Projet MPRO - Modélisation papier

Tadeo Delapalme, Dimitri de Saint Guilhem

15 décembre 2024

Question 1.

Proposition de modélisation du problème statique :

$$
\begin{aligned}
\min_{x,u} \quad & \sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i\in V} x_{ij} = 1, && \forall j \in V \setminus \{1\}, \\
& \sum_{j\in V} x_{ij} = 1, && \forall i \in V \setminus \{1\}, \\
& u_j - u_i \geq d_j - C(1 - x_{ij}), && \forall (i,j) \in \{(i,j) \in V \setminus \{1\} : i \neq j, d_i + d_j \leq C\}, \\
& d_i \leq u_i \leq C, && \forall i \in V \setminus \{1\}, \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, && \forall (i,j) \in A.
\end{aligned}
$$

Variables de décision :

- $x_{ij} \in \{0,1\}$: Variable binaire indiquant si l'arc (i,j) est utilisé dans la solution.
  - $x_{ij} = 1$ signifie que le véhicule se déplace du nœud i au nœud j.
  - $x_{ij} = 0$ signifie que l'arc (i,j) n'est pas utilisé.
- u_i : Variable continue représentant la charge du véhicule après avoir visité le nœud i.
  - Cette variable est utilisée pour garantir l'élimination des sous-tours.

Fonction objectif

$$\min_{x,u} \sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij}$$

Cette fonction minimise le temps total du trajet en sommant les coûts t_{ij} de tous les arcs (i,j) où $x_{ij} = 1$.

Contraintes

1. **Contraintes de conservation de flux :**

$$\sum_{i\in V} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V \setminus \{1\},$$

$$\sum_{j\in V} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{1\}.$$

Ces contraintes garantissent que chaque nœud (sauf le dépôt 1) est visité exactement une fois par un véhicule.

2. **Contraintes MTZ d'élimination des sous-tours :**

$$u_j - u_i \geq d_j - C(1 - x_{ij}), \quad \forall (i,j) \in \{(i,j) \in V \setminus \{1\} : i \neq j, d_i + d_j \leq C\}.$$

Ces contraintes éliminent les sous-tours en garantissant que si le véhicule se déplace du nœud i au nœud j ($x_{ij} = 1$), alors la charge u_j doit être strictement supérieure à u_i d'au moins la demande au nœud j (d_j). Si $x_{ij} = 0$, la contrainte devient inactive grâce au terme $C(1-x_{ij})$.

3. **Contraintes de capacité :**

$$d_i \leq u_i \leq C, \quad \forall i \in V \setminus \{1\}.$$

Ces contraintes garantissent que la charge u_i du véhicule à chaque nœud i est au moins égale à la demande d_i à ce nœud et ne dépasse pas la capacité du véhicule C.

Question 2.

Pour une modélisation robuste, on considère la réalisation du pire des cas :

$$\begin{aligned}
\min_{x,u} \quad & \max_{\delta^1,\delta^2} \sum_{(i,j)\in A} \left(t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j\right) x_{ij} & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i\in V} x_{ij} = 1, & \forall j \in V \setminus \{1\}, \\
& \sum_{j\in V} x_{ij} = 1, & \forall i \in V \setminus \{1\}, \\
& u_j - u_i \geq d_j - C(1 - x_{ij}), & \forall (i,j) \in \{(i,j) \in V \setminus \{1\} : i \neq j, d_i + d_j \leq C\}, \\
& d_i \leq u_i \leq C, & \forall i \in V \setminus \{1\}, \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, & \forall (i,j) \in A, \\
& \sum_{(i,j)\in A} \delta^1_{ij} \leq T, & \\
& \sum_{(i,j)\in A} \delta^2_{ij} \leq T^2, & \\
& \delta^1_{ij} \in [0,1], & \forall (i,j) \in A, \\
& \delta^2_{ij} \in [0,2], & \forall (i,j) \in A.
\end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned}
\min_{x} \max_{t' \in \mathcal{U}} & \sum_{(i,j)\in A} t'_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in V} x_{ij} = 1, && \forall j \in V \setminus \{1\}, \\
& \sum_{j \in V} x_{ij} = 1, && \forall i \in V \setminus \{1\}, \\
& u_j - u_i \geq d_j - C(1 - x_{ij}), && \forall (i,j) \in \{(i,j) \in V \setminus \{1\} : i \neq j, d_i + d_j \leq C\}, \\
& d_i \leq u_i \leq C, && \forall i \in V \setminus \{1\}, \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, && \forall (i,j) \in A,
\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{U} = \{\{t'_{ij} = t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j\}_{ij \in A} | \sum_{(i,j)\in A} \delta^1_{ij} \leq T, \sum_{(i,j)\in A} \delta^2_{ij} \leq T^2, \delta^1_{ij} \in [0,1], \delta^2_{ij} \in [0,2] \forall ij \in A\}.$$

