Cálculo I

Darvid

October 30, 2021

Números reales

Existe un conjunto llamado conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$. A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales. Este conjunto está dotado con dos operaciones binarias:

$$\begin{aligned} \text{Suma } + : \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & (m, n) \mapsto m + n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Multiplicación } \cdot : \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & (m, n) \mapsto m \cdot n \end{aligned}$$

Las cuales satisfacen los siguientes axiomas.

Axiomas de campo

A1. La suma es conmutativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m y n se verifica que: $m + n = n + m$.

A2. La suma es asociativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m, n y l se verifica que: $m + (n + l) = (m + n) + l$.

A3. Elemento neutro para la suma. Existe un número real llamado elemento neutro para la suma o cero, denotado por 0, el cual satisface la siguiente condición: $m + 0 = m, \forall m \in \mathbb{R}$.

A4. Inverso aditivo. Para cada número real m existe un número real llamado inverso aditivo de m, denotado por $-m$ (menos m); la propiedad que caracteriza a este elemento es: $m+(-m) = 0$.

A5. La multiplicación es conmutativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m y n se verifica que: $m \cdot n = n \cdot m$.

A6. La multiplicación es asociativa. Esto significa que para cualesquiera números reales m, n y l se verifica que: $m \cdot (n \cdot l) = (m \cdot n) \cdot l$.

A7. Elemento identidad para la multiplicación. Existe un número real distinto de cero, llamado elemento identidad para la multiplicación o uno, denotado por 1, que satisface la siguiente condición: $m \cdot 1 = m, \forall m \in \mathbb{R}$.

A8. Inverso multiplicativo. Para cada número real m distinto de cero existe un número real llamado inverso multiplicativo de m, denotado por m^{-1}, este elemento tiene la siguiente propiedad:$m \cdot m^{-1} = 1$.

A9. Distribución de la multiplicación sobre la suma. Para cualesquiera números reales m, n y l se verifica que: $m \cdot (n + l) = m \cdot n + m \cdot l$.

Lista de ejercicios 1 (LE1)

a) Demuestre que el elemento neutro para la suma es único.

b) Demuestre que el elemento identidad para la multiplicación es único.

c) Sea m un número real arbitrario pero fijo, demuestre que el inverso aditivo de m es único.

d) Sea m un número real distinto de cero, demuestre que el inverso multiplicativo de m es único.

e) Demuestre que $-0 = 0$.

f) Sea m un número real arbitrario pero fijo, demuestre que $m \cdot 0 = 0$.

g) Si m y n son números reales tales que $m \cdot n = 0$, demuestre que $m = 0$ o $n = 0$.

h) Sea m un número real arbitrario pero fijo, demuestre que: $(-1) \cdot m = -m$.

i) Sean m y n números reales, demuestre que: $(-m) \cdot n = -(m \cdot n)$.

j) Sea m un número real arbitrario pero fijo, demuestre que: $-(-m) = m$.

k) Sean m y n números reales, demuestre que: $(-m) \cdot (-n) = m \cdot n$.

l) Sea m un número real arbitrario pero fijo, demuestre que: $(-1) \cdot (-m) = m$.

m) Sea m un número real distinto de cero; demuestre que: $\left(m^{-1}\right)^{-1} = m$.

n) Sean m y n números reales distintos de cero, demuestre que: $(m \cdot n)^{-1} = m^{-1} \cdot n^{-1}$.

Demostración:

a) Supongamos que existen 0 y $\tilde{0}$ números reales tales que $m + 0 = m$ y $m + \tilde{0} = m$. Notemos que:

$$
\begin{aligned}
0 &= m + (-m) && \text{Por A4} \\
&= \left(m + \tilde{0}\right) + (-m) && \text{Por hipótesis} \\
&= \left(\tilde{0} + m\right) + (-m) && \text{Por A1} \\
&= \tilde{0} + \left(m + (-m)\right) && \text{Por A2} \\
&= \tilde{0} + 0 && \text{Por A4} \\
&= \tilde{0} && \text{Por A3}
\end{aligned}
$$

$\square$

b) Supongamos que existen 1 y $\tilde{1}$ números reales tales que$m \cdot 1 = m$ y $m \cdot \tilde{1} = m$. Notemos que:

$$
\begin{aligned}
1 &= m \cdot m^{-1} && \text{Por A8} \\
&= \left(m \cdot \tilde{1}\right) \cdot m^{-1} && \text{Por hipótesis} \\
&= \left(\tilde{1} \cdot m\right) \cdot m^{-1} && \text{Por A5} \\
&= \tilde{1} \cdot \left(m \cdot m^{-1}\right) && \text{Por A6} \\
&= \tilde{1} \cdot 1 && \text{Por A8} \\
&= \tilde{1} && \text{Por A7}
\end{aligned}
$$

$\square$

c) Supongamos que existen $-m$ y $-\tilde{m}$ números reales tales que $m+(-m)=0$ y $m+(-\tilde{m})=0$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
-m &= -m+0 && \text{Por A3}\\
&= 0+(-m) && \text{Por A1}\\
&= \big(m+(-\tilde{m})\big)+(-m) && \text{Por (2)}\\
&= \big((-\tilde{m})+m\big)+(-m) && \text{Por A1}\\
&= (-\tilde{m})+\big(m+(-m)\big) && \text{Por A2}\\
&= (-\tilde{m})+0 && \text{Por A8}\\
&= -\tilde{m} && \text{Por A3}
\end{aligned}$$

