数学分析 II(MA102a) 期中考试题 (2021.4.10)（共八题 2 页）

一. (20 分) 计算

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x+e^y}{\cos x-\sin y}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty,\ y\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^{\frac{x}{x+y}}$;

(3) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时， $f(x,y)=x^2\ln(x^2+y^2)$, 并且 $f(0,0)=0$, 求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$;

(4) 设 $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$, 求 du.

二. (15 分) 给出下列极限的定义: $\displaystyle\lim_{x\to a,\ y\to+\infty} f(x,y)=A$, 其中 $0<a<+\infty$. 并用此定义，证明: $\displaystyle\lim_{x\to a,\ y\to+\infty} \frac{2x^5+3xy^2}{x+y^2}=3a$.

三. (10 分) 求出曲线 $x=y^2-1$ 和 $x-y=11$ 在上半平面围成的图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积。

四. (10 分) 求点集 E 的边界 ∂E, 内部 E^o 和闭包 $\bar{E}$:

(1) $E=\{(r\cos\theta, r\sin\theta); 0<r<1, 0<\theta<2\pi\}$;

(2) $E=\{(x,y); x\text{或}y\text{为无理数}, |x|<1, |y|<1\}$.

五. (10 分) 设 F 为 R^n 中非空闭集， G 为 R^n 中非空开集，请证明:

(1) $F\setminus G$ 为 R^n 中闭集；　　(2) $G\setminus F$ 为 R^n 中开集。

六. (15 分) 设 $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2>0$, 并且 $f(0,0)=0$.

(1) 证明 $f(x,y)$ 于 $(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数都存在;

(3) $f(x,y)$ 于 $(0,0)$ 处是否可微？证明你的结论。

七. (10 分) 设 $f(x,y)=\sin(xy)$, $(x,y)\in R^2$.

(1) 证明: $f(x,y)$ 于区域 $D_a=\{(x,y);x^2+y^2<a\}$ $(0<a<+\infty)$ 上一致连续;

(2) $f(x,y)$ 是否于 R^2 上一致连续? 证明你的结论.

八. (10 分) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 维 Euclid 空间中点集 $S=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n);$ $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=a^2\}$ $(0<a<+\infty)$ 上的连续函数, 试证明:

(1) 存在 S 中的两点, 使得 f 于此两点处分别取得最大值 M 和最小值 m.

(2) 当 $n=2$ 时, 如果 $M>m$, 则对任意实数 $\eta\in(m,M)$, 存在至少 S 中两个互异的点, 使得 f 在这两点处都等于 η.