Question 3.a)

$$\begin{aligned}
\min_{x,u,\Theta} & \ \Theta \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{(i,j)\in A} \left(t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j\right) x_{ij} - \Theta \leq 0, && \forall \delta^1, \delta^2 \in R, \\
& \sum_{i \in V} x_{ij} = 1, && \forall j \in V \setminus \{1\}, \\
& \sum_{j \in V} x_{ij} = 1, && \forall i \in V \setminus \{1\}, \\
& u_j - u_i \geq d_j - C(1 - x_{ij}), && \forall (i,j) \in \{(i,j) \in V \setminus \{1\} : i \neq j, d_i + d_j \leq C\}, \\
& d_i \leq u_i \leq C, && \forall i \in V \setminus \{1\}, \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, && \forall (i,j) \in A.
\end{aligned}$$

Où

$$R = \{(\delta^1, \delta^2) \in [0,1] \times [0,2] : \sum_{(i,j)\in A} \delta^1_{ij} \leq T, \sum_{(i,j)\in A} \delta^2_{ij} \leq T^2\}$$

.

Question 3.b) On prend au départ $R^0 = \{(0,0)\}$ ce qui correspond à $\mathcal{U}^* = \{t = (t_{ij})_{ij \in A}\}$.

Question 3.c) La résolution du problème maître donne x^*, Θ^* et u^*, les solutions optimales. Le sous problème à résoudre est alors donné par :

$$
\begin{aligned}
\max_{\delta^1,\delta^2} \quad & \sum_{(i,j)\in A} \left(t_{ij} + \delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j\right) x^*_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{(i,j)\in A} \delta^1_{ij} \leq T \\
& \sum_{(i,j)\in A} \delta^2_{ij} \leq T^2 \\
& \delta^1_{ij} \in [0,1], \delta^2_{ij} \in [0,2] \qquad\qquad \forall ij \in A
\end{aligned}
$$

Question 3.d) La résolution du sous-problème pour une solution (x^*, Θ^*, u^*) du problème maître donne une solution $\delta^* = (\delta^{1*}, \delta^{2*})$ à laquelle correspond les durées du pire scénario pour x^*, $t^* = (t_{ij} + \delta^{1*}_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^{2*}_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j)_{ij\in A}$. La valeur associée est $t^{*\top}x^* = \sum_{ij\in A} t^*_{ij}x^*_{ij}$. La condition d'optimalité est $t^{*\top}x^* \leq \Theta^*$ (même $=$), si celle-ci est vérifiée ; x^* est une solution optimale de valeur Θ^*.