□

d) Supongamos que existen m^{-1} y $\tilde{m}^{-1}$ números reales, distintos de cero, tales que $m\cdot m^{-1}=1$ y $m\cdot\tilde{m}^{-1}=1$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
m^{-1} &= m^{-1}\cdot 1 && \text{Por A7}\\
&= m^{-1}\cdot\big(m\cdot\tilde{m}^{-1}\big) && \text{Por hipótesis}\\
&= \big(m^{-1}\cdot m\big)\cdot\tilde{m}^{-1} && \text{Por A6}\\
&= \big(m\cdot m^{-1}\big)\cdot\tilde{m}^{-1} && \text{Por A5}\\
&= 1\cdot\tilde{m}^{-1} && \text{Por hipótesis}\\
&= \tilde{m}^{-1}\cdot 1 && \text{Por A5}\\
&= \tilde{m}^{-1} && \text{Por A7}
\end{aligned}$$

□

e) Por A3 se verifica que $0+0=0$, y por A4 que $0+(-0)=0$. Además, por (c) de LE1, tenemos que el inverso aditivo de cada número real es único, entonces debe ser el caso que $-0=0$. □

f) Notemos que:

$$\begin{aligned}
m\cdot 0 &= m\cdot 0+0 && \text{Por A3}\\
&= m\cdot 0+\big(m+(-m)\big) && \text{Por A4}\\
&= m\cdot 0+\big(m\cdot 1+(-m)\big) && \text{Por A7}\\
&= (m\cdot 0+m\cdot 1)+(-m) && \text{Por A2}\\
&= \big(m\cdot(0+1)\big)+(-m) && \text{Por A9}\\
&= m\cdot 1+(-m) && \text{Por A3}\\
&= m+(-m) && \text{Por A7}\\
&= 0 && \text{Por A4}
\end{aligned}$$

□

g) Supongamos que m es distinto de 0. Notemos que:

$$\begin{aligned}
n &= n\cdot 1 && \text{Por A7}\\
&= n\cdot\big(m\cdot m^{-1}\big) && \text{Por A8}\\
&= (n\cdot m)\cdot m^{-1} && \text{Por A6}\\
&= (m\cdot n)\cdot m^{-1} && \text{Por A5}\\
&= 0\cdot m^{-1} && \text{Por hipótesis}\\
&= m^{-1}\cdot 0 && \text{Por A5}\\
&= 0 && \text{Por (f) de LE1}
\end{aligned}$$

□

h) Notemos que:

$$\begin{aligned}
-m &= -m + 0 && \text{Por A3}\\
&= -m + m \cdot 0 && \text{Por (f) de LE1}\\
&= -m + m \cdot \big(1 + (-1)\big) && \text{Por A4}\\
&= -m + \big(m \cdot 1 + m \cdot (-1)\big) && \text{Por A9}\\
&= -m + \big(m + m \cdot (-1)\big) && \text{Por A8}\\
&= (-m + m) + m \cdot (-1) && \text{Por A2}\\
&= m + (-m) + m \cdot (-1) && \text{Por A1}\\
&= 0 + m \cdot (-1) && \text{Por A4}\\
&= m \cdot (-1) + 0 && \text{Por A1}\\
&= m \cdot (-1) && \text{Por A3}\\
&= (-1) \cdot m && \text{Por A5}
\end{aligned}$$

□

i) Notemos que:

$$\begin{aligned}
(-m) \cdot n &= \big((-1) \cdot m\big) \cdot n && \text{Por (h) de LE1}\\
&= (-1) \cdot (m \cdot n) && \text{Por A6}\\
&= -(m \cdot n) && \text{Por (h) de LE1}
\end{aligned}$$

□

j) Sea m un número real arbitrario pero fijo. Por A4 se verifica que $m + (-m) = 0$, y por A1 tenemos que $(-m) + m = 0$, de esta igualdad se sigue que m es inverso aditivo de $(-m)$. Por A4 se verifica que $(-m) + \big(-(-m)\big) = 0$, y por (c) de LE1, sabemos que el inverso aditivo de cada número real es único. Entonces, debe ser el caso que $-(-m) = m$. □

k) Notemos que:

$$\begin{aligned}
(-m) \cdot (-n) &= (-m) \cdot \big((-1) \cdot n\big) && \text{Por (h) de LE1}\\
&= \big((-m) \cdot (-1)\big) \cdot n && \text{Por A6}\\
&= \big((-1) \cdot (-m)\big) \cdot n && \text{Por A5}\\
&= -(-m) \cdot n && \text{Por (h) de LE1}\\
&= m \cdot n && \text{Por (j) de LE1}
\end{aligned}$$

□

l) Notemos que:

$$\begin{aligned}
(-1) \cdot (-m) &= 1 \cdot m && \text{Por (k) de LE1}\\
&= m \cdot 1 && \text{Por A5}\\
&= m && \text{Por A7}
\end{aligned}$$

m) Sea m un número real distinto de cero. Por A8 sabemos que $m \cdot m^{-1} = 1$, y por A5 tenemos que $m^{-1} \cdot m = 1$, de esta igualdad se sigue que m es inverso multiplicativo de m^{-1}. Por A8 se verifica que $m^{-1} \cdot \big(m^{-1}\big)^{-1} = 1$, y por (d) de LE1, sabemos que el inverso multiplicativo de cada número real es único. Entonces, debe ser el caso que $\big(m^{-1}\big)^{-1} = m$. □

n) Sean m y n números reales distintos de cero. Notemos que:

$$\begin{aligned}
(m\cdot n)\cdot\left(m^{-1}\cdot n^{-1}\right) &= \left((m\cdot n)\cdot m^{-1}\right)\cdot n^{-1} && \text{Por A6}\\
&= \left((n\cdot m)\cdot m^{-1}\right)\cdot n^{-1} && \text{Por A5}\\
&= \left(n\cdot\left(m\cdot m^{-1}\right)\right)\cdot n^{-1} && \text{Por A6}\\
&= (n\cdot 1)\cdot n^{-1} && \text{Por A8}\\
&= n\cdot n^{-1} && \text{Por A7}\\
&= 1 && \text{Por A8}
\end{aligned}$$

