Matematički fakultet

Rešenja zadataka sa prijemnih ispita

Autor:
Ivana Jankić

8. septembar 2017

Sadržaj

Glava 1

Prijemni ispit iz 2016. godine

1.1 Zadaci

1. Kada je 25% kante prazno, ona sadrži 25 litara vode više nego kada je 25% kante puno. Koliko litara vode sadrži puna kanta?

   A) 25 B) 33 C) 50 D) 75 E) 90

2. Dvocifreni završetak prirodnog broja a je 16. Ako broj a nije deljiv sa 8, tada je cifra jedinica broja $3a/4$ jednaka:

   A) 0 B) 2 C) 5 D) 7 E) 8

3. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 1000000 koji su deljivi tačno jednim od brojeva 11 i 13?

   A) 6993 B) 153846 C) 160839 D) 167832 E) 993006

4. Najveci koeficijent polinoma $(2x+1)^{10}$ jednak je:

   A) 120 B) 11520 C) 13440 D) 15360 E) 16480

5. Brojevi 2, $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ i $4-2\sqrt{3}$ čine prva tri člana:

   A) aritmetičkog, ali ne i geometrijskog niza

   B) geometrijskog, ali ne i aritmetičkog niza

   C) i aritmetičkog i geometrijskog niza

   D) ni aritmetičkog ni geometrijskog niza

   E) niza sa opštim članom $a_n = 4 - 2\sqrt{n}$

6. Data je jednačina $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^2 = i$, gde je x realna nepoznata. Broj rešenja ove jednačine u intervalu $(0, 1/2)$ je:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) ∞

7. Ako su x_1 i x_2 rešenja jedančine $x^2 - x + 15 = 0$, tada je $x_1^3 + x_2^3 - 2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 2x_1 + x_2 - 15$ jednako:

A) 1 B) 87 C) 31 D) 16 E) -14

8. Ako su a i b realni brojevi takvi da polinom $x^4 + ax^3 - ax + b$ daje ostatak $2x + 4$ pri deljenju polinomom $x^2 + 2x + 1$, tada je ab jednako:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. Date su funkcije $f_1(x) = \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$, $f_2(x) = \arcsin x \cdot \arctan x$, $f_3(x) = \sin x + \cos x$ i $f_4(x) = \frac{\ln x^2}{\sqrt[3]{x}}$. Ako sa p označimo broj parnih, a sa n broj neparnih među ovim funkcija, tačan je iskaz:

A) $p = 1$ i $n = 1$ C) $p = 2$ i $n = 1$ E) $p = 1$ i $n = 0$
B) $p = 2$ i $n = 2$ D) $p = 1$ i $n = 2$

10. Za koje vrednosti realnog parametra a jednačina $||x - 3| - 1| = a$ ima tačno tri realna rešenja:

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

11. Funkcija f je zadata sa $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gde su a, b, c i d realni brojevi. Ako je $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ i $f(2) = 3$, koliko je $f(3)$?

A) -1 B) $\frac{3}{2}$ C) 5 D) 2 E) 3

12. Broj rešenja sistema jednačina

$(x^2 - 1)(2x - 3y + 4z) = 0$

$4x + 5y + 8z = -2$

$3x + y + 6z = 44$

u skupu realnih brojeva je:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) ∞

13. Ako za realne brojeve x i y važi $7 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^y = 23$ i $2 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^y = 42$, onda je zbir $x + y$ jednak:

A) 7 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. Proizvod svih rešenja jednačine $\log_{36} x^2 + \log_6(x + 5) - 1 = 0$ je :

A) -36 B) -6 C) 1 D) 12 E) 6

15. Broj celobrojnih rešenja nejednačine $\sin x < |\cos x|$ u intervalu $[0, 8]$ jednak je:

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

16. Tačke M, N i P su središta tri mejusobno mimoilazne ivice kocke. Ako je dužina ivice $4cm$, površina trougla MNP je:

A) $8\sqrt{2}cm^2$ B) $\sqrt{2}cm^2$ C) $8\sqrt{3}cm^2$ D) $8cm^2$ E) $6\sqrt{3}cm^2$

