南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等数学(上) A　　开课单位: 数 学 系
考试时长: 120 分钟　　命题教师: 高等数学出题组

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
分 值	15 分	15 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分

本试卷共 9 道大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (15pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

C (1) Which of the following functions is differentiable at $x = 0$? $f(0)=0$

(A) $|x|\sqrt{\sin x+2}$　　(B) $|x|+\sqrt{\sin x+2}$

(C) $|x|\sin x$　　(D) $|x|+\sin x$

分子次数-分母次数=1 ⇒ 斜渐近线

B (2) Which of the following functions has an oblique asymptote ?

(A) $\frac{\sqrt{2x^3+x+1}}{x+1}$　　(B) $\frac{x^4+1}{x^3+\sin x}$　　$a=\frac{f(x)}{x}=\frac{x^4+1}{x^4+x\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{\sin x}{x^3}}=1.$ 斜率a存在

(C) $x+\sin x$　$f(x)-x=\sin x$　　(D) $x+\frac{1}{2+\sin x}$

A (3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\cos x\right)dx =$ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\cot x\cdot\csc x+\cos x)\,dx = -\csc x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

(A) $\frac{3}{2}$.　(B) $\frac{2}{3}$.　(C) $-\frac{3}{2}$.　(D) $-\frac{2}{3}$.

C (4) Let

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x}, & x>0\\ x\sin\frac{1}{x-1}, & x\le 0.\end{cases}$$

Which of the following must be **true**?

(A) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ does not exist.　$f(0)=0$

(B) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ exists and f is not continuous at $x=0$.

(C) f is continuous at $x=0$ and f is not differentiable at $x=0$.　$\lim\limits_{h\to0^+}\frac{1-\cos h}{h^2}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{+2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}=\lim\limits_{h\to0^+}\frac{\sin^2\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot2}=\frac{1}{2}$

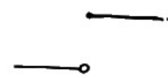
(D) f is differentiable at $x=0$.

$\lim\limits_{h\to0^-}\frac{h\sin\frac{1}{h-1}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\sin\frac{1}{h-1}=\sin(-1).$

A (5) If there is a jump discontinuity for the function $y = f(x)$ at $x = 0$, then which of the following limits must exist ?

(A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$. ~~(B)~~ $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^2$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$. X. x^3在$x\to0$处割开 ~~(D)~~ $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - f(-x))$.



2. (15 pts) Fill in the blanks. $\Sigma \sin\frac{k\pi}{n}$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right) =$ $\underline{\frac{2}{\pi}}$. $\int_0^1 \sin\pi x\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1 =$

(2) If the line $y = 9x + b$ is a tangent line of the curve $y = x^3 - 3x$, then $b =$ $\underline{-16或16}$. $(2,2)$ $(-2,-2)$

$f(1) = \sqrt[4]{2}$

(3) If $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x + \sqrt{x}}}$, then $f'(1) =$ $\underline{11 \cdot 2^{-\frac{15}{4}}}$. $y' = 3x^2 - 3 = 9$. $x^2 = 4$. $x = \pm 2$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\tan x}{1 - \cos x} =$ $\underline{2}$. $2 = 9\times 2 + b$, $b_1 = -16$

$f(0) = 0$

(5) Let $f(x) = \tan x$. Then $f^{(4)}(0) =$ $\underline{0}$. $f''(x) = 2\sec^2 x\tan x$ $-2 = 9\times(-2) + b_2$ $b_2 = 16$

$f'(x) = \sec^2 x$

$f'(0) = 1$

3. (10 pts) Prove that there is only one real root for the equation $x^5 + 2x - 100 = 0$.

$f''(0) = 0$

反证

4. (10 pts) Compute

$f'''(0) = 2$

$$\int_0^1 (1+x)^2(1-x)^5\,dx.$$

5. (10 pts) Find the linear approximation of $f(x) = \frac{2}{1-x} + \sqrt{1+x}$ at $x = 0$. $(1+x)^k \approx 1 + kx$.

