一．

设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} c(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 c.

(2) 求边际密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

(3) 问 X 和 Y 是否相互独立?

(4) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

二．

设有一根 1 米长的木棍，将其在随机位置切割后，记剩余一段的长度为 X，然后将剩余一段再次进行切割，此时剩余的长度记为 Y

（1）若这三根木棍能够围成一个三角形，则 X、Y 要满足什么条件?

（2）求 X 与 Y 的联合概率分布（p.d.f.）

（3）求这三根木棍能够围成三角形的概率是多少

三．

令 X~B（n,p），求 X 的矩生成函数，并利用其矩生成函数求出 X 的期望和方差

四．

（1）请叙述切比雪夫不等式

(ii) $\{X_n\}$是一系列离散随机变量，其均值有限，方差一致有界，且 $E(X^2)<\infty$.

（已知每一个 Xn 的均值为μ，标准差为σ），请利用切比雪夫不等式证明

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X_n}-E(\overline{X_n})|\geq \varepsilon)=0.$$

五、

已知随机变量 X, Y 满足

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0\leq x\leq y<+\infty \\ 0, & \text{other wise} \end{cases}$$

（1）求 Cov（X，Y）和 X 与 Y 的相关系数

（2）求 E（X | Y=y）与 E（Y | X=x）

六．

设 X、Y 是两个随机变量，X~U（0，1），当 X=x 时（x 为给定值且满足 0<x<1）有

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<y<x \\ 0, & \text{Other wise} \end{cases}$$

(1) 求 $f(x,y)$

(2) 求 $f_Y(y)$ 并将其函数图像画出

(3) 求 $P(X>Y)$