Лабораторная работа №6

Курбатов Егов, Маслов Иван, Ткач Глеб M32381

31.05.2020

1 Задача

- Для распределения Пуассона (Π_λ; $P(x=m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \lambda > 0, m = 0, 1, 2, ...$) построить ОМП параметра λ .
- Найти квадратичный риск полученной оценки одномерного параметра (проверить несмещенность оценки или найти смещение).
- Для Π_λ вычислить информацию Фишера.
- Выяснить, достигается ли минимум квадратичного риска. Определить, является ли оценка эффективной.

2 Вычисление ОМП

Вычислим функцию максимального правдоподобия:

$L(\lambda, m_1, m_2, ..., m_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} p(m_i, \lambda) = \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{m_i}}{m_i!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda n} \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{m_i}}{m_i!}$

$l(\lambda, m_1, m_2, ..., m_n) = \log L(\lambda, m_1, m_2, ..., m_n) = \log(e^{-\lambda n} \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{m_i}}{m_i!}) = \log e^{-\lambda n} + \log \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{m_i}}{m_i!} = -\lambda n + \sum\limits_{i=1}^{n} (\log \lambda^{m_i} - \log m_i!) = -\lambda n + (\log \lambda) \sum\limits_{i=1}^{n} m_i - \sum\limits_{i=1}^{n} \log m_i!$

$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i - 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}{n} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i = \overline{m}_n$

$\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i < 0$

Таким образом, ОМП параметра λ есть $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$

3 Проверка смещенности

Проверим смещенность

$E\hat{\lambda} = E(\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i) = \frac{1}{n} E(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} Em_i = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda = \lambda$

Таким образом, оценка несмещенная, квадратичный риск равен дисперсии

4 Информация Фишера

Вычислим информацию Фишера

$l'_\lambda(\lambda, m) = \frac{m}{\lambda} - 1$

$I_1(\lambda) = E_m(l'_\lambda(\lambda, m))^2 = E_m(\frac{m}{\lambda} - 1)^2 = E(\frac{m^2}{\lambda^2} - 2\frac{m}{\lambda} + 1) = \frac{E(m^2)}{\lambda^2} - 1 = \frac{\lambda^2 + \lambda}{\lambda^2} - 1 = \frac{1}{\lambda}$

$I_n(\lambda) = nI_1(\lambda) = \frac{n}{\lambda}$

5 Неравенство Рао-Крамера

$R_2(\hat{\lambda}, \lambda) = D\hat{\lambda} = D(\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} m_i) = \frac{1}{n^2} D(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i) = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} Dm_i = \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda = \frac{\lambda}{n} = \frac{1}{I_n}$

6 Вывод

В данном случае неравенство Рао-Крамера обращается в равенство, поэтому полученная оценка имеет наименьший возможный квадратичный риск, таким образом является эффективной несмещенной оценкой.