Универзитет у Београду
Математички факултет

Семинарски рад из Програмских пакета у математици

Решења задатака са пријемних испита

Аутор:
Ивана Јанкић
Број индекса: 4/2013

Предметни асистент:
Матеј Милићевић

10. септембар 2017

Садржај

1 Пријемни испит из 2016. године

1.1 Задаци

1. Када је 25% канте празно, она садржи 25 литара воде више него када је 25% канте пуно. Колико литара воде садржи пуна канта?

   A) 25 B) 33 C) 50 D) 75 E) 90

2. Двоцифрени завршетак природног броја a је 16. Ако број a није дељив са 8, тада је цифра јединица броја $3a/4$ једнака:

   A) 0 B) 2 C) 5 D) 7 E) 8

3. Колико има природних бројева мањих од 1000000 који су дељиви тачно једним од бројева 11 и 13?

   A) 6993 B) 153846 C) 160839 D) 167832 E) 993006

4. Највећи коефицијент полинома $(2x+1)^{10}$ једнак је:

   A) 120 B) 11520 C) 13440 D) 15360 E) 16480

5. Бројеви 2, $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ и $4-2\sqrt{3}$ чине прва три члана:

   A) аритметичког, али не и геометријског низа
   B) геометријског, али не и аритметичког низа
   C) и аритметичког и геометријског низа
   D) ни аритметичког ни геометријског низа
   E) низа са општим чланом $a_n = 4-2\sqrt{n}$

6. Дата је једначина $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^2 = i$, где је x реална непозната. Број решења ове једнацхине у интервалу $(0, 1/2)$ је:

   A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) ∞

7. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2-x+15=0$, тада је $x_1^3+x_2^3-2x_1^2-x_2^2+x_1x_2+2x_1+x_2-15$ једнако:

   A) 1 B) 87 C) 31 D) 16 E) -14

8. Ако су a и b реални бројеви такви да полином x^4+ax^3-ax+b даје остатак $2x+4$ при дељењу полиномом x^2+2x+1, тада је ab једнако:

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. Дате су функције $f_1(x) = \ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$, $f_2(x) = \arcsin x \cdot \operatorname{arctg} x$, $f_3(x) = \sin x + \cos x$ и $f_4(x) = \frac{\ln x^2}{\sqrt[3]{x}}$. Ако са p означимо број парних, а са n број непарних међу овим функцијама, тачан је исказ:

A) $p = 1$ i $n = 1$ C) $p = 2$ i $n = 1$ E) $p = 1$ i $n = 0$
B) $p = 2$ i $n = 2$ D) $p = 1$ i $n = 2$

10. За које вредности реалног параметра a једначина $||x - 3| - 1| = a$ има тачно три реална решења:

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

11. Функција f је задата са $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где су a, b, c и d реални бројеви. Ако је $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ и $f(2) = 3$, колико је $f(3)$?

A) -1 B) $\frac{3}{2}$ C) 5 D) 2 E) 3

12. Број решења система једначина

$(x^2 - 1)(2x - 3y + 4z) = 0$

$4x + 5y + 8z = -2$

$3x + y + 6z = 44$

у скупу реалних бројева је:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) ∞

13. Ако за реалне бројеве x и y важи $7 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^y = 23$ и $2 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^y = 42$, онда је збир $x + y$ једнак:

A) 7 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. Производ свих решења једначине $\log_{36} x^2 + \log_6(x + 5) - 1 = 0$ је :

A) -36 B) -6 C) 1 D) 12 E) 6

15. Број целобројних решења неједначине $\sin x < |\cos x|$ у интервалу $[0, 8]$ једнак је:

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

16. Тачке M, N и P су средишта три међусобно мимоилазне ивице коцке. Ако је дужина ивице 4 cm, површина троугла MNP је:

A) $8\sqrt{2}$ cm^2 B) $\sqrt{2}$ cm^2 C) $8\sqrt{3}$ cm^2 D) 8 cm^2 E) $6\sqrt{3}$ cm^2

17. Око кружнице описан је четвороугао $ABCD$ површине $90cm^2$. Ако је збир дужина наспрамних страница AB и CD једнак 15 cm, дужина полупречника кружнице је:

A) 6 cm B) $5\sqrt{2}$ cm C) $6\sqrt{3}$ cm D) $3\sqrt{3}$ cm E) 3 cm

18. Дате су две концентричне кружнице и дуж AB која је тетива кружнице већег, а тангента на кружницу мањег полипречника. Ако је $AB = 6$, онда је површина прстена између датих кружница једнака:

