第三章 联合分布

§1　引言：联合累积分布函数
§2　(二维)离散随机变量
§3　(二维)连续随机变量
§4　独立随机变量
§5　条件分布
§6　联合分布随机变量函数
§7　极值和顺序统计量

回顾事件的独立性

A,B 相互独立 $\Leftrightarrow$ A,B 之间没有任何关系

$\Leftrightarrow$ $P(AB)=P(A)P(B)$

问 怎样定义 r.v X,Y 之间的独立性?

分析 若 X,Y 相互"独立", 从直观上看, X,Y 取任何值之间应是没有任何关系的, 即 $\forall\ x,y\in R^1$

$$\{X\le x\},\ \{Y\le y\}$$

应相互独立，即

$$P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X\le x\}\cdot P\{Y\le y\}$$

$$\Downarrow$$

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$$

定义 设

$$(X,Y) \sim F(x,y),\ X \sim F_X(x), Y \sim F_Y(y)$$

若 $\forall\ x, y \in (-\infty,\infty)$有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\} \cdot P\{Y \le y\}$$

即

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

则称 r.v X,Y **相互独立.**

它表明，两个$r.v$相互独立时，联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积.

设X,Y相互独立，$\forall\ x_1 < x_2, y_1 < y_2$ 有

$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1)$$

$$= F_X(x_2)F_Y(y_2) - F_X(x_1)F_Y(y_2) - F_X(x_2)F_Y(y_1) + F_X(x_1)F_Y(y_1)$$

$$= [F_X(x_2) - F_X(x_1)]\cdot[F_Y(y_2) - F_Y(y_1)]$$

$$= P\{x_1 < X \le x_2\}\cdot P\{y_1 < Y \le y_2\}$$

$\therefore\quad \{x_1 < X \le x_2\}, \{y_1 < Y \le y_2\}$相互独立.

r. v独立性的直观意义

X的取值与Y的取值是相互独立、互不相干的.

(一) 二维离散型 r.v 的独立性

设(X,Y)的频率函数为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots)$$

则 X,Y 相互独立等价于$\forall\ i,j=1,2,\cdots$有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$$

X与Y独立 $\Longleftrightarrow$ 对一切 i,j 有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

即 $$\boxed{p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}}$$

(一) 二维离散型 r.v 的独立性

例 甲袋中有3个红球, 2个白球;乙袋中有4个红球, 5个白球. 从甲、乙两袋中各任取两球, 记 X,Y分别表示取到白球的个数, 问 X,Y是否独立?

分析 由于从两袋中取球是相互独立的过程, 所以 X,Y的取值是相互独立、互不相干的, 故 X,Y相互独立.

判断r.v的独立性的方法

① 按定义判断

② 从直观背景判断

例 设r.v X从 1, 2, 3, 4 四个数中等可能取值，又设r.v Y从$1 \sim X$ 中等可能取值. 问X, Y 是否独立？

解 由§2例，(X, Y) 的频率函数及边际频率函数为

$Y \backslash X$	1	2	3	4	$p_{\cdot j}$
1	1/4	1/8	1/12	1/16	25/48
2	0	1/8	1/12	1/16	13/48
3	0	0	1/12	1/16	7/48
4	0	0	0	1/16	3/48
$p_{i\cdot}$	1/4	1/4	1/4	1/4	

$\because \quad P\{X=i, Y=j\} \neq P\{X=i\} \cdot P\{Y=j\}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$

$\therefore \quad X, Y$ 不独立.

从直观上看，X, Y也不独立

例 设(X,Y)的频率函数为

$Y \backslash X$	1	2	3
1	1/8	a	1/24
2	b	1/4	1/8

① a、b 应满足什么条件？ ② 若 X,Y 独立, 求a、b .

解 ① $\because \sum_{i,j} p_{ij} = 1$

$$\therefore\ a+b = 1-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right) = \frac{11}{24},\ a \geq 0, b \geq 0$$

② 若 X,Y 相互独立, 则

$$a = P\{X=2, Y=1\} = P\{X=2\}\cdot P\{Y=1\} = \left(a+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}+a+\frac{1}{24}\right)$$

$$b = P\{X=1, Y=2\} = P\{X=1\}\cdot P\{Y=2\} = \left(b+\frac{1}{8}\right)\left(b+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)$$

解得 $a=\frac{1}{12}$ 或 $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{8}$ 或 $b=\frac{3}{8}$.