$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

6. (10 pts) Find the constants a and b such that the function $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x + b}{x - 1}, & x > 1 \\ a, & x \le 1. \end{cases}$ is continuous at $x = 1$.

7. (10 pts) Let $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$. 局部极大&极小值

(a) Identify the inflection points and local maxima and minima of the function that may exist. 拐点 $f(3) = \frac{27}{2\times 4}$

(b) Identify the horizontal, vertical and oblique asymptotes that may exist.

(c) Sketch the graph.

8. (10 pts) Let $y = f(x)$ be an implicit function defined by the equation $2y^3 - y^2 + 3xy - 2x^2 - 2 = 0$. Find the equation of the tangent line to the curve $y = f(x)$ at $x = 1$.

9. (10 pts) Let f be continuous on $(-\infty, \infty)$ and define $F(x) = \int_0^x xtf(x^2 - t^2)\,dt$. Find $F'(x)$.

一、（15分）单项选择题:

(1) 下列哪一个函数在 $x=0$ 处可导?

(A) $|x|\sqrt{\sin x+2}$　　　　(B) $|x|+\sqrt{\sin x+2}$

(C) $|x|\sin x$　　　　(D) $|x|+\sin x$

(2) 下列哪一个函数存在斜渐近线?

(A) $\frac{\sqrt{2x^3+x+1}}{x+1}$　　　　(B) $\frac{x^4+1}{x^3+\sin x}$

(C) $x+\sin x$　a=1.　　　　(D) $x+\frac{1}{2+\sin x}$　　$1+\frac{1}{2x+x\sin x}$

$\frac{1}{2+\sin x}$

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\cos x\right)dx=$

(A) $\frac{3}{2}$.　　(B) $\frac{2}{3}$.　　(C) $-\frac{3}{2}$.　　(D) $-\frac{2}{3}$.

(4) 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x}, & x>0\\ x\sin\frac{1}{x-1}, & x\le 0.\end{cases}$$

下列说法中哪一个是正确的?

(A) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在但 f 在 $x=0$ 处不连续.

(C) f 在 $x=0$ 处连续但 f 在 $x=0$ 处不可导.

(D) f 在 $x=0$ 处可导.

A　(5) 若 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处有一个跳跃间断点，那么下面 4 个极限中哪一个必然存在?

(A) $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$.　　　　(B) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^2$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$.　　　　(D) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-f(-x))$.

二、（15分）填空题:　a-b=1.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=$______.　　$\int_0^1 \sin\pi x\cdot dx.$

(2) 若直线 $y=9x+b$ 是曲线 $y=x^3-3x$ 的一条切线, 则 $b=$______.

$f(1)=2^{\frac{1}{4}}$　(3) 已知 $f(x)=\sqrt{x\sqrt{x+\sqrt{x}}}$，则 $f'(1)=$______.　　$y(2)=8-b=2$　　$\overset{2}{y}=18+b$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}=$______.　　$y(-2)=-8+b=-2$　　$-2=-18+b$

(5) 若 $f(x)=\tan x$，则 $f^{(4)}(0)=$______.

三、（10分）证明：方程 $x^5+2x-100=0$ 有且仅有一个实根.

四、（10分）计算

$$\int_0^1(1+x)^2(1-x)^5\,dx.$$

五、（10分）求函数 $f(x)=\frac{2}{1-x}+\sqrt{1+x}$ 在 $x=0$ 处的线性近似.

六、（10分）若函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2-x+b}{x-1}, & x>1\\ a, & x\le 1.\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，求常数 a 和 b 的值.

七、（10分）考虑函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

(a) 求所有（局部）极值点和拐点.

(b) 求所有水平渐近线，垂直渐近线和斜渐近线.

(c) 做出 $f(x)$的简略图.

八、（10分）设函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 的邻域内满足方程 $2y^3-y^2+3xy-2x^2-2=0$. 求函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程.

九、（10分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续，且定义函数 $F(x)=\int_0^x xtf(x^2-t^2)\,dt$. 求 $F'(x)$.