17. Oko kružnije opisan je četvorougao $ABCD$ površine $90cm^2$. Ako je zbir dužina naspramnih stranica AB i CD jednak $15cm$, dužina poluprečnika kružnice je :

A) $6cm$ B) $5\sqrt{2}cm$ C) $6\sqrt{3}cm$ D) $3\sqrt{3}cm$ E) $3cm$

18. Date su dve koncentrične kružnice i duž AB koja je tetiva kružnice većeg, a tangenta na kružnicu manjeg polipre čnika. Ako je $AB = 6$, onda je površina prstena izmeju datih kružnica jednaka:

A) 12π B) 9π C) π D) 9 E) 6π

19. Površina kvadrata čije su dve stranice na pravima $2x + y - 3 = 0$, $2x + y - 8 = 0$ je :

A) $2\sqrt{3}$ B) 5 C) 4 D) 6 E) $3\sqrt{2}$

20. Dužine stranica oštrouglog trougla su $a = 60$, $b = 52$ i c, a veličine odgovarajućih uglova su α, β i γ. Ako je $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, onda je $\sin \gamma$ jednak:

A) $\frac{56}{65}$ B) $\frac{56}{63}$ C) $\frac{39}{65}$ D) $\frac{39}{63}$ E) $\frac{63}{65}$

1.2 Rešenje

1. 25% kante je prazne je ekvivalnetno sa tim da je 75% kante puno. Obeležimo sa x zapreminu kante sa vodom. Prevedimo sada tekst zadatka u matematički zapis:

   Kada je 25% kante prazno, ona sadrži 25 litara vode više nego kada je 25% kante puno.

   75% od x umanjen sa 25 litara je isto sto i 25% od x.

   Matematički : $0.75 \cdot x - 25 = 0.25 \cdot x$

   Daljim rešavanjem ove jednačine dobijamo: $0.5 \cdot x = 25$. Ako obe strane pomožimo sa brojem 2 dobijamo: $x = 50$, te je rešenja zadatka 50 litara. **Odgovor je pod C.**

2. Dvocifreni završetak prirodnog broja a je 16, matematički zapisano $a \equiv 16 \pmod{100}$. Znamo da 8 ne sme da deli a, dok po tekstu zadatka zaključujemo da 4 mora da deli a. Uradimo zadatak pešaka, ispišimo sve dvocifrene i trocifrene brojeve kod kojih važi gorenja relacija. Krenućemo od 16 do 916.

   16 - ne može jer je deljivo sa 8.

   116 je kandidat za a.

   216 - ne može jer je deljivo sa 8.

   316 je kandidat za a.

   416 - ne može jer je deljivo sa 8.

   516 je kandidat za a.

   616 - ne može jer je deljivo sa 8.

   716 je kandidat za a.

   816 - ne može jer je deljivo sa 8.

   916 je kandidat za a.

   Posmatrajmo sada kandidate, svi su deljivi sa 4. Podelimo ih sve sa 4 i dobijamo redom : 29, 79, 129, 179, 229. Pošto nas zanima samo cifra jedinice broja $3a/4$, već odavde možemo da zaključimo da će to biti $9 * 3(mod 10)$ to jest broj 7. **Odgovor je pod D.**

3. Brojeve koje posmatramo pripadaju skupu $\{n \in N : n < 1000000 = 10^6\}$. Posmatrajmo skupove $A = \{m \in N : 11 \cdot m < 10^6\}$, $B = \{m \in N : 13 \cdot m < 10^6\}$ i $C = \{m \in N : 11 \cdot 13 \cdot m < 10^6\}$. A je skup svih brojeva deljivih sa 11, B je skup svih brojeva deljivih sa 13 i C skup svih brojeva deljivih sa 11 i 13. Pošto u skupu A se nalaze brojevi deljivi i sa 13, a u B se nalaze brojevi koji su deljivi i sa 11. Stoga rešenje predstavlja $|A| + |B| - 2 \cdot |C|$. Gde $|A|$ predstavlja kardinalnost skupa A. Izračunajmo sada kardinalnosti skupova :