$\because\ a+b=\frac{11}{24},\quad \therefore\ a=\frac{1}{12},\ b=\frac{3}{8}.$

(二) 二维连续型r.v的独立性

设 (X,Y) 为连续型r. v，且

$$(X,Y)\sim f(x,y)$$

$$X\sim f_X(x)\,,\quad Y\sim f_Y(y)$$

若 X,Y 相互独立，则

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv &= P\{X\le x,Y\le y\}\\ &= P\{X\le x\}P\{Y\le y\}\\ &= \int_{-\infty}^{x}f_X(u)du\cdot\int_{-\infty}^{y}f_Y(v)dv\\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_X(u)f_Y(v)dudv\end{aligned}$$

从而在 $f(x,y), f_X(x), f_Y(y)$ 的连续点处有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

即有 X,Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)\overset{a.e}{=}f_X(x)f_Y(y)$

连续型

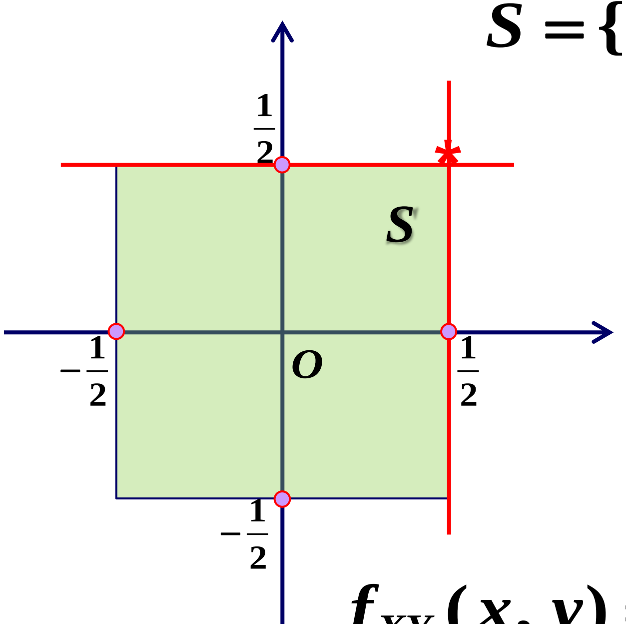
X与Y独立$\Longleftrightarrow$对任何 x ,y 有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

二维随机变量（X, Y）相互独立，则边缘分布完全确定联合分布

例 设(X,Y)服从正方形S上的均匀分布, 其中

$$S=\{(x,y)\,|\,-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\}$$



则 $$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in S\\ 0, & (x,y)\notin S\end{cases}$$

易知 $f_X(x)=1,\quad -1/2\le x\le 1/2$

$f_Y(y)=1,\quad -1/2\le y\le 1/2$

$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y),\quad (X,Y)$ 独立.

现考虑将S旋转45^o, 正方形 → 菱形.

则 $f_X(x), f_Y(y)$ 不再是均匀分布密度.

(X,Y) 也不再独立. (如: $f_X(0.5)>0, f_Y(0.5)>0,$ $f_{XY}(0.5,0.5)=0.$ 且这样的点很多)

例 设(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

问 X,Y是否独立?

解 X,Y的边际密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

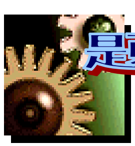
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

$\because \quad f(x,y)=f_X(x)f_Y(y), \quad -\infty<x,y<\infty$

$\therefore \quad X,Y$相互独立.

是否为密度?

问题



若(X,Y)的密度函数能分解为

$$f(x,y)=g(x)h(y)$$

其中$g(x)\ge 0, h(y)\ge 0$, 问 X,是否独立?

补充例子 若(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y, 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

情况又怎样？

密度函数形式可分离，
但支撑区域不可分离.

解 $f_X(x)=\int_x^1 2dy=2(1-x),\qquad 0<x<1$

$f_Y(y)=\int_0^y 2dx=2y,\qquad 0<y<1$

由于存在面积不为0的区域，

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

故 X 和 Y 不独立.

