

Cálculo I

Darvid

October 30, 2021

Números reales

Existe un conjunto llamado conjunto de los números reales, denotado por \mathbb{R} . A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales. Este conjunto está dotado con dos operaciones binarias:

$$\begin{aligned}\text{Suma } + : \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & (m, n) \mapsto m + n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Multiplicación } \cdot : \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & (m, n) \mapsto m \cdot n\end{aligned}$$

Las cuales satisfacen los siguientes axiomas.

Axiomas de campo

- A1.** La suma es conmutativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m y n se verifica que: $m + n = n + m$.
- A2.** La suma es asociativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m , n y l se verifica que: $m + (n + l) = (m + n) + l$.
- A3.** Elemento neutro para la suma. Existe un número real llamado elemento neutro para la suma o cero, denotado por 0 , el cual satisface la siguiente condición: $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{R}$.
- A4.** Inverso aditivo. Para cada número real m existe un número real llamado inverso aditivo de m , denotado por $-m$ (menos m); la propiedad que caracteriza a este elemento es: $m + (-m) = 0$.
- A5.** La multiplicación es conmutativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m y n se verifica que: $m \cdot n = n \cdot m$.
- A6.** La multiplicación es asociativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m , n y l se verifica que: $m \cdot (n \cdot l) = (m \cdot n) \cdot l$.
- A7.** Elemento identidad para la multiplicación. Existe un número real distinto de cero, llamado elemento identidad para la multiplicación o uno, denotado por 1 , que satisface la siguiente condición: $m \cdot 1 = m, \forall m \in \mathbb{R}$.
- A8.** Inverso multiplicativo. Para cada número real m distinto de cero existe un número real llamado inverso multiplicativo de m , denotado por m^{-1} , este elemento tiene la siguiente propiedad: $m \cdot m^{-1} = 1$.
- A9.** Distribución de la multiplicación sobre la suma. Para cualesquiera números reales m , n y l se verifica que: $m \cdot (n + l) = m \cdot n + m \cdot l$.

Lista de ejercicios 1 (LE1)

- a) Demuestre que el elemento neutro para la suma es único.
- b) Demuestre que el elemento identidad para la multiplicación es único.
- c) Sea m un número real arbitrario pero fijo, demuestre que el inverso aditivo de m es único.
- d) Sea m un número real distinto de cero, demuestre que el inverso multiplicativo de m es único.
- e) Demuestre que $-0 = 0$.
- f) Sea m un número real arbitrario pero fijo, demuestre que $m \cdot 0 = 0$.
- g) Si m y n son números reales tales que $m \cdot n = 0$, demuestre que $m = 0$ o $n = 0$.
- h) Sea m un número real arbitrario pero fijo, demuestre que: $(-1) \cdot m = -m$.
- i) Sean m y n números reales, demuestre que: $(-m) \cdot n = -(m \cdot n)$.
- j) Sea m un número real arbitrario pero fijo, demuestre que: $-(-m) = m$.
- k) Sean m y n números reales, demuestre que: $(-m) \cdot (-n) = m \cdot n$.
- l) Sea m un número real arbitrario pero fijo, demuestre que: $(-1) \cdot (-m) = m$.
- m) Sea m un número real distinto de cero; demuestre que: $(m^{-1})^{-1} = m$.
- n) Sean m y n números reales distintos de cero, demuestre que: $(m \cdot n)^{-1} = m^{-1} \cdot n^{-1}$.

Demostración:

- a) Supongamos que existen 0 y $\tilde{0}$ números reales tales que $m + 0 = m$ y $m + \tilde{0} = m$. Notemos que:

$0 = m + (-m)$	Por A4	
$= (m + \tilde{0}) + (-m)$	Por hipótesis	
$= (\tilde{0} + m) + (-m)$	Por A1	
$= \tilde{0} + (m + (-m))$	Por A2	
$= \tilde{0} + 0$	Por A4	
$= \tilde{0}$	Por A3	□

- b) Supongamos que existen 1 y $\tilde{1}$ números reales tales que $m \cdot 1 = m$ y $m \cdot \tilde{1} = m$. Notemos que:

$1 = m \cdot m^{-1}$	Por A8	
$= (m \cdot \tilde{1}) \cdot m^{-1}$	Por hipótesis	
$= (\tilde{1} \cdot m) \cdot m^{-1}$	Por A5	
$= \tilde{1} \cdot (m \cdot m^{-1})$	Por A6	
$= \tilde{1} \cdot 1$	Por A8	
$= \tilde{1}$	Por A7	□

- c) Supongamos que existen $-m$ y $-\tilde{m}$ números reales tales que $m + (-m) = 0$ y $m + (-\tilde{m}) = 0$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
 -m &= -m + 0 && \text{Por A3} \\
 &= 0 + (-m) && \text{Por A1} \\
 &= (m + (-\tilde{m})) + (-m) && \text{Por (2)} \\
 &= ((-\tilde{m}) + m) + (-m) && \text{Por A1} \\
 &= (-\tilde{m}) + (m + (-m)) && \text{Por A2} \\
 &= (-\tilde{m}) + 0 && \text{Por A8} \\
 &= -\tilde{m} && \text{Por A3} \quad \square
 \end{aligned}$$

- d) Supongamos que existen m^{-1} y \tilde{m}^{-1} números reales, distintos de cero, tales que $m \cdot m^{-1} = 1$ y $m \cdot \tilde{m}^{-1} = 1$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
 m^{-1} &= m^{-1} \cdot 1 && \text{Por A7} \\
 &= m^{-1} \cdot (m \cdot \tilde{m}^{-1}) && \text{Por hipótesis} \\
 &= (m^{-1} \cdot m) \cdot \tilde{m}^{-1} && \text{Por A6} \\
 &= (m \cdot m^{-1}) \cdot \tilde{m}^{-1} && \text{Por A5} \\
 &= 1 \cdot \tilde{m}^{-1} && \text{Por hipótesis} \\
 &= \tilde{m}^{-1} \cdot 1 && \text{Por A5} \\
 &= \tilde{m}^{-1} && \text{Por A7} \quad \square
 \end{aligned}$$

