Matematički fakultet

Rešenja zadataka sa prijemnih ispita

Autor:
Ivana Jankić

23. kolovoza 2017.

Sadržaj

Uvod

Skripta je radjena od poslednjeg prijemnog ispita ka ranijima, p od 2016.

DODATI JOS STVAARI :D

Prijemni ispit iz 2016. godine

Zadaci

1. Kada je 25% kante prazno, ona sadrži 25 litara vode vi[e nego kada je 25% kante puno. Koliko litara vode sadrži puna kanta?

   A) 25 B) 33 C) 50 D) 75 E) 90

2. Dvocifreni završetak prirodnog broja a je 16. Ako broj a nije deljiv sa 8, tada je cifra jedinica broja $3a/4$ jednaka:

   A) 0 B) 2 C) 5 D) 7 E) 8

3. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000000 koji su deljivi tačno jednim od brojeva 11 i 13?

   A) 6993 B) 153846 C) 160839 D) 167832 E) 993006

4. Najveci koeficijent polinoma $(2x+1)^{10}$ jednak je:

   A) 120 B) 11520 C) 13440 D) 15360 E) 16480

5. Brojevi 2, $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ i $4-2\sqrt{3}$ čine prva tri člana:

   A) aritmetičkog,ali ne i geometrijskog niza
   B) geometrijskog,ali ne i arotmetičkog niza
   C) i aritmetičkog i geomtrijskog niza
   D) ni aritmetičkog ni geomtrijskog niza
   E) niza sa opstim članom $a_n = 4-2\sqrt{n}$

6. Data je jednačina $(\frac{1+ix}{1-ix})^2 = i$, gde je x realna nepoznata. Broj rešenja ove jednačine u intervalu $(0, 1/2)$ je:

   A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) ∞

7. Ako su x_1 i x_2 rešenja jedančine $x^2 - x + 15 = 0$, tada je $x_1^3 + x_2^3 - 2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 2x_1 + x_2 - 15$ jednako:

   A) 1 B) 87 C) 31 D) 16 E) -14

8. Ako su a i b realni brojevi takvi da polinom $x^4 + ax^3 - ax + b$ daje ostatak $2x + 4$ pri deljenju polinomom $x^2 + 2x + 1$, tada je ab jednako:

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. Date su funkcije $f_1(x) = \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$, $f_2(x) = \arcsin x \cdot \arctan x$, $f_3(x) = \sin x + \cos x$ i $f_4(x) = \frac{\ln x^2}{\sqrt[3]{x^2}}$. Ako sa p označimo broj parnih, a sa n broj neparnih među ovim funkcija, tačan je iskaz:

A) $p = 1$ i $n = 1$ C) $p = 2$ i $n = 1$ E) $p = 1$ i $n = 0$

B) $p = 2$ i $n = 2$ D) $p = 1$ i $n = 2$

10. Za koje vrednosti realnog parametra a jednačina $||x-3|-1| = a$ ima tačno tri realna rešenja:

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

11. Funkcija f je zadata sa $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gde su a, b, c i d realni brojevi. Ako je $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ i $f(2) = 3$, koliko je $f(3)$?

A) -1 B) $\frac{3}{2}$ C) 5 D) 2 E) 3

12. Broj rešenja sistema jednačina

$(x^2 - 1)(2x - 3y + 4z) = 0$

$4x + 5y + 8z = -2$

$3x + y + 6z = 44$

u skupu realnih brojeva je:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) ∞

13. Ako za realne brojeve x i y važi $7 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^y = 23$ i $2 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^y = 42$, onda je zbir $x + y$ jednak:

A) 7 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. Proizvod svih rešenja jednačine $\log_{36} x^2 + \log_6(x + 5) - 1 = 0$ je :

A) -36 B) -6 C) 1 D) 12 E) 6

15. Broj celobrojnih rešenja nejednačine $\sin x < |\cos x|$ u intervalu $[0, 8]$ jednak je:

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

16. Tačke M, N i P su središta tri mej̣usobno mimoilazne ivice kocke. Ako je dužina ivice $4cm$, površina trougla MNP je:

A) $8\sqrt{2}cm^2$ B) $\sqrt{2}cm^2$ C) $8\sqrt{3}cm^2$ D) $8cm^2$ E) $6\sqrt{3}cm^2$

17. Oko kružnije opisan je četvorougao $ABCD$ površine $90cm^2$. Ako je zbir dužina naspramnih stranica AB i CD jednak $15cm$, dužina poluprečnika kružnice je :

A) $6cm$ B) $5\sqrt{2}cm$ C) $6\sqrt{3}cm$ D) $3\sqrt{3}cm$ E) $3cm$

18. Date su dve koncentrične kružnice i duž AB koja je tetiva kružnice većeg, a tangenta na kružnicu manjeg polipréčnika. Ako je $AB = 6$, onda je površina prstena izmej̣u datih kružnica jednaka:

