无人机视觉目标跟踪系统的状态估计与误差分析

0. 项目背景

假设你正在设计一个无人机（Observer）的视觉跟踪系统，用于估计另一架目标无人机（Target）的位置p_T和其自身的特征尺度l(Characteristic Scale).

已知:

1. 观测模型：我们通过单目相机观测目标，得到归一化的方向向量q_{ln}。几何关系为:

$$p_T(t) = p_O(t) + l \cdot q_{ln}(t)$$

其中p_O是已知的观察者位置。

2. **运动模型**：目标无人机的运动通常可以用一个m阶积分器链来描述（例如：$m=1$代表匀速模型，$m=2$代表匀加速模型）。状态向量x_k定义为包含**目标位置及其m阶导数**，以及**静态特征尺度l**的列向量:

$$x_k = \begin{bmatrix} p_k \\ v_k \\ \vdots \\ p_k^{(m)} \\ l_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3(m+1)+1}$$

其中$p_k, v_k \cdots \in \mathbb{R}^3$均为三维向量，$l_k \in \mathbb{R}^1$为标量。

其中m阶积分链的连续时间状态方程可以表示为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\omega}$$

其中$\boldsymbol{A}$为一幂零矩阵,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\omega}_n$是过程高斯噪声，仅仅在最高阶处有值，表达为$\boldsymbol{\omega}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q}_n)$，其中

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \dots & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \dots & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \dots & \mathbf{Q}_{3\times3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

我们设计了一个线性状态观测器。请根据以下引导，完成系统的建模、稳定性证明、误差分析。

第一部分：系统建模 (System Modeling)

为了在计算机中处理，我们需要将连续物理系统离散化。定义系统状态向量x包含目标位置p_T及其直到m阶的导数，以及特征尺度l:

$$x = [p_T^\top, \dot{p}_T^\top, \dots, (p_T^{(m)})^\top, l]^\top \in \mathbb{R}^{3(m+1)+1}$$

问题 1：离散化状态方程

假设采样时间为Δt，请根据泰勒展开写出系统的离散时间状态转移方程：

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + \Gamma u_{tr} + \omega_k$$

请写出状态转移矩阵Φ_k的具体形式（以分块矩阵表示）以及Γ的具体形式。

注意：u_{tr}是由于模型截断（只保留到m阶）产生的截断误差（Truncation Error），ω_k是随机噪声。

$$\boldsymbol{u}_{tr} = \frac{\boldsymbol{p}^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\Delta t^{m+1}$$

> *【提示】*
>
> *对于m阶积分器，位置$p(t+\Delta t)$可以表示为$p(t) + \dot{p}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{p}(t)\Delta t^2 + \dots$。对于常数$l$，其导数为$0$。矩阵$\Phi$应该是一个上三角形式的矩阵，反映了低阶导数如何由高阶导数更新。*

第二部分：系统稳定性证明 (Stability Analysis)

一个观测器能够工作的核心前提是系统必须是**可观的（Observable）和可控的（Controlled）**（或者至少是可镇定的）。即便你没有学过卡尔曼滤波，利用线性代数知识也可以判断系统是否“有解”。注意卡尔曼滤波的能控性和能观性矩阵构建需要考虑N个时间内的总能控/能观性矩阵。

问题 2.1：运动子系统的可控性 (Controllability)

假设过程噪声ω_k仅作用于最高阶导数$p_T^{(m)}$（即无人机的机动突变）。 请根据能控性矩阵证明运动子系统是完全可控的。

$$\mathcal{C}_T = \left[\boldsymbol{Q}_m^{1/2}, \quad \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Q}_m^{1/2}, \quad \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{Q}_m^{1/2}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{\Phi}^m\boldsymbol{Q}_m^{1/2}\right]$$

问题 2.2：参数l的可观性 (Observability)

