

# Cálculo I

Darvid

October 31, 2021

## Números reales

Existe un conjunto llamado conjunto de los números reales, denotado por  $\mathbb{R}$ . A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales. Este conjunto está dotado con dos operaciones binarias:

$$\begin{aligned}\text{Suma } + : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (m, n) &\mapsto m + n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Multiplicación } \cdot : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (m, n) &\mapsto m \cdot n\end{aligned}$$

Las cuales satisfacen los siguientes axiomas.

### Axiomas de campo

- A1.** La suma es conmutativa. Esto significa que para cualesquiera números reales  $m$  y  $n$  se verifica que:  $m + n = n + m$ .
- A2.** La suma es asociativa. Esto significa que para cualesquiera números reales  $m$ ,  $n$  y  $l$  se verifica que:  $m + (n + l) = (m + n) + l$ .
- A3.** Elemento neutro para la suma. Existe un número real llamado elemento neutro para la suma o cero, denotado por  $0$ , el cual satisface la siguiente condición:  $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{R}$ .
- A4.** Inverso aditivo. Para cada número real  $m$  existe un número real llamado inverso aditivo de  $m$ , denotado por  $-m$  (menos  $m$ ); la propiedad que caracteriza a este elemento es:  $m + (-m) = 0$ .
- A5.** La multiplicación es conmutativa. Esto significa que para cualesquiera números reales  $m$  y  $n$  se verifica que:  $m \cdot n = n \cdot m$ .
- A6.** La multiplicación es asociativa. Esto significa que para cualesquiera números reales  $m$ ,  $n$  y  $l$  se verifica que:  $m \cdot (n \cdot l) = (m \cdot n) \cdot l$ .
- A7.** Elemento identidad para la multiplicación. Existe un número real distinto de cero, llamado elemento identidad para la multiplicación o uno, denotado por  $1$ , que satisface la siguiente condición:  $m \cdot 1 = m, \forall m \in \mathbb{R}$ .
- A8.** Inverso multiplicativo. Para cada número real  $m$  distinto de cero existe un número real llamado inverso multiplicativo de  $m$ , denotado por  $m^{-1}$ , este elemento tiene la siguiente propiedad:  $m \cdot m^{-1} = 1$ .
- A9.** Distribución de la multiplicación sobre la suma. Para cualesquiera números reales  $m$ ,  $n$  y  $l$  se verifica que:  $m \cdot (n + l) = m \cdot n + m \cdot l$ .

## Lista de ejercicios 1 (LE1)

- a) Demuestre que el elemento neutro para la suma es único.
- b) Demuestre que el elemento identidad para la multiplicación es único.
- c) Sea  $m$  un número real arbitrario pero fijo, demuestre que el inverso aditivo de  $m$  es único.
- d) Sea  $m$  un número real distinto de cero, demuestre que el inverso multiplicativo de  $m$  es único.
- e) Demuestre que  $-0 = 0$ .
- f) Sea  $m$  un número real arbitrario pero fijo, demuestre que  $m \cdot 0 = 0$ .
- g) Si  $m$  y  $n$  son números reales tales que  $m \cdot n = 0$ , demuestre que  $m = 0$  o  $n = 0$ .
- h) Sea  $m$  un número real arbitrario pero fijo, demuestre que:  $(-1) \cdot m = -m$ .
- i) Sean  $m$  y  $n$  números reales, demuestre que:  $(-m) \cdot n = -(m \cdot n)$ .
- j) Sea  $m$  un número real arbitrario pero fijo, demuestre que:  $-(-m) = m$ .
- k) Sean  $m$  y  $n$  números reales, demuestre que:  $(-m) \cdot (-n) = m \cdot n$ .
- l) Sea  $m$  un número real arbitrario pero fijo, demuestre que:  $(-1) \cdot (-m) = m$ .
- m) Sea  $m$  un número real distinto de cero; demuestre que:  $(m^{-1})^{-1} = m$ .
- n) Sean  $m$  y  $n$  números reales distintos de cero, demuestre que:  $(m \cdot n)^{-1} = m^{-1} \cdot n^{-1}$ .

### Demostración:

- a) Supongamos que existen  $0$  y  $\tilde{0}$  números reales tales que  $m + 0 = m$  y  $m + \tilde{0} = m$ . Notemos que:

$0 = m + (-m)$	Por A4	
$= (m + \tilde{0}) + (-m)$	Por hipótesis	
$= (\tilde{0} + m) + (-m)$	Por A1	
$= \tilde{0} + (m + (-m))$	Por A2	
$= \tilde{0} + 0$	Por A4	
$= \tilde{0}$	Por A3	□

- b) Supongamos que existen  $1$  y  $\tilde{1}$  números reales tales que  $m \cdot 1 = m$  y  $m \cdot \tilde{1} = m$ . Notemos que:

$1 = m \cdot m^{-1}$	Por A8	
$= (m \cdot \tilde{1}) \cdot m^{-1}$	Por hipótesis	
$= (\tilde{1} \cdot m) \cdot m^{-1}$	Por A5	
$= \tilde{1} \cdot (m \cdot m^{-1})$	Por A6	
$= \tilde{1} \cdot 1$	Por A8	
$= \tilde{1}$	Por A7	□

- c) Supongamos que existen  $-m$  y  $-\tilde{m}$  números reales tales que  $m + (-m) = 0$  y  $m + (-\tilde{m}) = 0$ . Notemos que:

$$\begin{aligned}
 -m &= -m + 0 && \text{Por A3} \\
 &= 0 + (-m) && \text{Por A1} \\
 &= (m + (-\tilde{m})) + (-m) && \text{Por (2)} \\
 &= ((-\tilde{m}) + m) + (-m) && \text{Por A1} \\
 &= (-\tilde{m}) + (m + (-m)) && \text{Por A2} \\
 &= (-\tilde{m}) + 0 && \text{Por A8} \\
 &= -\tilde{m} && \text{Por A3} \quad \square
 \end{aligned}$$

- d) Supongamos que existen  $m^{-1}$  y  $\tilde{m}^{-1}$  números reales, distintos de cero, tales que  $m \cdot m^{-1} = 1$  y  $m \cdot \tilde{m}^{-1} = 1$ . Notemos que:

$$\begin{aligned}
 m^{-1} &= m^{-1} \cdot 1 && \text{Por A7} \\
 &= m^{-1} \cdot (m \cdot \tilde{m}^{-1}) && \text{Por hipótesis} \\
 &= (m^{-1} \cdot m) \cdot \tilde{m}^{-1} && \text{Por A6} \\
 &= (m \cdot m^{-1}) \cdot \tilde{m}^{-1} && \text{Por A5} \\
 &= 1 \cdot \tilde{m}^{-1} && \text{Por hipótesis} \\
 &= \tilde{m}^{-1} \cdot 1 && \text{Por A5} \\
 &= \tilde{m}^{-1} && \text{Por A7} \quad \square
 \end{aligned}$$

- e) Por A3 se verifica que  $0 + 0 = 0$ , y por A4 que  $0 + (-0) = 0$ . Además, por (c) de LE1, tenemos que el inverso aditivo de cada número real es único, entonces debe ser el caso que  $-0 = 0$ .  $\square$

