SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等代数 I　　　　开课单位: 数学系

考试时长: 120 分钟　　　　命题教师:

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
分 值	32 分	12 分	8 分	10 分	12 分	14 分	6 分	6 分

本试卷共 (8) 大题, 满分 (100) 分.

考生答卷应使用中文.

答卷要求书写规范、字迹清晰易辨认、解题过程要求语句完整、逻辑通顺, 数学符号和术语使用规范.

以下总设 K 为 $\mathbb{C}$ 的子域, m, n, s 表示正整数. 数学记号与课程讲义相同, 有疑问可以询问监考老师.

第一部分 (共 44 分)

对于这一部分的每一个问题, 考生只需直接写出每道题的答案, 而不必做任何解释.

第 1 大题 (本题共 32 分) 请直接写出以下问题的答案. (不需要做进一步解释.)

1. 令 $X=\{0, 1, \pi, -\frac{\pi}{2}, -\pi\}$, $Y=\mathbb{R}$, $A=\{0, -\frac{\pi}{2}\}\subseteq X$. 定义映射 $f: X\to Y$; $x\mapsto \sin(x)$. 则 $f^{-1}(f(A))=$_____.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$, $a\in K$. 假设存在非零向量 $X\in K^{3\times 1}$ 使得 $AX=aX$. 则 a 的所有可能取值有_____.

3. 设 $a, b, c, d\in K$ 满足 $ad-bc\neq 0$. 则矩阵 $\begin{pmatrix}a & -b\\ c & -d\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为 _____.

4. 写出两个相同大小的方阵 A, B, 它们均不可逆, 但 $A+B$ 可逆.

设 X, Y 为两个集合, $|X|=3$, $|Y|=4$. 则定义域为 X 且陪域为 Y 的单射共有 _____ 个.

6. 令 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 则 $A^n=$_____.

7. 写出一个映射 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, 要求它是满射但不是单射.

8. 对于 $i=1, 2$, 设 $a_i, b_i, c_i, d_i\in\mathbb{R}$. 为了使方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$ 是空间中经过原点的一条直线的方程, 常数 a_i, b_i, c_i, d_i 应满足的充分必要条件是 _____.

第 2 大题 (本题共 12 分) 对下面每个论断, 说明其正确与否, 正确的可标记为 T, 错误的可标记为 F. (不需要解释理由.)

1. 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 均为非空集合之间的映射. 如果 $g \circ f$ 有左逆, 且 Y 是有限集, 则 Z 一定是有限集.
2. 设 $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$. 如果齐次线性方程组 $AX = 0$ 没有非零解, 则对于任意 $b \in K^{m\times 1}$, 线性方程组 $AX = b$ 最多只有一个解.
3. 设 $A, B \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$. 则 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ 当且仅当存在可逆矩阵 $P \in \mathbf{M}_n(K)$ 使得 $B = AP$.
4. 设 $B \in \mathbf{M}_{3\times 4}(K)$, $A = B^T B$. 则齐次线性方程组 $AX = 0$ 一定有非零解.
5. 设 V 是 K^n 的子空间, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 是 V 的一组基. 则向量组 v_1, v_3, v_4 线性无关.
6. 设 V 是 K^n 中的 4 维子空间, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 是 V 中的向量组. 如果 v_1, v_2, v_3 线性无关, v_3, v_4, v_5 也线性无关, 那么 v_1, v_2, v_4, v_5 一定线性相关.

第二部分 (共 56 分)

对于下面的每一个问题, 考生需要尽可能详尽地写出答题细节, 以使每道题的解答清晰完整.

第 3 大题 (本题共 8 分) 设 $t \in \mathbb{R}$. 假设 $\mathbb{R}^3$ 中的向量组 α, β, γ 线性相关, 其中

$$\alpha = (t, 1, 0), \ \beta = (1, t, 1), \ \gamma = (0, 1, t).$$

求 t 的所有可能取值.

第 4 大题 (本题共 10 分)

设 $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathbf{M}_{m\times s}(K)$, $C \in \mathbf{M}_{n\times s}(K)$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

1. 证明 $\mathrm{rank}(M) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(C)$, 并举例说明 $>$ 和 $=$ 的情况均有可能出现.
2. 证明: 如果 $\mathscr{C}(B) \subseteq \mathscr{C}(A)$, 则 $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(C)$.

第 5 大题 (本题共 12 分) 假设 4 阶方阵 A 的秩为 2. 假设线性方程组 $AX = b$ 有三个解 η_1, η_2, η_3 线性无关, 且满足

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 - 2\eta_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad 3\eta_1 + 5\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. 求零化空间 $\mathcal{N}(A)$ 的维数.
2. 求 η_1, η_2, η_3.
3. 求 $AX=0$ 的一个基础解系.
4. 求 $AX=b$ 的通解.

第 6 大题 (本题共 14 分) 设

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

设 $\mathcal{L}\subseteq \mathbf{M}_3(K)$ 是由 A_1, A_2, A_3 的所有 K-线性组合构成的子集.

1. 写出 $\mathcal{L}$ 中包含的所有行最简形矩阵. (若 L 中没有行最简形矩阵, 回答"没有"即可.)
2. 证明: 集合 $\mathcal{L}$ 之中的任意两个矩阵均可交换.
3. 证明: 如果矩阵 $D\in\mathbf{M}_3(K)$ 与 $\mathcal{L}$ 中的矩阵均可交换, 则 $D\in\mathcal{L}$.
4. 用 $\mathbf{0}_{3\times 3}$ 表示 3×3 的零矩阵. 在 $\mathbf{M}_3(K)$ 中是否存在矩阵 A 使得矩阵方程 $AX=\mathbf{0}_{3\times 3}$ 的解集恰好等于集合 $\mathcal{L}$? 为什么?

第 7 大题 (本题共 6 分) 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ 满足以下三个条件:

(a) A 的每一列中 n 个元素之和为 0.

(b) A 的对角线上每个元素均大于 0. 即, 对于每个 $i\in[\![1,n]\!]$, 均有 $a_{ii}>0$.

(c) A 的非对角线元素均小于 0. 即, 对于任意 i, $j\in[\![1,n]\!]$, 当 $i\neq j$ 时总有 $a_{ij}<0$.

1. 证明 A 不可逆.
2. 证明 $\operatorname{rank}(A)=n-1$.

第 8 大题 (本题共 6 分) 设 $f: X\to Y$ 为两个非空集合间的映射.

1. 证明: 存在适当的集合 W 和映射 $g: X\to W$, $h: W\to Y$ 同时满足以下三个条件
   (a) g 是满射;
   (b) h 是单射;
   (c) 图表
   $$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & W \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$
   可交换.

2. 证明: 存在适当的集合 Z 和映射 $\alpha : X \to Z, \beta : Z \to Y$ 同时满足以下三个条件

(a) α 是单射;

(b) β 是满射;

(c) 图表
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$
可交换.