A) 12π B) 9π C) π D) 9 E) 6π

19. Површина квадрата чије су две странице на правима $2x+y-3=0$, $2x+y-8=0$ је :

A) $2\sqrt{3}$ B) 5 C) 4 D) 6 E) $3\sqrt{2}$

20. Дужине страница оштроуглог троугла су $a=60$, $b=52$ и c, а величине одговарајућих углова су α, β и γ. Ако је $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, онда је $\sin\gamma$ једнак:

A) $\frac{56}{65}$ B) $\frac{56}{63}$ C) $\frac{39}{65}$ D) $\frac{39}{63}$ E) $\frac{63}{65}$

1.2 Решења

1. 25% канте је празне је еквивалентно са тим да је 75% канте пуно. Обележимо са x запремину канте са водом. Преведимо сада текст задатка у математички запис:

   Када је 25% канте празно, она садржи 25 литара воде више него када је 25% канте пуно.

   75% од x умањен са 25 литара је исто сто и 25% од x.

   Математички : $0.75 \cdot x - 25 = 0.25 \cdot x$

   Даљим решавањем ове једначине добијамо: $0.5 \cdot x = 25$. Ако обе стране помножимо са бројем 2 добијамо: $x = 50$, те је решења задатка 50 литара. **Одговор је под** C**.**

2. Двоцифрени завршетак природног броја a је 16, математички записано $a \equiv 16 \pmod{100}$. Знамо да 8 не сме да дели a, док по тексту задатка закључујемо да 4 мора да дели a. Урадимо задатак пешака, испишимо све двоцифрене и троцифрене бројеве код којих важи горња релација. Кренућемо од 16 до 916.

   16 - не може јер је дељиво са 8.

   116 је кандидат за a.

   216 - не може јер је дељиво са 8.

   316 је кандидат за a.

   416 - не може јер је дељиво са 8.

   516 је кандидат за a.

   616 - не може јер је дељиво са 8.

   716 је кандидат за a.

   816 - не може јер је дељиво са 8.

   916 је кандидат за a.

   Посматрајмо сада кандидате, сви су дељиви са 4. Поделимо их све са 4 и добијамо редом : 29, 79, 129, 179, 229. Пошто нас занима само цифра јединице броја $3a/4$, већ одавде можемо да закључимо да ће то бити $9 \cdot 3 \pmod{10}$ то јест број 7. **Одговор је под** D**.**

3. Бројеве које посматрамо припадају скупу $\{n \in \mathbb{N} : n < 1000000 = 10^6\}$. Посматрајмо скупове $A = \{m \in \mathbb{N} : 11 \mid m \text{ и } m < 10^6\}$, $B = \{m \in \mathbb{N} : 13 \mid m \text{ и } m < 10^6\}$ и $C = \{m \in \mathbb{N} : 11 \cdot 13 \mid m \text{ и } \ m < 10^6\}$. A је скуп свих бројева дељивих са 11, B је скуп свих бројева дељивих са 13 и C скуп свих бројева дељивих са 11 и 13. Пошто се у скупу A налазе бројеви дељиви и са 13, а у B се налазе бројеви који су дељиви и са 11, решење представља $|A| + |B| - 2 \cdot |C|$, где $|A|$ представља кардиналност скупа A. Израчунајмо сада кардиналности скупова :

   $|A| = \left\lfloor \frac{10^6}{11} \right\rfloor = 90909$

   $|B| = \left\lfloor \frac{10^6}{13} \right\rfloor = 76923$

   $|C| = \left\lfloor \frac{10^6}{11 \cdot 13} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{10^6}{143} \right\rfloor = 6993$

   Те је решење $90909 + 76923 - 2 \cdot 6993 = 153846$. **Одговор је под** B**.**

4. Коефицијент уз к-ти члан се рачуна помоћу формуле $\binom{n}{k}2^k1^{n-k}$, што је у овом случају исто што и $\binom{n}{k}2^k$. Сада тражимо $k \leq 10$ такво да је горњи израз максималан. Знамо да $\binom{n}{k}$ даје коефицијенте симетричне у односу на $\frac{n+1}{2}$, па уочавамо да це максимално бити за $k \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil = 6$. Нађимо сада коефицијенте за $6 \leq k \leq 10$:

   $\binom{10}{6} \cdot 2^6 = 210 \cdot 2^6 = 6720$

   $\binom{10}{7} \cdot 2^7 = 120 \cdot 2^7 = 15360$

   $\binom{10}{8} \cdot 2^8 = 45 \cdot 2^8 = 11520$

   $\binom{10}{9} \cdot 2^9 = 10 \cdot 2^9 = 5120$

   $\binom{10}{10} \cdot 2^{10} = 1 \cdot 2^{10} = 1024$ Видимо да је за $k = 7$ коефицијент највећи и износи 15360.
   Одговор је под D**.**

5. Очигледно је да низ није аритметички те одговори по А и Ц отпадају. Проверимо да ли је одговор под Е. Да ли су то чланови низа $a_n = 4 - 2\sqrt{n}$. Рачунајмо $a_1 = 4 - 2 = 2$, $a_2 = 4 - 2\sqrt{2}$ - а овај број није међу траженима. Остало је још проверити да није геометријски низ. Претпоставимо да јесте, нађимо сада коефицијент геометријске прогресије q :

   Знамо да је геомеријски низ облика b, bq, bq^2, bq^3 итд. Те q можемо наћи када два узастопна члана низа поделимо. Пошто је први члан цео број, поделићемо други члан са првим : $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)$ и то ће бити q. Сада остаје да проверимо да ли трећи члан низа припада геометријском низу чија прва два члана су 2 и $\sqrt{6} - \sqrt{2}$. Довољно је да помножимо други члан са q и да видимо да ли је једнак трећем, или да поделимо трећи и други и да видимо да ли је једнак q. Урадићемо прву варијанту : $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{3}-1) = \sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{3}-1) = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)^2 = 1\cdot(3-2\sqrt{3}+1) = 4-2\sqrt{2}$ што и јесте трећи члан низа, те је он геометријски.

   Одговор је под B**.**

6. Решавамо једначину $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^2 = i$

   $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^2 = \frac{1+2ix-x^2}{1-2ix-x^2} = i$, помножимо је са $1 - 2ix - x^2$ (који је увек различит од 0, јер је x реалан број) и добијамо:

   $1 + 2ix - x^2 = i(1 - 2ix - x^2)$ пребацимо сада све на леву страну и средимо

   $-(1 - i)x^2 - (2 - 2i)x + (1 - i) = 0$

   $-(1 - i)x^2 - 2(1 - i)x + (1 - i) = 0$ поделимо са $-(1 - i)$ и добијамо

   $x^2 + 2x - 1 = 0$, проверимо да ли је дискриминанта већа или једнака од 0, што и јесте.

   Користећи формулу за налажење корена бинома добијамо: $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

   Знамо да је $\sqrt{2} = 1.41$ те је решење из интервала $(0, 1/2)$ само $-1 + \sqrt{2}$.

   Одговор је под B**.**

7. Ово се може урадити на два начина, један који је јако рачунски захтеван са великом вероватноћом да ће се негде погрешити или на паметан и елегантан начин.

Овај први нећу радити али је очигледно да се односи на налажење корена једначине $x^2 - x + 15 = 0$ и онда их заменити у израз и рачунати. Али ако добро погледамо ту једначину видећемо да су њени корени комплексни бројеви, и не само то него је и израз са кореном. Одатле се већ види да би тај начин био најгори могући. Други начин који можемо сада назвати и једини је да се сетимо [1]Вијетових веза за квадратне једначине:

За једначину облика $ax^2 + bx + c = 0$, где су x_1 и x_2 корени важи $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Идеја је следећа да израз средимо тако да бисмо могли да применимо Вијетове везе. Средићемо га тако што ћемо одређене делове растављати на чиниоце коритећи фромуле за триноме и биноме.

$x_1^3 + x_2^3 - 2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 2x_1 + x_2 - 15 = ?$

$x_1^3 + x_2^3$ ћемо раставити на $(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$

Груписаћемо $-2x_1^2 + 2x_1 = -2(x_1^2 - x_1)$ и $-x_2^2 + x_2 = -(x_2^2 - x_2)$, јер те вредности знамо из квадратне једначине. Како су x_1 и x_2 њени корени, они је испуњавају, тако да за оба корена важи и веза $x^2 + x = -15$.

