南方科技大学 SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等数学(上) A **开课单位:** 数 学 系

考试时长: 120 分钟 **命题教师:** 王融 等

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
分 值	15 分	15 分	10 分	10 分	10 分	9 分	9 分	9 分	8 分	5 分

本试卷共 10 道大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (15 pts) Determine whether the following statements are **true** or **false**? No justification is necessary.

(1) If $f'(x)$ is bounded on $(0,1)$，so is $f(x)$.

(2) Let $f(x)$ be defined on $(-\infty,+\infty)$. There must be a local maximum point of $f(x)$ between two local minimum points of $f(x)$.

(3) If $f(x)$ is differentiable on $(-1,1)$, and $f(-1)=f(1)$, then $f'(c)=0$ for some number $|c|<1$.

(4) If $f(x)$ is a continuous, even function on $[-1,1]$, then $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ is odd and differentiable on $[-1,1]$.

(5) If $f(x)$ is a continuous, periodic function on $\mathbf{R}$ (T is the period), then $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ is also a periodic function with the period T.

一、 （15分）**判断题:**

(1) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 也在 $(0,1)$内有界.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，那么 $f(x)$ 的两个（局部）极小值之间一定有一个（局部）极大值.

(3) 若函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上可微，且 $f(-1)=f(1)$，那么存在 $|c|<1$，满足 $f'(c)=0$.

(4) 若函数 $f(x)$ 是一个偶函数，且在 $[-1,1]$ 上连续，那么 $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ 是一个奇函数，且在 $[-1,1]$ 上可导.

(5) 若函数 $f(x)$ 是一个连续的周期函数（周期为 T），那么 $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ 也是一个周期为 T 的周期函数.

2. (15pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

(1) Which of the following functions is not differentiable at $x = 0$?

(A) $|x|\sin|x|$. (B) $|x|\sin(\sqrt{|x|})$. (C) $\cos|x|$. (D) $\cos\sqrt{|x|}$.

(2) Suppose that $f(x)$ is differentiable at $x = 0$ and $f(0) = 0$. Then $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3} =$

(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

(3) Suppose that $f(x)$ has a second derivative and $f'(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x} = 1$. Then

(A) $f(0)$ is a local minimum value.

(B) $f(0)$ is a local maximum value.

(C) $(0, f(0))$ is a point of inflection of the curve.

(D) $(0, f(0))$ is neither a local extrema nor a point of inflection of the curve.

(4) Suppose that $f(x)$ is defined on $(-\infty, +\infty)$. Which of the following statements is equivalent to the statement that "$f(x)$ is differentiable at $x = a$" ?

(A) $\lim\limits_{h\to 0}(f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)) = 0$.

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ exists.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2}$ exists.

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^3) - f(a)}{h^3}$ exists.

(5) Suppose that $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, and $f''(x) > 0$ for all $x \in [a, b]$. Let $M = \int_a^b f(x)\,dx$, $N = f(a)(b-a)$, and $P = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$. Then

(A) $N < P < M$. (B) $N < M < P$.

(C) $M < N < P$. (D) $M < P < N$.

二、 （15分）**单项选择题:**

(1) 下列函数中，在$x = 0$ 处不可导的是

(A) $|x|\sin|x|$. (B) $|x|\sin(\sqrt{|x|})$. (C) $\cos|x|$. (D) $\cos\sqrt{|x|}$.

(2) 若函数$f(x)$ 在$x = 0$ 处可导，且 $f(0) = 0$. 那么 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3} =$

(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

(3) 若函数$f(x)$ 有二阶导数且$f'(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x} = 1$. 那么

(A) $f(0)$ 是（局部）极小值.

(B) $f(0)$ 是（局部）极大值.

(C) $(0, f(0))$ 是曲线的一个拐点.

(D) $(0, f(0))$ 既不是（局部）极值点，也不是拐点.

(4) 设函数$f(x)$ 在$\mathbf{R}$ 上有定义. 则下面哪一项与"$f(x)$ 在$x = a$ 处可导" 等价?

(A) $\lim\limits_{h\to 0}(f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)) = 0$.

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}$ 存在.

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^3)-f(a)}{h^3}$ 存在.

(5) 已知对任意 $x\in[a,b]$，都有 $f(x)>0$，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$. 定义$M=\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$，$N=f(a)(b-a)$，$P=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$. 那么

(A) $N<P<M$.　　(B) $N<M<P$.

(C) $M<N<P$.　　(D) $M<P<N$.

3. (10 pts) Let $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$.

(1) Identify the inflection points and local maxima and minima of the function that may exist.

(2) Identify the horizontal, vertical, or oblique asymptotes that may exist.

(3) Graph the function.

三、（10分）考虑函数 $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$.

(1) 求所有（局部）极值和拐点.

(2) 求所有水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线.

(3) 作出上述函数的简略图.

4. (10 pts) Find the limits.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin 5x}{x}+\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2+2x-3}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\dfrac{n}{n}\right)^2}\right)$.

四、（10分）求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin 5x}{x}+\dfrac{x^3+x^2-2}{x^2+2x-3}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\dfrac{n}{n}\right)^2}\right)$.

5. (10 pts) Evaluate the definite integral.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}|a-t|t^2\,dt$, where $a\in(-1,1)$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$.

五、（10分）求定积分.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}|a-t|t^2\,dt$, where $a\in(-1,1)$.

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx.$

6. (9 pts) Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by $x = 12(y^2-y^3)$ $(0 \le y \le 1)$ and y-axis about the line $y = 2$.

六、（9分）曲线 $x = 12(y^2-y^3)$ $(0 \le y \le 1)$ 和 y 轴围成一个区域. 把这个区域绕直线 $y = 2$ 旋转可得一个旋转体，求此旋转体的体积.

7. (9 pts) Use the linear approximation of $f(x) = \tan x$ at $a = \frac{\pi}{6}$ to estimate the value of $\tan\frac{11\pi}{60}$. Comparing the estimation with the true value, which one is larger ?

七、（9分）用在点$\frac{\pi}{6}$ 处的线性近似来估计 $\tan\frac{11\pi}{60}$. 把获得的近似值与精确值相比较，哪一个值更大?

8. (9 pts) Find the area of the region in the first quadrant bounded on the left by the y-axis, below by the curve $x = 2\sqrt{y}$, above left by the curve $x = (y-1)^2$, and above right by the line $x = 3-y$.

八、（9分）求由 y 轴（左边界），$x = 2\sqrt{y}$ （下边界），$x = (y-1)^2$ （左上边界）和$x = 3-y$（右上边界）在第一象限所围成的区域面积.

9. (8 pts) Let $F(x) = \displaystyle\int_{2019}^{x^2} \cos(2t^2)\,dt$. Find all the critical points for $F(x)$ on $[-1, 1]$.

九、（8分）已知 $F(x) = \displaystyle\int_{2019}^{x^2} \cos(2t^2)\,dt$，求 $F(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的所有临界点.

10. (5 pts) (**Use Rolle's theorem to prove the mean value theorem.**) If the function $f(x)$ is continuous on $[a, b]$, and differentiable on (a, b), prove that there exists a number c in (a, b), such that

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

十、（5分）使用罗尔定理证明拉格朗日中值定理：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 上可微，证明：存在 (a, b) 中的一点 c，使得

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$