- f) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 m \cdot 0 &= m \cdot 0 + 0 && \text{Por A3} \\
 &= m \cdot 0 + (m + (-m)) && \text{Por A4} \\
 &= m \cdot 0 + (m \cdot 1 + (-m)) && \text{Por A7} \\
 &= (m \cdot 0 + m \cdot 1) + (-m) && \text{Por A2} \\
 &= (m \cdot (0 + 1)) + (-m) && \text{Por A9} \\
 &= m \cdot 1 + (-m) && \text{Por A3} \\
 &= m + (-m) && \text{Por A7} \\
 &= 0 && \text{Por A4} \quad \square
 \end{aligned}$$

- g) Supongamos que  $m$  es distinto de 0. Notemos que:

$$\begin{aligned}
 n &= n \cdot 1 && \text{Por A7} \\
 &= n \cdot (m \cdot m^{-1}) && \text{Por A8} \\
 &= (n \cdot m) \cdot m^{-1} && \text{Por A6} \\
 &= (m \cdot n) \cdot m^{-1} && \text{Por A5} \\
 &= 0 \cdot m^{-1} && \text{Por hipótesis} \\
 &= m^{-1} \cdot 0 && \text{Por A5} \\
 &= 0 && \text{Por (f) de LE1} \quad \square
 \end{aligned}$$

h) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 -m &= -m + 0 && \text{Por A3} \\
 &= -m + m \cdot 0 && \text{Por (f) de LE1} \\
 &= -m + m \cdot (1 + (-1)) && \text{Por A4} \\
 &= -m + (m \cdot 1 + m \cdot (-1)) && \text{Por A9} \\
 &= -m + (m + m \cdot (-1)) && \text{Por A8} \\
 &= (-m + m) + m \cdot (-1) && \text{Por A2} \\
 &= m + (-m) + m \cdot (-1) && \text{Por A1} \\
 &= 0 + m \cdot (-1) && \text{Por A4} \\
 &= m \cdot (-1) + 0 && \text{Por A1} \\
 &= m \cdot (-1) && \text{Por A3} \\
 &= (-1) \cdot m && \text{Por A5}
 \end{aligned}$$

□

i) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 (-m) \cdot n &= ((-1) \cdot m) \cdot n && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= (-1) \cdot (m \cdot n) && \text{Por A6} \\
 &= -(m \cdot n) && \text{Por (h) de LE1}
 \end{aligned}$$

□

j) Sea  $m$  un número real arbitrario pero fijo. Por A4 se verifica que  $m + (-m) = 0$ , y por A1 tenemos que  $(-m) + m = 0$ , de esta igualdad se sigue que  $m$  es inverso aditivo de  $(-m)$ . Por A4 se verifica que  $(-m) + (-(-m)) = 0$ , y por (c) de LE1, sabemos que el inverso aditivo de cada número real es único. Entonces, debe ser el caso que  $-(-m) = m$ . □

k) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 (-m) \cdot (-n) &= (-m) \cdot ((-1) \cdot n) && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= ((-m) \cdot (-1)) \cdot n && \text{Por A6} \\
 &= ((-1) \cdot (-m)) \cdot n && \text{Por A5} \\
 &= -(-m) \cdot n && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= m \cdot n && \text{Por (j) de LE1}
 \end{aligned}$$

□

l) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 (-1) \cdot (-m) &= 1 \cdot m && \text{Por (k) de LE1} \\
 &= m \cdot 1 && \text{Por A5} \\
 &= m && \text{Por A7}
 \end{aligned}$$

m) Sea  $m$  un número real distinto de cero. Por A8 sabemos que  $m \cdot m^{-1} = 1$ , y por A5 tenemos que  $m^{-1} \cdot m = 1$ , de esta igualdad se sigue que  $m$  es inverso multiplicativo de  $m^{-1}$ . Por A8 se verifica que  $m^{-1} \cdot (m^{-1})^{-1} = 1$ , y por (d) de LE1, sabemos que el inverso multiplicativo de cada número real es único. Entonces, debe ser el caso que  $(m^{-1})^{-1} = m$ . □

n) Sean  $m$  y  $n$  números reales distintos de cero. Notemos que:

$$\begin{aligned}
 (m \cdot n) \cdot (m^{-1} \cdot n^{-1}) &= ((m \cdot n) \cdot m^{-1}) \cdot n^{-1} && \text{Por A6} \\
 &= ((n \cdot m) \cdot m^{-1}) \cdot n^{-1} && \text{Por A5} \\
 &= (n \cdot (m \cdot m^{-1})) \cdot n^{-1} && \text{Por A6} \\
 &= (n \cdot 1) \cdot n^{-1} && \text{Por A8} \\
 &= n \cdot n^{-1} && \text{Por A7} \\
 &= 1 && \text{Por A8}
 \end{aligned}$$

De la igualdad anterior, sigue que  $(m^{-1} \cdot n^{-1})$  es inverso multiplicativo de  $(m \cdot n)$ . Además, por (d) de LE1, sabemos que el inverso multiplicativo de cada número real es único. Entonces, debe ser el caso que  $(m^{-1} \cdot n^{-1}) = (m \cdot n)^{-1}$   $\square$

### Notación:

- Si  $m$  y  $n$  son números reales, representaremos con el símbolo  $m - n$  a la suma:  $m + (-n)$ .
- Si  $m$  y  $n$  son números reales y  $n$  es distinto de cero, representaremos con el símbolo  $\frac{m}{n}$  al número  $m \cdot n^{-1}$ .
- Si  $m_1, m_2$  y  $m_3$  son números reales, representaremos con el símbolo  $m_1 + m_2 + m_3$  a cualquiera de las sumas  $m_1 + (m_2 + m_3)$  o  $(m_1 + m_2) + m_3$ .

### Lista de ejercicios 2 (LE2)

Sean  $a, b, c$  y  $d$  números reales, demuestre lo siguiente:

- a)  $a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$ , si  $b \neq 0$
- b)  $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ , si  $b, c \neq 0$
- c)  $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ , si  $b, d \neq 0$
- d)  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ , si  $b, d \neq 0$
- e)  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$ , si  $b, c, d \neq 0$

### Demostración

a) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 a \cdot \frac{c}{b} &= a \cdot (c \cdot b^{-1}) && \text{Por notación} \\
 &= (a \cdot c) \cdot b^{-1} && \text{Por A6} \\
 &= \frac{ac}{b} && \text{Por notación}
 \end{aligned}$$

$\square$

b) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{ac}{bc} &= a \cdot c \cdot (bc)^{-1} && \text{Por notación} \\
 &= a \cdot c \cdot b^{-1} \cdot c^{-1} && \text{Por (m) de LE1} \\
 &= a \cdot b^{-1} \cdot c \cdot c^{-1} && \text{Por A5} \\
 &= a \cdot b^{-1} \cdot 1 && \text{Por A8} \\
 &= a \cdot b^{-1} && \text{Por A7} \\
 &= \frac{a}{b} && \text{Por notación}
 \end{aligned}$$