Израчунајмо сада вредности за Вијетове везе: $x_1 + x_2 = 1$ и $x_1 \cdot x_2 = 15$. Вратимо се на израз:

$x_1^3 + x_2^3 - 2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 2x_1 + x_2 - 15 =$

$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) - 2(x_1^2 - x_1) - (x_2^2 - x_2) + x_1x_2 - 15 =$

Заменимо сада вредности познатих израза,

$1 \cdot (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) - 2 \cdot (-15) - (-15) + 15 - 15 = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 45 =$

Групишемо на квадрат бинома,

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2 + 45 = 1^2 - 3 \cdot (-15) + 45 = 1 - 45 + 45 = 1$

Одговор је под A.

8. Приметимо да је $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, то јест да има нулу $x = -1$ вишеструкости 2. Пошто се захтева да је $2x + 4$ остатак при дељењу $x^4 + ax^3 - ax + b$ са $(x + 1)^2$ следи да важи:

   $x^4 + ax^3 - ax + b = Q(x) \cdot (x + 1)^2 + 2x + 4$, где је $Q(x)$ количник.

   Заменом $x = -1$ добијамо: $1 - a + a + b = 0 - 2 + 4$, то јест $1 + b = 2$ па је $b = 1$.

   Даље, пошто је $x = -1$ двострука нула, можемо посматрати и први извод претходног израза:

   $4x^3 + 3ax^2 - a = Q'(x) \cdot (x + 1)^2 + Q(x) \cdot 2(x + 1) + 2$

   Заменом $x = -1$ добијамо: $-4 + 3a - a = 0 + 0 + 2$, то јест $2a - 4 = 2$, па је $a = 3$

   Дакле производ $ab = 3$. **Одговор је под C.**

9. Да бисмо проверили да ли је функција парна или непарна она мора да има симетричан домен у односу на нулу, и да важи једна од релација : $f(-x) = f(x)$ - функција је парна или $f(-x) = -f(x)$ - функција је непарна.

[1] Франсоа Вијет (François Viète, 1540—1603), француски математичар.

Кренимо од $f_1(x)$: Прво $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0$ и $1 - \sin x \neq 0$ мора бити испуњено, а оно је испуњено за $\sin x \neq \pm 1$, то јест за $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Овај домен је симетричан у односу на 0, те има смисла испитати парност. Пошто је $f_1(-x) = \ln \frac{1+\sin(-x)}{1-\sin(-x)} = \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \ln \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^{-1} = -\ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = -f_1(x)$, следи да је $f_1(x)$ непарно.

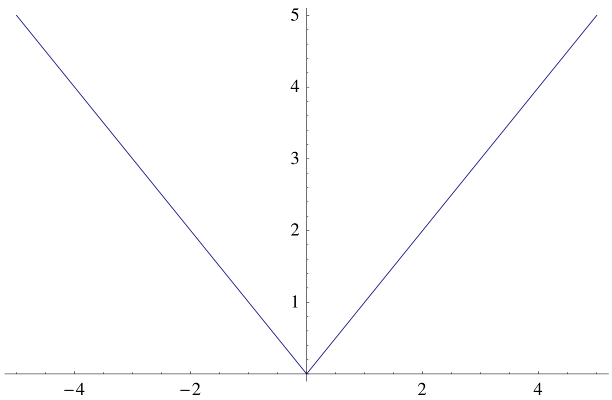
За $f_2(x)$ је важно да је $x \in [-1, 1]$, а тај домен је и симетричан. Даље $f_2(-x) = \arcsin(-x) \cdot \operatorname{arctg}(-x) = -\arcsin x \cdot (-\operatorname{arctg} x) = \arcsin x \cdot \operatorname{arctg} x = f_2(x)$, па је $f_2(x)$ парна.

За $f_3(x)$ домен је $\mathbb{R}$, међутим $f_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, а $f_3\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$, што значи да је $f_3\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ и $f_3\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Дакле, $f_3(x)$ није ни парна ни непарна функција.

Коначно за $f_4(x)$ је важно да је $x \neq 0$ те је домен симетричан. Па је $f_4(-x) = \frac{\ln(-x)^2}{\sqrt[3]{-x}} = \frac{\ln x^2}{-\sqrt[3]{x}} = -\frac{\ln x^2}{\sqrt[3]{x}} = -f_4(x)$, то јест $f_4(x)$ је непарна.