   $|A| = \lfloor \frac{10^6}{11} \rfloor = 90909$

   $|B| = \lfloor \frac{10^6}{13} \rfloor = 76923$

   $|C| = \lfloor \frac{10^6}{11 \cdot 13} \rfloor = \lfloor \frac{10^6}{143} \rfloor = 6993$

   Te je rešenje $90909 + 76923 - 2 \cdot 6993 = 153846$. **Odgovor je pod B.**

4. Koeficijent uz k-ti član se računa pomoću formule $\binom{n}{k}2^k1^{n-k}$, što je u ovom slučaju isto što i $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(2)^k$. Sada tražimo $k \leq 10$ takvo da je gornji izraz maksimalan. Znamo da $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ daje koeficijente simetrične u odnosu na $\frac{n+1}{2}$, pa uočavamo da ce maksimalno biti za $k \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil = 6$. Nađimo sada koeficijente za $6 \leq k \leq 10$:
$\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot 2^6 = 210 \cdot 2^6 = 6720$
$\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot 2^7 = 120 \cdot 2^7 = 15360$
$\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot 2^8 = 45 \cdot 2^8 = 11520$
$\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot 2^9 = 10 \cdot 2^9 = 5120$
$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot 2^{10} = 1 \cdot 2^{10} = 1024$ Vidimo da je za $k = 7$ koeficijent najveć i iznosi 15360.
Odgovor je pod D.

5. Očigledno je da niz nije aritmetički te odgovori po A i C otpadaju. Proverimo da li je odgovor pod E. Da li su to članovi niza $a_n = 4 - 2\sqrt{n}$. Računajmo $a_1 = 4 - 2 = 2$, $a_2 = 4 - 2\sqrt{2}$ - a ovaj broj nije meju traženima. Ostalo je još proveriti da nije geometrijski niz. Pretpostavimo da jeste, naјimo sada koeficijent geometrijske progresije q :

   Znamo da je geomerijski niz oblika b, bq, bq^2, bq^3 itd. Te q možemo naći kada dva uzastopna člana niza podelimo. Pošto je prvi član ceo broj, podelićemo drugi član sa prvim : $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)$ i to će biti q. Sada ostaje da proverimo da li treći član niza pripada geometrijskom nizu čija prva dva člana su 2 i $\sqrt{6} - \sqrt{2}$. Dovoljno je da pomnožimo drugi član sa q i da vidimo da li je jednak trećem, ili da podelimo treći i drugi i da vidimo da li je jednak q. Uradićemo prvu varijantu : $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)^2 = 1 \cdot (3 - 2\sqrt{3} + 1) = 4 - 2\sqrt{2}$ što i jeste treći član niza, te je on geometrijski.

   Odgovor je pod B.

6. Rešimo jednačinu $(\frac{1+ix}{1-ix})^2 = i$

   $(\frac{1+ix}{1-ix})^2 = \frac{1+2ix-x^2}{1-2ix-x^2} = i$, pomnožimo je sa $1 - 2ix - x^2$ i dobijamo:

   $1 + 2ix - x^2 = i(1 - 2ix - x^2)$ prebacimo sada sve na levu stranu i sredimo

   $-(1 - i)x^2 - (2 - 2i)x + (1 - i) = 0$

   $-(1 - i)x^2 - 2(1 - i)x + (1 - i) = 0$ podelimo sa $-(1 - i)$ i dobijamo

   $x^2 + 2x - 1 = 0$, proverimo da li je diskriminanta veća ili jednaka od 0, što i jeste.

   Koristeći formulu za nalaženje korena binoma dobijamo: $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

   Znamo da je $\sqrt{2} = 1.41$ te je rešenje iz intervala $(0, 1/2)$ samo $-1 + \sqrt{2}$.