□

c) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= a \cdot b^{-1} \pm c \cdot d^{-1} && \text{Por notación} \\
 &= (a \cdot 1) \cdot b^{-1} \pm (c \cdot 1) \cdot d^{-1} && \text{Por A7} \\
 &= \left( a \cdot (d \cdot d^{-1}) \right) \cdot b^{-1} \pm \left( c \cdot (b \cdot b^{-1}) \right) \cdot d^{-1} && \text{Por A8} \\
 &= \left( (a \cdot d) \cdot d^{-1} \right) \cdot b^{-1} \pm \left( (c \cdot b) \cdot b^{-1} \right) \cdot d^{-1} && \text{Por A6} \\
 &= (a \cdot d) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) \pm (c \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) && \text{Por A6} \\
 &= (a \cdot d) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) \pm (c \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) && \text{Por A5} \\
 &= (b^{-1} \cdot d^{-1}) \cdot (a \cdot d \pm c \cdot b) && \text{Por A9} \\
 &= (a \cdot d \pm c \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) && \text{Por A5} \\
 &= (a \cdot d \pm c \cdot b) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Por (m) de LE1} \\
 &= (a \cdot d \pm b \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Por A5} \\
 &= \frac{ad \pm bc}{bd} && \text{Por notación}
 \end{aligned}$$

□

d) Notemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) && \text{Por notación} \\
 &= a \cdot \left( b^{-1} \cdot (c \cdot d^{-1}) \right) && \text{Por A6} \\
 &= a \cdot \left( c \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) \right) && \text{Por A5} \\
 &= (a \cdot c) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) && \text{Por A6} \\
 &= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Por (m) de LE1} \\
 &= \frac{ac}{bd} && \text{Por notación}
 \end{aligned}$$

□

e) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{(a \cdot b^{-1})}{(c \cdot d^{-1})} && \text{Por notación} \\
 &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1})^{-1} && \text{Por notación} \\
 &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot (d^{-1})^{-1}) && \text{Por (m) de LE1} \\
 &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot d) && \text{Por (l) de LE1} \\
 &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (d \cdot c^{-1}) && \text{Por A5} \\
 &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} && \text{Por notación} \\
 &= \frac{ad}{bc} && \text{Por (d) de LE2}
 \end{aligned}$$

□

## Axiomas de orden del conjunto de los números reales

Existe un subconjunto del conjunto de los números reales llamado conjunto de los números reales positivos, denotado con el símbolo  $\mathbb{R}^+$ . A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales positivos.

El conjunto  $\mathbb{R}^+$  satisface los siguientes axiomas:

**O1)** Si  $m, n \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $m + n \in \mathbb{R}^+$ .

**O2)** Si  $m, n \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $m \cdot n \in \mathbb{R}^+$ .

**O3)** Para cada número real  $m$  se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:

- i)  $m \in \mathbb{R}^+$ .
- ii)  $m = 0$ .
- iii)  $-m \in \mathbb{R}^+$ .

**Definición:** Sean  $a$  y  $b$  números reales, decimos que:

1.  $a$  es menor que  $b$  o que  $b$  es mayor que  $a$  y escribimos  $a < b$  o  $b > a$ , si  $b - a \in \mathbb{R}^+$ .
2.  $a$  es menor que o igual que  $b$  o que  $b$  es mayor o igual que  $a$ , y escribimos  $a \leq b$  o  $b \geq a$ , si  $b - a \in \mathbb{R}^+$  o  $a = b$ .

**Notación:** Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  números reales, utilizaremos la notación  $a < b < c$  para indicar que  $a < b$  y  $b < c$ .

### Lista de Ejercicios 3 (LE3)

Sean  $a, b, c$  y  $d$  números reales, demuestre lo siguiente:

- a)  $1 \in \mathbb{R}^+$ .
- b)  $a \in \mathbb{R}^+$  si y solo si  $a > 0$ .
- c)  $-1 < 0$ .
- d) Si  $a < b$  y  $c \leq d$ , entonces  $a + c < b + d$ .
- e) Si  $a < b$  y  $0 < c$ , entonces  $ac < bc$ .
- f) Si  $a < b$  y  $c < 0$ , entonces  $ac > bc$ .
- g)  $a \in \mathbb{R}^+$  si y solo si  $-a < 0$ .
- h)  $a < b$  si y solo si  $-a > -b$ .
- i) Si  $a > 0$ , entonces  $\frac{1}{a} > 0$ .
- j) Si  $a < b$  y  $b < c$ , entonces  $a < c$ .
- k) Si  $0 \leq a < b$  y  $0 \leq c < d$ , entonces  $ac < bd$ .
- l) Si  $a < b$  y  $ab > 0$ , entonces  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ .
- m) Si  $a < 1$  y  $0 < b$ , entonces  $ab < b$ .
- n) Si  $a < b$  demuestre que  $a < \frac{a+b}{2} < b$ .
- o)  $a^2 \geq 0$ .
- p) Si  $0 \leq a < \varepsilon$  para toda  $\varepsilon > 0$ , entonces  $a = 0$ .
- q) Si  $a \leq b + \varepsilon$  para toda  $\varepsilon > 0$ , entonces  $a \leq b$ .

### Demostración

- a) Supongamos que  $1 \notin \mathbb{R}^+$ . Por (A7), (ii) de (O3) no se cumple. Si  $-1 \in \mathbb{R}^+$ , por (O2) se verifica que  $-1 \cdot -1 \in \mathbb{R}^+$ , lo cual por (h) de LE1 implica que  $-(-1) \in \mathbb{R}^+$ , pero esto contradice a (iii) de (O3). Por tanto, 1 es un número real positivo.
- b)
  - i) Supongamos que  $a \in \mathbb{R}^+$ . Por A3 sabemos que  $a = a + 0$ , y por (e) de LE1 sigue que  $a = a - 0$ , entonces  $a - 0 \in \mathbb{R}^+$ , lo que por definición implica que  $a > 0$ .
  - ii) Supongamos que  $a > 0$ . Por definición,  $a - 0 \in \mathbb{R}^+$ , y por (e) de LE1 sigue que  $a - 0 = a + 0$ , lo que por A3 implica que  $a + 0 = a$ . Así  $a \in \mathbb{R}^+$ .

□

- c) Supongamos que  $-1 \geq 0$

- i) Si  $-1 = 0$ . Notemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 1 \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por A4

Por hipótesis

Por A3

Pero la igualdad anterior contradice a A7.



- ii) Si  $-1 > 0$ , por (b) de LE3 tenemos que  $-1 \in \mathbb{R}^+$ , pero esto contradice a O3, ya que por (a) de LE3 sabemos que  $1 \in \mathbb{R}^+$ .

Por tanto  $-1 < 0$  □

- d) Por definición  $b - a \in \mathbb{R}^+$ .

- i) Si  $c < d$ , entonces  $d - c \in \mathbb{R}^+$ . Por (O1) se verifica que  $(b - a) + (d - c) \in \mathbb{R}^+$ . Notemos que:

$$\begin{aligned}
 b - a + d - c &= b + d - a - c && \text{Por A1} \\
 &= b + d + (-a) + (-c) && \text{Por notación} \\
 &= b + d + (-1)a + (-1)c && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= b + d + (-1)(a + c) && \text{Por A9} \\
 &= b + d + b - (a + c) && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= b + d - (a + c) && \text{Por notación}
 \end{aligned}$$

De este modo,  $b + d - (a + c) \in \mathbb{R}^+$ , es decir,  $a + c < b + d$ .

- ii) Si  $c = d$ . Notemos que

$$\begin{aligned}
 b - a &= b - a + 0 && \text{Por A3} \\
 &= b - a + c - c && \text{Por A4} \\
 &= b + c - a - c && \text{Por A1} \\
 &= b + c + (-a) + (-c) && \text{Por notación} \\
 &= b + c + (-1)a + (-1)c && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= b + c + (-1)(a + c) && \text{Por A9} \\
 &= b + c - (a + c) && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= b + d - (a + c) && \text{Por hipótesis}
 \end{aligned}$$

De este modo,  $b + d - (a + c) \in \mathbb{R}^+$ , es decir,  $a + c < b + d$ .