例 (Farlie-Morgenstern族)

设 $F(x)$和$G(y)$ 都是一维连续型分布函数,可以证明,对于任意的 α, 只要满足 $|\alpha|\le 1$, 就有

$$H(x,y)=F(x)G(y)\{1+\alpha[1-F(x)][1-G(y)]\}$$

是二元连续型分布函数.

可见, 仅当$\alpha=0$ 时, X 和 Y 才是独立的, 此时

$$H(x,y)=F(x)G(y)$$

分解成了边际分布 $F(x)$和$G(y)$ 的乘积.

例 在某一分钟内，信号进入收信机是等可能的. 若收到两个互相独立的信号的时间间隔小于0.5秒, 则信号将相互产生干扰，求两信号相互干扰的概率.

解 设两信号进入收信机时间分别为 X,Y(分钟), 则

$$X \sim U(0,1), Y \sim U(0,1)$$

$\because$ X,Y 独立, 故联合密度为

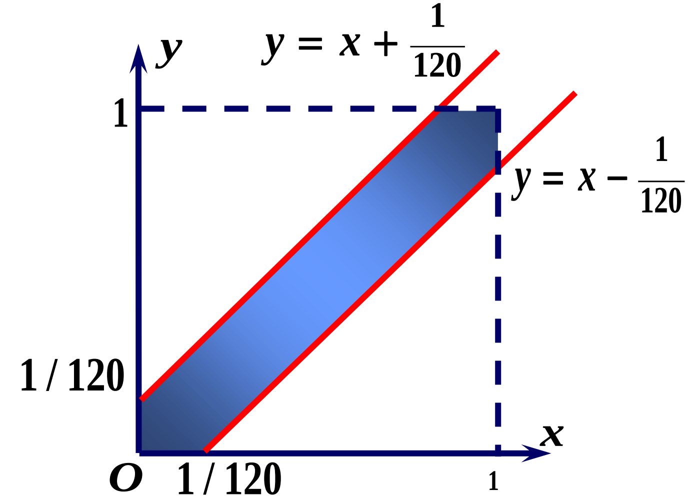
$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

故两信号互相干扰的概率为

$$P\{|X-Y| < \frac{1}{120}\}$$

$$= \iint\limits_{|x-y|<1/120} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\substack{|x-y|<1/120 \\ 0<x<1,0<y<1}} dxdy$$

$$= 1-(1-\frac{1}{120})^2 \approx 0.016$$



回忆：二维正态分布

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\times[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

其中各参数满足

$$-\infty<\mu_1<\infty,-\infty<\mu_2<\infty,\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$$

重要结论

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)\Rightarrow\begin{cases}X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)\\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)\end{cases}$$

问 参数 ρ 与独立性有什么关系？

定理 设$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,则

$$X,Y \text{ 相互独立} \Leftrightarrow \rho = 0$$

证 ⇨ 若 (X,Y) 相互独立, 则 $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$, 即

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\}$$

令$x = \mu_1, y = \mu_2$,则有

$$\sqrt{1-\rho^2} = 1$$

$$\therefore \quad \rho = 0$$

⇦ 若 $\rho = 0$, 显然

$$f(x,y) \equiv f_X(x) f_Y(y)$$

即 X,Y相互独立.

(三) n 维 r.v 的边际分布、独立性

设 n 维 r.v $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

一维边际分布

X_i 的分布函数

$$F_{X_i}(x_i) = P\{X_1 < \infty, \cdots, X_{i-1} < \infty, X_i \le x_i, X_{i+1} < \infty, \cdots, X_n < \infty\}$$
$$= F(\infty, \cdots, \infty, x_i, \infty \cdots, \infty) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

二维边际分布

X_1, X_2 的联合分布是

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, X_3 < \infty, \cdots, X_n < \infty\}$$
$$= F(x_1, x_2, \infty, \cdots, \infty)$$

类似可定义三维、四维等高维边际分布

X_2, X_3 的联合分布是

$$F_{X_2 X_3}(x_2, x_3) = P\{X_1 < \infty, X_2 \le x_2, X_3 \le x_3, X_4 < \infty, \cdots, X_n < \infty\}$$
$$= F(\infty, x_2, x_3, \infty, \cdots, \infty)$$

随机向量的独立性

$\forall\ x_1, x_2, \cdots, x_n \in R^1$若有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

则称$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立.

