RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES NO LINEALES

EJERCICIOS PROPUESTOS

(a realizar con la ayuda de wxMaxima)

1.- Se quiere hallar la única solución s de la ecuación $e^x - 3 = 0$:

a) ¿Se puede aproximar s usando el método de bisección con $[0, 2]$ como intervalo inicial? ¿Por qué? En caso afirmativo, elabora un programa que calcule las 25 primeras iteraciones de dicho método y que halle una cota del error que se comete si se considera la última de las iteraciones obtenidas como el valor de s. El programa debe mostrar en pantalla todas las iteraciones calculadas, así como la cota del error hallada, con 32 dígitos significativos.

b) Modifica el programa que hayas elaborado en el apartado anterior para que en caso de que no haya un cambio de signo en los extremos del intervalo inicial el programa se interrumpa y devuelva un mensaje avisando de que dicho intervalo es incorrecto. (Compruébalo usando $[0, 1]$ como intervalo inicial).

c) Modifica el programa obtenido en b) para que cada vez que se calcule una iteración se halle también la cota del error que se comete en dicha iteración, de modo que el cálculo de las iteraciones se detenga cuando dicha cota sea menor que una cierta tolerancia (tol). Se deberá establecer un número máximo de iteraciones a realizar por el programa de manera que si no ocurre que la cota del error es menor que tol el programa informará de esto con el siguiente mensaje: "No se ha alcanzado la tolerancia. Hay que aumentar el número máximo de iteraciones establecido". Además, el programa deberá mostrar en pantalla el número de iteraciones realizadas, el valor con 32 dígitos digitos significativos de (únicamente) la última iteración calculada y la cota del error correspondiente a dicha iteración. (Compruébalo estableciendo 50 como número máximo de iteraciones y considerando tol=10^{-3} y tol=10^{-20}). Utiliza el programa elaborado para responder a la siguiente cuestión: ¿Cuántas iteraciones es preciso realizar para garantizar un error menor que 10^{-20} ?

d) Modifica el programa obtenido en b) para que éste calcule en primer lugar el número de iteraciones que hay que realizar para garantizar un error menor que una cierta tolerancia (tol) y, a continuación, calcule todas esas iteraciones. El programa sólo debe mostrar en pantalla el número de iteraciones que hay que realizar, el valor de la última de esas iteraciones (con una precisión de 32 dígitos) y la cota del error correspondiente a dicha iteración. Ejecuta el programa para tol=10^{-3} y tol=10^{-20}. Da un valor aproximado de s con un error menor que 10^{-20} .

e) ¿Se puede aproximar s usando el método de Newton-Raphson que considera $x^{(0)} = 2$ como aproximación inicial?¿Por qué? En caso afirmativo, elabora un programa que calcule las 6 primeras iteraciones de dicho método. El programa debe mostrar en pantalla todas las iteraciones calculadas con 32 dígitos significativos.

f) Haz un programa que calcule las iteraciones del método del apartado anterior hasta un número máximo establecido, de modo que cuando la diferencia en valor absoluto de dos iteraciones consecutivas sea menor que una cierta tolerancia (tol) se detenga el cálculo de las iteraciones, e informe de ello mediante el siguiente mensaje: "Se ha alcanzado la tolerancia". El programa además debe mostrar en pantalla el número de iteraciones que ha calculado y el valor aproximado de s proporcionado por la última de las iteraciones calculadas. Ejecuta el programa para un número máximo de 20 iteraciones y tol$=10^{-5}$.

g) Elabora un programa que calcule las 6 primeras iteraciones del método de la secante que considera como aproximaciones iniciales $x^{(-1)} = 0$ y $x^{(0)} = 2$. El programa debe mostrar en pantalla todas las iteraciones calculadas con 32 dígitos significativos.

h) Haz un programa que calcule las iteraciones del método del apartado anterior hasta un número máximo establecido, de modo que cuando la diferencia en valor absoluto de dos iteraciones consecutivas sea menor que una cierta tolerancia (tol) se detenga el cálculo de las iteraciones, e informe de ello mediante el siguiente mensaje: "Se ha alcanzado la tolerancia". El programa además debe mostrar en pantalla el número de iteraciones que ha calculado y el valor aproximado de s proporcionado por la última de las iteraciones calculadas. Ejecuta el programa para un número máximo de 20 iteraciones y tol$=10^{-5}$. Compara los resultados obtenidos con los del apartado f), comenta lo más destacado y trata de justificarlo.

2.- Se quiere aproximar la única solución real s de la ecuación $x^2 - 3 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$. Para ello se consideran, sobre dicho intervalo, las siguientes funciones:

$$g_1(x) = x^2 + x - 3 \quad , \quad g_2(x) = \frac{3}{x} \quad , \quad g_3(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$$

a) Justifica, ayudándote de la representación gráfica de funciones, por qué para cada $i = 1, 2, 3$ la función $g_i(x)$ tiene a s como único punto fijo en $[1, 2]$.

b) Para cada $i = 1, 2, 3$, elabora un programa que calcule las 10 primeras iteraciones del método de iteración funcional asociado a g_i que considera $x^{(0)} = 2$. El programa debe mostrar en pantalla todas las iteraciones calculadas con 32 dígitos significativos. ¿Para cuál/es de las funciones g_i consideradas el método de iteración funcional asociado permite aproximar s? Justifica la respuesta y da un valor aproximado para s.