- e) Por A3 se verifica que $0 + 0 = 0$, y por A4 que $0 + (-0) = 0$. Además, por (c) de LE1, tenemos que el inverso aditivo de cada número real es único, entonces debe ser el caso que $-0 = 0$. \square

- f) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 m \cdot 0 &= m \cdot 0 + 0 && \text{Por A3} \\
 &= m \cdot 0 + (m + (-m)) && \text{Por A4} \\
 &= m \cdot 0 + (m \cdot 1 + (-m)) && \text{Por A7} \\
 &= (m \cdot 0 + m \cdot 1) + (-m) && \text{Por A2} \\
 &= (m \cdot (0 + 1)) + (-m) && \text{Por A9} \\
 &= m \cdot 1 + (-m) && \text{Por A3} \\
 &= m + (-m) && \text{Por A7} \\
 &= 0 && \text{Por A4} \quad \square
 \end{aligned}$$

- g) Supongamos que m es distinto de 0. Notemos que:

$$\begin{aligned}
 n &= n \cdot 1 && \text{Por A7} \\
 &= n \cdot (m \cdot m^{-1}) && \text{Por A8} \\
 &= (n \cdot m) \cdot m^{-1} && \text{Por A6} \\
 &= (m \cdot n) \cdot m^{-1} && \text{Por A5} \\
 &= 0 \cdot m^{-1} && \text{Por hipótesis} \\
 &= m^{-1} \cdot 0 && \text{Por A5} \\
 &= 0 && \text{Por (f) de LE1} \quad \square
 \end{aligned}$$

h) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 -m &= -m + 0 && \text{Por A3} \\
 &= -m + m \cdot 0 && \text{Por (f) de LE1} \\
 &= -m + m \cdot (1 + (-1)) && \text{Por A4} \\
 &= -m + (m \cdot 1 + m \cdot (-1)) && \text{Por A9} \\
 &= -m + (m + m \cdot (-1)) && \text{Por A8} \\
 &= (-m + m) + m \cdot (-1) && \text{Por A2} \\
 &= m + (-m) + m \cdot (-1) && \text{Por A1} \\
 &= 0 + m \cdot (-1) && \text{Por A4} \\
 &= m \cdot (-1) + 0 && \text{Por A1} \\
 &= m \cdot (-1) && \text{Por A3} \\
 &= (-1) \cdot m && \text{Por A5}
 \end{aligned}$$

□

i) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 (-m) \cdot n &= ((-1) \cdot m) \cdot n && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= (-1) \cdot (m \cdot n) && \text{Por A6} \\
 &= -(m \cdot n) && \text{Por (h) de LE1}
 \end{aligned}$$

□

j) Sea m un número real arbitrario pero fijo. Por A4 se verifica que $m + (-m) = 0$, y por A1 tenemos que $(-m) + m = 0$, de esta igualdad se sigue que m es inverso aditivo de $(-m)$. Por A4 se verifica que $(-m) + (-(-m)) = 0$, y por (c) de LE1, sabemos que el inverso aditivo de cada número real es único. Entonces, debe ser el caso que $-(-m) = m$. □

k) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 (-m) \cdot (-n) &= (-m) \cdot ((-1) \cdot n) && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= ((-m) \cdot (-1)) \cdot n && \text{Por A6} \\
 &= ((-1) \cdot (-m)) \cdot n && \text{Por A5} \\
 &= -(-m) \cdot n && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= m \cdot n && \text{Por (j) de LE1}
 \end{aligned}$$

□

l) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 (-1) \cdot (-m) &= 1 \cdot m && \text{Por (k) de LE1} \\
 &= m \cdot 1 && \text{Por A5} \\
 &= m && \text{Por A7}
 \end{aligned}$$

m) Sea m un número real distinto de cero. Por A8 sabemos que $m \cdot m^{-1} = 1$, y por A5 tenemos que $m^{-1} \cdot m = 1$, de esta igualdad se sigue que m es inverso multiplicativo de m^{-1} . Por A8 se verifica que $m^{-1} \cdot (m^{-1})^{-1} = 1$, y por (d) de LE1, sabemos que el inverso multiplicativo de cada número real es único. Entonces, debe ser el caso que $(m^{-1})^{-1} = m$. □

n) Sean m y n números reales distintos de cero. Notemos que:

$$\begin{aligned}
 (m \cdot n) \cdot (m^{-1} \cdot n^{-1}) &= ((m \cdot n) \cdot m^{-1}) \cdot n^{-1} && \text{Por A6} \\
 &= ((n \cdot m) \cdot m^{-1}) \cdot n^{-1} && \text{Por A5} \\
 &= (n \cdot (m \cdot m^{-1})) \cdot n^{-1} && \text{Por A6} \\
 &= (n \cdot 1) \cdot n^{-1} && \text{Por A8} \\
 &= n \cdot n^{-1} && \text{Por A7} \\
 &= 1 && \text{Por A8}
 \end{aligned}$$

De la igualdad anterior, sigue que $(m^{-1} \cdot n^{-1})$ es inverso multiplicativo de $(m \cdot n)$. Además, por (d) de LE1, sabemos que el inverso multiplicativo de cada número real es único. Entonces, debe ser el caso que $(m^{-1} \cdot n^{-1}) = (m \cdot n)^{-1}$ \square

Notación:

- Si m y n son números reales, representaremos con el símbolo $m - n$ a la suma: $m + (-n)$.
- Si m y n son números reales y n es distinto de cero, representaremos con el símbolo $\frac{m}{n}$ al número $m \cdot n^{-1}$.
- Si m_1, m_2 y m_3 son números reales, representaremos con el símbolo $m_1 + m_2 + m_3$ a cualquiera de las sumas $m_1 + (m_2 + m_3)$ o $(m_1 + m_2) + m_3$.