   Odgovor je pod B.

fali KOmentar o mnozenju imeniocem

7. Ovo se može uraditi na dva načina jedan jako računski zahtevan sa velikom verovatnoćom da će se negde pogrešiti u računu i na pametan i elegantan način. Ovaj prvi neču raditi ali je očigledno da se odnosi na nalaženje korena jednačine $x^2 - x + 15 = 0$ i onda ih zameniti u izraz i računati. Ali ako dobro pogledamo tu jednčinu videćemo da su njeni koreni kompleksni brojevi, i ne samo to nego je i izraz sa korenom. Odatle se već vidi da bi taj način bio najgori mogući. Drugi načini koji možemo sada nazvati i jedini je da se setimo Vijetovih veza za kvadratne jednačine:

   Za jednačinu oblika $ax^2+bx+c=0$ gde su x_1 i x_2 koreni važi $x_1+x_2 = \frac{-b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

   Ovde bi mogla fustnota za vijeta

   Ideja je sledeća da izraz sredimo tako da bismo mogli da primenimo Vijetove veze. Sredićemo ga tako što ćemo određene delove rastavljati na činioce korisiteći fromule za trinome i binome.

   $x_1^3 + x_2^3 - 2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 2x_1 + x_2 - 15 =?$

   $x_1^3 + x_2^3$ ćemo rastaviti na $(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$

   Grupisaćemo $-2x_1^2 + 2x_1 = -2(x_1^2 - x_1)$ i $-x_2^2 + x_2 = -(x_2^2 - x_2)$, jer te vrednosti znamo iz kvadratne jednačine. Kako su x_1 i x_2 njeni koreni, oni je ispunjavaju, tako da za oba korena važi i veza $x^2 + x = -15$

   Izračunajmo sada vrednosti za Vijetove veze: $x_1 + x_2 = 1$ i $x_1 \cdot x_2 = 15$. Vratimo se na izraz:

   $x_1^3 + x_2^3 - 2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 2x_1 + x_2 - 15 =$

   $(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) - 2(x_1^2 - x_1) - (x_2^2 - x_2) + x_1x_2 - 15 =$

   Zamenimo sada vrednosti poznatih izraza

   $1 \cdot (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) - 2 \cdot (-15) - (-15) + 15 - 15 = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 45 =$

   Grupišemo na kvadrat binoma

   $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2 + 45 = 1^2 - 3 \cdot (-15) + 45 = 1 - 45 + 45 = 1$

   Odgovor je pod A.

8. Primetimo da je $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, to jest da ima nulu $x = -1$ višestrukosti 2. Pošto se zahteva da je $2x + 4$ ostatak pri deljenju $x^4 + ax^3 - ax + b$ sa $(x + 1)^2$ sledi da važi:

   $x^4 + ax^3 - ax + b = Q(x) \cdot (x + 1)^2 + 2x + 4$, gde je $Q(x)$ količnik.

   Zamenom $x = -1$ dobijamo: $1 - a + a + b = 0 - 2 + 4$, to jest $1 + b = 2$ pa je $b = 1$.

   Dalje, pošto je $x = -1$ dvostruka nula, možemo posmatrati i prvi izvod prethodnog izraza:

   $4x^3 + 3ax^2 - a = Q'(x) \cdot (x + 1)^2 + Q(x) \cdot 2(x + 1) + 2$

   Zamenom $x = -1$ dobijamo: $-4 + 3a - a = 0 + 0 + 2$, to jest $2a - 4 = 2$, pa je $a = 3$

   Dakle proizvod $ab = 3$. **Odgovor je pod C.**

9. Da bismo proverili da li je funkcija parna ili neparna onda mora da ima simetričan domen u odnosu na nulu, i da važi jedna od relacija : $f(-x) = f(x)$ - funkcija je parna ili $f(-x) = -f(x)$ - funkcija je neparna.

   Krenimo do $f_1(x)$: Prvo $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0$ i $1 - \sin x \neq 0$ mora biti ispunjeno, a ono je ispunjeno za $\sin x \neq \pm 1$, to jest za $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ovaj domen je simetričan u odnosu na 0, te ima smisla ispitati parnost. Pošto je $f_1(-x) = \ln \frac{1+\sin(-x)}{1-\sin(-x)} = \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \ln \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^{-1} = -\ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = -f_1(x)$, sledi da je $f_1(x)$ neparno.