系统的观测方程为线性化后的形式： $y_k = H_k x_k + \nu_k$ ，其中$H_k = [I_3, 0, \ldots, -q_{ln}(k)]$。 试根据总可观性矩阵证明其可观性

$$\mathcal{O}_N = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_k \\ \boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{H}_{k+2}\boldsymbol{\Phi}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_{k+N}\boldsymbol{\Phi}^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & -\boldsymbol{q}_{ln,k} \\ \mathbf{I}_3 & (\Delta t)\mathbf{I}_3 & \frac{(\Delta t)^2}{2}\mathbf{I}_3 & \cdots & \frac{(\Delta t)^m}{m!}\mathbf{I}_3 & -\boldsymbol{q}_{ln,k+1} \\ \mathbf{I}_3 & (2\Delta t)\mathbf{I}_3 & \frac{(2\Delta t)^2}{2}\mathbf{I}_3 & \cdots & \frac{(2\Delta t)^m}{m!}\mathbf{I}_3 & -\boldsymbol{q}_{ln,k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_3 & (N\Delta t)\mathbf{I}_3 & \frac{(N\Delta t)^2}{2}\mathbf{I}_3 & \cdots & \frac{(N\Delta t)^m}{m!}\mathbf{I}_3 & -\boldsymbol{q}_{ln,k+N} \end{bmatrix}$$

当一个系统**可观的（Observable）和可控的（Controlled）**（或者至少是可镇定的），则这个系统是稳定的。

第三部分：稳态误差分析 (Steady-State Error Analysis)——附加题

这是本题的核心。我们关心当时间趋于无穷大时，估计误差$e_k = x_k - \hat{x}_{k|k}$会收敛到什么水平。

问题 3.1 推导误差迭代动力学方程：

$$\boldsymbol{e}_{k+1} = \underbrace{(\mathbf{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{A}_{cl}} \boldsymbol{e}_k + \underbrace{(\mathbf{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{u}_{tr}}_{\text{Bias Source}} + \underbrace{(\mathbf{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{\omega}_{d,k} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{\nu}'}_{\text{Stochastic Noise}}$$

我们希望调整m使得稳态误差降低，我们设计了如下的代价函数

$$J(m) = \lim_{k \to \infty} E\left[\left\|\boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}\right\|^2\right] = \lim_{k \to \infty} E\left[\left\|\boldsymbol{e}_k\right\|^2\right]$$

根据期望分解定理可以分解为

$$J = \underbrace{\left\|e_{ss}^{\text{bias}}\right\|^2}_{\text{Stable State Bias}} + \underbrace{\text{Trace}\left(\boldsymbol{P}_{ss}\right)}_{\text{Variance}}$$

问题 3.2 稳态偏差 (Bias)： 请推导稳态偏差e_{ss}^{bias}与系统阶数m和采样时间Δt的关系。(可以用到稳定性条件，即闭环卡尔曼滤波增益谱半径小于1)

$$||e_{ss}^{bias}|| \propto \quad ?$$

问题 3.3：稳态方差 (Variance)

由于测量噪声的存在，估计值会发生抖动。对于m阶积分器，观测增益K需要对测量噪声放大以恢复高阶导数。证明测量噪声对稳态方差的贡献满足以下比例关系：

$$\text{Variance}_{meas} \propto \frac{1}{(\Delta t)^{2m}}$$

第四部分：实验验证

请基于实验数据应用本滤波器实现无人机的状态估计，请尝试k=1,2,3,...并比较误差大小。

其中data_status_slow.jsonl中的数据为相机平面中无人机影像的五个点。data_tf_camera_slow.jsonl的数据为相机在世界系下的位置和姿态，使用的是位置和四元数表示。data_tf_uav_slow.jsonl则是无人机的位姿在世界系下的姿态，请读取这些数据并进行处理，实现状态估计。

> *提示：首先需要经过一个pnp算法，可以先学习一下pnp算法怎么给出q和R，然后再进入我们的滤波器模块，pnp和滤波器均在python中有现成的库可以调用。注意你可以读取第一帧的无人机位置数据标定id映射，否则R的解算会出现问题。*