Lista de ejercicios 2 (LE2)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

- a) $a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$, si $b \neq 0$
- b) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, si $b, c \neq 0$
- c) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$, si $b, d \neq 0$
- d) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, si $b, d \neq 0$
- e) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, si $b, c, d \neq 0$

Demostración

a) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 a \cdot \frac{c}{b} &= a \cdot (c \cdot b^{-1}) && \text{Por notación} \\
 &= (a \cdot c) \cdot b^{-1} && \text{Por A6} \\
 &= \frac{ac}{b} && \text{Por notación}
 \end{aligned}$$

\square

b) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{ac}{bc} &= a \cdot c \cdot (bc)^{-1} && \text{Por notación} \\
 &= a \cdot c \cdot b^{-1} \cdot c^{-1} && \text{Por (m) de LE1} \\
 &= a \cdot b^{-1} \cdot c \cdot c^{-1} && \text{Por A5} \\
 &= a \cdot b^{-1} \cdot 1 && \text{Por A8} \\
 &= a \cdot b^{-1} && \text{Por A7} \\
 &= \frac{a}{b} && \text{Por notación}
 \end{aligned}$$

□

c) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= a \cdot b^{-1} \pm c \cdot d^{-1} && \text{Por notación} \\
 &= (a \cdot 1) \cdot b^{-1} \pm (c \cdot 1) \cdot d^{-1} && \text{Por A7} \\
 &= \left(a \cdot (d \cdot d^{-1}) \right) \cdot b^{-1} \pm \left(c \cdot (b \cdot b^{-1}) \right) \cdot d^{-1} && \text{Por A8} \\
 &= \left((a \cdot d) \cdot d^{-1} \right) \cdot b^{-1} \pm \left((c \cdot b) \cdot b^{-1} \right) \cdot d^{-1} && \text{Por A6} \\
 &= (a \cdot d) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) \pm (c \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) && \text{Por A6} \\
 &= (a \cdot d) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) \pm (c \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) && \text{Por A5} \\
 &= (b^{-1} \cdot d^{-1}) \cdot (a \cdot d \pm c \cdot b) && \text{Por A9} \\
 &= (a \cdot d \pm c \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) && \text{Por A5} \\
 &= (a \cdot d \pm c \cdot b) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Por (m) de LE1} \\
 &= (a \cdot d \pm b \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Por A5} \\
 &= \frac{ad \pm bc}{bd} && \text{Por notación}
 \end{aligned}$$

□

d) Notemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) && \text{Por notación} \\
 &= a \cdot \left(b^{-1} \cdot (c \cdot d^{-1}) \right) && \text{Por A6} \\
 &= a \cdot \left(c \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) \right) && \text{Por A5} \\
 &= (a \cdot c) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) && \text{Por A6} \\
 &= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Por (m) de LE1} \\
 &= \frac{ac}{bd} && \text{Por notación}
 \end{aligned}$$

□

e) Notemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{(a \cdot b^{-1})}{(c \cdot d^{-1})} && \text{Por notación} \\
 &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1})^{-1} && \text{Por notación} \\
 &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot (d^{-1})^{-1}) && \text{Por (m) de LE1} \\
 &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (c^{-1} \cdot d) && \text{Por (l) de LE1} \\
 &= (a \cdot b^{-1}) \cdot (d \cdot c^{-1}) && \text{Por A5} \\
 &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} && \text{Por notación} \\
 &= \frac{ad}{bc} && \text{Por (d) de LE2}
 \end{aligned}$$

□

Axiomas de orden del conjunto de los números reales

Existe un subconjunto del conjunto de los números reales llamado conjunto de los números reales positivos, denotado con el símbolo \mathbb{R}^+ . A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales positivos.

El conjunto \mathbb{R}^+ satisface los siguientes axiomas:

O1) Si $m, n \in \mathbb{R}^+$, entonces $m + n \in \mathbb{R}^+$.

O2) Si $m, n \in \mathbb{R}^+$, entonces $m \cdot n \in \mathbb{R}^+$.

O3) Para cada número real m se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:

- i) $m \in \mathbb{R}^+$.
- ii) $m = 0$.
- iii) $-m \in \mathbb{R}^+$.

Definición: Sean a y b números reales, decimos que:

1. a es menor que b o que b es mayor que a y escribimos $a < b$ o $b > a$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$.
2. a es menor que o igual que b o que b es mayor o igual que a , y escribimos $a \leq b$ o $b \geq a$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$ o $a = b$.

Notación: Sean a , b y c números reales, utilizaremos la notación $a < b < c$ para indicar que $a < b$ y $b < c$.

Lista de Ejercicios 3 (LE3)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

- a) $1 \in \mathbb{R}^+$.
- b) $a \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $a > 0$.
- c) $-1 < 0$.
- d) Si $a < b$ y $c \leq d$, entonces $a + c < b + d$.
- e) Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$.
- f) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
- g) $a \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $-a < 0$.
- h) $a < b$ si y solo si $-a > -b$.
- i) Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$.
- j) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
- k) Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$.
- l) Si $a < b$ y $ab > 0$, entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
- m) Si $a < 1$ y $0 < b$, entonces $ab < b$.
- n) Si $a < b$ demuestre que $a < \frac{a+b}{2} < b$.
- o) $a^2 \geq 0$.
- p) Si $0 \leq a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.
- q) Si $a \leq b + \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.