De la igualdad anterior, sigue que $\left(m^{-1}\cdot n^{-1}\right)$ es inverso multiplicativo de $(m\cdot n)$. Además, por (d) de LE1, sabemos que el inverso multiplicativo de cada número real es único. Entonces, debe ser el caso que $\left(m^{-1}\cdot n^{-1}\right) = (m\cdot n)^{-1}$ □

Notación:

- Si m y n son números reales, representaremos con el símbolo $m-n$ a la suma: $m+(-n)$.
- Si m y n son números reales y n es distinto de cero, representaremos con el símbolo $\frac{m}{n}$ al número $m\cdot n^{-1}$.
- Si m_1, m_2 y m_3 son números reales, representaremos con el símbolo $m_1+m_2+m_3$ a cualquiera de las sumas $m_1+(m_2+m_3)$ o $(m_1+m_2)+m_3$.

Lista de ejercicios 2 (LE2)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) $a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$, si $b\neq 0$

b) $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$, si $b,c\neq 0$

c) $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$, si $b,d\neq 0$

d) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, si $b,d\neq 0$

e) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$, si $b,c,d\neq 0$

Demostración

a) Notemos que:

$$\begin{aligned}
a\cdot\frac{c}{b} &= a\cdot\left(c\cdot b^{-1}\right) && \text{Por notación}\\
&= (a\cdot c)\cdot b^{-1} && \text{Por A6}\\
&= \frac{ac}{b} && \text{Por notación}
\end{aligned}$$

□

b) Notemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{ac}{bc} &= a \cdot c \cdot (bc)^{-1} && \text{Por notación} \\
&= a \cdot c \cdot b^{-1} \cdot c^{-1} && \text{Por (m) de LE1} \\
&= a \cdot b^{-1} \cdot c \cdot c^{-1} && \text{Por A5} \\
&= a \cdot b^{-1} \cdot 1 && \text{Por A8} \\
&= a \cdot b^{-1} && \text{Por A7} \\
&= \frac{a}{b} && \text{Por notación}
\end{aligned}$$

$\square$

c) Notemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= a \cdot b^{-1} \pm c \cdot d^{-1} && \text{Por notación} \\
&= (a \cdot 1) \cdot b^{-1} \pm (c \cdot 1) \cdot d^{-1} && \text{Por A7} \\
&= \Big(a \cdot \big(d \cdot d^{-1}\big)\Big) \cdot b^{-1} \pm \Big(c \cdot \big(b \cdot b^{-1}\big)\Big) \cdot d^{-1} && \text{Por A8} \\
&= \Big((a \cdot d) \cdot d^{-1}\Big) \cdot b^{-1} \pm \Big((c \cdot b) \cdot b^{-1}\Big) \cdot d^{-1} && \text{Por A6} \\
&= (a \cdot d) \cdot \big(d^{-1} \cdot b^{-1}\big) \pm (c \cdot b) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) && \text{Por A6} \\
&= (a \cdot d) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) \pm (c \cdot b) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) && \text{Por A5} \\
&= \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) \cdot (a \cdot d \pm c \cdot b) && \text{Por A9} \\
&= (a \cdot d \pm c \cdot b) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) && \text{Por A5} \\
&= (a \cdot d \pm c \cdot b) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Por (m) de LE1} \\
&= (a \cdot d \pm b \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Por A5} \\
&= \frac{ad \pm bc}{bd} && \text{Por notación}
\end{aligned}$$

$\square$

d) Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \big(a \cdot b^{-1}\big) \cdot \big(c \cdot d^{-1}\big) && \text{Por notación} \\
&= a \cdot \Big(b^{-1} \cdot \big(c \cdot d^{-1}\big)\Big) && \text{Por A6} \\
&= a \cdot \Big(c \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big)\Big) && \text{Por A5} \\
&= (a \cdot c) \cdot \big(b^{-1} \cdot d^{-1}\big) && \text{Por A6} \\
&= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} && \text{Por (m) de LE1} \\
&= \frac{ac}{bd} && \text{Por notación}
\end{aligned}$$

$\square$

e) Notemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{\left(a \cdot b^{-1}\right)}{\left(c \cdot d^{-1}\right)} && \text{Por notación} \\
&= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right)^{-1} && \text{Por notación} \\
&= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c^{-1} \cdot \left(d^{-1}\right)^{-1}\right) && \text{Por (m) de LE1} \\
&= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c^{-1} \cdot d\right) && \text{Por (l) de LE1} \\
&= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(d \cdot c^{-1}\right) && \text{Por A5} \\
&= \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} && \text{Por notación} \\
&= \frac{ad}{bc} && \text{Por (d) de LE2}
\end{aligned}
$$

$\square$

Axiomas de orden del conjunto de los números reales

Existe un subconjunto del conjunto de los números reales llamado conjunto de los números reales positivos, denotado con el símbolo $\mathbb{R}^+$. A los elementos de este conjunto los llamaremos números reales positivos.
El conjunto $\mathbb{R}^+$ satisface los siguientes axiomas:

O1) Si $m, n \in \mathbb{R}^+$, entonces $m + n \in \mathbb{R}^+$.

O2) Si $m, n \in \mathbb{R}^+$, entonces $m \cdot n \in \mathbb{R}^+$.