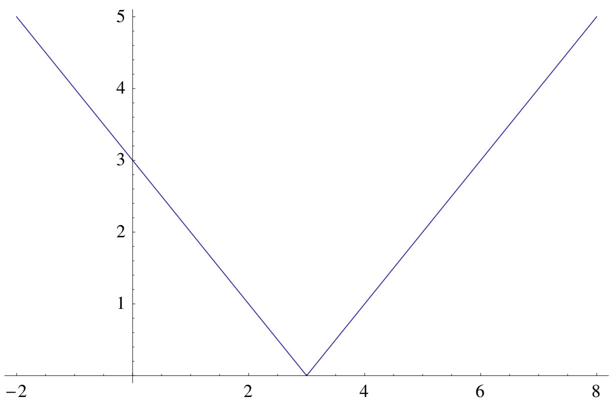
Дакле $p = 1, n = 2$. **Одговор је под** D.

10. Нацртајмо график функције $f(x) = ||x - 3| - 1|$. Кренимо од $|x|$:



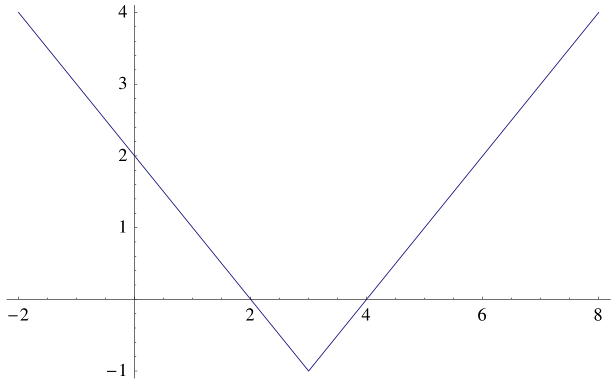
Слика 1: График фуннкције $f(x) = |x|$

Затим нацртајмо сада график функције $|x - 3|$, добијамо када померимо график удесно за 3 места по ш-оси.



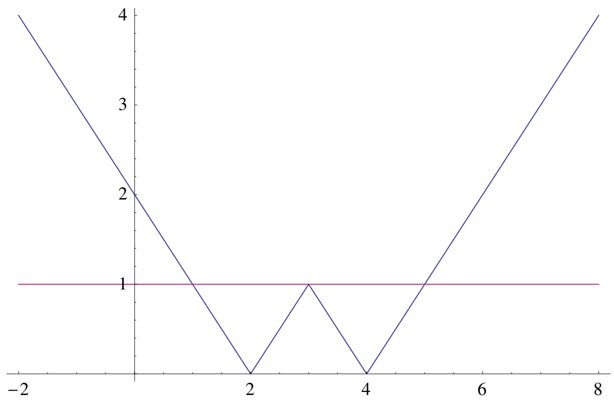
Слика 2: График фуннкције $f(x) = |x - 3|$

Затим нацртајмо сада график функције $|x-3|-1$, добијамо када померимо график надоле за 1 место по ы-оси.



Слика 3: График фуннкције $f(x) = |x-3|-1$

Затим нацртајмо апсолутну вредност горње функције то јест нацртајмо $||x-3|-1|$, то се ради тако што се све оно што је испод ш-осе симетрично преслика изнад ње.



Слика 4: График фуннкције $f(x) = ||x-3|-1|$

Са слике већ уочавамо да је решење права $y = 1$, јер једино она сече график у тачно 3 тачке. То јест решење параметра a је 1. **Одговор је под C.**

11. Кренемо од $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ и замењујемо редом вредности x, и гледамо шта нам то рећи о функцији f.

    $f(0) = 1 \Longrightarrow f(0) = \frac{a \cdot 0+b}{c \cdot 0+d} = \frac{b}{d} = 1 \Longrightarrow b = d$. Те знамо да је фунцкија $f(x)$ облика $\frac{ax+b}{cx+b}$. Затим,

    $f(1) = 0 \Longrightarrow f(1) = \frac{a \cdot 1+b}{c \cdot 1+b} = \frac{a+b}{c+b} = 0 \Longrightarrow a + b = 0$ то јест $a = -b$. Те добијамо да је фунцкија $f(x)$ облика $\frac{-bx+b}{cx+b}$. А из

    $f(2) = 3 \Longrightarrow f(2) = \frac{-b \cdot 2+b}{c \cdot 2+b} = \frac{-b}{2c+b} = 3 \Longrightarrow -b = 3 \cdot (2c + b)$, наравно за $2c + b \neq 0$, добијамо да је $-b = 6c + 3b \Longrightarrow c = -\frac{2}{3}b$.