Demostración

- a) Supongamos que $1 \notin \mathbb{R}^+$. Por (A7), (ii) de (O3) no se cumple. Si $-1 \in \mathbb{R}^+$, por (O2) se verifica que $-1 \cdot -1 \in \mathbb{R}^+$, lo cual por (h) de LE1 implica que $-(-1) \in \mathbb{R}^+$, pero esto contradice a (iii) de (O3). Por tanto, 1 es un número real positivo.
- b)
 - i) Supongamos que $a \in \mathbb{R}^+$. Por A3 sabemos que $a = a + 0$, y por (e) de LE1 sigue que $a = a - 0$, entonces $a - 0 \in \mathbb{R}^+$, lo que por definición implica que $a > 0$.
 - ii) Supongamos que $a > 0$. Por definición, $a - 0 \in \mathbb{R}^+$, y por (e) de LE1 sigue que $a - 0 = a + 0$, lo que por A3 implica que $a + 0 = a$. Así $a \in \mathbb{R}^+$.

□

- c) Supongamos que $-1 \geq 0$

- i) Si $-1 = 0$. Notemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 1 \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por A4

Por hipótesis

Por A3

Pero la igualdad anterior contradice a A7.

- ii) Si $-1 > 0$, por (b) de LE3 tenemos que $-1 \in \mathbb{R}^+$, pero esto contradice a O3, ya que por (a) de LE3 sabemos que $1 \in \mathbb{R}^+$.

Por tanto $-1 < 0$ □

d) Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$.

- i) Si $c < d$, entonces $d - c \in \mathbb{R}^+$. Por (O1) se verifica que $(b - a) + (d - c) \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
 b - a + d - c &= b + d - a - c && \text{Por A1} \\
 &= b + d + (-a) + (-c) && \text{Por notación} \\
 &= b + d + (-1)a + (-1)c && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= b + d + (-1)(a + c) && \text{Por A9} \\
 &= b + d + b - (a + c) && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= b + d - (a + c) && \text{Por notación}
 \end{aligned}$$

De este modo, $b + d - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + d$.

- ii) Si $c = d$. Notemos que

$$\begin{aligned}
 b - a &= b - a + 0 && \text{Por A3} \\
 &= b - a + c - c && \text{Por A4} \\
 &= b + c - a - c && \text{Por A1} \\
 &= b + c + (-a) + (-c) && \text{Por notación} \\
 &= b + c + (-1)a + (-1)c && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= b + c + (-1)(a + c) && \text{Por A9} \\
 &= b + c - (a + c) && \text{Por (h) de LE1} \\
 &= b + d - (a + c) && \text{Por hipótesis}
 \end{aligned}$$

De este modo, $b + d - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + d$.

En cualquier caso, $a + c < b + d$. □

- e) Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$, y por (b) de LE3 $c \in \mathbb{R}^+$. Luego, por O2 se verifica que $c(b - a) \in \mathbb{R}^+$. Por A9 sigue que $c(b - a) = cb - ca$ y por A5 tenemos que $cb - ca = bc - ac$. De este modo, $bc - ac \in \mathbb{R}^+$, es decir, $ac < bc$. □

- f) Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $0 - c \in \mathbb{R}^+$, por A3 sigue que $-c \in \mathbb{R}^+$. Luego, por O2 $-c(b - a) \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
 -c(b - a) &= -c(b + (-a)) && \text{Por notación} \\
 &= (-c) \cdot b + (-c) \cdot (-a) && \text{Por A9} \\
 &= (-c) \cdot b + c \cdot a && \text{Por (k) de LE1} \\
 &= -(c \cdot b) + c \cdot a && \text{Por (i) de LE1} \\
 &= ca - (cb) && \text{Por A1} \\
 &= ac - (bc) && \text{Por A5}
 \end{aligned}$$

Entonces $ac - bc \in \mathbb{R}^+$, es decir, $ac > bc$. □

g) i) Supongamos que $a \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$\begin{array}{ll} a > 0 & \text{Por (b) de LE3} \\ a \cdot (-1) < 0 \cdot (-1) & \text{Por (c) y (f) de LE3} \\ -a < 0 & \text{Por (h) y (f) de LE1} \end{array}$$

ii) Supongamos que $-a < 0$. Notemos que:

$$\begin{array}{ll} -a \cdot (-1) > 0 \cdot (-1) & \text{Por (b) y (f) de LE3} \\ a > 0 & \text{Por (l) y (f) de LE1} \end{array}$$

Entonces, $a \in \mathbb{R}^+$, por (b) de LE3.

□

h) Notemos que:

i) Si $a < b$, por (b) y (f) de LE3 tenemos que $a \cdot (-1) > b \cdot (-1)$, y por (h) de LE1 obtenemos que $-a > -b$.

ii) Si $-a > -b$, por (b) y (f) de LE3 tenemos que $-a \cdot (-1) < -b \cdot (-1)$, y por (k) de LE1 obtenemos que $a < b$.

□

i) Sea $a > 0$. Supongamos que $\frac{1}{a} \leq 0$. Notemos que:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{a} \cdot a \leq 0 \cdot a & \text{Por (e) de LE3} \\ 1 \leq 0 & \text{Por A8 y (f) de LE1} \end{array}$$

Pero por (a) de LE3 y (b) de LE3 tenemos que $1 > 0$. Por tanto, $\frac{1}{a} > 0$.

□

j) Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $c - b \in \mathbb{R}^+$. Por O1 $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$\begin{array}{ll} (b - a) + (c - b) = b - a + c - b & \text{Por notación} \\ = b - a - b + c & \text{Por A1} \\ = b - b - a + c & \text{Por A1} \\ = 0 - a + c & \text{Por A4} \\ = -a + c & \text{Por A3} \\ = c - a & \text{Por A1} \end{array}$$

Entonces $c - a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < c$.

