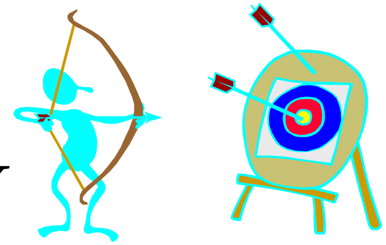
第三章 联合分布

多维随机变量的实际背景

例 人的身高 H 与体重 W

某地区的气温 X、气压 Y 与湿度 Z

射击中落点横向偏差 X 与纵向偏差 Y



……

问题 能不能将上述r.v单独分别进行研究？

分析 一般人的身高与体重

$$H \sim N(\cdot\,,\cdot\,),\quad W \sim N(\cdot\,,\cdot\,)$$

但身高与体重之间有一定关系.

气象指标中的气温、气压与湿度也是相关联的.

导弹射程误差与落点的横向偏差及纵向偏差都有关.

由于同一对象的不同指标之间往往是有一定联系的，所以应该把它们作为一个整体来看待。

二维随机变量的概念

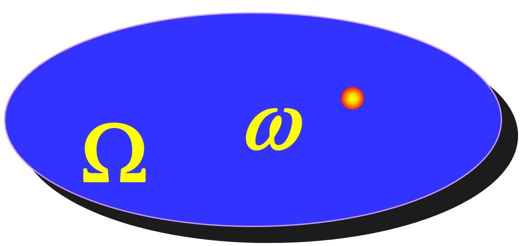
设Ω为样本空间，$X = X(\omega)$，$Y = Y(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$

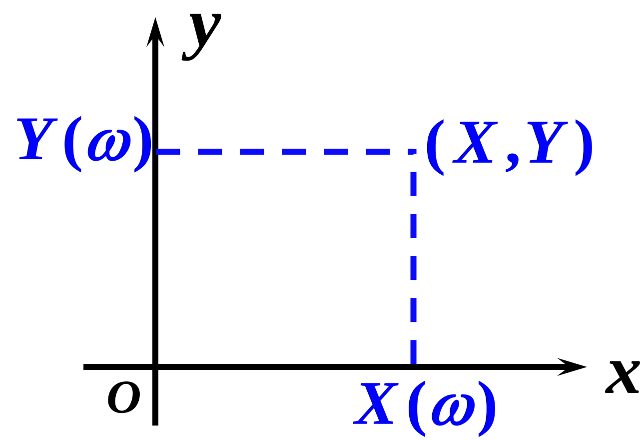
是定义在Ω上的两个r.v ，记

$$(X,Y) \triangleq (X(\omega),\ Y(\omega)) \quad (\omega \in \Omega)$$

称(X,Y)为**二维随机变量（向量）.**

注 一个试验产生的二维随机变量可视为向二维平面“投掷”一个“随机点”





