第一章 概率

§1 引言

§2 样本空间

§3 概率测度

§4 概率计算：计数方法

§5 条件概率(conditional probability)

§6 独立性

Monty Hall Problem

Monty Hall Problem源自美国电视娱乐节目，曾在全美引起了相当大的争论。最后以该节目主持人的名字将该问题命名为Monty Hall Problem。

§5 条件概率

例1：一个家庭中有两个小孩，已知至少一个是女孩，问两个都是女孩的概率是多少？

（假定生男生女是等可能的）

例1：一个家庭中有两个小孩，已知至少一个是女孩，问两个都是女孩的概率是多少？

（假定生男生女是等可能的）

由于事件A已经发生，所以这时试验的所有可能结果只有三种，而事件B包含的基本事件只占其中的一种，所以有

$$P(B|A)=\frac{1}{3}$$

$P(B|A)$表示A发生的条件下，B发生的条件概率.

例（抽门票，续） 在M个人抽N张门票的问题中，若某人第k个抽，但在此之前已知前k-1个均未抽到门票，问此时他抽到的概率是否有变化?

分析 设A："第k个人抽到门票"

B："前k-1个人均未抽到门票"

此时A发生的概率显然为 $\dfrac{N}{M-k+1}$，即发生了变化.

直观分析： 此时的概率应与$P(B)$, $P(AB)$均有关：

$$P(B)=\frac{\binom{M-k+1}{N}}{\binom{M}{N}},\qquad P(AB)=\frac{\binom{M-k}{N-1}}{\binom{M}{N}}$$

而 $$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\binom{M-k}{N-1}}{\binom{M-k+1}{N}}=\frac{N}{M-k+1}$$

此时A发生的概率已不是原来意义的概率，记为P(A|B).

§5 条件概率

(一)条件概率

定义 设 A, B 是两个事件，且 $P(B) > 0$，记

$$P(A \mid B) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)}$$

称为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**.

注

① 当 $P(B) = 0$ 时，条件概率 $P(A \mid B)$ 毫无意义

② 条件概率 $P(A \mid B)$ 的直观理解：

B 发生带来的“信息”对 A 的“推断”的新认识

③ “$A \mid B$” 不是一个事件.

④ $P(A \mid B) \geq P(AB)$

§5 条件概率

条件概率$P(\cdot|B)$的基本性质：设$P(B)>0$，有

- 非负性　对于任一事件A有$P(A|B)\geq 0$
- 规范性　对于必然事件Ω有$P(\Omega|B)=1$
- 可列可加性　设$\{A_k\}$是两两不相容事件列，则有

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k|B)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k|B)$$

证 ③ $$P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k|B)=\frac{P\{(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\cap B\}}{P(B)}=\frac{P\{\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\cap B)\}}{P(B)}$$

$\because$ $\{A_k\}$两两不相容 $\therefore$ $\{A_k\cap B\}$亦两两不相容

$$\therefore\quad P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k|B)=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k\cap B)}{P(B)}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k|B)$$

§5 条件概率

条件概率 $P(\cdot|B)$ 的基本性质：设 $P(B)>0$，有

- ① **非负性** 对于任一事件 A 有 $P(A|B)\geq 0$
- ② **规范性** 对于必然事件 Ω 有 $P(\Omega|B)=1$
- ③ **可列可加性** 设 $\{A_k\}$ 是两两不相容事件列，则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \,\Big|\, B\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k|B)$$

问 这三条性质说明了一个什么问题？

条件概率也是一种概率

分析 $\because$ B 已发生，所以样本空间变为

$$\tilde{\Omega} \triangleq B\cap\Omega$$

事件域

$$\tilde{\mathscr{A}} \triangleq B\cap\mathscr{A}=\{B\cap A \mid A\in\mathscr{A}\}$$ （$\mathscr{A}$ 是 Ω 的事件域）

对于事件 $A\in\tilde{\mathscr{A}}$ 概率为

$$P_B(A)\triangleq P(A|B)$$

§5 条件概率

(二)乘法定律(公式)

由条件概率$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\quad (P(B)>0)$推得**乘法公式**

$$P(AB)=P(A|B)P(B)$$

对称地有

乘法公式的意义?

$$P(AB)=P(B|A)P(A)$$
$$=P(A|B)P(B)\quad (P(A)>0,P(B)>0)$$

例 第一个袋中有黑、白球各2只,第二个袋中有黑、白球各 3 只. 先从第一个袋中任取一球放入第二个袋中,再从第二个袋中任取一球. 求第一、二次均取到白球的概率.

