MA215 Probability Theory

Assignment 16

1. Suppose that X and Y have joint p.d.f. $f(x,y)$. Let $f_Y(y)$ be the marginal p.d.f. of Y. Show that for $f_Y(y) > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} P\{X \leqslant x \mid y < Y \leqslant y + \varepsilon\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du.$$

(This is why we define $P\{X \leqslant x \mid Y = y\} \triangleq \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du$ and call $f_{X|Y}(x \mid y) \triangleq \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ the conditional probability density function of X, given that $Y = y$.)

2. 设 (X,Y) 服从圆域 $G: x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上的均匀分布. 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x \mid y)$.

3. 将长度为 d 的一根木棒任意截去一段, 再将剩下的木棒任意截为两段. 求这三段木棒能构成三角形的概率.

4. 假设在某个系统中, 元件和备用件的平均寿命都是 μ. 如果元件失效, 系统自动用其备件替代, 但替换出错的概率为 p. 求整个系统的平均寿命.