En cualquier caso,  $a + c < b + d$ . □

- e) Por definición  $b - a \in \mathbb{R}^+$ , y por (b) de LE3  $c \in \mathbb{R}^+$ . Luego, por O2 se verifica que  $c(b - a) \in \mathbb{R}^+$ . Por A9 sigue que  $c(b - a) = cb - ca$  y por A5 tenemos que  $cb - ca = bc - ac$ . De este modo,  $bc - ac \in \mathbb{R}^+$ , es decir,  $ac < bc$ . □

- f) Por definición  $b - a \in \mathbb{R}^+$  y  $0 - c \in \mathbb{R}^+$ , por A3 sigue que  $-c \in \mathbb{R}^+$ . Luego, por O2  $-c(b - a) \in \mathbb{R}^+$ . Notemos que:

$$\begin{aligned}
 -c(b - a) &= -c(b + (-a)) && \text{Por notación} \\
 &= (-c) \cdot b + (-c) \cdot (-a) && \text{Por A9} \\
 &= (-c) \cdot b + c \cdot a && \text{Por (k) de LE1} \\
 &= -(c \cdot b) + c \cdot a && \text{Por (i) de LE1} \\
 &= ca - (cb) && \text{Por A1} \\
 &= ac - (bc) && \text{Por A5}
 \end{aligned}$$

Entonces  $ac - bc \in \mathbb{R}^+$ , es decir,  $ac > bc$ . □

g) i) Supongamos que  $a \in \mathbb{R}^+$ . Notemos que:

$$\begin{array}{ll} a > 0 & \text{Por (b) de LE3} \\ a \cdot (-1) < 0 \cdot (-1) & \text{Por (c) y (f) de LE3} \\ -a < 0 & \text{Por (h) y (f) de LE1} \end{array}$$

ii) Supongamos que  $-a < 0$ . Notemos que:

$$\begin{array}{ll} -a \cdot (-1) > 0 \cdot (-1) & \text{Por (b) y (f) de LE3} \\ a > 0 & \text{Por (l) y (f) de LE1} \end{array}$$

Entonces,  $a \in \mathbb{R}^+$ , por (b) de LE3.

□

h) Notemos que:

i) Si  $a < b$ , por (b) y (f) de LE3 tenemos que  $a \cdot (-1) > b \cdot (-1)$ , y por (h) de LE1 obtenemos que  $-a > -b$ .

ii) Si  $-a > -b$ , por (b) y (f) de LE3 tenemos que  $-a \cdot (-1) < -b \cdot (-1)$ , y por (k) de LE1 obtenemos que  $a < b$ .

□

i) Sea  $a > 0$ . Supongamos que  $\frac{1}{a} \leq 0$ . Notemos que:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{a} \cdot a \leq 0 \cdot a & \text{Por (e) de LE3} \\ 1 \leq 0 & \text{Por A8 y (f) de LE1} \end{array}$$

Pero por (a) de LE3 y (b) de LE3 tenemos que  $1 > 0$ . Por tanto,  $\frac{1}{a} > 0$ .

□

j) Por definición  $b - a \in \mathbb{R}^+$  y  $c - b \in \mathbb{R}^+$ . Por O1  $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+$ . Notemos que:

$$\begin{array}{ll} (b - a) + (c - b) = b - a + c - b & \text{Por notación} \\ = b - a - b + c & \text{Por A1} \\ = b - b - a + c & \text{Por A1} \\ = 0 - a + c & \text{Por A4} \\ = -a + c & \text{Por A3} \\ = c - a & \text{Por A1} \end{array}$$

Entonces  $c - a \in \mathbb{R}^+$ , es decir,  $a < c$ .

□

k) i) Si  $a = 0$  o  $c = 0$ , por (g) de LE1 se verifica que  $ac = 0$ . Luego, por (j) de LE3, se verifica que  $0 < b$  y  $0 < d$ . Así,  $ac < bd$ .

ii) Si  $a > 0$  y  $c > 0$ . Por hipótesis,  $a < b$ , y por (e) de LE3, sigue que  $ac < bc$ . También, tenemos que  $c < d$ , y por (e) de LE3, sigue que  $bc < db$ . Finalmente, por (j) de LE3, se verifica que  $ac < bd$ .

□

1) Notemos que:

$a < b$	Por hipótesis
$a - a < b - a$	Por (d) de LE3
$0 < b - a$	Por A4
$0 \cdot \frac{1}{ab} < (b - a) \cdot \frac{1}{ab}$	Por (h) y (e) de LE3
$0 < \frac{b - a}{ab}$	Por (f) de LE1 y (a) de LE2
$0 < \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$	Por (c) de LE2
$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$	Por (d) de LE3

□

**m)** Dado que  $0 < b$ , por (b) de LE3 se cumple que  $b \in \mathbb{R}^+$ , y por definición  $1 - a \in \mathbb{R}^+$ . Por O2 se verifica que  $b(1 - a) \in \mathbb{R}^+$ , es decir,  $b - ab \in \mathbb{R}^+$ , lo cual implica que  $ab < b$ . □

**n)** Por (a) de LE3 sabemos que  $1 \in \mathbb{R}^+$ , y por O1 se cumple que  $1 + 1 \in \mathbb{R}^+$ , es decir  $2 \in \mathbb{R}^+$ . Por (b) de LE3 se verifica que  $0 < 2$  y por (i) de LE3 tenemos que  $0 < \frac{1}{2}$ . Notemos que:

$a < b$	Por hipótesis
$a + a < b + a$	Por (d) de LE3
$2a < b + a$	Por definición
$2a \cdot \frac{1}{2} < (b + a) \cdot \frac{1}{2}$	Por (e) de LE3
$\frac{2a}{2} < \frac{b + a}{2}$	Por (a) de LE2
$a < \frac{b + a}{2}$	Por A8

Similarmente,

$a < b$	Por hipótesis
$a + b < b + b$	Por (d) de LE3
$a + b < 2b$	Por definición
$(a + b) \cdot \frac{1}{2} < 2b \cdot \frac{1}{2}$	Por (e) de LE3
$\frac{a + b}{2} < \frac{2b}{2}$	Por (a) de LE2
$\frac{a + b}{2} < b$	Por A8

Finalmente, por notación,  $a < \frac{a+b}{2} < b$ . □

**o)** Si  $0 \leq a$ ,  $0 \cdot a \leq a \cdot a$ , osea,  $0 \leq a^2$ . Si  $a < 0$ ,  $0 \cdot a < a \cdot a$ , osea,  $0 \leq a^2$ . En cualquier caso  $a \geq 0$ .