解 记$A_i=\{$第i次取到白球$\},\ (i=1,2)$. 则

$$P(A_1)=\frac{1}{2},\quad P(A_2|A_1)=\frac{4}{7}$$

由乘法公式求得

$$P(A_1A_2)=P(A_2|A_1)P(A_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2}{7}$$

条件概率乘法公式的说明

① 在概率论发展初期，古典概型中的加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

及乘法公式

$$P(AB)=P(A\mid B)P(B)$$

是概率论的两条基本定理，是概率论深入发展的起点

② 一般地,若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$=\cdots=P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}\mid A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2\mid A_1)P(A_1)$$

③ 条件概率是定义的，但条件概率的值通常是根据实际问题中的具体意义确定的

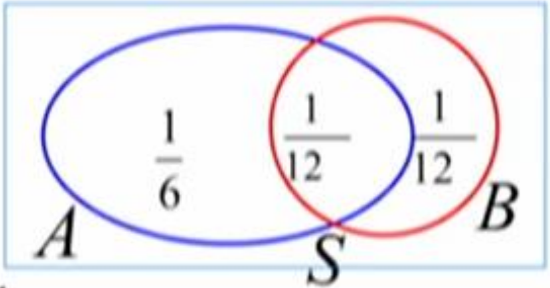
例3：$P(A)=1/4, P(B\mid A)=1/3, P(A\mid B)=1/2,$

求 $P(A\cup B), P(\bar{A}\mid A\cup B).$

例 3：$P(A)=1/4, P(B\mid A)=1/3, P(A\mid B)=1/2,$

求 $P(A\cup B), P(\bar{A}\mid A\cup B).$

解：$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=1/12.$



$$P(AB)=P(A\mid B)P(B)\Rightarrow P(B)=1/6$$

$$P(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$$

$$P(\bar{A}\mid A\cup B)=1-P(A\mid A\cup B)=1-\frac{1/4}{1/3}=\frac{1}{4}.$$

(三)全概率定律(公式)

问题 如何将一个复杂概率计算问题分解为简单概率计算之和?

样本空间的分划:

设Ω为样本空间,若事件$B_1, B_2, \cdots, B_n$满足:

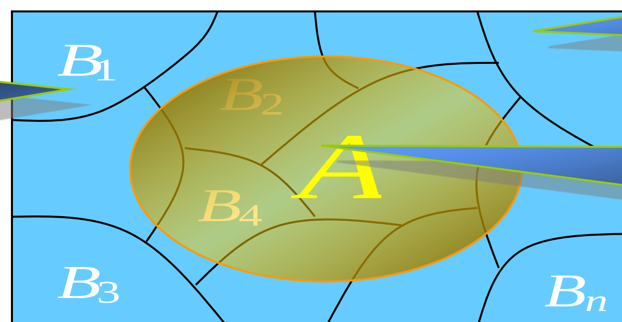
① $B_1, B_2, \cdots, B_n$**两两不相容,即**

$$B_iB_j = \Phi \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

② $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$

则称$\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$为样本空间Ω的一个分划.

一般要求诸$P(B_i) > 0$



概率相当于“面积”

$P(A)$等于这些重叠“面积”之和

想法 将$P(A)$的计算分解到$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_n$上计算然后求和.

问 怎样分解计算?

(三)全概率定律(公式)

问题 如何将一个复杂概率计算问题分解为简单概率计算之和?

样本空间的分划:

设Ω为样本空间,若事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 满足:

① $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两不相容,即

$$B_iB_j = \Phi \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

② $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$

则称 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ 为样本空间Ω的一个分划.

对任何事件 A 有

$$A = A \cap \Omega = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n$$

$$P(A) = P(AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n)$$

$$= P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n)$$

$$= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

全概率公式

(Law of Total Probability)

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

例 袋中有a只红球b只白球，先从袋中任取一球，记下颜色后放回，同时向袋中放入同颜色的球 1 只，然后再从袋中取出一球. 求第二次取到白球的概率.