§1 引言：联合累积分布函数

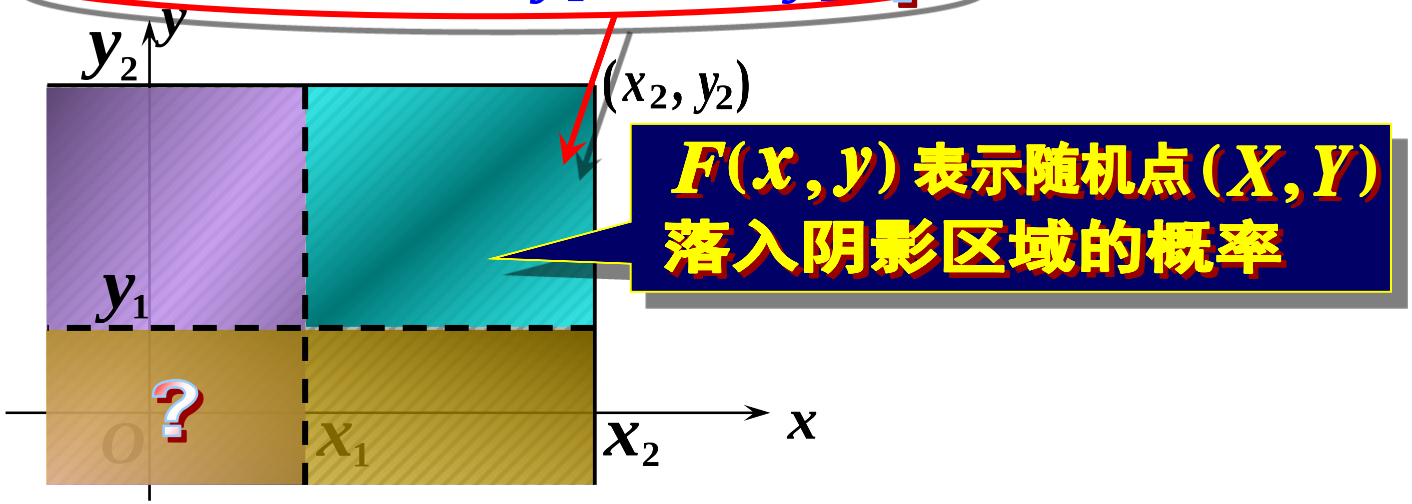
定义 设(X,Y)为二维r.v, $\forall\ x, y \in (-\infty, \infty)$,定义

$$F(x,y) \triangleq P(\{X \le x\} \cap \{Y \le y\})$$
$$\triangleq P\{X \le x, Y \le y\}$$

则称$F(x,y)$为二维r.v (X,Y)的**累积分布函数**，或称为X与Y的**联合累积分布函数.**

问 如何利用分布函数计算概率 $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$?

几何意义



$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$
$$= F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1) \ge 0$$

分布函数 $F(x,y)$ 的基本性质

① 任意固定 x_0，$F(x_0, y)$ 是 y 的单调不减函数
任意固定 y_0，$F(x, y_0)$ 是 x 的单调不减函数

② $0 \le F(x, y) \le 1$，且

$$F(+\infty, +\infty) = 1, F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$F(-\infty, y) = 0, F(x, -\infty) = 0 \quad (\forall\ x, y)$$

③ $F(x, y) = F(x, y+0)$，即 $F(x, y)$ 关于 y 右连续
$F(x, y) = F(x+0, y)$，即 $F(x, y)$ 关于 x 右连续

④ $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$ 有

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \ge 0$$

$$= P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

注 性质 ① ② ③ ④是分布函数的本质特征

注意：

分布函数$F(x, y)$的性质(4)不能由前三条性质推出.

反例：令

$$F(x, y)=\begin{cases}1, & x+y \geq -1 \\ 0, & x+y < -1\end{cases}$$

显然$F(x, y)$满足(1)(2)(3)三条性质，

但它不满足(4)，因为

$$F(1,1)-F(-1,1)-F(1,-1)+F(-1,-1)=1-1-1+0<0.$$

这说明性质(4)不能由前三条性质推出，故定义一个二元函数为联合分布函数时性质(4)不能省去.

n维随机向量

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是定义在样本空间Ω上的 n个r.v, 则称

$$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

为n维随机变量或n维随机向量.

称 n元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

为 n维随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数，或称为 r.v $X_1, X_2, \cdots, X_n$的联合分布(函数).

二维随机变量的基本分类 $\begin{cases} \text{二维离散型 r.v} \\ \text{二维连续型 r.v} \end{cases}$

边缘分布

如果$(X, \ Y)$是一个二维随机变量，则它的分量X $(\text{或者}Y)$是一维随机变量，因此，分量$X(\text{或者}Y)$也有分布．我们称$X(\text{或者}Y)$的分布为$X(\text{或者}Y)$关于二维随机变量$(X, \ Y)$的边缘分布．