Из свегда овога закључујемо даје фукција $f(x)$ облика $\frac{-bx+b}{-\frac{2}{3}bx+b}$, када поделимо бројилац и именилац са b добијамо да је $f(x) = \frac{-x+1}{-\frac{2}{3}x+1} = \frac{1-x}{1-\frac{2}{3}x}$.

Одатле можемо да израчунамо $f(3) = \frac{1-3}{1-\frac{2}{3}\cdot 3} = \frac{-2}{1-2} = 2$. **Одговор је под D.**

12. Погледајмо прво систем:

$$(x^2-1)(2x-3y+4z) = 0$$
$$4x+5y+8z = -2$$
$$3x+y+6z = 44$$

Личи на систем 3 једначине са 3 непознате, само што нам смета (x^2-1) из прве једначине. Па хајдемо да се решимо тога. Када је $x^2-1=0$ то јест када је $x^2=1$, очигледно је за $x = \pm 1$.

Разматраћемо три случаја када је $x=1$, $x+-1$ и када је $x \neq \pm 1$.

1) Када је $x=1$ добијамо систем:

$$4+5y+8z = -2$$
$$3+y+6z = 44$$

$$5y+8z = -6$$
$$y+6z = 41$$

Изразимо сада y:

$$5y+8z = -6$$
$$y = 41-6z$$

Заменимо y у горњу једначину:

$$5\cdot(41-6z)+8z = -6$$
$$y = 41-6z$$

$$205-30z+8z = -6$$
$$y = 41-6z$$

$$-22z = -211$$
$$y = 41-6z$$

Израчунајмо сада z:

$$z = \frac{211}{22}$$
$$y = 41-6z$$

Заменимо вредност z у доњи израз да бисмо добили y:

$$z = \frac{211}{22}$$
$$y = 41-6\cdot\frac{211}{22} = -\frac{182}{11}$$

Те је решење система јединствено и гласи $(1, -\frac{182}{11}, \frac{211}{22})$.

2) Када је $x = -1$ добијамо систем:

$$-4 + 5y + 8z = -2$$
$$-3 + y + 6z = 44$$

$$5y + 8z = 2$$
$$y + 6z = 47$$

Изразимо сада ы:

$$5y + 8z = 2$$
$$y = 47 - 6z$$

Заменимо y у горњу једначину:

$$5 \cdot (47 - 6z) + 8z = 2$$
$$y = 47 - 6z$$

$$235 - 30z + 8z = 2$$
$$y = 47 - 6z$$

$$-22z = -233$$
$$y = 47 - 6z$$

$$z = \frac{233}{22}$$
$$y = 47 - 6z$$

Заменимо вредност z у доњи израз да бисмо добили y:

$$z = \frac{233}{22}$$
$$y = 47 - 6 \cdot \frac{233}{22} = -\frac{182}{11}$$

Те је решење система јединствено и гласи $(1, -\frac{182}{11}, \frac{211}{22})$.

3) Пошто је $x \neq \pm 1$, онда прву једначину можемо поделити са $(x^2 - 1)$, и решавамо систем:

$$2x - 3y + 4z = 0$$
$$4x + 5y + 8z = -2$$
$$3x + y + 6z = 44$$

Овај систем је 3ш3 па се мало теже решава. Можемо уочити линеарну зависност једначина и лако је показати. Помножимо прву једначину са -2 и додамо је другој, и са $-\frac{3}{2}$ и додамо је трећој. Тиме добијамо:

$$2x - 3y + 4z = 0$$
$$11y = -2 \Longrightarrow y = -\frac{11}{2}$$
$$\frac{11}{2}y = 44 \Longrightarrow y = 8$$

Овиме смо добили контрадикцију, то јест да овај систем нема решење.