如果加入 c 个同色球有什么结果？

解 记

$$A=\{\text{第 2 次取到白球}\}$$
$$B_1=\{\text{第 1 次取到白球}\}$$
$$B_2=\{\text{第 1 次取到红球}\}$$

则B_1, B_2是Ω的一个分划 由全概率公式有

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)$$
$$=\frac{b+1}{a+b+1}\cdot\frac{b}{a+b}+\frac{b}{a+b+1}\cdot\frac{a}{a+b}$$
$$=\frac{b}{a+b}$$

第二次取到白球的概率与第一次取到白球的概率相等，与前面放入什么颜色的球无关

例 有10个袋，其中甲袋二个,每袋中有红球、白球各2个;乙袋三个,每袋中有红球3个、白球2个;丙袋五个,每袋中有红球2个、白球3个. 从十个袋中任取一袋,再从袋中任取一球, 求取到白球的概率.

解 记B_1, B_2, B_3分别表示取到甲、乙、丙袋

A = { 取到白球 }

由全概率公式有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A \mid B_i)P(B_i)$$

$$= \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{4} + \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{5} + \frac{5}{10}\cdot\frac{3}{5}$$

$$= \frac{13}{25}$$

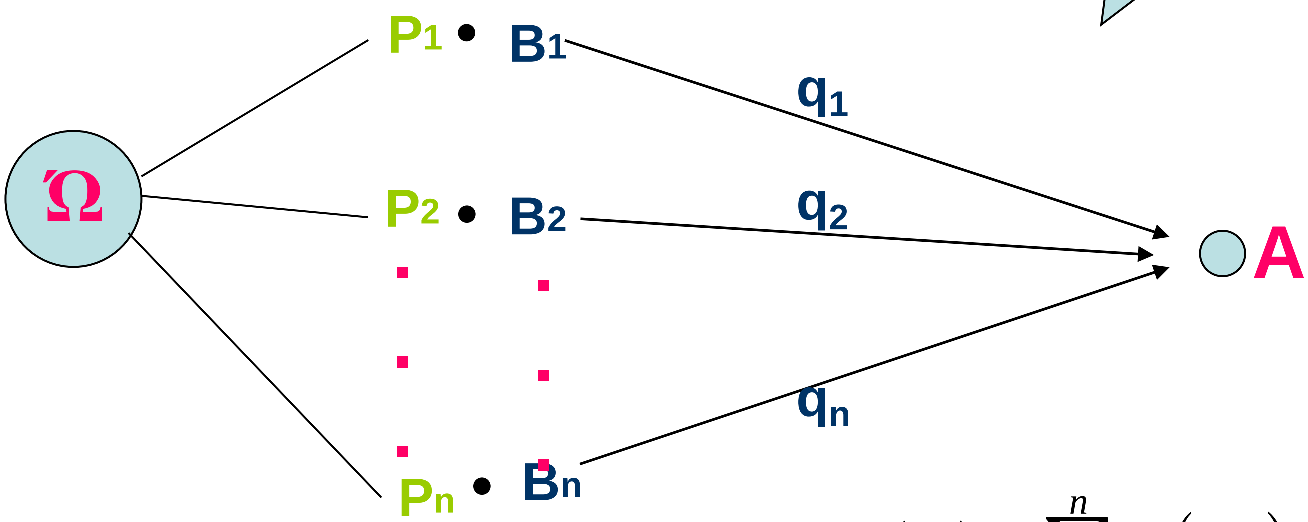
全概率公式是概率的加权平均

从甲、乙、丙袋取到白球的概率

* 全概率公式可由以下框图表示:

设 $P(B_j)=p_j$, $P(A|B_j)=q_j$, $j=1, 2, \cdots, n$

易知:
$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$$



$$P(A)=\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)$$

全概率公式应用：敏感问题调查

常常会发生被调查者拒绝回答或不真实回答的情况.

沃纳（Warner）于1965 年提出**随机回答法**.

思想："愈少泄漏问题的答案实质, 愈能较好合作".

比如为被调查者设定两个问题:

Q_1：你在期末考试中作弊了吗?

Q_2：你没在期末考试中作弊吗?

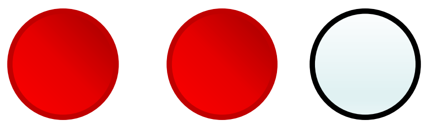
被调查者回答问题中的哪个完全由随机化的方法确定, 且只有被调查者本人知道他(她)回答的是哪一个问题.