□

k) i) Si $a = 0$ o $c = 0$, por (g) de LE1 se verifica que $ac = 0$. Luego, por (j) de LE3, se verifica que $0 < b$ y $0 < d$. Así, $ac < bd$.

ii) Si $a > 0$ y $c > 0$. Por hipótesis, $a < b$, y por (e) de LE3, sigue que $ac < bc$. También, tenemos que $c < d$, y por (e) de LE3, sigue que $bc < db$. Finalmente, por (j) de LE3, se verifica que $ac < bd$.

□

1) Notemos que:

$a < b$	Por hipótesis
$a - a < b - a$	Por (d) de LE3
$0 < b - a$	Por A4
$0 \cdot \frac{1}{ab} < (b - a) \cdot \frac{1}{ab}$	Por (h) y (e) de LE3
$0 < \frac{b - a}{ab}$	Por (f) de LE1 y (a) de LE2
$0 < \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$	Por (c) de LE2
$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$	Por (d) de LE3

□

m) Dado que $0 < b$, por (b) de LE3 se cumple que $b \in \mathbb{R}^+$, y por definición $1 - a \in \mathbb{R}^+$. Por O2 se verifica que $b(1 - a) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $b - ab \in \mathbb{R}^+$, lo cual implica que $ab < b$. □

n) Por (a) de LE3 sabemos que $1 \in \mathbb{R}^+$, y por O1 se cumple que $1 + 1 \in \mathbb{R}^+$, es decir $2 \in \mathbb{R}^+$. Por (b) de LE3 se verifica que $0 < 2$ y por (i) de LE3 tenemos que $0 < \frac{1}{2}$. Notemos que:

$a < b$	Por hipótesis
$a + a < b + a$	Por (d) de LE3
$2a < b + a$	Por definición
$2a \cdot \frac{1}{2} < (b + a) \cdot \frac{1}{2}$	Por (e) de LE3
$\frac{2a}{2} < \frac{b + a}{2}$	Por (a) de LE2
$a < \frac{b + a}{2}$	Por A8

Similarmente,

$a < b$	Por hipótesis
$a + b < b + b$	Por (d) de LE3
$a + b < 2b$	Por definición
$(a + b) \cdot \frac{1}{2} < 2b \cdot \frac{1}{2}$	Por (e) de LE3
$\frac{a + b}{2} < \frac{2b}{2}$	Por (a) de LE2
$\frac{a + b}{2} < b$	Por A8

Finalmente, por notación, $a < \frac{a+b}{2} < b$. □

o) Si $0 \leq a$, $0 \cdot a \leq a \cdot a$, osea, $0 \leq a^2$. Si $a < 0$, $0 \cdot a < a \cdot a$, osea, $0 \leq a^2$. En cualquier caso $a \geq 0$.

p) Supongamos que $0 < a$, sigue que $0 < \frac{a}{2} < a$. Elegimos $\varepsilon = \frac{a}{2}$, entonces $\varepsilon < a$, pero esto contradice nuestra hipótesis de que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por tanto, $a = 0$. □

q) Sean a y b números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Supongamos que $a > b$. Luego, $a - b > 0$. Notemos que $(a - b) \cdot \frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$, es decir $\frac{(a-b)}{2} > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{(a-b)}{2}$, sigue que $a = 2\varepsilon + b$. Además, $2\varepsilon > \varepsilon$, de donde obtenemos $2\varepsilon + b > \varepsilon + b$. De este modo, $a > b + \varepsilon$, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $a \leq b$. □

Definición: Sea a un número real, definimos el valor absoluto de a , denotado por $|a|$ como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Observación. $|a| \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Lista de Ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c números reales, demuestre lo siguiente:

- a) $|a| \geq \pm a$.
- b) $|ab| = |a||b|$.
- c) $|a| = |-a|$.
- d) $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- e) Si $b \neq 0$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.
- f) $|a| < b$ si y solo si $-b < a < b$.
- g) $||a| - |b|| \leq |a - b|$
- h) $|a|^2 = a^2$.

Demostración

- a) i) Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$, así, $|a| \geq a$. Luego, $-a \leq 0$, de donde sigue que $a \geq -a$. Finalmente, $|a| \geq -a$.
ii) Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$, así, $|a| \geq -a$. Luego, $-a > 0$, de donde sigue que $-a > a$. Finalmente, $|a| \geq a$.
En cualquier caso, $|a| \geq \pm a$.
- b) i) Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. De este modo, $|ab| = |a||b|$.
ii) Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab < 0$ por lo que $|ab| = -ab$. De este modo, $|ab| = |a||b|$.
iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. De este modo, $|ab| = |a||b|$.
- c) i) Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$. Luego, $-a \leq 0$. Si $-a < 0$, $|-a| = a$ y si $-a = 0$, $|-a| = a$. De este modo, $|a| = |-a|$.
ii) Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$. Luego, $-a > 0$ por lo que $|-a| = -a$. De este modo, $|a| = |-a|$.
- d) i) Si $0 \leq a + b$, entonces $|a + b| = a + b$. Además, $a \leq |a|$ y $b \leq |b|$. Luego, $a + b \leq |a| + |b|$. Así, $|a + b| \leq |a| + |b|$.
ii) Si $0 > a + b$, entonces $|a + b| = -a - b$. Además, $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b|$. Luego, $-a - b \leq |a| + |b|$. Así, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