设

$$(X_1, X_2, \cdots, X_m) \sim F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

$$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \sim F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$(X_1, X_2, \cdots, X_m; Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) \sim F(x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$\forall\ x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n \in R^1$若有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_n) = F_1(x_1, x_2, \cdots, x_m)\cdot F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

则称$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$, $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立.

从直观上看： 随机向量的独立性是指各随机向量的取值是相互独立、互不相干的

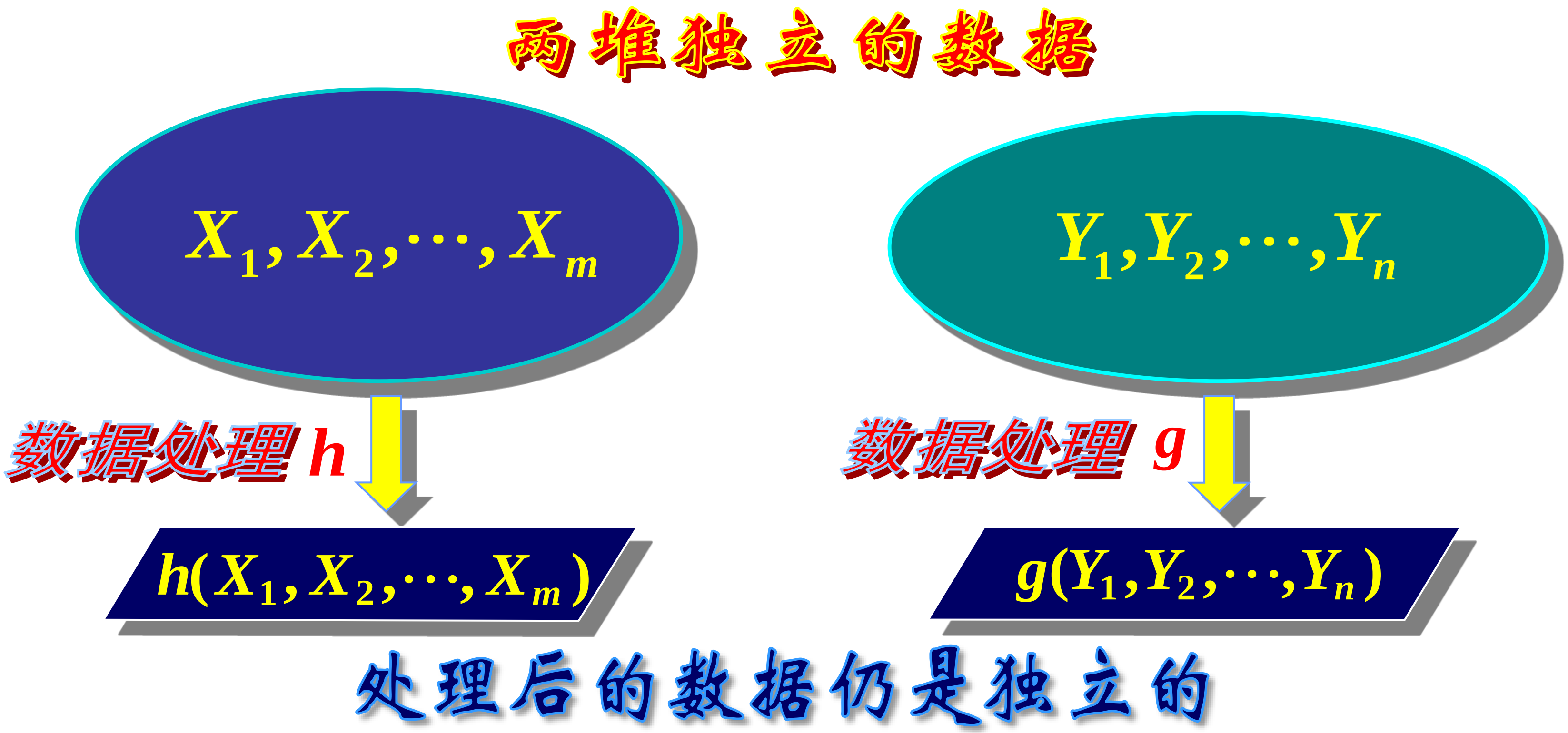
定理 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$, $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立, 则