全概率公式应用：敏感问题调查

假设　　　　　　　　　　　　　　不妨令

A_1：抽中：你在期末考试中作弊了吗？　B_1：回答为“是”

A_2：抽中：你没在期末考试中作弊吗？　B_2：回答为“不是”



随机装置

被调查者在期末考试中作弊的概率 $p = 3P(B_1) - 1$

设被调查的人数为n，其中回答“是”的人数为m

则某校在期末考试中作弊人数比例的近似值 $r = \dfrac{3m}{n} - 1$

一般地，如果 $\boxed{P(A_1) = q}$，则 $r = \dfrac{1}{2q-1}[\dfrac{m}{n} - (1-q)]$

讨论？

(四) Bayes公式

设$\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$为样本空间Ω的一个分划，且

$$P(A) > 0, P(B_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则由乘法公式有

$$P(B_i \mid A)P(A) = P(A \mid B_i)P(B_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

由全概率公式有

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)$$

Bayes公式

$$\boxed{P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

例 某工厂的一、二、三车间都生产同一产品,产量分别占总产量的15%,80%,5%,三个车间的次品率分别为2%,1%,3%.现从汇总起来的产品中任取一个，经检查是次品,判断该次品是哪个车间生产的可能性较大?

解 记 $A=\{$取到次品$\}$

$B_i=\{$取到的产品是i车间生产的$\}$, $i=1,2,3$

由全概率公式有 $P(A)=\sum_{j=1}^{3}P(A|B_j)P(B_j)=0.0125$

由 *Bayes* 公式有

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.02\times0.15}{0.0125}=0.24$$

$$P(B_2|A)=\frac{0.01\times0.80}{0.0125}=0.64$$

$$P(B_3|A)=\frac{0.03\times0.05}{0.0125}=0.12$$

Bayes 推断

可见该次品是第二车间生产的可能性较大.

Bayes 公式的实际意义

假定$B_1, B_2, \cdots, B_n$为导致试验结果的“原因”

称 $P(B_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为先验概率

若试验产生事件 A，则要探讨事件发生的“原因”

$$P(B_i \mid A) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

称$P(B_i \mid A)$为后验概率，称 $P(A \mid B_i)$为原因概率

① 后验概率可以通过 Bayes 公式进行计算

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

② Bayes 方法广泛应用于网络、分类、诊断、估计、检验、判别、推理等方面

实例：计算机自动辅助诊断系统

假定$B_1, B_2, \cdots, B_n$为各种“疾病”.

应用统计方法确定先验概率：

$$P(B_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

应用医学知识确定原因概率：

$$P(A \mid B_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

对人进行观察与检查, 可以确定某个指标 A,如体温、脉搏、血液中转氨酶含量等.

应用 Bayes 公式, 计算机可计算出后验概率

$$P(B_i \mid A) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

对应于较大 $P(B_i \mid A)$的“疾病”B_i可提供给医生作进一步的临床诊断.

例（测谎试验） + / -: 测谎仪显示受测者撒谎/未撒谎

T / L: 受测者说的是真话/假话

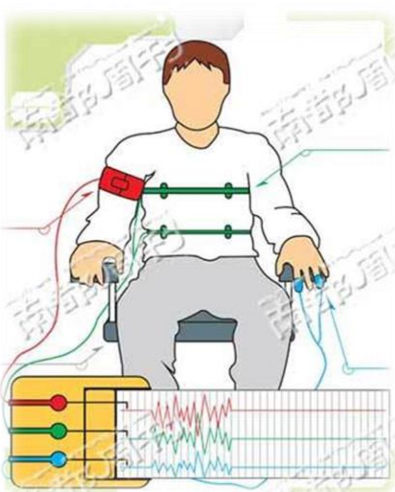
已知 $P(+|L)=0.88, P(-|T)=0.86$，又设人群中 $P(T)=0.99$，现在若有一人在测谎中显示“+”性，问测谎仪出错的概率是多少?