O3) Para cada número real m se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:

- **i)** $m \in \mathbb{R}^+$.
- **ii)** $m = 0$.
- **iii)** $-m \in \mathbb{R}^+$.

Definición: Sean a y b números reales, decimos que:

1. a es menor que b o que b es mayor que a y escribimos $a < b$ o $b > a$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$.
2. a es menor que o igual que b o que b es mayor o igual que a, y escribimos $a \leq b$ o $b \geq a$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$ o $a = b$.

Notación: Sean a, b y c números reales, utilizaremos la notación $a < b < c$ para indicar que $a < b$ y $b < c$.

Lista de Ejercicios 3 (LE3)

Sean a, b, c y d números reales, demuestre lo siguiente:

a) $1 \in \mathbb{R}^+$.

b) $a \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $a > 0$.

c) $-1 < 0$.

d) Si $a < b$ y $c \leq d$, entonces $a + c < b + d$.

e) Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

f) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

g) $a \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $-a < 0$.

h) $a < b$ si y solo si $-a > -b$.

i) Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$.

j) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

k) Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$.

l) Si $a < b$ y $ab > 0$, entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

m) Si $a < 1$ y $0 < b$, entonces $ab < b$.

n) Si $a < b$ demuestre que $a < \frac{a+b}{2} < b$.

o) $a^2 \geq 0$.

p) Si $0 \leq a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

q) Si $a \leq b + \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.

Demostración

a) Supongamos que $1 \notin \mathbb{R}^+$. Por (A7), (ii) de (O3) no se cumple. Si $-1 \in \mathbb{R}^+$, por (O2) se verifica que $-1 \cdot -1 \in \mathbb{R}^+$, lo cual por (h) de LE1 implica que $-(-1) \in \mathbb{R}^+$, pero esto contradice a (iii) de (O3). Por tanto, 1 es un número real positivo.

b)
- **i)** Supongamos que $a \in \mathbb{R}^+$. Por A3 sabemos que $a = a + 0$, y por (e) de LE1 sigue que $a = a - 0$, entonces $a - 0 \in \mathbb{R}^+$, lo que por definición implica que $a > 0$.
- **ii)** Supongamos que $a > 0$. Por definición, $a - 0 \in \mathbb{R}^+$, y por (e) de LE1 sigue que $a - 0 = a + 0$, lo que por A3 implica que $a + 0 = a$. Así $a \in \mathbb{R}^+$.

$\square$

c) Supongamos que $-1 \geq 0$

- **i)** Si $-1 = 0$. Notemos que:

$$
\begin{aligned}
0 &= 1 - 1 && \text{Por A4} \\
&= 1 + 0 && \text{Por hipótesis} \\
&= 1 && \text{Por A3}
\end{aligned}
$$

Pero la igualdad anterior contradice a A7.

ii) Si $-1 > 0$, por (b) de LE3 tenemos que $-1 \in \mathbb{R}^+$, pero esto contradice a O3, ya que por (a) de LE3 sabemos que $1 \in \mathbb{R}^+$.

Por tanto $-1 < 0$ $\square$

d) Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$.

i) Si $c < d$, entonces $d - c \in \mathbb{R}^+$. Por (O1) se verifica que $(b-a) + (d-c) \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$
\begin{aligned}
b - a + d - c &= b + d - a - c && \text{Por A1} \\
&= b + d + (-a) + (-c) && \text{Por notación} \\
&= b + d + (-1)a + (-1)c && \text{Por (h) de LE1} \\
&= b + d + (-1)(a + c) && \text{Por A9} \\
&= b + d + b - (a + c)\big) && \text{Por (h) de LE1} \\
&= b + d - (a + c) && \text{Por notación}
\end{aligned}
$$

De este modo, $b + d - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + d$.

ii) Si $c = d$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
b - a &= b - a + 0 && \text{Por A3} \\
&= b - a + c - c && \text{Por A4} \\
&= b + c - a - c && \text{Por A1} \\
&= b + c + (-a) + (-c) && \text{Por notación} \\
&= b + c + (-1)a + (-1)c && \text{Por (h) de LE1} \\
&= b + c + (-1)(a + c) && \text{Por A9} \\
&= b + c - (a + c) && \text{Por(h) de LE1} \\
&= b + d - (a + c) && \text{Por hipótesis}
\end{aligned}
$$

De este modo, $b + d - (a + c) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a + c < b + d$.

En cualquier caso, $a + c < b + d$. $\square$

e) Por definición $b-a \in \mathbb{R}^+$, y por (b) de LE3 $c \in \mathbb{R}^+$. Luego, por O2 se verifica que $c(b-a) \in \mathbb{R}^+$. Por A9 sigue que $c(b-a) = cb - ca$ y por A5 tenemos que $cb - ca = bc - ac$. De este modo, $bc - ac \in \mathbb{R}^+$, es decir, $ac < bc$. $\square$

f) Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $0 - c \in \mathbb{R}^+$, por A3 sigue que $-c \in \mathbb{R}^+$. Luego, por O2 $-c(b-a) \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$
\begin{aligned}
-c(b - a) &= -c\Big(b + (-a)\Big) && \text{Por notación} \\
&= (-c) \cdot b + (-c) \cdot (-a) && \text{Por A9} \\
&= (-c) \cdot b + c \cdot a && \text{Por (k) de LE1} \\
&= -(c \cdot b) + c \cdot a && \text{Por (i) de LE1} \\
&= ca - (cb) && \text{Por A1} \\
&= ac - (bc) && \text{Por A5}
\end{aligned}
$$

Entonces $ac - bc \in \mathbb{R}^+$, es decir, $ac > bc$. $\square$

g) **i)** Supongamos que $a \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$
\begin{aligned}
a &> 0 && \text{Por (b) de LE3} \\
a \cdot (-1) &< 0 \cdot (-1) && \text{Por (c) y (f) de LE3} \\
-a &< 0 && \text{Por (h) y (f) de LE1}
\end{aligned}
$$

ii) Supongamos que $-a < 0$. Notemos que:

$$
\begin{aligned}
-a \cdot (-1) &> 0 \cdot (-1) && \text{Por (b) y (f) de LE3} \\
a &> 0 && \text{Por (l) y (f) de LE1}
\end{aligned}
$$

Entonces, $a \in \mathbb{R}^+$, por (b) de LE3.

