

1. [每小题0.2分, 共0.6分]

$$R_1 = \{(0,1), (1,2), (2,3), (0,0), (2,1)\}, R_2 = \{(2,0), (3,1)\}$$

1) $R_1 \circ R_2 = \{(1,0), (2,1)\}$

2) $R_2 \circ R_1 = \{(2,1), (2,0), (3,2)\}$

3) $R_1 \circ R_2 \circ R_1 = \{(1,1), (1,0), (2,2)\}$

2. [每小题0.6分, 共1.2分]

1) 证明: 只需证明 $R_2 \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$

$$\forall (a,c) \in R_2 \circ R_1, \exists b \in X, \text{ s.t. } (a,b) \in R_2, (b,c) \in R_1$$

$\because R_1, R_2$ 都满足对称性

$$\therefore (c,b) \in R_1, (b,a) \in R_2$$

$$\therefore (c,a) \in R_1 \circ R_2$$

又由条件 $R_1 \circ R_2 \subseteq R_2 \circ R_1$

$$\therefore (c,a) \in R_2 \circ R_1$$

$$\therefore \exists d \in X, \text{ s.t. } (c,d) \in R_2, (d,a) \in R_1$$

由 R_1, R_2 的对称性, $(d,c) \in R_2, (a,d) \in R_1$

$$\text{即 } (a,c) \in R_1 \circ R_2$$

\therefore 有 $R_2 \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$. QED.

2) 证明: $\forall a \in X$, 由 R, S 是自反的, 得 $(a,a) \in R, (a,a) \in S$

$\therefore (a,a) \in R \circ S$. 故又知, $R \circ S$ 是自反的! QED.

[注: 1. 错误的人很多, 证明有问题的同学可以对照答案找找自己的问题]



3. [本题 1 分]

证明: (1) 自反性: $\because ab = ba$

$\therefore (a, b) \sim (a, b)$, 由定义, 满足自反性

(2) 对称性: 若 $(a, b) \sim (c, d)$

$$\therefore ad = bc$$

$$\therefore cb = da$$

$\therefore (c, d) \sim (a, b)$, 满足对称性

(3) 传递性: 若有 $(a, b) \sim (c, d)$, $(c, d) \sim (e, f)$

$$\text{则 } ad = bc, cf = de$$

$$\text{可得 } c = \frac{ad}{b}, c = \frac{de}{f} \Rightarrow \frac{ad}{b} = \frac{de}{f} \Rightarrow af = be$$

$\therefore (a, b) \sim (e, f)$ 满足传递性

\therefore 综上所述, \sim 是一个等价关系

4. [(1) 0.6 分, (2) 0.4 分, 共 1 分]

$$(1) [1]_R = \{1, 5\}, [2]_R = \{2, 3, 6\}, [4]_R = \{4\}$$

$$(2) \pi_1 = \{1, 4, 2, 3, 6, 5\}$$

$$\pi_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\pi_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \pi_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

5. [每小題 0.4 分, 共 1.2 分]

(1) $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\}$, R 是 ~~非对称的~~ 对称的, 非传递的

(2) $R = \{(a, b), (c, a)\}$, R 是反自反的, ^{对称} 反传递的, 非传递的

(3) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a), (c, b)\}$, R 是自反的, 反对称的,

[注: 非传递性没有回答扣 0.4 分, 但错判成传递性, 扣 0.4 分] 非传递的.

