Математическая Статистика

Курбатов Егор M3238

15 марта 2020 г.

Метод Монте-Карло
Вариант №11

1 Оценка объёма

1.1 Задание

Методом Монте-Карло оценить объем части тела $\{F(\tilde{x}) \leq c\}$, заключенной в k-мерном кубе с ребром $[0, 1]$. Функция имеет вид $F(\tilde{x}) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_k)$. Для выбранной надежности $\gamma \geq 0.95$ указать асимптотическую точность оценки и построить асимптотический доверительный интервал для истинного значения объёма.
Используя объём выборки $n = 10^4$ и $n = 10^6$, оценить скорость сходимости и показать, что доверительные интервалы пересекаются.

1.2 Входные данные

- Функция имеет вид $f(x) = \exp(-0.35 * x)$
- Куб размерностью $k = 10$
- Параметр $c = 8.8$

1.3 Исходный код программы

```
pkg load statistics;

function monte_carlo(n)
    c = 8.8;
    y = 0.95;
    k = 10;
    Q = norminv((y + 1) / 2);
    X = rand(k, n);
    F_x = sum(exp(-0.35 .* X));
    In = mean(F_x <= c);
    delta = Q * sqrt(In * (1 - In) / n);
    printf("N = %d\n", n);
    printf("Volume is %g (from %g to %g)\n", In, In - delta, In + delta);
    printf("Delta is %g\n\n", delta);
endfunction

monte_carlo(10000);
monte_carlo(1000000);
```

1.4 Выходные данные

```
N = 10000
Volume is 0.9137 (from 0.908196 to 0.919204)
Delta is 0.00550371

N = 1000000
Volume is 0.908976 (from 0.908412 to 0.90954)
Delta is 0.00056377
```

1.5 Вывод

Доверительный интервал при $n = 10^6$ содержится в интервале при $n = 10^4$.
При увеличении числа итераций в 100 раз ширина доверительного интервала уменьшилось в 10 раз.

2 Оценка Интеграла

2.1 Задание

Построить оценку интегралов (представить интеграл как математическое ожидание функции, зависящей от случайной величины с известной плотностью) и для выбранной надежности $\gamma \geq 0.95$ указать асимптотическую точность оценки и построить асимптотический доверительный интервал для истинного значения интеграла.

2.2 Интеграл 1

2.2.1 Входные данные

- Интеграл имеет вид $\int\limits_0^\infty \sqrt{1+x^2} \cdot exp(-3x)dx$

2.2.2 Исходный код программы

```
pkg load statistics;

function [res] = g(x)
    res = sqrt(x .^ 2 .+ 1);
endfunction

function [res] = f(x)
    res = g(x) * exp(-3 .* x);
endfunction

function monte_carlo(n)
    j = 3;
    y = 0.95;
    Q = norminv((y + 1) / 2);
    X = exprnd(1/j, 1, n);
    F_x = g(X) .* 1/j;
    V = mean(F_x);
    delta = (std(F_x) * Q) / sqrt(n);
    printf("N = %d\n", n);
    printf("Value is %g (from %g to %g)\n", V, V - delta, V + delta);
    printf("Delta is %g\n\n", delta);
endfunction

printf("Sample answer = %g\n\n", quad(@f, 0, inf));
monte_carlo(10000);
monte_carlo(1000000);
```

2.2.3 Выходные данные

```
Sample answer = 0.364129

N = 10000
Value is 0.363943 (from 0.362841 to 0.365044)
Delta is 0.00110194

N = 1000000
Value is 0.364102 (from 0.363991 to 0.364213)
Delta is 0.000111015
```

2.2.4 Вывод

Истинное значение интеграла содержится в доверительном интервале при $n = 10^4$ и $n = 10^6$. Значение, полученное методом Монте-Карло отличается от значения, полученного методом *quad*, на $2.7 \cdot 10^{-5}$.
При увеличении числа итераций в 100 раз, ширина доверительного интервала уменьшилось в 10 раз.

2.3 Интеграл 2

2.3.1 Входные данные

- Интеграл имеет вид $\int\limits_4^9 \frac{\ln x}{x+1} dx$

2.3.2 Исходный код программы

```
pkg load statistics;

function res = f(x)
    res = log(x) ./ (x .+ 1);
endfunction

function monte_carlo(n)
    L = 4;
    R = 9;
    y = 0.95;
    Q = norminv((y + 1) / 2);
    X = unifrnd(L, R, 1, n);
    F_x = f(X) .* (R - L);
    V = mean(F_x);
    delta = (std(F_x) * Q) / sqrt(n);
    printf("N = %d\n", n);
    printf("Value is %g (from %g to %g)\n", V, V - delta, V + delta);
    printf("Delta is %g\n\n", delta);
endfunction

printf("Sample answer = %g\n\n", quad(@f, 4, 9));
monte_carlo(10000);
monte_carlo(1000000);
```

2.3.3 Выходные данные

```
Sample answer = 1.24742

N = 10000
Value is 1.24722 (from 1.24551 to 1.24894)
Delta is 0.00171548

N = 1000000
Value is 1.24741 (from 1.24724 to 1.24758)
Delta is 0.000170842
```

2.3.4 Вывод

Истинное значение интеграла содержится в доверительном интервале при $n = 10^4$ и $n = 10^6$. Значение, полученное методом Монте-Карло отличается от значения, полученного методом *quad*, на 10^{-5}.
При увеличении числа итераций в 100 раз, ширина доверительного интервала уменьшилось в 10 раз.