$\square$

h) Notemos que:

i) Si $a < b$, por (b) y (f) de LE3 tenemos que $a \cdot (-1) > b \cdot (-1)$, y por (h) de LE1 obtenemos que $-a > -b$.

ii) Si $-a > -b$, por por (b) y (f) de LE3 tenemos que $-a \cdot (-1) < -b \cdot (-1)$, y por (k) de LE1 obtenemos que $a < b$.

$\square$

i) Sea $a > 0$. Supongamos que $\frac{1}{a} \leq 0$. Notemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a} \cdot a &\leq 0 \cdot a && \text{Por (e) de LE3} \\
1 &\leq 0 && \text{Por A8 y (f) de LE1}
\end{aligned}
$$

Pero por (a) de LE3 y (b) de LE3 tenemos que $1 > 0$. Por tanto, $\frac{1}{a} > 0$. $\square$

j) Por definición $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $c - b \in \mathbb{R}^+$. Por O1 $(b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+$. Notemos que:

$$
\begin{aligned}
(b - a) + (c - b) &= b - a + c - b && \text{Por notación} \\
&= b - a - b + c && \text{Por A1} \\
&= b - b - a + c && \text{Por A1} \\
&= 0 - a + c && \text{Por A4} \\
&= -a + c && \text{Por A3} \\
&= c - a && \text{Por A1}
\end{aligned}
$$

Entonces $c - a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < c$. $\square$

k) **i)** Si $a = 0$ o $c = 0$, por (g) de LE1 se verifica que $ac = 0$. Luego, por (j) de LE3, se verifica que $0 < b$ y $0 < d$. Así, $ac < bd$.

ii) Si $a > 0$ y $c > 0$. Por hipótesis, $a < b$, y por (e) de LE3, sigue que $ac < bc$. También, tenemos que $c < d$, y por (e) de LE3, sigue que $bc < db$. Finalmente, por (j) de LE3, se verifica que $ac < bd$.

$\square$

l) Notemos que:

$$
\begin{array}{ll}
a < b & \text{Por hipótesis} \\
a - a < b - a & \text{Por (d) de LE3} \\
0 < b - a & \text{Por A4} \\
0 \cdot \dfrac{1}{ab} < (b-a) \cdot \dfrac{1}{ab} & \text{Por (h) y (e) de LE3} \\
0 < \dfrac{b-a}{ab} & \text{Por (f) de LE1 y (a) de LE2} \\
0 < \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} & \text{Por (c) de LE2} \\
\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a} & \text{Por (d) de LE3}
\end{array}
$$

$\square$

m) Dado que $0 < b$, por (b) de LE3 se cumple que $b \in \mathbb{R}^+$, y por definición $1 - a \in \mathbb{R}^+$. Por O2 se verifica que $b(1-a) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $b - ab \in \mathbb{R}^+$, lo cual implica que $ab < b$. $\square$

n) Por (a) de LE3 sabemos que $1 \in \mathbb{R}^+$, y por O1 se cumple que $1 + 1 \in \mathbb{R}^+$, es decir $2 \in \mathbb{R}^+$. Por (b) de LE3 se verifica que $0 < 2$ y por (i) de LE3 tenemos que $0 < \frac{1}{2}$. Notemos que:

$$
\begin{array}{ll}
a < b & \text{Por hipótesis} \\
a + a < b + a & \text{Por (d) de LE3} \\
2a < b + a & \text{Por definición} \\
2a \cdot \dfrac{1}{2} < (b+a) \cdot \dfrac{1}{2} & \text{Por (e) de LE3} \\
\dfrac{2a}{2} < \dfrac{b+a}{2} & \text{Por (a) de LE2} \\
a < \dfrac{b+a}{2} & \text{Por A8}
\end{array}
$$

Similarmente,

$$
\begin{array}{ll}
a < b & \text{Por hipótesis} \\
a + b < b + b & \text{Por (d) de LE3} \\
a + b < 2b & \text{Por definición} \\
(a+b) \cdot \dfrac{1}{2} < 2b \cdot \dfrac{1}{2} & \text{Por (e) de LE3} \\
\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{2b}{2} & \text{Por (a) de LE2} \\
\dfrac{a+b}{2} < b & \text{Por A8}
\end{array}
$$

Finalmente, por notación, $a < \frac{a+b}{2} < b$. $\square$

o) Si $0 \leq a$, $0 \cdot a \leq a \cdot a$, osea, $0 \leq a^2$. Si $a < 0$, $0 \cdot a < a \cdot a$, osea, $0 \leq a^2$. En cualquier caso $a \geq 0$.