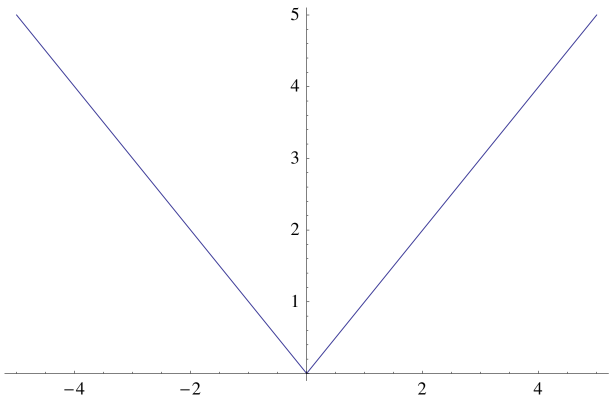
   Za $f_2(x)$ je važno da je $x \in [-1, 1]$, a taj domen je i simetričan. Dalje $f_2(-x) = \arcsin(-x) \cdot \arctan(-x) = -\arcsin x \cdot (-\arctan x) = \arcsin x \cdot \arctan x = f_2(x)$, pa je $f_2(x)$ parna.

   Za $f_3(x)$ domen je $\mathbb{R}$, međutim $f_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, a $f_3\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$, što znači da je $f_3\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ i $f_3\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Dakle, $f_3(x)$ nije ni parna ni neparna funkcija.

   Konačno za $f_4(x)$ je važno da je $x \neq 0$ te je donen simetričan. Pa je $f_4(-x) = \frac{\ln(-x)^2}{\sqrt[3]{-x}} = \frac{\ln x^2}{-\sqrt[3]{x}} = -\frac{\ln x^2}{\sqrt[3]{x}} = -f_4(x)$, to jest $f_4(x)$ je neparna.

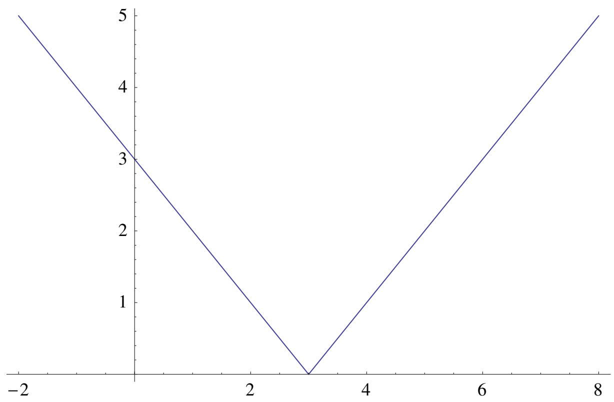
   Dakle $p = 1, n = 2$. **Odgovor je pod D.**

10. Nacrtajmo grafik funkcije $f(x) = ||x-3| - 1|$. Krenimo od $|x|$:



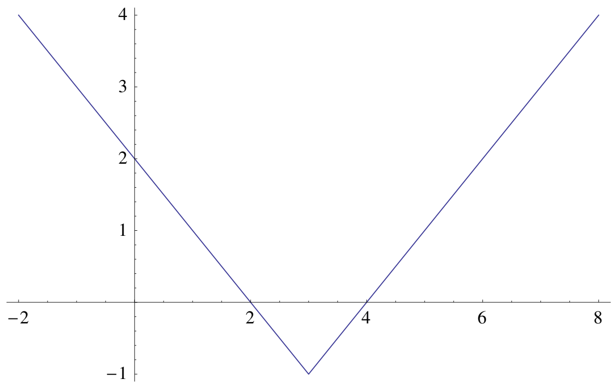
Slika 1.1: Grafik funnkcije $f(x) = |x|$

Zatim nacrtajmo sada grafik funkcije $|x - 3|$, dobijamo kada pomerimo grafik udesno za 3 mesta po x-osi.