A) 12π B) 9π C) π D) 9 E) 6π

19. Površona kvadrata čije su dve stranice na pravim $2x + y - 3 = 0$, $2x + y - 8 = 0$ je :

A) $2\sqrt{3}$ B) 5 C) 4 D) 6 E) $3\sqrt{2}$

20. Dužine stranica oštrouglog trougla su $a = 60$, $b = 52$ i c, a veličine odgovarajućih uglova su α, β i γ. Ako je $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, onda je $\sin\gamma$ jednak:

A) $\frac{56}{65}$ B) $\frac{56}{63}$ C) $\frac{39}{65}$ D) $\frac{39}{63}$ E) $\frac{63}{65}$

Rešenje

1. 25% kante je prazne je ekvivalnetno sa tim da je 75% kante puno. Obeležimo sa x zapreminu kante sa vodom. Prevedimo sada tekst zadatka u matematički zapis:

   Kada je 25% kante prazno, ona sadrži 25 litara vode više nego kada je 25% kante puno.

   75% od x umanjen sa 25 litara je isto sto i 25% od x.

   Matematički : $0.75 \cdot x - 25 = 0.25 \cdot x$

   Daljim rešavanjem ove jednačine dobijamo: $0.5 \cdot x = 25$. Ako obe strane pomožimo sa brojem 2 dobijamo: $x = 50$, te je rešenja zadatka 50 litara. **Odgovor je pod C.**

2. Dvocifreni završetak prirodnog broja a je 16, matematički zapisano $a \equiv 16(mod100)$. Znamo da 8 ne sme da deli a, dok po tekstu zadatka zaključujemo da 4 mora da deli a. Uradimo zadatak pešaka, ispišimo sve dvocifrene i trocifrene brojeve kod kojih važi gorenja relacija. Krenućemo od 16 do 916.

   16 - ne može jer je deljivo sa 8.

   116 je kandidat za a.

   216 - ne može jer je deljivo sa 8.

   316 je kandidat za a.

   416 - ne može jer je deljivo sa 8.

   516 je kandidat za a.

   616 - ne može jer je deljivo sa 8.

   716 je kandidat za a.

   816 - ne može jer je deljivo sa 8.

   916 je kandidat za a.

   Posmatrajmo sada kandidate, svi su deljivi sa 4. Podelimo ih sve sa 4 i dobijamo redom : 29, 79, 129, 179, 229. Pošto nas zanima samo cifra jedinice broja $3a/4$, već odavde možemo da zaključimo da će to biti $9 * 3(mod10)$ to jest broj 7. **Odgovor je pod D.**

3. Brojeve koje posmatramo pripadaju skupu $\{n \in N : n < 1000000 = 10^6\}$. Posmatrajmo skupove $A = \{m \in N : 11 \cdot m < 10^6\}$, $B = \{m \in N : 13 \cdot m < 10^6\}$ i $C = \{m \in N : 11 \cdot 13 \cdot m < 10^6\}$. A je skup svih brojeva deljivih sa 11, B je skup svih brojeva deljivih sa 13 i C skup svih brojeva deljivih sa 11 i 13. Pošto u skupu A se nalaze brojevi deljivi i sa 13, a u B se nalaze brojevi koji su deljivi i sa 11. Stoga rešenje predstavlja $|A| + |B| - 2 \cdot |C|$. Gde $|A|$ predstavlja kardinalnost skupa A. Izračunajmo sada kardinalnosti skupova :

   $|A| = \lfloor \frac{10^6}{11} \rfloor = 90909$

   $|B| = \lfloor \frac{10^6}{13} \rfloor = 76923$

   $|C| = \lfloor \frac{10^6}{11 \cdot 13} \rfloor = \lfloor \frac{10^6}{143} \rfloor = 6993$

   Te je rešenje $90909 + 76923 - 2 \cdot 6993 = 153846$. **Odgovor je pod B.**

4. Koeficijent uz k-ti član se računa pomoću formule $\binom{n}{k}(2)^k 1^{n-k}$, što je u ovom slučaju isto što i $\binom{n}{k}(2)^k$. Sada tražimo $k \leq 10$ takvo da je gornji izraz maksimalan. Znamo da $\binom{n}{k}$ daje koeficijente simetrične u odnosu na $\frac{n+1}{2}$, pa uočavamo da ce maksimalno biti za $k \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil = 6$. Naįimo sada koeficijente za $6 \leq k \geq 10$:

$\binom{10}{6} \cdot 2^6 = 210 \cdot 2^6 = 6720$

$\binom{10}{7} \cdot 2^7 = 120 \cdot 2^7 = 15360$

$\binom{10}{8} \cdot 2^8 = 45 \cdot 2^8 = 11520$

$\binom{10}{9} \cdot 2^9 = 10 \cdot 2^9 = 5120$

$\binom{10}{10} \cdot 2^{10} = 1 \cdot 2^{10} = 1024$ Vidimo da je za $k = 7$ koeficijent najveć i iznosi 15360.

Odgovor je pod D.

Bibliografija

[1] kkkk

[2] kkkkk