- e) i) Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \geq 0$ por lo que $|\frac{a}{b}| = \frac{a}{b}$. De este modo, $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.
- ii) Si $a \geq 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \leq 0$, por lo que $|\frac{a}{b}| = -\frac{a}{b}$. De este modo, $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.
- iii) Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} < 0$, por lo que $|\frac{a}{b}| = -\frac{a}{b}$. De este modo, $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.
- iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} > 0$ por lo que $|\frac{a}{b}| = \frac{a}{b}$. De este modo, $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.
- f) i) Supongamos que $|b| < c$. Por (a) de LE4, $\pm b \leq |b|$, de donde sigue que $-b < c$ y $b < c$. Luego, $-c < b$. De este modo, $-c < b < c$.
- ii) Supongamos que $-c < b < c$. Luego,
- 1) Si $b \geq 0$, entonces $|b| = b$. Por lo que $|b| < c$.
- 2) Si $b < 0$, entonces $|b| = -b$. Por hipótesis, $-c < b$, por lo que $-b < c$. Así $|b| < c$.
- g) Por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |(a-b) + b| &\leq |a-b| + |b| \\ |a| &\leq |a-b| + |b| \\ |a| - |b| &\leq |a-b| \end{aligned} \tag{1}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} |(b-a) + a| &\leq |b-a| + |a| \\ |b| &\leq |b-a| + |a| \\ |b| - |a| &\leq |b-a| \\ -|b-a| &\leq |a| - |b| \end{aligned} \tag{2}$$

Luego, aplicando (f) de LE4 en (1) y (2), $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

- h) Por (o) de LE3, $a^2 \geq 0$, por lo que

$$\begin{aligned} a^2 &= |a^2| \\ &= |a \cdot a| \\ &= |a| \cdot |a| && \text{Por (b) de LE4} \\ &= |a|^2 \end{aligned}$$

□

Definición. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. El vecindario- ε de a es el conjunto $V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$.

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre lo siguiente:

- a) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $x = a$.
- b) Sea $U := \{x : 0 < x < 1\}$. Si $a \in U$, sea ε el menor de los números a y $1-a$. Demuestre que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$.
- c) Demuestre que si $a \neq b$, entonces existen $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Demostración.

- a) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ tenemos que $|x - a| < \varepsilon$. Además, $0 \leq |x - a|$, por definición. Así, $0 \leq |x - a| < \varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para toda $\varepsilon > 0$, por (p) de LE3, sigue que $|x - a| = 0$. Si $x - a \geq 0$, $|x - a| = x - a$ y $x - a = 0$. Si $x - a < 0$, $|x - a| = -x + a$ y $-x + a = 0$. En cualquier caso, $x = a$.
- b) i) Si $a > 1 - a$, tenemos $\varepsilon = 1 - a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < 1 - a$. De (f) de LE4 sigue que $a - 1 < y - a < 1 - a$ (*). Tomando el lado derecho de (*) obtenemos $y < 1$. Luego, de la hipótesis sigue que $2a > 1$, osea $2a - 1 > 0$. Del lado izquierdo de la desigualdad (*), tenemos $2 - 1 < y$, por lo que $0 < y$.
- ii) Si $1 - a > a$, tenemos $\varepsilon = a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < a$. De (f) de LE4 sigue que $-a < y - a < a$ (**). Tomando el lado derecho de (**) tenemos $y < 2a$. Luego, de la hipótesis sigue que $1 > 2a$, por esto $y < 1$. Finalmente, tomando el lado izquierdo de (**) obtenemos $0 < y$.

En cualquier caso, $0 < y < 1$, lo que implica que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$.

- c) Supongamos que $U \cap V \neq \emptyset$.

Definición: Sea A un subconjunto del conjunto de los números reales, decimos que A es un conjunto inductivo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $1 \in A$.
2. Si $n \in A$ entonces se verifica que $n + 1 \in A$.

Lista de Ejercicios 6 (LE6)

- 1) ¿El conjunto de los números reales es un conjunto inductivo?
- 2) ¿ \mathbb{R}^+ es un conjunto inductivo?
- 3) Sea $A := \{B \subseteq \mathbb{R} : B \text{ es un conjunto inductivo}\}$. Demuestre que $A \neq \emptyset$ y que $C = \bigcap B$ es un conjunto inductivo.

Respuesta

- 1) Sí, ya que $1 \in \mathbb{R}$, y si n es un número real, $n + 1 \in \mathbb{R}$ por la cerradura de la suma en \mathbb{R} .
- 2) Sí, pues $1 \in \mathbb{R}^+$ y y si n es un número real positivo, $n + 1 \in \mathbb{R}^+$ por el axioma de orden 1.
- 3) Claramente $A \neq \emptyset$, pues $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \subseteq A$.

Luego, por hipótesis, $\forall B \in A$ tenemos que $B \subseteq \mathbb{R}$ por lo que $C \subseteq \mathbb{R}$. Además, $\forall B \in A$, se verifica que $1 \in B$. Consecuentemente, $1 \in C$. Por otra parte, si $n \in B$ para todo $B \in A$, tendremos que $n + 1 \in B$, por lo que $n + 1 \in C$. Por tanto, C es un conjunto inductivo.

Definición. Al conjunto C de (3) de LE6 lo llamaremos conjunto de los números naturales y lo denotaremos con el símbolo \mathbb{N} .

Lista de ejercicios 7 (LE7)

Demuestre lo siguiente:

- a) La suma de números naturales es un número natural.
- b) La multiplicación de números naturales es un número natural.
- c) Demuestre que $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
- d) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n - 1 \in \mathbb{N}$.
- e) Sean m y n números naturales tales que $m > n$, demuestre que $m - n \in \mathbb{N}$.
- f) Sea $x \in \mathbb{R}^+$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x + n \in \mathbb{N}$, demuestre que $x \in \mathbb{N}$.
- g) Sea $x \in \mathbb{R}$, si $n \in \mathbb{N}$ y $n - 1 < x < n$, demuestre que x no es un número natural.

Demostración.

- a) Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$ y $m + 1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir, $A \neq \emptyset$.