p) Supongamos que $0 < a$, sigue que $0 < \frac{a}{2} < a$. Elegimos $\varepsilon = \frac{a}{2}$, entonces $\varepsilon < a$, pero esto contradice nuestra hipótesis de que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Por tanto, $a = 0$. $\square$

q) Sean a y b números reales tales que $a \leq b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Supongamos que $a > b$. Luego, $a - b > 0$. Notemos que $(a-b) \cdot \frac{1}{2} > 0 \cdot \frac{1}{2}$, es decir $\frac{(a-b)}{2} > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{(a-b)}{2}$, sigue que $a = 2\varepsilon + b$. Además, $2\varepsilon > \varepsilon$, de donde obtenemos $2\varepsilon + b > \varepsilon + b$. De este modo, $a > b + \varepsilon$, pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto, $a \leq b$. $\square$

Definición: Sea a un número real, definimos el valor absoluto de a, denotado por $|a|$ como sigue:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Observación. $|a| \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Lista de Ejercicios 4 (LE4)

Sean a, b, c números reales, demuestre lo siguiente:

a) $|a| \geq \pm a$.

b) $|ab| = |a||b|$.

c) $|a| = |-a|$.

d) $|a+b| \leq |a| + |b|$.

e) Si $b \neq 0$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

f) $|a| < b$ si y solo si $-c < b < c$.

g) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

h) $|a|^2 = a^2$.

Demostración

a) **i)** Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$, así, $|a| \geq a$. Luego, $-a \leq 0$, de donde sigue que $a \geq -a$. Finalmente, $|a| \geq -a$.

ii) Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$, así, $|a| \geq -a$. Luego, $-a > 0$, de donde sigue que $-a > a$. Finalmente, $|a| \geq a$.

En cualquier caso, $|a| \geq \pm a$.

b) **i)** Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. De este modo, $|ab| = |a||b|$.

ii) Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab < 0$ por lo que $|ab| = -ab$. De este modo, $|ab| = |a||b|$.

iii) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Luego, $ab > 0$ por lo que $|ab| = ab$. De este modo, $|ab| = |a||b|$.

c) **i)** Si $a \geq 0$, entonces $|a| = a$. Luego, $-a \leq 0$. Si $-a < 0$, $|-a| = a$ y si $-a = 0$, $|-a| = a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

ii) Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$. Luego, $-a > 0$ por lo que $|-a| = -a$. De este modo, $|a| = |-a|$.

d) **i)** Si $0 \leq a+b$, entonces $|a+b| = a+b$. Además, $a \leq |a|$ y $b \leq |b|$. Luego, $a+b \leq |a|+|b|$. Así, $|a+b| \leq |a|+|b|$.

ii) Si $0 > a+b$, entonces $|a+b| = -a-b$. Además, $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b|$. Luego, $-a-b \leq |a|+|b|$. Así, $|a+b| \leq |a|+|b|$.

e) **i)** Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \geq 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. De este modo, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

ii) Si $a \geq 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} \leq 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. De este modo, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iii) Si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = b$. Además, $\frac{1}{b} > 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} < 0$, por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}$. De este modo, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

iv) Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$. Además, $\frac{1}{b} < 0$, de donde sigue que $\frac{a}{b} > 0$ por lo que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}$. De este modo, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

f) **i)** Supongamos que $|b| < c$. Por (a) de LE4, $\pm b \leq |b|$, de donde sigue que $-b < c$ y $b < c$. Luego, $-c < b$. De este modo, $-c < b < c$.

ii) Supongamos que $-c < b < c$. Luego,

1) Si $b \geq 0$, entonces $|b| = b$. Por lo que $|b| < c$.

2) Si $b < 0$, entonces $|b| = -b$. Por hipótesis, $-c < b$, por lo que $-b < c$. Así $|b| < c$.

g) Por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |(a-b)+b| &\leq |a-b| + |b| \\ |a| &\leq |a-b| + |b| \\ |a| - |b| &\leq |a-b| \qquad (1) \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} |(b-a)+a| &\leq |b-a| + |a| \\ |b| &\leq |b-a| + |a| \\ |b| - |a| &\leq |b-a| \\ -|b-a| &\leq |a| - |b| \qquad (2) \end{aligned}$$

Luego, aplicando (f) de LE4 en (1) y (2), $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

h) Por (o) de LE3, $a^2 \geq 0$, por lo que

$$\begin{aligned} a^2 &= |a^2| \\ &= |a \cdot a| \\ &= |a| \cdot |a| \qquad \text{Por (b) de LE4} \\ &= |a|^2 \end{aligned}$$

□

Definición. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. El vecindario-ε de a es el conjunto $V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$.

Lista de Ejercicios 5 (LE5)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre lo siguiente:

a) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ para toda $\varepsilon > 0$, entonces $x = a$.

b) Sea $U := \{x : 0 < x < 1\}$. Si $a \in U$, sea ε el menor de los números a y $1 - a$. Demuestre que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$.

c) Demuestre que si $a \neq b$, entonces existen $U_\varepsilon(a)$ y $V_\varepsilon(b)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Demostración.

a) Si $x \in V_\varepsilon(a)$ tenemos que $|x-a| < \varepsilon$. Además, $0 \leq |x-a|$, por definición. Así, $0 \leq |x-a| < \varepsilon$. Como esta desigualdad se cumple para toda $\varepsilon > 0$, por (p) de LE3, sigue que $|x-a| = 0$. Si $x - a \geq 0$, $|x-a| = x - a$ y $x - a = 0$. Si $x - a < 0$, $|x - a| = -x + a$ y $-x + a = 0$. En cualquier caso, $x = a$.

b) **i)** Si $a > 1 - a$, tenememos $\varepsilon = 1 - a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < 1 - a$. De (f) de LE4 sigue que $a - 1 < y - a < 1 - a$ (*). Tomando el lado derecho de (*) obtenemos $y < 1$. Luego, de la hipótesis sigue que $2a > 1$, osea $2a - 1 > 0$. Del lado izquierdo de la desigualdad (*), tenemos $2 - 1 < y$, por lo que $0 < y$.

ii) Si $1 - a > a$, tenemos $\varepsilon = a$. Sea $y \in V_\varepsilon(a)$, entonces $|y - a| < a$. De (f) de LE4 sigue que $-a < y - a < a$ (**). Tomando el lado derecho de (**) tenemos $y < 2a$. Luego, de la hipótesis sigue que $1 > 2a$, por esto $y < 1$. Finalmente, tomando el lado izquierdo de (**) obtenemos $0 < y$.

