

# 南方科技大学

## 2022-2023 年秋季学期 数学分析 III 期末试卷 (A 卷)

一、求下面幂级数的收敛半径. (每小题 6 分, 共 18 分)

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n \cdot x^n$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a^n x^{3n+1}$  ( $a > 0$ ); (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cdot x^n$ .

二、(本题满分 15 分) 在  $R^3$  中, 令  $F = (xe^{-y} + e^{-x}, ye^{-z} + e^{-y}, ze^{-x} + e^{-z})$ . 证明:  $F$  是旋度场, 并求出  $F$  的一个向量势.

三、(本题满分 15 分) 把函数  $f(x) = x^{1/2} - 2x^{3/2} + x^{5/2}$  按  $1-x$  的正整数幂展开成幂级数.

四、(本题满分 15 分) 设  $a, b, c$  是正实数, 定义

$$a_n = a^{1/n} - b^{1/n} - c^{1/n} + 1.$$

(1) 证明: 若  $a = bc$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛;

(2) 证明: 若  $a \neq bc$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

五、(本题满分 10 分) 对正整数  $n$ , 定义  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+nx}$ .

(1) 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上不一致收敛;

(2) 证明: 对任意  $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  在  $[\delta, \frac{\pi}{2}]$  上一致收敛.

六、(本题满分 10 分) 证明: 反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x \cdot \sin^3 x}{x+1} dx$$

收敛.

七、(本题满分 10 分) 设  $a_n = \int_0^{\pi} \sqrt{x} \cos nx dx$ , 求  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ .

八、(本题满分 7 分) 求反常积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x} dx$$

的值.