高等代数 1 期中考试试题

1. (10 分) 设 $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. 试求 B 的逆。

2. (10 分) 求下列线性方程组的通解，以及相应的齐次线性方程组的一个基础解系。

$$\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3=2\\ x_1+2x_2-x_3=1\end{cases}$$

3. (10 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是一个线性无关的向量组，$\beta_1=\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2-\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3-\alpha_1$。证明:

   (a) β_1, β_2, β_3 是线性相关的。

   (b) β_1, β_2 是一个极大线性无关组。

4. (10 分) 假设 $A,B\in\mathrm{M}_n(K)$ 满足 $A+B=AB$。证明:

   (a) $A-I$，$B-I$ 都是可逆的，且相互为逆。

   (b) A 和 B 可交换。

5. (10 分) 在 K^n 中，下列子集合是否是子空间? 如果是子空间，请确定它的维数，并给出一组基；如果不是子空间，请写出它所生成的子空间，并给出该子空间的一组基。

   (a) $W=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in K^n\ :\ a_1+a_2+\cdots+a_n=0\}$;

   (b) $V=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in K^n\ :$ 有某个 i，使 $a_i>0\ \}$。

6. (10 分) 设 u,v 均为 $n\times 1$ 矩阵。证明 I_n+uv^T 可逆，且逆的形式为 $I+cuv^T$，这里 c 是常数。求出 c。

7. (15 分) 考虑多项式构成的向量空间 $V=K[X]_{\leq 2}$。考虑映射 $T:V\longrightarrow V$; $T(f(X))=f'(X)$ (求导运算)。

   (a) 证明 T 是一个线性映射。

   (b) 取 V 的有序基 $\mathcal{A}=(1,X,X^2)$，求 T 在有序基 $\mathcal{A}$ 的矩阵表示。

   (c) 取 V 的另一组有序基 $\mathcal{B}=(1,X-1,(X-1)^2)$, 求有序基 $\mathcal{A}$ 到有序基 $\mathcal{B}$ 的过渡矩阵。

   (d) 求 $f(X)=1+X+X^2$ 分别在有序基 $\mathcal{A}$ 和有序基 $\mathcal{B}$ 下的坐标。

8. (15 分) 设 A 是一个 n 维矩阵，并且满足 $rank(A) = rank(A^2)$。已知 $V = K^n$, $A : V \longrightarrow V$.
证明:

(a) A 和 A^2 的零空间相同。

(b) $ker(A) \oplus Im(A) = V$。

9. (10 分) 设 A 为 $n \times m$ 矩阵，B 为 $m \times k$ 矩阵，C 为 $k \times l$ 矩阵。证明 $rank(AB) + rank(BC) \leq rank(ABC) + rank(B)$。(提示：可以考虑分块矩阵)