① X_i, Y_j 相互独立 $(i = 1, 2, \cdots, m\,;\ j = 1, 2, \cdots, n)$

② 设 h, g 分别是m元和n元的连续函数, 则

$$h(X_1, X_2, \cdots, X_m),\ g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$$

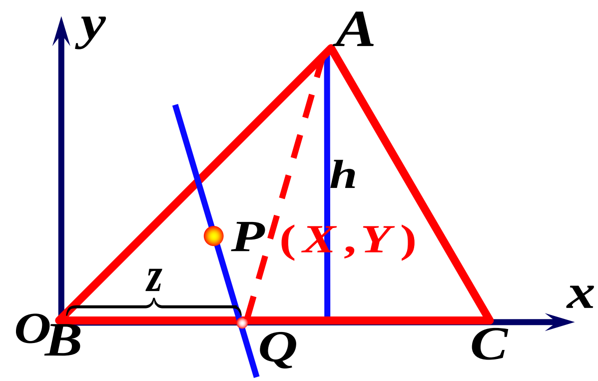
相互独立.



例 设在ΔABC内部任取一点 P, 在底边 BC上任取一点Q, 求直线 PQ 与线段AB相交的概率.

解 建立坐标系如图.

依题意, 点 P 服从ΔABC上的均匀分布, 点 Q 服从区间$(0, BC)$上的均匀分布, 其概率密度分别为



$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{h\cdot BC}, & (x,y)\in\Delta ABC\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{BC}, & z\in(0,BC),\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因为点 P与点Q 相互独立, 故联合概率密度为

$$f(x,y,z)=f_{XY}(x,y)f_Z(z)$$

问 直线 PQ 与线段 AB 相交等价于什么?

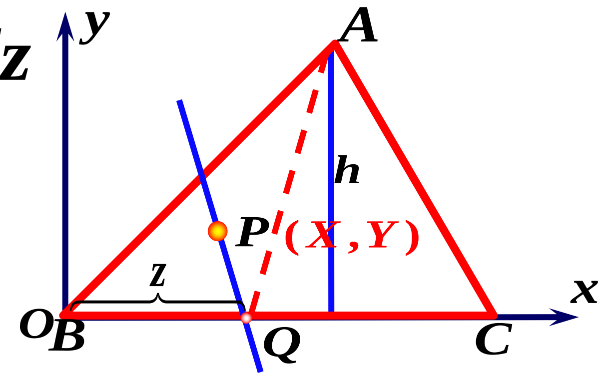
例　设在ΔABC内部任取一点 P, 在底边 BC上任取一点Q, 求直线 PQ 与线段AB相交的概率.

解　建立坐标系如图.

直线 PQ与线段AB相交的概率为

$$P\{(X,Y)\in\Delta ABQ, 0<Z<BC\}$$

$$=\iiint\limits_{\substack{(x,y)\in\Delta ABQ,\\ 0\le z\le BC}} f_{XY}(x,y)f_Z(z)dxdydz$$



$$=\int_0^{BC} f_Z(z)dz \iint\limits_{(x,y)\in\Delta ABQ} f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$=\frac{2}{h\cdot BC}\cdot\frac{1}{BC}\int_0^{BC}\frac{1}{2}h\cdot zdz$$

$$\iint\limits_{(x,y)\in\Delta ABQ} dxdy=\Delta ABQ\text{面积}$$

$$=\frac{1}{BC^2}\frac{BC^2}{2}=\frac{1}{2}$$

课后作业 P77：19、补充题

1. 一个袋中有 5 个球，其中 2 个白球 3 个黑球，

(1) 先后有放回的任取两球，

(2) 先后无放回的任取两球，

取到的白球个数分别为 X 和 Y，求(X,Y)的联合频率函数及边缘频率函数，讨论独立性。

2.在一个以原点为圆心半径为 R 的圆内随机选取一点，令(X,Y)表示这一点的分布，则(X,Y)服从

$$f(x,y)=\begin{cases} c, & x^2+y^2\le R^2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

(1)求 c; (2)求边缘密度函数; (3)讨论 X 和 Y 独立性。