**p)** Supongamos que  $0 < a$ , sigue que  $0 < \frac{a}{2} < a$ . Elegimos  $\varepsilon = \frac{a}{2}$ , entonces  $\varepsilon < a$ , pero esto contradice nuestra hipótesis de que  $a < \varepsilon$  para toda  $\varepsilon > 0$ . Por tanto,  $a = 0$ . □

**q)** Sean  $a$  y  $b$  números reales tales que  $a \leq b + \varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ . Supongamos que  $a > b$ . Luego,  $a - b > 0$ . Notemos que  $(a - b) \cdot \frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$ , es decir  $\frac{(a-b)}{2} > 0$ . Sea  $\varepsilon = \frac{(a-b)}{2}$ , sigue que  $a = 2\varepsilon + b$ . Además,  $2\varepsilon > \varepsilon$ , de donde obtenemos  $2\varepsilon + b > \varepsilon + b$ . De este modo,  $a > b + \varepsilon$ , pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto,  $a \leq b$ . □

**Definición:** Sea  $a$  un número real, definimos el valor absoluto de  $a$ , denotado por  $|a|$  como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

**Observación.**  $|a| \geq 0$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

### Lista de Ejercicios 4 (LE4)

Sean  $a, b, c$  números reales, demuestre lo siguiente:

- a)  $|a| \geq \pm a$ .
- b)  $|ab| = |a||b|$ .
- c)  $|a| = |-a|$ .
- d)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .
- e) Si  $b \neq 0$ , entonces  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ .
- f)  $|a| < b$  si y solo si  $-b < a < b$ .
- g)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$
- h)  $|a|^2 = a^2$ .

### Demostración

- a) i) Si  $a \geq 0$ , entonces  $|a| = a$ , así,  $|a| \geq a$ . Luego,  $-a \leq 0$ , de donde sigue que  $a \geq -a$ . Finalmente,  $|a| \geq -a$ .  
ii) Si  $a < 0$ , entonces  $|a| = -a$ , así,  $|a| \geq -a$ . Luego,  $-a > 0$ , de donde sigue que  $-a > a$ . Finalmente,  $|a| \geq a$ .  
En cualquier caso,  $|a| \geq \pm a$ .
- b) i) Si  $a > 0$  y  $b > 0$ , entonces  $|a| = a$  y  $|b| = b$ . Luego,  $ab > 0$  por lo que  $|ab| = ab$ . De este modo,  $|ab| = |a||b|$ .  
ii) Si  $a > 0$  y  $b < 0$ , entonces  $|a| = a$  y  $|b| = -b$ . Luego,  $ab < 0$  por lo que  $|ab| = -ab$ . De este modo,  $|ab| = |a||b|$ .  
iii) Si  $a < 0$  y  $b < 0$ , entonces  $|a| = -a$  y  $|b| = -b$ . Luego,  $ab > 0$  por lo que  $|ab| = ab$ . De este modo,  $|ab| = |a||b|$ .
- c) i) Si  $a \geq 0$ , entonces  $|a| = a$ . Luego,  $-a \leq 0$ . Si  $-a < 0$ ,  $|-a| = a$  y si  $-a = 0$ ,  $|-a| = a$ . De este modo,  $|a| = |-a|$ .  
ii) Si  $a < 0$ , entonces  $|a| = -a$ . Luego,  $-a > 0$  por lo que  $|-a| = -a$ . De este modo,  $|a| = |-a|$ .
- d) i) Si  $0 \leq a + b$ , entonces  $|a + b| = a + b$ . Además,  $a \leq |a|$  y  $b \leq |b|$ . Luego,  $a + b \leq |a| + |b|$ . Así,  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .  
ii) Si  $0 > a + b$ , entonces  $|a + b| = -a - b$ . Además,  $-a \leq |a|$  y  $-b \leq |b|$ . Luego,  $-a - b \leq |a| + |b|$ . Así,  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

- e) i) Si  $a \geq 0$  y  $b > 0$ , entonces  $|a| = a$  y  $|b| = b$ . Además,  $\frac{1}{b} > 0$ , de donde sigue que  $\frac{a}{b} \geq 0$  por lo que  $|\frac{a}{b}| = \frac{a}{b}$ . De este modo,  $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ .
- ii) Si  $a \geq 0$  y  $b < 0$ , entonces  $|a| = a$  y  $|b| = -b$ . Además,  $\frac{1}{b} < 0$ , de donde sigue que  $\frac{a}{b} \leq 0$ , por lo que  $|\frac{a}{b}| = -\frac{a}{b}$ . De este modo,  $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ .
- iii) Si  $a < 0$  y  $b > 0$ , entonces  $|a| = -a$  y  $|b| = b$ . Además,  $\frac{1}{b} > 0$ , de donde sigue que  $\frac{a}{b} < 0$ , por lo que  $|\frac{a}{b}| = -\frac{a}{b}$ . De este modo,  $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ .
- iv) Si  $a < 0$  y  $b < 0$ , entonces  $|a| = -a$  y  $|b| = -b$ . Además,  $\frac{1}{b} < 0$ , de donde sigue que  $\frac{a}{b} > 0$  por lo que  $|\frac{a}{b}| = \frac{a}{b}$ . De este modo,  $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ .
- f) i) Supongamos que  $|b| < c$ . Por (a) de LE4,  $\pm b \leq |b|$ , de donde sigue que  $-b < c$  y  $b < c$ . Luego,  $-c < b$ . De este modo,  $-c < b < c$ .
- ii) Supongamos que  $-c < b < c$ . Luego,
- 1) Si  $b \geq 0$ , entonces  $|b| = b$ . Por lo que  $|b| < c$ .
- 2) Si  $b < 0$ , entonces  $|b| = -b$ . Por hipótesis,  $-c < b$ , por lo que  $-b < c$ . Así  $|b| < c$ .
- g) Por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |(a-b) + b| &\leq |a-b| + |b| \\ |a| &\leq |a-b| + |b| \\ |a| - |b| &\leq |a-b| \end{aligned} \tag{1}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} |(b-a) + a| &\leq |b-a| + |a| \\ |b| &\leq |b-a| + |a| \\ |b| - |a| &\leq |b-a| \\ -|b-a| &\leq |a| - |b| \end{aligned} \tag{2}$$

Luego, aplicando (f) de LE4 en (1) y (2),  $||a| - |b|| \leq |a-b|$ .

- h) Por (o) de LE3,  $a^2 \geq 0$ , por lo que

$$\begin{aligned} a^2 &= |a^2| \\ &= |a \cdot a| \\ &= |a| \cdot |a| && \text{Por (b) de LE4} \\ &= |a|^2 \end{aligned}$$

□

**Definición.** Sea  $a \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon > 0$ . El vecindario- $\varepsilon$  de  $a$  es el conjunto  $V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$ .

### Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Demuestre lo siguiente:

- a) Si  $x \in V_\varepsilon(a)$  para toda  $\varepsilon > 0$ , entonces  $x = a$ .
- b) Sea  $U := \{x : 0 < x < 1\}$ . Si  $a \in U$ , sea  $\varepsilon$  el menor de los números  $a$  y  $1-a$ . Demuestre que  $V_\varepsilon(a) \subseteq U$ .
- c) Demuestre que si  $a \neq b$ , entonces existen  $U_\varepsilon(a)$  y  $V_\varepsilon(b)$  tales que  $U \cap V = \emptyset$ .