Por otra parte, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m + n \in \mathbb{N}$. Como \mathbb{N} es un conjunto inductivo, $n + 1 \in \mathbb{N}$ y $(m + n) + 1 \in \mathbb{N}$, luego, por la asociatividad de la suma, $m + (n + 1) \in \mathbb{N}$. Por la condición de A , se cumple que $n + 1 \in A$, por lo que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la suma de números naturales es un número natural. \square

- b) Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$. Además, $m \cdot 1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir $A \neq \emptyset$.

Luego, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Por (a) de LE7 se verifica que $(m \cdot n) + m \in \mathbb{N}$. Notemos que $(m \cdot n) + m = m \cdot (n + 1)$, osea, $m \cdot (n + 1) \in \mathbb{N}$. Como \mathbb{N} es un conjunto inductivo, tenemos que $n + 1 \in \mathbb{N}$. De este modo, $n + 1 \in A$. Lo que implica que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la multiplicación de números naturales es un número natural. \square

- c) Sea $A := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Como $1 \in \mathbb{N}$ y $1 \geq 1$, tenemos que $1 \in A$.

Si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq n$. Además, por (a) de LE7, $n + 1 \in \mathbb{N}$. Luego, notemos que $0 \leq 1$ de donde sigue que $n \leq n + 1$. Por transitividad, $1 \leq n + 1$, por lo que $n + 1 \in A$, lo que implica que A es un conjunto inductivo, es decir, $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. \square

- d) Sea $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1, n - 1 \in \mathbb{N}\}$. Si $n \in A$ debe ser porque $n > 1$ y $n - 1 \in \mathbb{N}$. Como $n \in \mathbb{N}$ y \mathbb{N} es un conjunto inductivo, se verifica $n + 1 \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$\begin{aligned}(n + 1) - 1 &= n + (1 - 1) \\ &= n + 0 \\ &= n\end{aligned}$$

Entonces, $(n + 1) - 1 \in \mathbb{N}$. También, $n > 1$ implica que $n > 0$ y $n + 1 > 1$, por lo que $n + 1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. Por tanto $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n - 1 \in \mathbb{N}$. \square

- e) Sea $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n < m, m - n \in \mathbb{N} \text{ con } m \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$ y $1 + 1 \in \mathbb{N}$. Por (a) y (b) de LE3, $1 > 0$, de donde sigue que $1 + 1 > 1$. Por (d) de LE7, se verifica que $(1 + 1) - 1 \in \mathbb{N}$, por lo que $1 \in A$.

Si $n \in A$ debe ser porque $m - n \in \mathbb{N}$ y $m > n$, de donde obtenemos $m + 1 > n + 1$. Como $m, n \in \mathbb{N}$ y \mathbb{N} es un conjunto inductivo, $n + 1 \in \mathbb{N}$ y $m + 1 \in \mathbb{N}$. Notemos que $m + 1 - (n + 1) = m - n$, por lo que $n + 1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. \square

- f) Por (b) de LE3, $x > 0$, por lo que $x + n > n$. Por hipótesis, $x + n, n \in \mathbb{N}$, y por (e) de LE7, $(x + n) - n \in \mathbb{N}$, osea, $x \in \mathbb{N}$. \square

- g) Supongamos que $x \in \mathbb{N}$. Por hipótesis tenemos que $x < n$ y $x > n - 1$. Notemos que

$$\begin{aligned} x &< n \\ x - n &< n - n \\ x - n &< 0 \\ x - n + 1 &< 1 \end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned} n - 1 &< x \\ n - 1 - (n - 1) &< x - (n - 1) \\ 0 &< x - n + 1 \\ n &< x + 1 \end{aligned}$$

Como \mathbb{N} es un conjunto inductivo, $x + 1 \in \mathbb{N}$, y como $x + 1 > n$, con $n \in \mathbb{N}$, por (e) de LE7, $x + 1 - n \in \mathbb{N}$, y por (c) de LE7, $x + 1 - n \geq 1$. Pero tenemos que $x - n + 1 < 1$, osea $1 \leq x + 1 - n < 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto, x no es un número natural. \square

Principio del buen orden

Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales tiene elemento mínimo. Esto significa que si $A \subseteq \mathbb{N}$ y $A \neq \emptyset$, entonces $\exists c \in A$ tal que $c \leq b, \forall b \in A$.

Demostración

Supongamos que $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$ y A no tiene elemento mínimo, es decir, suponemos que $\forall a_0 \in A, \exists a \in A$ tal que $a_0 > a$.

Definimos el conjunto $S := \{n \in \mathbb{N} : n < a, \forall a \in A\}$. Si $1 \notin S$, tendríamos que $\exists a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq 1$, y como $a_0 \in \mathbb{N}$, sigue que $1 \leq a_0$, osea $1 \leq a_0 \leq 1$, y así $a_0 = 1$, pero $1 \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia, $1 \leq a, \forall a \in A$, lo que contradiría nuestro supuesto inicial. Entonces, debe ser el caso que $1 \in S$.

Si $m \in S$, tendríamos que $m < a, \forall a \in A$. Luego, si $m + 1 \notin S$, entonces $\exists a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq m + 1$, con lo que obtenemos que $m < a_0 \leq m + 1$, y por (g) de LE7, no puede ser el caso que $m < a_0 < m$, entonces $a_0 = m + 1$, de lo que se concluye que $m + 1 \leq a, \forall a \in A$, pero esto contradice nuestro supuesto inicial, por lo que $m + 1 \in S$. De este modo, S es un conjunto inductivo, y, por definición, $\mathbb{N} \subseteq S$ y $S \subseteq \mathbb{N}$, lo que implica que $S = \mathbb{N}$. Dado que $A \neq \emptyset$, entonces $\exists a_0 \in A$ tal que $a_0 > n, \forall n \in S$, y como $A \subseteq S$, podemos elegir $n = a_0$, pero de esto obtenemos que $a_0 < a_0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$, se cumple que A tiene elemento mínimo. \square

Definición.