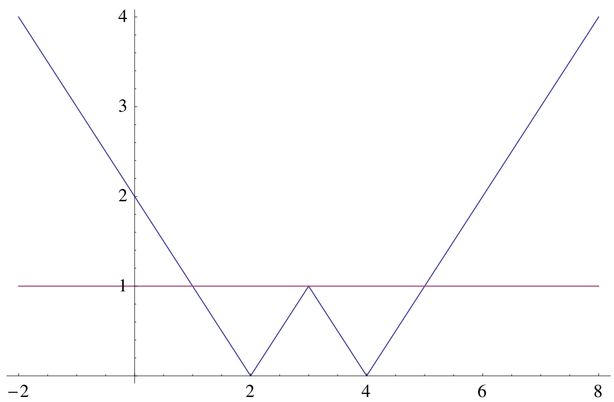
Slika 1.2: Grafik funnkcije $f(x) = |x - 3|$

Zatim nacrtajmo sada grafik funkcije $|x-3|-1$, dobijamo kada pomerimo grafik nadole za 1 mesto po y-osi.



Slika 1.3: Grafik funnkcije $f(x) = |x - 3| - 1$

Zatim nacrtajmo apsolutnu vrednost gornje funkcije to jest nacrtajmo $||x - 3| - 1|$, to se radi tako što se sve ono što je ispod x-ose simetrično preslika iznad nje.



Slika 1.4: Grafik funnkcije $f(x) = ||x - 3| - 1|$

Sa slike već uočavamo da je rešenje prava $y = 1$, jer jedino ona seče grafik u tačno 3 tačke. To jest rešenje parametra a je 1. **Odgovor je pod C.**

11. Krenemo od $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ i zamenjujemo redom vrednosti x, i gledamo šta nam to reći o funkciji f.

$f(0) = 1 \Longrightarrow f(0) = \frac{a \cdot 0+b}{c \cdot 0+d} = \frac{b}{d} = 1 \Longrightarrow b = d$. Te znamo da je funckija $f(x)$ oblika $\frac{ax+b}{cx+b}$. Zatim,

$f(1) = 0 \Longrightarrow f(1) = \frac{a \cdot 1+b}{c \cdot 1+b} = \frac{a+b}{c+b} = 0 \Longrightarrow a + b = 0$ to jest $a = -b$. Te dobijamo da je funckija $f(x)$ oblika $\frac{-bx+b}{cx+b}$. A iz

$f(2) = 3 \Longrightarrow f(2) = \frac{-b \cdot 2+b}{c \cdot 2+b} = \frac{-b}{2c+b} = 3 \Longrightarrow -b = 3 \cdot (2c + b)$, naravno za $2c + b \neq 0$, dobijamo da je $-b = 6c + 3b \Longrightarrow c = -\frac{2}{3}b$.

Iz svegda ovoga zaključujemo daje fukcija $f(x)$ oblika $\frac{-bx+b}{-\frac{2}{3}bx+b}$, kada podelimo brojioc i imenioc sa b dobijamo da je $f(x) = \frac{-x+1}{-\frac{2}{3}x+1} = \frac{1-x}{1-\frac{2}{3}x}$.

Odatle mozemo da izračunamo $f(3) = \frac{1-3}{1-\frac{2}{3} \cdot 3} = \frac{-2}{1-2} = 2$. **Odgovor je pod D.**

12. Pogledajmo prvo sistem:

$$(x^2 - 1)(2x - 3y + 4z) = 0$$
$$4x + 5y + 8z = -2$$
$$3x + y + 6z = 44$$

Liči na sitem 3 jednačina sa 3 nepoznate, samo što nam smeta (x^2-1) iz prve jednačine. Pa hajmo da se rešimo toga. Kada je $x^2 - 1 = 0$ to jest kada je $x^2 = 1$, očigledmo je za $x = \pm 1$.

Razmatraćemo tri slučaja kada je $x = 1$, $x + -1$ i kada je $x \neq \pm 1$.

1) Kada je $x = 1$ dobijamo sistem:

$$4 + 5y + 8z = -2$$
$$3 + y + 6z = 44$$

$$5y + 8z = -6$$
$$y + 6z = 41$$

Izrazimo sada y:

$$5y + 8z = -6$$
$$y = 41 - 6z$$

Zamenimo y u gornju jednačinu:

$$5 \cdot (41 - 6z) + 8z = -6$$
$$y = 41 - 6z$$

$$205 - 30z + 8z = -6$$
$$y = 41 - 6z$$

$$-22z = -211$$
$$y = 41 - 6z$$

Izračunamo sada z:

$$z = \frac{211}{22}$$
$$y = 41 - 6z$$

Zamenimo vrednos z u donji izraz da bismo dobili y:

$$z = \frac{211}{22}$$
$$y = 41 - 6 \cdot \frac{211}{22} = -\frac{182}{11}$$

Te je rešenje sistema jedinstveno i glasi $(1, -\frac{182}{11}, \frac{211}{22})$.

