

$$E[h(Y)|X=x]=\int h(y) f_{Y|X}(y|x)dy \qquad \text{（连续情形）}$$

例1

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\bullet}$
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.3	0.1	0.1	0.5
$p_{\bullet j}$	0.4	0.3	0.3	1.0

X的条件分布律

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/4	2/3	2/3
1	3/4	1/3	1/3

X关于Y条件期望

Y	0	1	2
$E(X\|Y)$	3/4	1/3	1/3
p	0.4	0.3	0.3

$E(X\|Y)$	3/4	1/3
p	0.4	0.6

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\bullet}$
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.3	0.1	0.1	0.5
$p_{\bullet j}$	0.4	0.3	0.3	1.0

Y的条件分布律

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/5	2/5	2/5
1	3/5	1/5	1/5

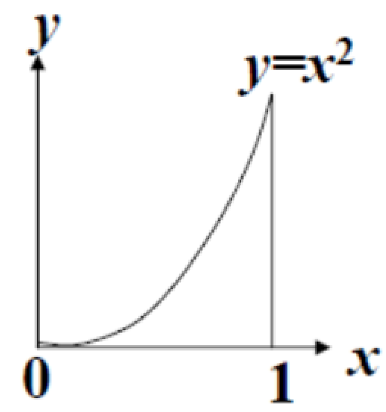
Y关于X条件期望

X	0	1
$E(Y\|X)$	6/5	3/5
p	0.5	0.5

$E(Y\|X)$	6/5	3/5
p	0.5	0.5

例3 设(X,Y)服从$D=\{(x,y)|0<x<1,0<y<x^2\}$上的均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & 0<x<1,0<y<x^2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$



$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当$0<x<1$时

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & 0<y<x^2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$m_{Y|X}(x)=E(Y|X=x)=x^2/2$$

得 $$E(Y|X)=\frac{1}{2}X^2$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}3(1-\sqrt{y}), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当$0<y<1$时

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\sqrt{y}}, & \sqrt{y}<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

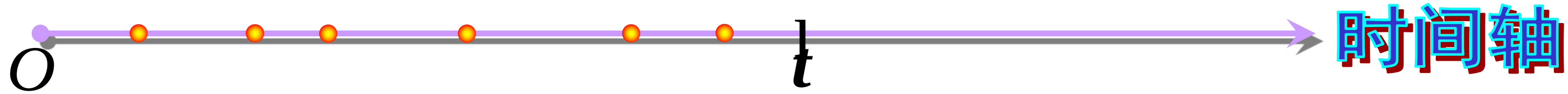
$$m_{X|Y}(y)=E(X|Y=y)=\frac{1}{2}(1+\sqrt{y})$$

得 $E(X|Y)=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{Y})$

例（泊松流）

考虑 $[0,1]$ 区间上均值为 λ 的泊松流, 令 N 是$[0,1]$上点的个数. 对于 $p<1$, 令 X 是 $[0, p]$ 上点的个数. 计算给定 $N=n$ 的情况下, X 的条件分布和条件期望.

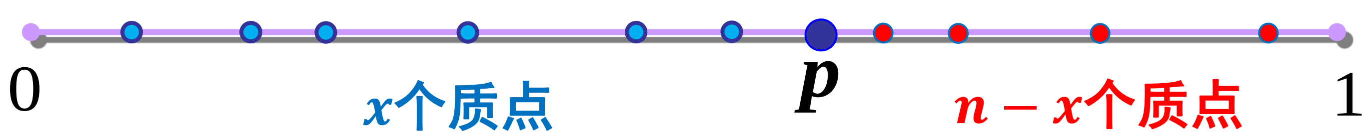
回顾 在泊松流中,记时间间隔 $(0,t]$ 中出现的质点数为 X



则 $X\sim P(\lambda t)$, 即有 $P\{X=k\}=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,1,2,\cdots$

其中参数 $\lambda>0$, 称为泊松强度.

析 本例中 $P\{X=x, N=n\}$ 是指:



例（泊松流）

考虑 [0,1] 区间上均值为 λ 的泊松流, 令 N 是[0,1]上点的个数. 对于 $p<1$, 令 X 是 $[0, p]$ 上点的个数. 计算给定 $N=n$ 的情况下, X 的条件分布和条件期望.

解 联合分布

$$P\{X=x, N=n\}=\frac{(p\lambda)^{x}e^{-p\lambda}}{x!}\frac{[(1-p)\lambda]^{n-x}e^{-(1-p)\lambda}}{(n-x)!},$$

而 $N\sim P(\lambda)$, 即 $P\{N=n\}=\dfrac{\lambda^{n}e^{-\lambda}}{n!}$,

因此

$$P\{X=x|N=n\}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^{x}(1-p)^{n-x}\sim \boldsymbol{b(n,p)},$$

从而 X 的条件期望为 np.