En cualquier caso, $0 < y < 1$, lo que implica que $V_\varepsilon(a) \subseteq U$.

c) Supongamos que $U \cap V \neq \emptyset$.

Definición: Sea A un subconjunto del conjunto de los números reales, decimos que A es un conjunto inductivo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $1 \in A$.

2. Si $n \in A$ entonces se verifica que $n + 1 \in A$.

Lista de Ejercicios 6 (LE6)

1) ¿El conjunto de los números reales es un conjunto inductivo?

2) ¿$\mathbb{R}^+$ es un conjunto inductivo?

3) Sea $A \coloneqq \{B \subseteq B : \text{B es un conjunto inductivo}\}$. Demuestre que $A \neq \emptyset$ y que $C = \bigcap B$ es un conjunto inductivo.

Respuesta

1) Sí, ya que $1 \in \mathbb{R}$, y si n es un número real, $n + 1 \in \mathbb{R}$ por la cerradura de la suma en $\mathbb{R}$.

2) Sí, pues $1 \in \mathbb{R}^+$ y y si n es un número real positivo, $n + 1 \in \mathbb{R}^+$ por el aximoa de orden 1.

3) Claramente $A \neq \emptyset$, pues $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \subseteq A$.

Luego, por hipótesis, $\forall B \in A$ tenemos que $B \subseteq \mathbb{R}$ por lo que $C \subseteq \mathbb{R}$. Además, $\forall B \in A$, se verifica que $1 \in B$. Consecuentemente, $1 \in C$. Por otra parte, si $n \in B$ para todo $B \in A$, tendremos que $n + 1 \in B$, por lo que $n + 1 \in C$. Por tanto, C es un conjunto inductivo.

Definición. Al conjunto C de (3) de LE6 lo llamaremos conjunto de los números naturales y lo denotaremos con el símbolo $\mathbb{N}$.

Lista de ejercicios 7 (LE7)

Demuestre lo siguiente:

a) La suma de números naturales es un número natural.

b) La multiplicación de números naturales es un número natural.

c) Demuestre que $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

d) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n - 1 \in \mathbb{N}$.

e) Sean m y n números naturales tales que $m > n$, demuestre que $m - n \in \mathbb{N}$.

f) Sea $x \in \mathbb{R}^+$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $x + n \in \mathbb{N}$, desmuestre que $x \in \mathbb{N}$.

g) Sea $x \in \mathbb{R}$, si $n \in \mathbb{N}$ y $n - 1 < x < n$, demuestre que x no es un número natural.

Demostración.

a) Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$ y $m + 1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir, $A \neq \emptyset$.

Por otra parte, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m + n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n+1 \in \mathbb{N}$ y $(m+n)+1 \in \mathbb{N}$, luego, por la asociatividad de la suma, $m+(n+1) \in \mathbb{N}$. Por la condición de A, se cumple que $n + 1 \in A$, por lo que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la suma de números naturales es un número natural. $\square$

b) Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Definimos $A = \{n \in \mathbb{N} : m \cdot n \in \mathbb{N}\}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$. Adenás, $m \cdot 1 \in \mathbb{N}$, entonces $1 \in A$, es decir $A \neq \emptyset$.

Luego, si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Por (a) de LE7 se verifica que $(m \cdot n) + m \in \mathbb{N}$. Notemos que $(m \cdot n) + m = m \cdot (n + 1)$, osea, $m \cdot (n + 1) \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, tenemos que $n + 1 \in \mathbb{N}$. De este modo, $n + 1 \in A$. Lo que implica que A es un conjunto inductivo. De esto se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. En otras palabras, la multiplicación de números naturales es un número natural. $\square$

c) Sea $A \coloneqq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$. Como $1 \in \mathbb{N}$ y $1 \geq 1$, tenemos que $1 \in A$.

Si $n \in A$ debe ser el caso que $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq n$. Además, por (a) de LE7, $n + 1 \in \mathbb{N}$. Luego, notemos que $0 \leq 1$ de donde sigue que $n \leq n + 1$. Por transitividad, $1 \leq n + 1$, por lo que $n + 1 \in A$, lo que implica que A es un conjunto inductivo, es decir, $\mathbb{N} \subseteq A$ y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = N$. En otras palabras, $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

d) Sea $A \coloneqq \{\, n \in \mathbb{N} \mid n > 1, n - 1 \in \mathbb{N} \,\}$. Si $n \in A$ debe ser porque $n > 1$ y $n - 1 \in \mathbb{N}$. Como $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, se verifica $n + 1 \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$\begin{aligned}(n + 1) - 1 &= n + (1 - 1)\\ &= n + 0\\ &= n\end{aligned}$$

Entonces, $(n + 1) - 1 \in \mathbb{N}$. También, $n > 1$ implica que $n > 0$ y $n + 1 > 1$, por lo que $n + 1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. Por tanto $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ se verifica que $n - 1 \in \mathbb{N}$. $\square$

e) Sea $A := \{ n \in \mathbb{N} \mid n < m, m - n \in \mathbb{N} \text{ con } m \in \mathbb{N} \}$. Por definición, $1 \in \mathbb{N}$ y $1 + 1 \in \mathbb{N}$. Por (a) y (b) de LE3, $1 > 0$, de donde sigue que $1 + 1 > 1$. Por (d) de LE7, se verifica que $(1 + 1) - 1 \in \mathbb{N}$, por lo que $1 \in A$.

