一、（20分）单项选择题:

(1) 下列哪一个向量与曲线

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 1/t^2)\mathbf{i} + (1 - 3/t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

在点 $P = (2, -2, 1)$ 处的切线垂直?

(A) $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 1 \rangle$.　　(B) $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 2 \rangle$.

(C) $\mathbf{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$.　　(D) $\mathbf{v} = \langle -1, -2, -2 \rangle$.

(2) 函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 2 \rangle$ 的方向的方向导数是

(A) 12.　　(B) 6.

(C) 4.　　(D) 2.

(3) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^2}$$

(A) 对任意实数 a 都收敛.

(B) 当 $a \in (-1, 1)$ 时收敛.

(C) 当 a 为任意正实数时收敛.

(D) 当 a 为任意负实数时收敛.

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1 + \sin(xy))^{\frac{1}{x^2+y^2}} =$

(A) 0 .　　(B) 1 .

(C) e .　　(D) 极限不存在.

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta =$

(A) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y)\,dx\,dy$.

(B) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y} f(x, y)\,dx\,dy$.

(C) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-x}^{x} f(x, y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$.

(D) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x} f(x, y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$.

二、（20分）填空题:

(1) 曲面 $xyz + e^{x+z} = 0$ 在点 $(1, 1, -1)$ 处的切平面的方程是________.

(2) 若函数$f(x)$的麦克劳林级数为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+4)2^n}$, 则 $f^{(6)}(0) =$ ________.

(3) 曲线 $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\sin t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 的曲率 $\kappa =$ ________.

(4) 若函数 $y = y(x)$ 的参数方程为

$$x = 2t + \ln^2 t, \quad y = (t + \ln t)^2, \quad t > 0,$$

则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} =$ ________.

(5) $\int_0^1 \int_x^1 x e^{-y^3}\, dy dx =$ ________.

三、（10分）求函数 $f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 3x - 12y$ 的所有极值.

四、（10分）

(1) 求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n+1}}{(n+2023)\ln n}$ 的收敛域.

(2) x 取哪些值时上述级数绝对收敛，取哪些值时条件收敛.

五、（10分）若上半球 D: $x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0$ 的密度函数为 $\delta(x,y,z) = z$，计算此上半球的质心.

六、（10分）已知向量场

$$\mathbf{F} = (y\sin z + 2)\mathbf{i} + (x\sin z)\mathbf{j} + (xy\cos z)\mathbf{k}.$$

是保守场，求 $\mathbf{F}$ 的势函数，并计算曲线积分

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\ .$$

这里 C 是从点 $A(1,-2,\pi/3)$ 到点 $B(2,1,\pi/4)$ 的光滑曲线.

七、（10分）向量场

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (z + xy^2)\mathbf{i} + (2y + y^3)\mathbf{j} - 4zy^2\mathbf{k}$$

的定义域 V 是夹在如下曲面 S_1 和 S_2 之间的闭区域，这里

$$S_1 := \{(x,y,z) : z = (x^2+y^2)^2 - 1\},$$
$$S_2 := \{(x,y,z) : z = 4 - 4(x^2+y^2)\}.$$

使用散度定理 来计算向量场 $\mathbf{F}$ 通过 V 的边界从内向外的通量(flux).

八、（10分）设曲面 S 是椭圆抛物面 $z = x^2 + 4y^2$ 在平面 $z = 1$ 下方的部分. 曲面 S 的内法向量 $\mathbf{n}$ 的方向如下图所示. 计算

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma,$$

这里

$$\mathbf{F} = (y + x^2\ln(x^4+1))\mathbf{i} + (e^{\sin y} - xz)\mathbf{j} + (xz^2 + \cos(z^2+1))\mathbf{k}.$$