边缘分布也称为边沿分布或边际分布

二维 r.v 的整体概率特性： $(X,Y) \sim F(x,y)$

两个一维 r.v 的概率特性： $X \sim F_X(x)$, $Y \sim F_Y(y)$

定义 称 $F_X(x)$ 为 (X,Y) 关于 X 的**边际分布(函数)**

称 $F_Y(y)$ 为 (X,Y) 关于 Y 的**边际分布(函数)**

问 $F(x,y), F_X(x), F_Y(y)$ 之间有什么关系？

分析

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x,+\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = F(+\infty, y)$$

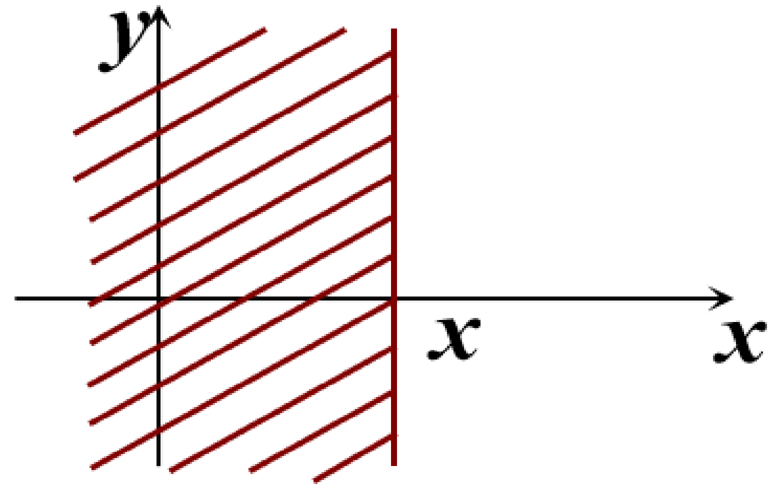
结论

随机变量的边际分布完全由它们的联合分布确定

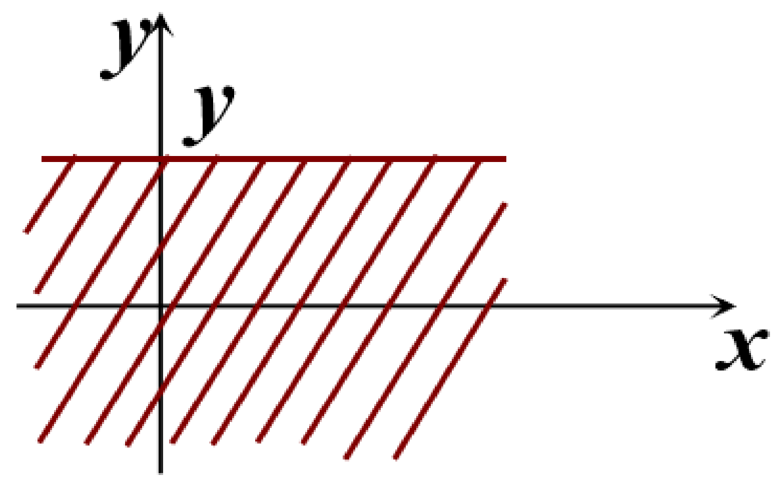
二维随机变量的边缘分布函数

由联合分布函数 $\Longrightarrow$ 边缘分布函数，逆不真.

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x, Y<+\infty)=F(x,+\infty)$$



$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X<+\infty, Y\le y)=F(+\infty,y)$$



例 设随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{2}\right)$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

其中A,B,C为常数.

(1) 确定A,B,C；

(2) 求X和Y的边缘分布函数;

(3) 求$P(X>2)$.

解 (1) $$F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$F(-\infty,+\infty)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$F(+\infty,-\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad B=\frac{\pi}{2},C=\frac{\pi}{2},A=\frac{1}{\pi^2}$$

(2) $$F_X(x)=F(x,+\infty)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2},\qquad -\infty<x<+\infty.$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{2}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

(3) $P(X>2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F_X(2)$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{2}{2}\right)$$

$$= 1/4.$$