### Demostración.

- a) Si  $x \in V_\varepsilon(a)$  tenemos que  $|x - a| < \varepsilon$ . Además,  $0 \leq |x - a|$ , por definición. Así,  $0 \leq |x - a| < \varepsilon$ . Como esta desigualdad se cumple para toda  $\varepsilon > 0$ , por (p) de LE3, sigue que  $|x - a| = 0$ . Si  $x - a \geq 0$ ,  $|x - a| = x - a$  y  $x - a = 0$ . Si  $x - a < 0$ ,  $|x - a| = -x + a$  y  $-x + a = 0$ . En cualquier caso,  $x = a$ .
- b) i) Si  $a > 1 - a$ , tenemos  $\varepsilon = 1 - a$ . Sea  $y \in V_\varepsilon(a)$ , entonces  $|y - a| < 1 - a$ . De (f) de LE4 sigue que  $a - 1 < y - a < 1 - a$  (\*). Tomando el lado derecho de (\*) obtenemos  $y < 1$ . Luego, de la hipótesis sigue que  $2a > 1$ , osea  $2a - 1 > 0$ . Del lado izquierdo de la desigualdad (\*), tenemos  $2 - 1 < y$ , por lo que  $0 < y$ .
- ii) Si  $1 - a > a$ , tenemos  $\varepsilon = a$ . Sea  $y \in V_\varepsilon(a)$ , entonces  $|y - a| < a$ . De (f) de LE4 sigue que  $-a < y - a < a$  (\*\*). Tomando el lado derecho de (\*\*) tenemos  $y < 2a$ . Luego, de la hipótesis sigue que  $1 > 2a$ , por esto  $y < 1$ . Finalmente, tomando el lado izquierdo de (\*\*) obtenemos  $0 < y$ .

En cualquier caso,  $0 < y < 1$ , lo que implica que  $V_\varepsilon(a) \subseteq U$ .

- c) Supongamos que  $U \cap V \neq \emptyset$ .

**Definición:** Sea  $A$  un subconjunto del conjunto de los números reales, decimos que  $A$  es un conjunto inductivo si se cumplen las siguientes condiciones:

1.  $1 \in A$ .
2. Si  $n \in A$  entonces se verifica que  $n + 1 \in A$ .

### Lista de Ejercicios 6 (LE6)

- 1) ¿El conjunto de los números reales es un conjunto inductivo?
- 2) ¿ $\mathbb{R}^+$  es un conjunto inductivo?
- 3) Sea  $A := \{B \subseteq \mathbb{R} : B \text{ es un conjunto inductivo}\}$ . Demuestre que  $A \neq \emptyset$  y que  $C = \bigcap B$  es un conjunto inductivo.

### Respuesta

- 1) Sí, ya que  $1 \in \mathbb{R}$ , y si  $n$  es un número real,  $n + 1 \in \mathbb{R}$  por la cerradura de la suma en  $\mathbb{R}$ .
- 2) Sí, pues  $1 \in \mathbb{R}^+$  y y si  $n$  es un número real positivo,  $n + 1 \in \mathbb{R}^+$  por el axioma de orden 1.
- 3) Claramente  $A \neq \emptyset$ , pues  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \subseteq A$ .

Luego, por hipótesis,  $\forall B \in A$  tenemos que  $B \subseteq \mathbb{R}$  por lo que  $C \subseteq \mathbb{R}$ . Además,  $\forall B \in A$ , se verifica que  $1 \in B$ . Consecuentemente,  $1 \in C$ . Por otra parte, si  $n \in B$  para todo  $B \in A$ , tendremos que  $n + 1 \in B$ , por lo que  $n + 1 \in C$ . Por tanto,  $C$  es un conjunto inductivo.

**Definición.** Al conjunto  $C$  de (3) de LE6 lo llamaremos conjunto de los números naturales y lo denotaremos con el símbolo  $\mathbb{N}$ .

## Lista de ejercicios 7 (LE7)

Demuestre lo siguiente:

- a) La suma de números naturales es un número natural.
- b) La multiplicación de números naturales es un número natural.
- c) Demuestre que  $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- d) Demuestre que  $\forall n \in \mathbb{N}$  con  $n > 1$  se verifica que  $n - 1 \in \mathbb{N}$ .
- e) Sean  $m$  y  $n$  números naturales tales que  $m > n$ , demuestre que  $m - n \in \mathbb{N}$ .
- f) Sea  $x \in \mathbb{R}^+$ . Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $x + n \in \mathbb{N}$ , demuestre que  $x \in \mathbb{N}$ .
- g) Sea  $x \in \mathbb{R}$ , si  $n \in \mathbb{N}$  y  $n - 1 < x < n$ , demuestre que  $x$  no es un número natural.

### Demostración.

- a) Sea  $m \in \mathbb{N}$  arbitrario pero fijo. Definimos  $A = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\}$ . Por definición,  $1 \in \mathbb{N}$  y  $m + 1 \in \mathbb{N}$ , entonces  $1 \in A$ , es decir,  $A \neq \emptyset$ .

Por otra parte, si  $n \in A$  debe ser el caso que  $n \in \mathbb{N}$  y  $m + n \in \mathbb{N}$ . Como  $\mathbb{N}$  es un conjunto inductivo,  $n + 1 \in \mathbb{N}$  y  $(m + n) + 1 \in \mathbb{N}$ , luego, por la asociatividad de la suma,  $m + (n + 1) \in \mathbb{N}$ . Por la condición de  $A$ , se cumple que  $n + 1 \in A$ , por lo que  $A$  es un conjunto inductivo. De esto se concluye que  $\mathbb{N} \subseteq A$  y como  $A \subseteq \mathbb{N}$ ,  $A = \mathbb{N}$ . En otras palabras, la suma de números naturales es un número natural.  $\square$

- b) Sea  $m \in \mathbb{N}$  arbitrario pero fijo. Definimos  $A = \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}\}$ . Por definición,  $1 \in \mathbb{N}$ . Además,  $m \cdot 1 \in \mathbb{N}$ , entonces  $1 \in A$ , es decir  $A \neq \emptyset$ .

Luego, si  $n \in A$  debe ser el caso que  $n \in \mathbb{N}$  y  $m \cdot n \in \mathbb{N}$ . Por (a) de LE7 se verifica que  $(m \cdot n) + m \in \mathbb{N}$ . Notemos que  $(m \cdot n) + m = m \cdot (n + 1)$ , osea,  $m \cdot (n + 1) \in \mathbb{N}$ . Como  $\mathbb{N}$  es un conjunto inductivo, tenemos que  $n + 1 \in \mathbb{N}$ . De este modo,  $n + 1 \in A$ . Lo que implica que  $A$  es un conjunto inductivo. De esto se concluye que  $\mathbb{N} \subseteq A$  y como  $A \subseteq \mathbb{N}$ ,  $A = \mathbb{N}$ . En otras palabras, la multiplicación de números naturales es un número natural.  $\square$

- c) Sea  $A := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$ . Como  $1 \in \mathbb{N}$  y  $1 \geq 1$ , tenemos que  $1 \in A$ .

Si  $n \in A$  debe ser el caso que  $n \in \mathbb{N}$  y  $1 \leq n$ . Además, por (a) de LE7,  $n + 1 \in \mathbb{N}$ . Luego, notemos que  $0 \leq 1$  de donde sigue que  $n \leq n + 1$ . Por transitividad,  $1 \leq n + 1$ , por lo que  $n + 1 \in A$ , lo que implica que  $A$  es un conjunto inductivo, es decir,  $\mathbb{N} \subseteq A$  y como  $A \subseteq \mathbb{N}$ ,  $A = \mathbb{N}$ . En otras palabras,  $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

- d) Sea  $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1, n - 1 \in \mathbb{N}\}$ . Si  $n \in A$  debe ser porque  $n > 1$  y  $n - 1 \in \mathbb{N}$ . Como  $n \in \mathbb{N}$  y  $\mathbb{N}$  es un conjunto inductivo, se verifica  $n + 1 \in \mathbb{N}$ . Notemos que

$$\begin{aligned}(n + 1) - 1 &= n + (1 - 1) \\ &= n + 0 \\ &= n\end{aligned}$$

Entonces,  $(n + 1) - 1 \in \mathbb{N}$ . También,  $n > 1$  implica que  $n > 0$  y  $n + 1 > 1$ , por lo que  $n + 1 \in A$ . De este modo,  $A$  es un conjunto inductivo, con lo que  $\mathbb{N} \subseteq A$ , y como  $A \subseteq \mathbb{N}$ ,  $A = \mathbb{N}$ . Por tanto  $\forall n \in \mathbb{N}$  con  $n > 1$  se verifica que  $n - 1 \in \mathbb{N}$ .  $\square$

- e) Sea  $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n < m, m - n \in \mathbb{N} \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$ . Por definición,  $1 \in \mathbb{N}$  y  $1 + 1 \in \mathbb{N}$ . Por (a) y (b) de LE3,  $1 > 0$ , de donde sigue que  $1 + 1 > 1$ . Por (d) de LE7, se verifica que  $(1 + 1) - 1 \in \mathbb{N}$ , por lo que  $1 \in A$ .