Question 3.e) Dans le cas où l'on n'a pas la condition d'optimalité après résolution du sous-problème, on ajoute une coupe en faisant $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^* \cup \{t^*\}$ ce qui revient à faire $R^{k+1} = R^k \cup \{(\delta^{1*}, \delta^{2*})\}$ à l'itération $k+1$. On ajoute donc la contrainte

$$
\sum_{ij\in A} \left(t_{ij} + \delta^{1*}_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^{2*}_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j\right) x_{ij} - \Theta \leq 0.
$$

Question 4.a) On réecrit l'objectif du problème de la question 2 de la manière suivante :

$$
\min_x \sum_{ij\in A} t_{ij}x_{ij} + \max_{\delta^1,\delta^2\in\mathcal{D}} \sum_{ij\in A} \left(\delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j\right) x_{ij},
$$

où on a $\mathcal{D} = \{(\delta^1, \delta^2) : \sum_{(i,j)\in A} \delta^1_{ij} \leq T, \sum_{(i,j)\in A} \delta^2_{ij} \leq T^2, \delta^1_{ij} \in [0,1], \delta^2_{ij} \in [0,2], \forall ij \in A\}$.

Question 4.b) Le problème interne lié aux variables $\delta^1_{ij}, \delta^2_{ij}$ est à x fixé :

$$
\begin{aligned}
\max_{\delta^1,\delta^2} \quad & \sum_{ij\in A} \left(\delta^1_{ij}(\hat{t}_i + \hat{t}_j) + \delta^2_{ij}\hat{t}_i\hat{t}_j\right) x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{ij\in A} \delta^1_{ij} \leq T && (4a) \\
& \sum_{ij\in A} \delta^2_{ij} \leq T^2 && (4b) \\
& \delta^1_{ij} \leq 1 \qquad \forall ij \in A, && (4c) \\
& \delta^2_{ij} \leq 2 \qquad \forall ij \in A, && (4d) \\
& \delta^1_{ij} \geq 0, \delta^2_{ij} \geq 0 \qquad \forall ij \in A.
\end{aligned}
$$

Question 4.c) On note λ^1 la variable duale associée à $(4a)$, λ^2 celle à $(4b)$ ainsi que μ^1_{ij} et μ^2_{ij} celle à $(4c)$ et $(4d)$. Le problème dual s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda^1,\lambda^2,\mu^1,\mu^2} \; & \lambda^1 T + \lambda^2 T^2 + \sum_{ij\in A} \mu^1_{ij} + 2\mu^2_{ij} & \\
\text{s.t.} \quad & \lambda^1 + \mu^1_{ij} \geq (\hat{t}_i + \hat{t}_j) x_{ij} & \forall ij \in A, \\
& \lambda^2 + \mu^2_{ij} \geq \hat{t}_i \hat{t}_j x_{ij} & \forall ij \in A, \\
& \lambda^1 \geq 0, \lambda^2 \geq 0 & \\
& \mu^1_{ij} \geq 0, \mu^2_{ij} \geq 0 & \forall ij \in A,
\end{aligned}$$

Question 4.d) En utilisant la formulation duale qui précède, on écrit le problème robuste comme un programme linéaire :

$$\begin{aligned}
\min_{x,u,\lambda^1,\lambda^2,\mu^1,\mu^2} \; & \sum_{ij\in A} t_{ij} x_{ij} + \lambda^1 T + \lambda^2 T^2 + \sum_{ij\in A} \mu^1_{ij} + 2\mu^2_{ij} & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i\in V} x_{ij} = 1, & \forall j \in V \setminus \{1\}, \\
& \sum_{j\in V} x_{ij} = 1, & \forall i \in V \setminus \{1\}, \\
& u_j - u_i \geq d_j - C(1 - x_{ij}), & \forall (i,j) \in \{(i,j) \in V \setminus \{1\} : i \neq j, d_i + d_j \leq C\}, \\
& \lambda^1 + \mu^1_{ij} \geq (\hat{t}_i + \hat{t}_j) x_{ij} & \forall ij \in A, \\
& \lambda^2 + \mu^2_{ij} \geq \hat{t}_i \hat{t}_j x_{ij} & \forall ij \in A, \\
& & \\
& \lambda^1 \geq 0, \lambda^2 \geq 0 & \\
& \mu^1_{ij} \geq 0, \mu^2_{ij} \geq 0 & \forall ij \in A, \\
& d_i \leq u_i \leq C, & \forall i \in V \setminus \{1\}, \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & \forall (i,j) \in A.
\end{aligned}$$