仔细读题,
勾划关键信息.
注意节奏

南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高 等 代 数 II　　　　开课单位: 数 学 系
考试时长: 120 分钟　　　　命题教师: 胡 勇

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
分 值	25 分	18 分	12 分	10 分	8 分	15 分	7 分	15 分

本试卷共 (8) 大题, 满分 (110) 分.
(考试结束后请将答题本、草稿纸一起交给监考老师.)
考生答卷可使用中文、英文或中英文结合.

1:50.

以下 m, n 总是表示正整数, K 是 $\mathbb{C}$ 的一个子域. 试题中数学记号与课程讲义相同, 有疑问可以询问监考教师.

第 1 题 (本题共 25 分) 简答题. 每道题只需直接写出答案, 不需要给出理由.

1. 设 $N \in \mathbf{M}_5(K)$ 是幂零阶为 3 的幂零矩阵. 写出 N 的最小多项式.
   (如有多种可能, 请写出所有可能的答案.)
2. 写出大小相同的两个幂零矩阵 A, B 使得 $A+B$ 不是幂零矩阵.
3. 设 $\dim V = 6$, $\mathscr{N} \in \mathrm{End}(V)$ 是循环的幂零变换. 求 0 作为 $\mathscr{N}$ 的特征值的几何重数.
4. 考虑实向量空间 $V = \mathbb{R}[X]_{\le 2}$ 上的双线性型
$$\varphi : (f, g) \longmapsto \sum_{i=0}^{2} f'(i)g(i).$$
   写出 φ 在有序基 $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ 下的 Gram 矩阵. (f' 表示对 f 求导得到的多项式.)
5. 设 V 是 n 维向量空间, $\mathrm{Sym}(V)$ 表示 V 上的对称双线性型构成的向量空间. 求 $\dim \mathrm{Sym}(V)$.

第 2 题 (本题共 18 分) 判断对错. (不需要解释理由.)

1. 设 V 是有限维复向量空间, $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$. 则对于任意 $c \in \mathbb{C}$, $\mathscr{A}$ 的广义特征子空间也是 $\mathscr{A} + cI$ 的广义特征子空间.
2. 令 $V = K[X]_{\le n}$. 则线性变换
$$\mathscr{A} : V \longrightarrow V; \quad P(X) \longmapsto P''(X)X$$
   是幂零变换. (P'' 表示多项式 P 的二阶导数.)

3. 考虑含有参数 $a \in \mathbb{C}$ 的复矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 则 A (在 $\mathbb{C}$ 上) 可对角化当且仅当 $a = 0$.

4. 设 $A, B \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C})$ 具有相同的特征多项式和最小多项式, 则 A, B 在 $\mathbb{C}$ 上相似.

5. 设 V 是 n 维复向量空间, 其中 $n \geq 2$. 设 $\mathscr{A} \in \mathrm{End}(V)$. 如果 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A}^{n-1}) = \mathrm{Ker}(\mathscr{A}^n)$, 则 $\mathscr{A}$ 一定是可逆变换.

6. 设 $N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ 是幂零矩阵. 则与 N 相合的矩阵也都是幂零矩阵.

对于下面的每一个问题, 考生需要尽可能详尽地写出答题细节, 以使每道题的解答清晰完整.

第 3 题 (本题共 12 分) 令 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

2:10

试求 A 的 Jordan 标准形 J 并给出一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = J$.

第 4 题 (本题共 10 分) 假设 $A \in \mathbf{M}_5(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}$ 中仅有的特征值是 0 和 1, 并且 A 的最小多项式次数是 3.

2:22.

写出 A 的 Jordan 标准形所有可能的形式.

(若某些形式只有 Jordan 块排序不同, 可以只写其中的一个.)

第 5 题 (本题共 8 分)

设 V 是有限维复向量空间, $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathrm{End}(V)$ 是两个可交换的线性变换. 设 W 是 $\mathscr{A}$ 的一个广义特征子空间.

1. 证明: W 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间.
2. 是否 W 一定是 $\mathscr{B}$ 的广义特征子空间? 若是, 请解释理由. 若否, 请给出反例.

第 6 题 (本题共 15 分) 设 $J = J_n(1)$ 为特征值是 1 的 n 阶 Jordan 块, 其中 $n \geq 2$.

1. 对每个 $k \in \mathbb{N}^*$, 计算 J^k.
2. 证明: 对于每个 $k \in \mathbb{N}^*$, J^k 都与 J 相似.
3. 假设 $n = 3$. 写出一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}JP = J^T$.

2:51

第 7 题 (本题共 7 分) 设 $N \in \mathbf{M}_n(K)$ 为幂零矩阵, $f \in K[X]$, $A = f(N)$.

证明: A 是幂零矩阵当且仅当多项式 f 的常数项为 0.

第 8 题 (本题共 15 分) 对每个 $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, 定义 $C_A = \{B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$.

1. 证明 C_A 是 $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ 的线性子空间.
2. 假设 A 的最小多项式次数为 m. 证明 $\dim C_A \geq m$
3. 假设矩阵 $A' \in \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ 和 A 相似. 证明: 存在一个可逆的线性变换 $T : \mathbf{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ 满足 $T(C_A) = C_{A'}$.
4. 假设 A 是 Jordan 块. 求出 $\dim C_A$.
5. 对一般的情况, 证明 $\dim C_A \geq n$.

(本题中, 允许承认前面小题的结果来用于后续问题的解答.)