例（二元正态分布） 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\times[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

则经过计算可得

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)\sim N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)).$$

即：二维正态分布，给定 X 时 Y 的条件密度是一维正态分布．因此

给定 $X=x$ 时 Y 的条件期望为 $\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$,

条件方差为 $\sigma_2^2(1-\rho^2)$.

注

- 条件期望是 x 的线性函数.
- 条件方差随着 $|\rho|$ 的增加而减小.

理解条件期望 $E(Y \mid X)$**：**

假设对于X **范围内的任意** x, **有** $E(Y \mid X = x)$**都存在.**

是X**的函数,**
从而是r.v., 记为 $E(Y \mid X)$

可以对条件期望 $E(Y \mid X)$**再求期望和方差.**

$E[E(Y \mid X)]$ $D[E(Y \mid X)]$

条件期望的性质

性质:

(1) $E(c|X)=c$

(2) $E(aY_1+bY_2|X)=aE(Y_1|X)+bE(Y_2|X)$

(3) 若X与Y相互独立, 则$E(Y|X)=E(Y)$

(1) $E(c|X)=c$

证 $P\{Y=c\}=1$

$P\{Y=c|X=x\}=1$

$E(Y|X=x)=c$

(2) $E(aY_1+bY_2|X)=aE(Y_1|X)+bE(Y_2|X)$

证 设X,Y_1,Y_2的联合密度为$f(x,y_1,y_2)$

$$E(aY_1+bY_2|X=x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(ay_1+by_2)f_{(Y_1,Y_2)|X}(y_1,y_2\,|\,x)dy_1dy_2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(ay_1+by_2)\frac{f(x,y_1,y_2)}{f_X(x)}dy_1dy_2$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y_1 \frac{f(x,y_1,y_2)}{f_X(x)}dy_1dy_2 + b\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y_2 \frac{f(x,y_1,y_2)}{f_X(x)}dy_1dy_2$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty} y_1 \frac{f_{(X,Y_1)}(x,y_1)}{f_X(x)}dy_1 + b\int_{-\infty}^{+\infty} y_2 \frac{f_{(X,Y_2)}(x,y_2)}{f_X(x)}dy_2$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty} y_1 f_{Y_1|X}(y_1 \mid x)dy_1 + b\int_{-\infty}^{+\infty} y_2 f_{Y_2|X}(y_2 \mid x)dy_2$$

$$= aE(Y_1 \mid X = x) + bE(Y_2 \mid X = x)$$

(3) 若X与Y相互独立, 则$E(Y|X)=E(Y)$

证 $f_{Y|X}(y|x)=f(x,y)/f_X(x)=f_Y(y)$

$$E(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_{Y|X}(y \mid x)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = E(Y)$$

性质4 $$E(Y)=E[E(Y\mid X)].$$

$$D(Y)=D[E(Y\mid X)]+E[D(Y\mid X)].$$

性质 $\boxed{E(Y)=E[E(Y\mid X)].}$ 全期望公式, law of total expectation

证 只证明离散情形(连续情形的证明与之类似).

$$E[E(Y\mid X)]=\sum_x E(Y\mid X=x)p_X(x)$$

$$=\sum_x[\sum_y y p_{Y|X}(y\mid x)]p_X(x)$$

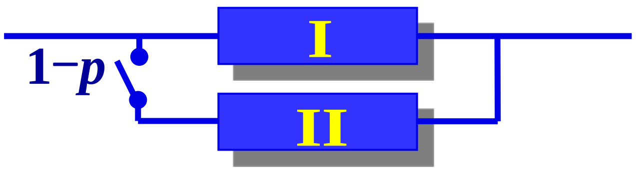
$$=\sum_y y\underline{\sum_x p_{Y|X}(y\mid x)p_X(x)}$$

$$=\sum_y y p_Y(y)$$

$$=E(Y).$$

注 Y 的期望可以通过先以 X 为条件, 计算 $E(Y|X)$, 然后再对其关于 X 取期望得到 (对条件期望加权).

例 假设在系统中, 元件和备件的平均寿命都是 μ.



如果元件失效, 系统自动用其备件替代, 但替换出错的概率为 p.

求整个系统的平均寿命.

解 令 T 是系统的寿命.

$$X=\begin{cases}1, & \text{备件替代成功}\\ 0, & \text{备件替代不成功}\end{cases}$$

则 $E(T \mid X=1)=2\mu,\qquad E(T \mid X=0)=\mu,$

因此

$$E(T)=E(T \mid X=1)P\{X=1\}+E(T \mid X=0)P\{X=0\}$$

$$=2\mu(1-p)+\mu p=\mu(2-p).$$

P120：67、77、补充题

1. 如果X和Y是两独立的随机变量，证明：$E(X|Y=y)=E(y)$.

2. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(x+y)}, & 0\leqslant y\leqslant x, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1) 计算$Cov(X,Y)$, ρ_{XY};

(2) 计算$E(X|Y=y)$ 和$E(Y|X=x)$;

(3) 推导随机变量$E(X|Y)$和$E(Y|X)$的概率密度.