

南方科技大学

2022-2023 年秋季学期 数学分析 III 期末试卷 (B 卷)

一、求下面幂级数的收敛半径. (每小题 6 分, 共 18 分)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} x^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (e^n + e^{-n}) x^{2n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{4^n} \cdot x^n$.

二、(本题满分 15 分) 求出一个函数 $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, 使得

$$\text{grad} \varphi = (x^2 + \sin y, x \cos y + \sin z, y \cos z + z^2).$$

三、(本题满分 15 分) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2022) \cos n}{n}$ 收敛.

四、(本题满分 15 分) 证明: 反常积分

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\arctan x} dx$$

收敛.

五、(本题满分 10 分)

对正整数 n , 定义 $f_n(x) = \frac{\sin nx}{e^{nx}}$.

(1) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上不一致收敛;

(2) 证明: 对任意 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ 上一致收敛.

六、(本题满分 10 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_1^2 \ln x \cos^2 nx dx \right)$.

七、(本题满分 10 分) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上均可微, 且收敛于 $f(x)$. 已知 $\{f_n'(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致有界, 证明: $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

八、(本题满分 7 分) 求反常积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{\sin x}{x} dx$$

的值.