3.- Dada la ecuación $x - (1/2)cos(x) = 0$, se pide:

a) Razona por qué tiene una única solución s en el intervalo $[0, \pi/2]$.

b) Sin calcular iteraciones, describe un método de iteración funcional (distinto al de Newton-Raphson) que, considerando $x^{(0)} = 1$ como aproximación inicial, permita aproximar s. Razona la respuesta. ¿Qué orden de convergencia tiene la sucesión de iteraciones generada por dicho método? Justifica la respuesta.

c) Elabora un programa que calcule las 12 primeras iteraciones del método de iteración funcional descrito en el apartado anterior. El programa sólo debe mostrar en pantalla, con 32 dígitos significativos, el valor aproximado de s proporcionado por la última de las iteraciones calculadas.

d) Haz un programa que calcule las iteraciones del método descrito en b) hasta un número máximo establecido, de modo que cuando la diferencia en valor absoluto de dos iteraciones consecutivas sea menor que una cierta tolerancia (tol) se detenga el cálculo de las iteraciones, e informe de ello mediante el siguiente mensaje: "Se ha alcanzado la tolerancia". El programa además debe mostrar en pantalla, con 32 dígitos significativos, todas las iteraciones calculadas. Ejecuta el programa para un número máximo de 50 iteraciones y tol=10^{-12}: ¿Cuántas iteraciones se realizan?

4.- Comprueba que $s = -2$ es un punto fijo de la función $g(x) = 1 + x - \dfrac{x^2}{4}$ tal que $|g'(s)| > 1$. Elabora un programa que calcule las 15 primeras iteraciones del método de iteración funcional asociado a g que considera $x^{(0)} = -2.05$ como aproximación inicial. El programa debe mostrar en pantalla, con 32 dígitos significativos, todas las iteraciones calculadas. ¿Permite dicho método aproximar s?¿Por qué? ¿Era de esperar la respuesta anterior?¿Por qué? Dibuja juntas en el intervalo $[-4, 4]$ las gráficas de $g(x)$ y de $y(x) = x$ y recuerda la interpretación geométrica del cálculo de las iteraciones en los métodos de iteración funcional.

5.- Comprueba que $s = 0$ es un punto fijo de la función $g(x) = x + \dfrac{x^2}{2}$ tal que $|g'(s)| = 1$. Dibuja juntas en el intervalo $[-0.5, 0.5]$ las gráficas de $g(x)$ y de $y(x) = x$, y deduce si los métodos de iteración funcional asociados a g que consideran $x^{(0)} = -0.2$ y $x^{(0)} = 0.2$, permiten aproximar s. Elabora un programa que calcule y muestre en pantalla, con 32 dígitos significativos, las 20 primeras iteraciones de cada uno de estos dos métodos.

6.- Se considera el polinomio $p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$.

a) Haz un programa que utilice el algoritmo de Hörner para hallar el valor del polinomio en $x = -2$ y lo muestre en pantalla. Comprueba que dicho valor es correcto.

b) Modifica el programa del apartado anterior para que éste calcule, además, el valor de la primera derivada del polinomio en $x = -2$ y lo muestre también en pantalla. Comprueba que dicho valor es correcto.

c) Dibuja la gráfica del polinomio en un intervalo $[a, b]$ en el que se encuentren todas las soluciones reales de la ecuación $p(x) = 0$, justificando la elección del intervalo considerado. ¿Cuántas soluciones reales tiene dicha ecuación? ¿Por qué? ¿Y cuántas complejas? ¿Por qué?

d) Elabora un programa que calcule las 5 primeras iteraciones del método de Newton-Raphson que considera $x^{(0)} = -2$ como aproximación inicial, usando el algoritmo de Hörner para calcular cada una de las iteraciones de dicho método. El programa debe mostrar en pantalla, con 32 dígitos significativos, todas las iteraciones calculadas.

e) Haz un programa que calcule las iteraciones del método del apartado anterior hasta un número máximo establecido, de modo que cuando la diferencia en valor absoluto de dos iteraciones consecutivas sea menor que una cierta tolerancia (tol) se detenga el cálculo de las iteraciones, e informe de ello mediante el siguiente mensaje: "Se ha alcanzado la tolerancia". El programa además debe mostrar en pantalla el número de iteraciones que ha calculado y el valor con 32 dígitos significativos de (únicamente) la última de las iteraciones calculadas. Ejecuta el programa para un número máximo de 30 iteraciones y tol$=10^{-15}$: ¿Cuántas iteraciones se han calculado? ¿Qué proporciona la última de las iteraciones calculada? ¿Por qué?