- Al conjunto $\mathbb{N} \cup 0 \cup -n : n \in \mathbb{N}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros y lo representaremos con el símbolo \mathbb{Z} .
- Al conjunto $-n : n \in \mathbb{N}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros negativos y lo representaremos con el símbolo \mathbb{Z}^- .
- Al conjunto \mathbb{N} también lo llamaremos conjunto de los números enteros positivos y lo representaremos con el símbolo \mathbb{Z}^+ .

Observación. Los conjuntos \mathbb{N} , 0 , $-n : n \in \mathbb{N}$ son disjuntos por pares.

Definición. Sea E un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , decimos que E está acotado:

- Superiormente si existe un número real m tal que $b \leq m, \forall b \in E$. En este caso decimos que E es cota superior de E .
- Inferiormente si existe un número real l tal que $l \leq b, \forall b \in E$. En este caso, decimos que l es cota inferior de E .
- Si existe un número real m tal que $|b| \leq m, \forall b \in E$. En este caso decimos que m es una cota de E .

Definición. Sea A un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales, acotado superiormente, decimos que un número real M es supremo de A si M satisface las siguientes condiciones:

- M es cota superior de A .
- Si K es una cota superior de A , entonces $M \leq K$, es decir, M es la cota superior más pequeña de A .

En este caso escribimos $M = \sup A$.

Definición. Sea A un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales, acotado inferiormente, decimos que un número real L es ínfimo de A si L satisface las siguientes condiciones:

- L es cota inferior de A .
- Si K es una cota inferior de A , entonces $K \leq L$, es decir, L es la cota inferior más grande de A .

En este caso escribimos $M = \inf A$.

Lista de ejercicios 8 (LE8)

Falso o verdadero:

1. Si E es un subconjunto de \mathbb{R} acotado superiormente, entonces E es un conjunto acotado.
2. Si E es un subconjunto acotado de \mathbb{R} , entonces E está acotado superiormente e inferiormente.

Demuestre lo siguiente:

3. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , si A tiene supremo, este es único.
4. Sea A un subconjunto no vacío de \mathbb{R} , si A tiene ínfimo, este es único.
5. Una cota superior M de un conjunto no vacío S de \mathbb{R} es el supremo de S si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $s_\varepsilon \in S$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Respuesta

1. Falso. Consideremos el conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$, el cual es un subconjunto de \mathbb{R} , y es no vacío, pues $-1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$. Además, $b \leq 0, \forall b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$, por lo que el conjunto está acotado superiormente. Supongamos que el conjunto propuesto está acotado. Es decir, suponemos que $\exists m$ tal que $|b| \leq m, \forall b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$. Por (f) de LE4, $-m \leq b$ y, por transitividad, $-m \leq 0$, de donde sigue que $-m - 1 \leq -1$, pero $-1 < 0$, entonces $-m - 1 < 0$, lo que implica que $-m - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$, por lo que $|-m - 1| \leq m$. Luego, notemos que $|-m - 1| = -(-m - 1)$, es decir, tenemos que $m + 1 \leq m$, pero de esto se concluye que $1 \leq 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, aunque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$ está acotado superiormente, no está acotado.
2. Verdadero. Sea E un subconjunto no vacío de \mathbb{R} . Si E está acotado, entonces $\exists m$ tal que $|b| \leq m, \forall b \in E$. Por (f) de LE4, $-m \leq b \leq m$, por lo que el conjunto está acotado superiormente e inferiormente.

Demostración

3. Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de A . Como s_1 es una cota superior de A y s_2 es elemento supremo, entonces $s_2 \leq s_1$. Similarmente, $s_1 \leq s_2$. Por tanto, $s_1 = s_2$.
4. Supongamos que m_1 y m_2 son ínfimos de A . Como m_1 es una cota superior de A y m_2 es elemento ínfimo, entonces $m_1 \leq m_2$. Similarmente, $m_2 \leq m_1$. Por tanto, $m_1 = m_2$.
5. i) Sea M el supremo de S . Si s_ε es una cota superior del conjunto, tenemos que $M < s_\varepsilon$.
Sea $\alpha_\varepsilon =$

Lista de Ejercicios # (LE#)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

- a) $0 \leq a^{2n} \forall n \in \mathbb{N}$.

- b) Si $0 \leq a$, entonces $0 \leq a^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- c) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n < b^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
- d) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n \leq ab^n < b^n \forall n \in \mathbb{N}$.
- e) Si $0 < a < 1$, entonces $a^n < a \forall n \in \mathbb{N}$.
- f) Si $1 < a$, entonces $a < a^n \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración

a) Pendiente

b) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$0 \leq a^1$$

$$0 \leq a$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$0 \leq a^k$$

iii) Probaremos a partir de (ii) que $0 \leq a^{k+1}$. En efecto, por hipótesis de inducción

$$0 \leq a^k$$

$$0 \cdot a \leq a^k \cdot a$$

$$0 \leq a^{k+1}$$

c) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$a^1 < b^1$$

$$a < b$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$a^k < b^k$$

iii) Probaremos, a partir de (ii) que $a^{k+1} < b^{k+1}$. En efecto, por (c) de LE5, garantizamos que $0 \leq a^k$, lo que nos permite, por (a) de LE5, afirmar que

$$a^k \cdot a < b^k \cdot b$$

$$a^{k+1} < b^{k+1}$$

d) Tenemos que $a < b$, como $0 \leq a < b$, sigue que $0 < b$, entonces $a \cdot b < b \cdot b$, osea $ab < b^2$. Luego, $a \cdot a \leq ab$. Finalmente, $a^2 \leq ab < b^2$.

e) Pendiente

f) Pendiente