Закључак је да полазни систем има само два решења. **Одговор је под C.**

Убацити лакси нацин ресавања овог задатака, без буквалног рацунања

13. Погледајмо полазни систем:

$$7 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^y = 23$$
$$2 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^y = 42$$

Уводимо смену $a = 3^x, b = 2^y$, тада нам систем изгледа:

$$7a - 5b = 23$$
$$2a + 3b = 42$$

Ово је систем линеарних једначина са две непознате који се јако лако реши, и његова решења су:

$$a = 9$$
$$b = 8$$

Па је решење полазног система:

$$3^x = a = 9 \Longrightarrow x = 2$$
$$2^y = b = 8 \Longrightarrow y = 3$$

Тражени израз $x + y = 5$. **Одговор је под E.**

14. Да бисмо ово решили треба да знамо својства логаритма. Она која су нам овде потребна су: $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$, $\log_a b^n = n \log_a b$, $\log_a a = 1$ и $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$.

$$\log_{36} x^2 + \log_6(x+5) - 1 = 0$$
$$\log_{6^2} x^2 + \log_6(x+5) = 1$$
$$\frac{1}{2} \log_6 x^2 + \log_6(x+5) = 1$$
$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_6 |x| + \log_6(x+5) = 1$$

Овде мора $|x|$ јер није назначено који је домен у питању.

$$\log_6 |x| + \log_6(x+5) = 1$$
$$\log_6 |x|(x+5) = 1$$
$$\log_6 |x|(x+5) = \log_6 6$$
$$|x|(x+5) = 1$$

Разматрамо сада два случаја:

1) Када је $x > 0$: $x(x+5) = 6 \Longrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Longrightarrow (x+6)(x-1) = 0$. Решење за овај случај је $x = 1$.

2) Када је $-5 < x < 0$: $-x(x+5) = 6 \Longrightarrow -x^2 - 5x - 6 = 0 \Longrightarrow -(x+3)(x+2) = 0$. Решења за овај случај је $x = -2$ и $x = -3$.

   Напомена: Када је логаритам у питању, оно што је под њим не сме бити 0, стога се само разматра када је x мање од 0. Такође горе имамо $\log_6(x+5)$ одакле узимамо друго ограничење а то је да $x + 5 > 0$ то јест $x > -5$.

Производ решења је $1 \cdot (-2) \cdot (-3) = 6$. **Одговор је под E.**

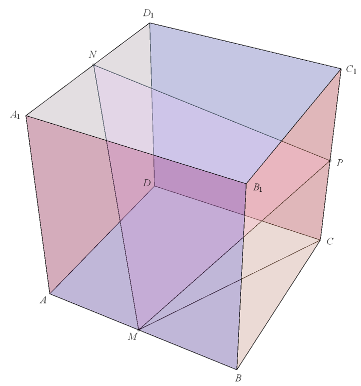
15. Посматрајмо прво интервал од $[0, \pi]$. На интервалу $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ је, $\sin x < \cos x$, а на интервалу $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ је $\sin x < |\cos x|$, док на осталим деловим у оквиру $[0, \pi]$ услов није испуњен.

    Када имамо то уочено размотримо сада неке апроксимације које ће нам помоћи за даље разматрање: $\frac{\pi}{4} = 0.735$, $\frac{3\pi}{4} = 2.305$, $\pi = 3.14$, $2\pi = 6.28$, $2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} = 7.015$, $2\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{11\pi}{4} = 8,585$, $3\pi = 9.42$.

    - $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \to$ решење је 0.
    - $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \to$ решење је 3.
    - $x \in [\pi, 2\pi) \to$ решења су 4,5,6.
    - $x \in \left[2\pi, \frac{9\pi}{4}\right) \to$ решење је 7.
    - $x \in \left(\frac{11\pi}{4}, 3\pi\right] \to$ решења нема, јер је ово дисјунктно са $[0, 8]$.

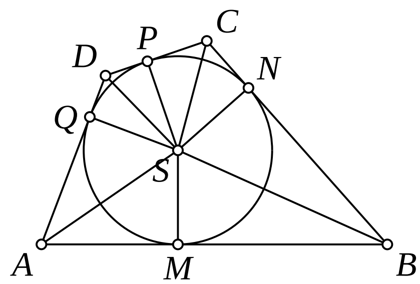
    Број решења је 6. **Одговор је под C.**

16. Троугао $\triangle MNP$ је једнакостранични, па је довољно израчунати његову страницу. Искористимо два пута Питагорину теорему. Из правоуглог троугла $\triangle MBC$ следи да је $MC^2 = MB^2 + BC^2 = 2^2 + 4^2 = 20$, а из правоуглог троугла $\triangle MCN$ следи да је $MN^2 = MC^2 + CN^2 = 20 + 2^2 = 24$. Према томе, површина троугла $\triangle MNP$ је $\frac{MN^2\sqrt{3}}{4} = \frac{24\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$. **Одговор је под E.**