Si  $n \in A$  debe ser porque  $m - n \in \mathbb{N}$  y  $m > n$ , de donde obtenemos  $m + 1 > n + 1$ . Como  $m, n \in \mathbb{N}$  y  $\mathbb{N}$  es un conjunto inductivo,  $n + 1 \in \mathbb{N}$  y  $m + 1 \in \mathbb{N}$ . Notemos que  $m + 1 - (n + 1) = m - n$ , por lo que  $n + 1 \in A$ . De este modo,  $A$  es un conjunto inductivo, con lo que  $\mathbb{N} \subseteq A$ , y como  $A \subseteq \mathbb{N}$ ,  $A = \mathbb{N}$ .  $\square$

- f) Por (b) de LE3,  $x > 0$ , por lo que  $x + n > n$ . Por hipótesis,  $x + n, n \in \mathbb{N}$ , y por (e) de LE7  $(x + n) - n \in \mathbb{N}$ , osea,  $x \in \mathbb{N}$ .  $\square$

- g) Supongamos que  $x \in \mathbb{N}$ . Por hipótesis tenemos que  $x < n$  y  $x > n - 1$ . Notemos que

$$\begin{aligned} x &< n \\ x - n &< n - n \\ x - n &< 0 \\ x - n + 1 &< 1 \end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned} n - 1 &< x \\ n - 1 - (n - 1) &< x - (n - 1) \\ 0 &< x - n + 1 \\ n &< x + 1 \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{N}$  es un conjunto inductivo,  $x + 1 \in \mathbb{N}$ , y como  $x + 1 > n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , por (e) de LE7,  $x + 1 - n \in \mathbb{N}$ , y por (c) de LE7,  $x + 1 - n \geq 1$ . Pero tenemos que  $x - n + 1 < 1$ , osea  $1 \leq x + 1 - n < 1$ , lo cual es una contradicción. Por tanto,  $x$  no es un número natural.  $\square$

## Principio del buen orden

**Teorema.** Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales tiene elemento mínimo. Esto significa que si  $A \subseteq \mathbb{N}$  y  $A \neq \emptyset$ , entonces  $\exists c \in A$  tal que  $c \leq b, \forall b \in A$ .

### Demostración

Supongamos que  $A \subseteq \mathbb{N}$  con  $A \neq \emptyset$  y  $A$  no tiene elemento mínimo, es decir, suponemos que  $\forall a_0 \in A, \exists a \in A$  tal que  $a_0 > a$ .

Definimos el conjunto  $S := \{n \in \mathbb{N} : n < a, \forall a \in A\}$ . Si  $1 \notin S$ , tendríamos que  $\exists a_0 \in A$  tal que  $a_0 \leq 1$ , y como  $a_0 \in \mathbb{N}$ , sigue que  $1 \leq a_0$ , osea  $1 \leq a_0 \leq 1$ , y así  $a_0 = 1$ , pero  $1 \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$  y en consecuencia,  $1 \leq a, \forall a \in A$ , lo que contradiría nuestro supuesto inicial. Entonces, debe ser el caso que  $1 \in S$ .

Si  $m \in S$ , tendríamos que  $m < a, \forall a \in A$ . Luego, si  $m + 1 \notin S$ , entonces  $\exists a_0 \in A$  tal que  $a_0 \leq m + 1$ , con lo que obtenemos que  $m < a_0 \leq m + 1$ , y por (g) de LE7, no puede ser el caso que  $m < a_0 < m$ , entonces  $a_0 = m + 1$ , de lo que se concluye que  $m + 1 \leq a, \forall a \in A$ , pero esto contradice nuestro supuesto inicial, por lo que  $m + 1 \in S$ . De este modo,  $S$  es un conjunto inductivo, y, por definición,  $\mathbb{N} \subseteq S$  y  $S \subseteq \mathbb{N}$ , lo que implica que  $S = \mathbb{N}$ . Dado que  $A \neq \emptyset$ , entonces  $\exists a_0 \in A$  tal que  $a_0 > n, \forall n \in S$ , y como  $A \subseteq S$ , podemos elegir  $n = a_0$ , pero de esto obtenemos que  $a_0 < a_0$ , lo cual es una contradicción. Por tanto,  $\forall A \subseteq \mathbb{N}$  con  $A \neq \emptyset$ , se cumple que  $A$  tiene elemento mínimo.  $\square$



**Definición.**

- Al conjunto  $\mathbb{N} \cup 0 \cup -n : n \in \mathbb{N}$  lo llamaremos conjunto de los números enteros y lo representaremos con el símbolo  $\mathbb{Z}$ .
- Al conjunto  $-n : n \in \mathbb{N}$  lo llamaremos conjunto de los números enteros negativos y lo representaremos con el símbolo  $\mathbb{Z}^-$ .
- Al conjunto  $\mathbb{N}$  también lo llamaremos conjunto de los números enteros positivos y lo representaremos con el símbolo  $\mathbb{Z}^+$ .

**Observación.** Los conjuntos  $\mathbb{N}$ ,  $0$ ,  $-n : n \in \mathbb{N}$  son disjuntos por pares.

**Definición.** Sea  $E$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$ , decimos que  $E$  está acotado:

- Superiormente si existe un número real  $m$  tal que  $b \leq m, \forall b \in E$ . En este caso decimos que  $E$  es cota superior de  $E$ .
- Inferiormente si existe un número real  $l$  tal que  $l \leq b, \forall b \in E$ . En este caso, decimos que  $l$  es cota inferior de  $E$ .
- Si existe un número real  $m$  tal que  $|b| \leq m, \forall b \in E$ . En este caso decimos que  $m$  es una cota de  $E$ .

**Definición.** Sea  $A$  un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales, acotado superiormente, decimos que un número real  $M$  es supremo de  $A$  si  $M$  satisface las siguientes condiciones:

- $M$  es cota superior de  $A$ .
- Si  $K$  es una cota superior de  $A$ , entonces  $M \leq K$ , es decir,  $M$  es la cota superior más pequeña de  $A$ .

En este caso escribimos  $M = \sup A$ .

**Definición.** Sea  $A$  un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales, acotado inferiormente, decimos que un número real  $L$  es ínfimo de  $A$  si  $L$  satisface las siguientes condiciones:

- $L$  es cota inferior de  $A$ .
- Si  $K$  es una cota inferior de  $A$ , entonces  $K \leq L$ , es decir,  $L$  es la cota inferior más grande de  $A$ .