2) Kada je $x = -1$ dobijamo sistem:

$$-4 + 5y + 8z = -2$$
$$-3 + y + 6z = 44$$

$$5y + 8z = 2$$
$$y + 6z = 47$$

Izrazimo sada y:

$$5y + 8z = 2$$
$$y = 47 - 6z$$

Zamenimo y u gornju jednačinu:

$$5 \cdot (47 - 6z) + 8z = 2$$
$$y = 47 - 6z$$

$$235 - 30z + 8z = 2$$
$$y = 47 - 6z$$

$$-22z = -233$$
$$y = 47 - 6z$$

$$z = \frac{233}{22}$$
$$y = 47 - 6z$$

Zamenimo vrednos z u donji izraz da bismo dobili y:

$$z = \frac{233}{22}$$
$$y = 47 - 6 \cdot \frac{233}{22} = -\frac{182}{11}$$

Te je rešenje sistema jedinstveno i glasi $(1, -\frac{182}{11}, \frac{211}{22})$.

3) Pošto je $x \neq \pm 1$, onda prvu jednačinu možemo podeliti sa $(x^2 - 1)$, i rešavamo sistem:

$$2x - 3y + 4z = 0$$
$$4x + 5y + 8z = -2$$
$$3x + y + 6z = 44$$

Ovaj sistem je 3x3 pa se malo teže rešava. Možemo uočiti linearnu zavisnost jednačina i lako je pokazati. Pomnožimo prvu jednažinu sa -2 i dodamo je drugoj, i sa $-\frac{3}{2}$ i dodamo je trećoj. Tim dobijamo:

$$2x - 3y + 4z = 0$$
$$11y = -2 \Longrightarrow y = -\frac{11}{2}$$
$$\frac{11}{2}y = 44 \Longrightarrow y = 8$$

Ovime smo dobili kontradikciju, to jest da ovaj sistem nema rešenje.

Zaključak je da polazni sistem ima samo dva rešenja.**Odgovor je pod C.**

Ubaciti laksi nacin resavanja ovog zadataka, bez bukvalnog racunanja

13. Pogledajmo polazni sistem:

$$7 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^y = 23$$
$$2 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^y = 42$$

Uvodimo smenu $a = 3^x, b = 2^y$, tada nam sistem izgleda:

$$7a - 5b = 23$$
$$2a + 3b = 42$$

Ovo je sistem linearnih jednačina sa dve nepoznate koji se jako lako reši, i njegova rešenja su:

$$a = 9$$
$$b = 8$$

Pa je rešenje polaznog sistema:

$$3^x = a = 9 \Longrightarrow x = 2$$
$$2^y = b = 8 \Longrightarrow y = 3$$

Traženi izraz $x + y = 5$. **Odgovor je pod E.**

14. Da bismo ovo rešili treba da znamo svojstva logaritma. Ona koja su nam ovde potrebna su: $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$, $\log_a b^n = n\log_a b$, $\log_a a = 1$ i $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$.

$$\log_{36} x^2 + \log_6(x+5) - 1 = 0$$
$$\log_{6^2} x^2 + \log_6(x+5) = 1$$
$$\frac{1}{2}\log_6 x^2 + \log_6(x+5) = 1$$
$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_6 |x| + \log_6(x+5) = 1$$

Ovde mora $|x|$ jer nije naznačeno koji je domen u pitanju.

$$\log_6 |x| + \log_6(x+5) = 1$$
$$\log_6 |x|(x+5) = 1$$
$$\log_6 |x|(x+5) = \log_6 6$$
$$|x|(x+5) = 1$$

Razmatramo sada dva slučaja:

1) Kada je $x > 0$: $x(x+5) = 6 \Longrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Longrightarrow (x+6)(x-1) = 0$. Rešenje za ovaj slučaj je $x = 1$.
2) Kada je $-5 < x - < 0$: $-x(x+5) = 6 \Longrightarrow -x^2 - 5x - 6 = 0 \Longrightarrow -(x+3)(x+2) = 0$. Rešenja za ovaj slučaj je $x = -2$ i $x = -3$.