Слика 5: Слика уз задатак

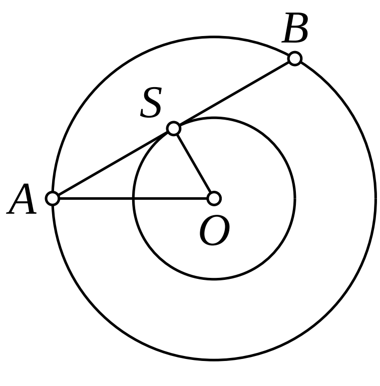
17. Изделимо четвороугао на 8 троуглова: $\triangle AMS$, $\triangle BMS$, $\triangle BNS$, $\triangle CNS$, $\triangle CPS$, $\triangle DPS$, $\triangle DQS$, $\triangle AQS$. Збир површина ових троуглова једнак је површини четвороугла $ABCD$, дакле 90 cm^2. Ови троуглови су правоугли и свима је катета која садржи теме S једнака полупречнику r уписане кружнице. Означимо



Слика 6: Слика уз задатак

$AM = AQ = x$, $BM = BN = y$, $CN = CP = z$, $DP = DQ = t$ (тангентне дужи из исте тачке су једнаке). Тада је:
$90 = \frac{r\cdot x}{2} + \frac{r\cdot y}{2} + \frac{r\cdot y}{2} + \frac{r\cdot z}{2} + \frac{r\cdot z}{2} + \frac{r\cdot t}{2} + \frac{r\cdot t}{2} + \frac{r\cdot x}{2} = \frac{r}{2}\cdot(2x+2y+2z+2t) = r\cdot(x+y+z+t)$.
Приметимо да је $x + y + z + t = AB + CD = 15$, па је $90 = r \cdot 15$, одакле следи да је $r = 6$ cm. **Одговор је под** A**.**

18. Нека је R полупречник већег, а r полупречник мањег круга. Тетива AB је тангента на мањи круг, па следи да је у додирној тачки S нормална на полупречник OS. Пошто је $OA = OB = R$, следи да је троугао $\triangle OAB$ једнакокраки. Према томе, S је средиште странице AB. У правоуглом троуглу $\triangle SOA$ имамо да је $OA^2 = OS^2+$



Слика 7: Слика уз задатак

SA^2 на основу Питагорине теореме, тј. $R^2 = 3^2+r^2$. Дакле, $R^2-r^2 = 9$. Површина кружног прстена једнака је $R^2\pi - r^2\pi$, па следи да је једнака 9π. **Одговор је под** B**.**

19. Погледајмо једначине правих $2x + y - 3 = 0$, $2x + y - 8 = 0$. Запишимо их мало другачије $y = -2x+3$, $y = 2x+8$. Видимо да су коефицијенти правца једнаки те да су праве паралелне. Да бисмо добили ивицу квадрата довољно је наци растпојање имеђу правих. То ћемо наћи тако што ћемо узети неку тачку са једна праве, и наћи њено растојање од друге праве.

Узећу тачку са прве праве, и нека то буде тачка у којој x узима вредност 0. То ће бити тачка где је $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$, то јест тачка $(0, 3)$. Користећи формулу за налажење одстојанај тачке од праве налазимо ивицу квадрата a: (Нека је права q задата једначином $2x + y - 8 = 0$)

$d((0,3), q) = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Добијемо да је $a = \sqrt{5}$ то јест површина квадрата је 5. **Одговор је под B.**

20. Како имамо $a, b, \sin\alpha$ можемо користећи синусну теорену да нађемо и $\sin\beta$:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Longrightarrow \frac{60}{\frac{12}{13}} = \frac{52}{\sin\beta} \Longrightarrow \sin\beta = \frac{4}{5}$

Како имамо вредности синуса углове, можемо лако наћи вредности косинуса из релације $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, а како су то углови троугла знамо да ће вредности бити позитивне. Са лакоћом налазимо $\cos\alpha = \frac{5}{13}, \cos\beta = \frac{3}{5}$.

Пошто је $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ имамо:

$\sin\gamma = \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{36+20}{65} = \frac{56}{65}$.
Одговор је под A.

Литература

[1] Огњановић Срђан, *Математика 4+*, Круг Београд

[2] Волфрам алфа - за проверу речуна

[3] Задаци са пријемног