

1. [每小题 0.4 分, 共 0.8 分]

1) 最大元:  $x_1$ , 最小元:  $x_5$ , 极大元:  $x_1$ , 极小元:  $x_4, x_5$

2) 上界:  $x_1, x_3$ , 下界:  $x_5$ , 上确界:  $x_3$ , 下确界:  $x_5$

2. [每小题 0.4 分, 共 1.2 分]

1) 自反性:  $a \equiv a \pmod{3}$

对称性: 若  $a \equiv b \pmod{3}$ , 则  $\exists k \in \mathbb{N}$ , s.t.  $a = 3k + b$

$$\therefore b = a - 3k$$

$\therefore$  定义  $b \equiv a \pmod{3}$

传递性: 若  $a \equiv b \pmod{3}$ ,  $b \equiv c \pmod{3}$

则  $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ , s.t.  $a = 3k_1 + b$ ,  $b = 3k_2 + c$

$$\therefore a = 3k_1 + 3k_2 + c = c + 3(k_1 + k_2)$$

$\therefore$  定义,  $a \equiv c \pmod{3}$

$\therefore R$  是一个等价关系.  $\pi_1 = \{1, 4, 7\}$ ,  $\pi_2 = \{2, 5, 8\}$ ,  $\pi_3 = \{3, 6, 9\}$

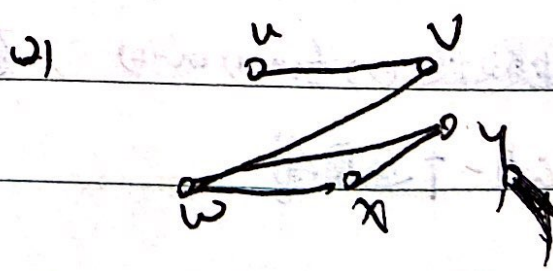
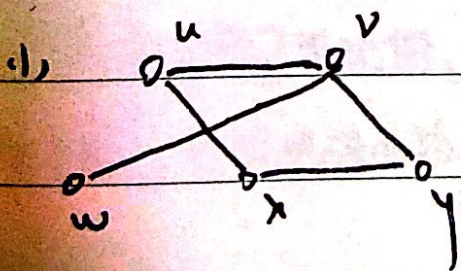
2)  $\pi_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $\pi_4 = \{2, 4, 6, 8\}$

3)  $\because R_1 \cap R_2 = \{a, b \mid a \equiv b \pmod{6}\}$

$\therefore \pi_1 \cap \pi_2 = \{1, 7\}, \{2, 8\}, \{3, 9\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

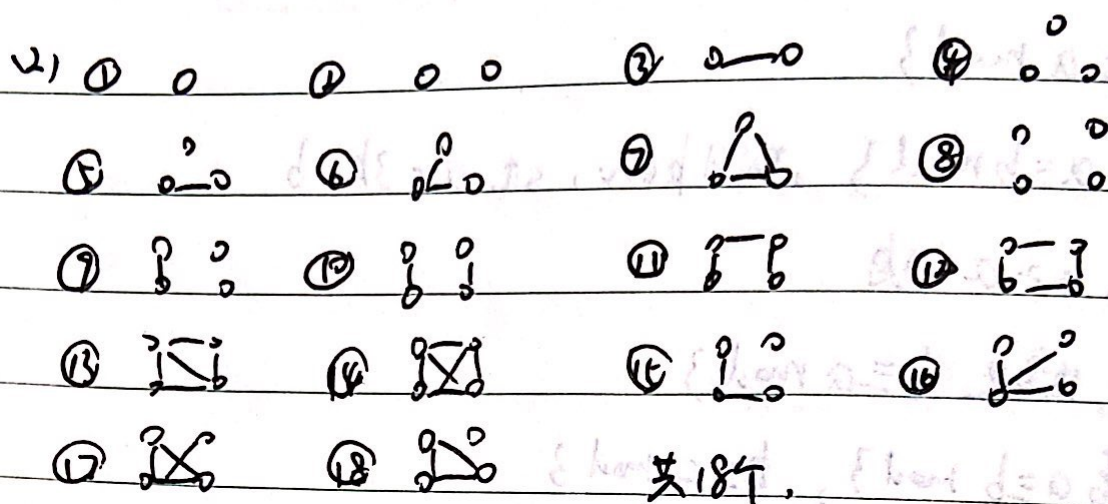
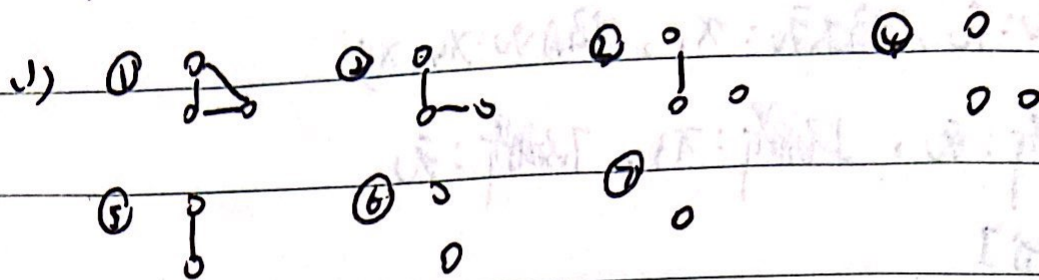
3. [每小题 0.5 分, 共 1 分]

注: 有向图、无向图均可.





4. [1) 0.7分, 2) 0.3分, 共1分]



5. [1) 0.4分, 2) 0.6分, 共1分]

1) 每个顶点的度数为  $n-1$ , 则总度数为  $n(n-1)$

又: 总度数为图的边数的2倍

$$\therefore e = \frac{n(n-1)}{2}$$

解法1:

2) 不失一般性, 假设  $G$  可分为两个不连通的子图  $G_1, G_2$

设  $G_1, G_2$  的结点个数为  $n_1, n_2$ , 则  $n_1 + n_2 = n$ , 且  $n_i \leq n-1$  ( $i=1, 2$ )

$$\therefore e \leq \frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2} \leq \frac{(n-1)(n_1-1)}{2} + \frac{(n-1)(n_2-1)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)}{2} (n_1 + n_2 - 2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

又由题设  $e > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ , 矛盾!

$\therefore G$  是一个连通图.



解法2:

设  $G$  分为  $G_1$  和  $G_2$  两个不连通的子图, 设  $G_1$  的结点个数为  $k$ ,

则  $G_2$  的结点个数为  $n-k$ .

若  $G_1, G_2$  都为完全图, 则  $e = \frac{1}{2}k(k-1) + \frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)$

$$= \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}n^2 - nk + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}k$$

$$= k^2 - nk + \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$= (k - \frac{1}{2}n)^2 + \frac{1}{2}n(n-1) - \frac{n^2}{4}$$

∴ 当  $k=n-1$  或  $1$  时,  $e$  最大,  $e = \frac{1}{2}n(n-1) + 1-n$

由题设:  $\frac{1}{2}n(n-1) + 1-n > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}n(n-1) + 1-n - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(n-1)(n-n+2) + 1-n > 0$$

$$\Rightarrow n-1 + 1-n = 0 > 0 \text{ 矛盾.}$$

∴  $G$  是一个连通图.

【注1: 许多同学在证明中写: “假设  $G$  不是连通图, 则必至少存在一个孤立点.”

看到这种语句出现的, 一律不给分数. 下图是一个4点的简单图, 它不是完全图, 但它也没有孤立结点.



+

