

数学分析 I 期末考试_2020秋_回忆版试题

2020年12月29日

16:35

(16') 一、判断

(1) f 在 \mathbb{R} 上单调、有界, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - f(-x)]$ 存在

(2) 在 $[a, b]$ 上的连续函数必有原函数

(3) 在 $[a, b]$ 有界的函数在 $[a, b]$ 可积

(4) f' 在 (a, b) 有界, 则 f 在 (a, b) 一致连续

(10') 二. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{n} = 1$

(10') 三. (1) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin^3 \frac{k\pi}{n} \right)$

(10') 四. (1) 求 $\frac{dy}{dx}$, $y = (\sin x)^{\tan x}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

(2) 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$, $y = x \int_0^x \sin(t^2) dt$

(24') 五. (1) 求 $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$

(2) 求 $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$

(3) 求 $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx$

(10') 六. $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在, 求证 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = 1$

(10') 七. 写出 $f(x) = \sqrt[3]{2 - \cos x}$ 的 McLaurin 展开式到 x^9

(15') 八. 定义在 \mathbb{R} 上的函数 f 恒正, 可导

$$f(0) = 1, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

求 $f(2020)$ 可能取到的最大值

(15') 九. f 在 $[0, 1]$ 连续, 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 2nx(1-x^2)^{n-1} f(x) dx = f(0)$$