

一. (1) $y = ax^x + x^{a^x}$, 求 y'

(2) $f(x) = e^{\frac{x}{a}} \sin \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, 求 $\limsup_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 和 $\liminf_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

(3) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$

(4) $\int \frac{1}{(3+\cos x)\sin x} dx$

(5) $y = (2x^2 - 1)\sin x$, 求 $y^{(10)}$

(6) 求 $\int_0^{\pi} x \sin x dx$

二. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln(1 + \frac{k}{n})$

三. 求 $y = |x(x^2 - 1)|$ 的极值点和极值.

四. 用微积分的方法证明 $2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$

五. f, g 为 $(0, +\infty)$ 的凸函数, f 为单调递增函数, 证明 $f \circ g$ 也是凸函数

六. $S = \{x; f(x) = 0\}$, 证明若 $f(x) \neq 0, x \in S$, 则 S 为有限集.

七. $f(x)$ 在 0 的某个邻域内可导, $f'(0) = 0, f''(0)$ 存在, 证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(c^{x-1})}{x^2} = -\frac{1}{2}f''(0)$.

八. $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 证明: $\int_0^1 e^{-nx} f(x) dx = f(0)$