   Napomena: Kada je logaritam u pitanju, ono sto je pod njim ne sme biti 0, stoga se samo razmatra kada je x manje od 0. Takođe gore imam $log_6(x+5)$ odakle uzimamo drugo ograničenje a to je da $x + 5 > 0$ to jest $x > -5$.

Proizvod rešenja je $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. **Odgovor je pod E.**

15. Posmatrajmo prvo interval od $[0, \pi]$. Na intervalu $[0, \frac{\pi}{4})\sin x < \cos x$, a na intervalu $\frac{3\pi}{4}, \pi] \sin x < |\cos x|$, dok na ostalim delovim u okviru $[o, \pi]$ uslov nije ispunjen.

    Kada imamo to uočeno razmotrimo sada neke aproksimacije koje će nam pomoći za dalji razmatranje: $\frac{\pi}{4} = 0.735, \frac{3\pi}{4} = 2.305, \pi = 3.14, 2\pi = 6.28, 2\pi + \frac{pi}{4} = \frac{9\pi}{4} = 7.015, 2\pi + \frac{3pi}{4} = \frac{11\pi}{4} = 8,585, 3\pi = 9.42$.

    - $xin[0, \frac{\pi}{4}) \to$ rešenje je 0.
    - $xin(\frac{3\pi}{4}, \pi] \to$ rešenje je 3.
    - $xin[\pi, 2\pi) \to$ rešenja su 4,5,6.
    - $xin[2\pi, \frac{9\pi}{4}) \to$ rešenje je 7.
    - $xin(\frac{11\pi}{4}, 3\pi] \to$ rešenja nema, jer je ovo disjunktno sa $[0, 8]$.

    Broj rešenja je 6.**Odgovor je pod C.**

16. 16 MITA

17. 17 MITA

18. 18 I MITA

19. Pogledajmo jednačine pravih $2x+y-3 = 0$, $2x+y-8 = 0$. Zapišimo ih malo drugačije $y = -2x + 3$, $y = 2x + 8$. Vidimo da su koeficijenti pravca jednaki te da su prave paralelne. Da bismo dobili ivicu kvadrata dovoljno je naci rastpojanje između pravih. To ćemo naći tako što ćemo uzeti neku tačku sa jedna prave, i naći njeno rastojanje od druge prave.

    Uzeću tačku sa prve prave, i neka to bude tačka u kojoj x uzima vrednost 0. To će biti tačka gde je $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$, to jest tačka $(0, 3)$. Koristeći formulu za nalaženje odstojanaj tačke od prave nalazimo ivicu kvadrata a: (Neka je prava q zadata jednačinom $2x + y - 8 = 0$)

    $d((0,3), q) = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

    Dobijemo da je $a = \sqrt{5}$ to jest površina kvadrata je 5. **Odgovor je pod B.**

20. Kako imamo $a, b, \sin\alpha$ možemo koristeći sinusnu teorenu da nađemo i $\sin\beta$:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Longrightarrow \frac{60}{\frac{12}{13}} = \frac{52}{\sin\beta} \Longrightarrow \sin\beta = \frac{4}{5}$

Kako imamo sinuse uglove, možemo lako naći konsinuse iz relacije $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, a kako su to uglovi trougla znamo da će vrednosti biti pozitivne. Sa lakoćom nalazimo $\cos\alpha = \frac{5}{13}, \cos\beta = \frac{3}{5}$.

Pošto je $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ imamo:

$\sin\gamma = \sin(\pi-\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha = \frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5}+\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5} = \frac{36+20}{65} = \frac{56}{65}$.
Odgovor je pod A.

Bibliografija

[1] kkkk

[2] kkkkk