解 由 Bayes 公式,此人说真话的概率为

$$P(T|+)=\frac{P(+|T)P(T)}{P(+|T)P(T)+P(+|L)P(L)}$$

$$=\frac{0.14\times 0.99}{0.14\times 0.99+0.88\times 0.01}$$

$$=0.94$$



可见，在大量群体中使用测谎仪有一定程度的危险性

例 用某种诊断法诊断癌症,记

$A=\{$判断被检验者患有癌症$\}$

$C=\{$被检验者患有癌症$\}$

已知 $P(A\mid C)=0.95, P(\bar{A}\mid\bar{C})=0.90$,又设人群中 $P(C)=0.0004.$ 现在若有一人被诊断患有癌症，问此人真正患有癌症的可能性有多大?

解 由 Bayes 公式,此人真正患有癌症的概率为

$$P(C\mid A)=\frac{P(A\mid C)P(C)}{P(A\mid C)P(C)+P(A\mid\bar{C})P(\bar{C})}$$

$$=\frac{0.95\times0.0004}{0.95\times0.0004+0.1\times0.9996}$$

$$=0.0038$$

可见，虽然检验法相当可靠，但被诊断患有癌症而真正患有癌症的可能性并不大

例：一单位有甲、乙两人，已知甲近期出差的概率为80%，若甲出差，则乙出差的概率为20%；若甲不出差，则乙出差的概率为90%。(1)求近期乙出差的概率；(2)若已知乙近期出差在外，求甲出差的概率。

解：设A={甲出差}，B={乙出差}

AB与$\bar{A}B$不相容

已知 $P(A)=0.80,\quad P(B|A)=0.20,\quad P(B|\bar{A})=0.90$

(1) $P(B)=P(AB\cup\bar{A}B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$

$=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

$=0.8\times0.2+0.2\times0.9=34\%$

全概率公式

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(AB)}{P(AB)+P(\bar{A}B)}=\dfrac{16}{34}=\dfrac{8}{17}$

Bayes公式

§5 条件概率

例4：一盒中有5个红球，4个白球，采用不放回抽样，每次取一个，取3次.

（1）求前两次中至少有一次取到红球的概率；

（2）已知前两次中至少有一次取到红球，求前两次中恰有一次取到红球的概率；

（3）求第1，2次取到红球第3次取到白球的概率.

解：令$A_i=\{$第i次取到红球$\}$，$i=1,2,3$

$B=\{$前两次至少有一次取到红球$\}$，

$C=\{$前两次恰有一次取到红球$\}$.

(1)$P(B)=1-P(\bar{B})=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)=1-\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{5}{6}$.

(2)$P(C|B)=1-P(\bar{C}|B)=1-\frac{P(B\bar{C})}{P(B)}=1-\frac{P(A_1A_2)}{P(B)}=\frac{2}{3}$.

(3)$P(A_1A_2\bar{A}_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1A_2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{10}{63}$.

§5 条件概率

- 例5：某人参加某种技能考核，已知第1次参加能通过的概率为60%；若第1次未通过，经过努力，第2次能通过的概率为70%；若前二次未通过，则第3次能通过的概率为80%。求此人最多3次能通过考核的概率。

- 例5：某人参加某种技能考核，已知第1次参加能通过的概率为60%；若第1次未通过，经过努力，第2次能通过的概率为70%；若前二次未通过，则第3次能通过的概率为80%。求此人最多3次能通过考核的概率。

解：令$A_i=\{$第i次通过考核$\}$，$i=1,2,3$

$A=\{$最多三次通过考核$\}$

则 $\overline{A}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$

$$=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=1-0.4\times0.3\times0.2=0.976.$$

§5 条件概率

作业：

教材 P22: 46,53,54,63

补充题：

1. 请用本节所讨论的工具给出 Monty Hall 问题（即：三扇门问题）的解答。

2. 据以往资料表明,某一 3 口之家,患某种传染病的概率有以下规律:

$$P\{\text{孩子得病}\}=0.6,$$

$$P\{\text{母亲得病}|\text{孩子得病}\}=0.5,$$

$$P\{\text{父亲得病}|\text{母亲及孩子得病}\}=0.4.$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

3. 对以往数据分析结果表明,当机器调整得良好时，产品的合格率为 0.98；而当机器发生某种故障时，产品的合格率为 0.55．每天早上机器开动时，机器调整良好的概率为 0.95．试求:已知某日早上的第一件产品是合格品时，机器调整得良好的概率.