En este caso escribimos  $M = \inf A$ .

## Lista de ejercicios 8 (LE8)

Falso o verdadero:

1. Si  $E$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  acotado superiormente, entonces  $E$  es un conjunto acotado.
2. Si  $E$  es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}$ , entonces  $E$  está acotado superiormente e Inferiormente.

Demuestre lo siguiente:

3. Sea  $A$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$ , si  $A$  tiene supremo, este es único.
4. Sea  $A$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$ , si  $A$  tiene ínfimo, este es único.
5. Una cota superior  $M$  de un conjunto no vacío  $S$  de  $\mathbb{R}$  es el supremo de  $S$  si y solo si para toda  $\varepsilon > 0$  existe una  $s_\varepsilon \in S$  tal que  $M - \varepsilon < s_\varepsilon$ .

### Respuesta

1. Falso. Consideremos el conjunto  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$ , el cual es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , y es no vacío, pues  $-1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$ . Además,  $b \leq 0, \forall b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$ , por lo que el conjunto está acotado superiormente. Supongamos que el conjunto propuesto está acotado. Es decir, suponemos que  $\exists m$  tal que  $|b| \leq m, \forall b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$ . Por (f) de LE4,  $-m \leq b$  y, por transitividad,  $-m \leq 0$ , de donde sigue que  $-m - 1 \leq -1$ , pero  $-1 < 0$ , entonces  $-m - 1 < 0$ , lo que implica que  $-m - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$ , por lo que  $|-m - 1| \leq m$ . Luego, notemos que  $|-m - 1| = -(-m - 1)$ , es decir, tenemos que  $m + 1 \leq m$ , pero de esto se concluye que  $1 \leq 0$ , lo cual es una contradicción. Por tanto, aunque  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$  está acotado superiormente, no está acotado.
2. Verdadero. Sea  $E$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$ . Si  $E$  está acotado, entonces  $\exists m$  tal que  $|b| \leq m, \forall b \in E$ . Por (f) de LE4,  $-m \leq b \leq m$ , por lo que el conjunto está acotado superiormente e inferiormente.

### Demostración

3. Supongamos que  $s_1$  y  $s_2$  son supremos de  $A$ . Como  $s_1$  es una cota superior de  $A$  y  $s_2$  es elemento supremo, entonces  $s_2 \leq s_1$ . Similarmente,  $s_1 \leq s_2$ . Por tanto,  $s_1 = s_2$ .
4. Supongamos que  $m_1$  y  $m_2$  son ínfimos de  $A$ . Como  $m_1$  es una cota superior de  $A$  y  $m_2$  es elemento ínfimo, entonces  $m_1 \leq m_2$ . Similarmente,  $m_2 \leq m_1$ . Por tanto,  $m_1 = m_2$ .
5. i) Sea  $M$  una cota superior de  $S$  tal que  $\forall \varepsilon > 0, \exists s_\varepsilon$  tal que  $M - \varepsilon < s_\varepsilon$ . Si  $M$  no es el supremo de  $S$ , tendríamos que  $\exists V$  tal que  $s_{@@}a \leq V < M$ . Elegimos  $\varepsilon = M - V$ , con lo que  $V < s_\varepsilon$ , lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto,  $M$  es el supremo de  $S$ .  
ii) Sea  $M$  el supremo de  $S$  y  $\varepsilon > 0$ . Como  $M < M + \varepsilon$ , entonces  $M - \varepsilon$  no es una cota superior de  $S$ , por lo que  $\exists s_\varepsilon$  tal que  $s_\varepsilon > M - \varepsilon$ .  $\square$

## Axioma del supremo

Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números reales que sea acotado superiormente tiene supremo.

**Teorema.** El conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.

### Demostración:

Supongamos que el conjunto de los números naturales está acotado superiormente. Entonces existe un número real  $M$  tal que  $n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ . Como el conjunto de los números naturales es no vacío, entonces, por el axioma del supremo,  $\mathbb{N}$  tiene supremo.

Sea  $L := \sup(\mathbb{N})$ . Como  $L - 1$  no es cota superior de  $\mathbb{N}$ , ya que  $L > L - 1$  y  $L$  es la cota superior más pequeña, existe un número natural  $n_0$  tal que  $n_0 > L - 1$ , lo cual implica que  $n_0 + 1 < L$ , pero esto contradice la hipótesis de que  $L$  es supremo de  $\mathbb{N}$ . Por tanto, el conjunto de los números naturales no está acotado superiormente.  $\square$

La propiedad análoga para el ínfimo puede ser deducida del axioma del supremo como sigue:

**Teorema.** Si  $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  y  $A$  está acotado inferiormente, entonces  $A$  tiene ínfimo.

### Demostración:

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$  y  $A$  está acotado inferiormente. El conjunto  $-A := \{-a : a \in A\}$  está acotado superiormente y, por el axioma del supremo,  $-A$  tiene supremo. Sea  $M := \sup(-A)$ , entonces  $M \geq -a, \forall -a \in -A$ . Notemos que  $-M \leq -(-a), \forall -a \in -A$ , esto es  $-M$  es el ínfimo de  $A$ .  $\square$

## Lista de Ejercicios # (LE#)

Sean  $a$  y  $b$  números reales, demuestre lo siguiente:

- a)  $0 \leq a^{2n} \forall n \in \mathbb{N}$ .
- b) Si  $0 \leq a$ , entonces  $0 \leq a^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- c) Si  $0 \leq a < b$ , entonces  $a^n < b^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- d) Si  $0 \leq a < b$ , entonces  $a^n \leq ab^n < b^n \forall n \in \mathbb{N}$ .
- e) Si  $0 < a < 1$ , entonces  $a^n < a \forall n \in \mathbb{N}$ .
- f) Si  $1 < a$ , entonces  $a < a^n \forall n \in \mathbb{N}$ .

### Demostración

- a) Pendiente
- b) Por inducción matemática.
  - i) Verificamos que se cumple para  $n = 1$ .

$$\begin{aligned} 0 &\leq a^1 \\ 0 &\leq a \end{aligned}$$

ii) Suponemos que se cumple para  $n = k$ , para algún  $k \in \mathbb{N}$ . Es decir, suponemos que

$$0 \leq a^k$$

iii) Probaremos a partir de (ii) que  $0 \leq a^{k+1}$ . En efecto, por hipótesis de inducción

$$0 \leq a^k$$

$$0 \cdot a \leq a^k \cdot a$$

$$0 \leq a^{k+1}$$

c) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para  $n = 1$ .

$$a^1 < b^1$$

$$a < b$$

ii) Suponemos que se cumple para  $n = k$ , para algún  $k \in \mathbb{N}$ . Es decir, suponemos que

$$a^k < b^k$$

iii) Probaremos, a partir de (ii) que  $a^{k+1} < b^{k+1}$ . En efecto, por (c) de LE5, garantizamos que  $0 \leq a^k$ , lo que nos permite, por (a) de LE5, afirmar que

$$a^k \cdot a < b^k \cdot b$$

$$a^{k+1} < b^{k+1}$$

d) Tenemos que  $a < b$ , como  $0 \leq a < b$ , sigue que  $0 < b$ , entonces  $a \cdot b < b \cdot b$ , osea  $ab < b^2$ . Luego,  $a \cdot a \leq ab$ . Finalmente,  $a^2 \leq ab < b^2$ .

e) Pendiente

f) Pendiente