Si $n \in A$ debe ser porque $m - n \in \mathbb{N}$ y $m > n$, de donde obtenemos $m + 1 > n + 1$. Como $m, n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $n + 1 \in \mathbb{N}$ y $m + 1 \in \mathbb{N}$. Notemos que $m + 1 - (n + 1) = m - n$, por lo que $n + 1 \in A$. De este modo, A es un conjunto inductivo, con lo que $\mathbb{N} \subseteq A$, y como $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}$. $\square$

f) Por (b) de LE3, $x > 0$, por lo que $x + n > n$. Por hipótesis, $x + n, n \in \mathbb{N}$, y por (e) de LE7 $(x + n) - n \in \mathbb{N}$, osea, $x \in \mathbb{N}$. $\square$

g) Supongamos que $x \in \mathbb{N}$. Por hipótesis tenemos que $x < n$ y $x > n - 1$. Notemos que

$$\begin{aligned} x &< n \\ x - n &< n - n \\ x - n &< 0 \\ x - n + 1 &< 1 \end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned} n - 1 &< x \\ n - 1 - (n - 1) &< x - (n - 1) \\ 0 &< x - n + 1 \\ n &< x + 1 \end{aligned}$$

Como $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, $x + 1 \in \mathbb{N}$, y como $x + 1 > n$, con $n \in \mathbb{N}$, por (e) de LE7, $x + 1 - n \in \mathbb{N}$, y por (c) de LE7, $x + 1 - n \geq 1$. Pero tenemos que $x - n + 1 < 1$, osea $1 \leq x + 1 - n < 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto, x no es un número natural. $\square$

Principio del buen orden

Todo subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales tiene elemento mínimo. Esto significa que si $A \subseteq \mathbb{N}$ y $A \neq \emptyset$, entonces $\exists c \in A$ tal que $c \leq b, \forall b \in A$.

Demostración

Supongamos que $A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$ y A no tiene elemento mínimo, es decir, suponemos que $\forall a_0 \in A, \exists a \in A$ tal que $a_0 > a$.

Definimos el conjunto $S := \{ n \in \mathbb{N} : n < a, \forall a \in A \}$. Si $1 \notin S$, tendríamos que $\exists a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq 1$, y como $a_0 \in \mathbb{N}$, sigue que $1 \leq a_0$, osea $1 \leq a_0 \leq 1$, y así $a_0 = 1$, pero $1 \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia, $1 \leq a, \forall a \in A$, lo que contradiría nuestro supuesto inicial. Entonces, debe ser el caso que $1 \in S$.

Si $m \in S$, tendríamos que $m < a, \forall a \in A$. Luego, si $m + 1 \notin S$, entonces $\exists a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq m + 1$, con lo que obtenemos que $m < a_0 \leq m + 1$, y por (g) de LE7, no puede ser el caso que $m < a_0 < m$, entonces $a_0 = m + 1$, de lo que se concluye que $m + 1 \leq a, \forall a \in A$, pero esto contradice nuestro supuesto inicial, por lo que $m + 1 \in S$. De este modo, S es un conjunto inductivo, y, por definición, $\mathbb{N} \subseteq S$ y $S \subseteq \mathbb{N}$, lo que implica que $S = \mathbb{N}$. Dado que $A \neq \emptyset$, entonces $\exists a_0 \in A$ tal que $a_0 > n, \forall n \in S$, y como $A \subseteq S$, podemos elegir $n = a_0$, pero de esto obtenemos que $a_0 < a_0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq \emptyset$, se cumple que A tiene elemento mínimo. $\square$

Defninción.

- Al conjunto $\mathbb{N} \cup 0 \cup -n : n \in \mathbb{N}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}$.
- Al conjunto $-n : n \in \mathbb{N}$ lo llamaremos conjunto de los números enteros negativos y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}^-$.
- Al conjunto $\mathbb{N}$ también lo llamaremos conjunto de los números enteros positivos y lo representaremos con el símbolo $\mathbb{Z}^+$.

Observación. Los conjuntos $\mathbb{N}$, 0, $-n : n \in \mathbb{N}$ son disjuntos por pares.

Definición. Sea E un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, decimos que E está acotado:

- Superiormente si existe un número real m tal que $b \leq m, \forall b \in E$. En este caso decimos que E es cota superior de E.
- Inferiormente si existe un número real l tal que $l \leq b, \forall b \in E$. En este caso, decimos que l es cota inferior de E.
- Si existe un número real m tal que $|b| \leq m, \forall b \in E$. En este caso decimos que m es una cota de E.

Definición. Sea A un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales, acotado superiormente, decimos que un número real M es supremo de A si M satisface las siguientes condiciones:

- M es cota superior de A.
- Si K es una cota superior de A, entonces $M \leq K$, es decir, M es la cota superior más pequeña de A.

En este caso escribimos $M = \sup A$.

Definición. Sea A un subconjunto no vacío del conjunto de los números reales, acotado inferiormente, decimos que un número real L es ínfimo de A si L satisface las siguientes condiciones:

- L es cota inferior de A.
- Si K es una cota inferior de A, entonces $K \leq L$, es decir, L es la cota inferior más grande de A.

En este caso escribimos $M = \inf A$.

Lista de ejercicios 8 (LE8)

Falso o verdadero:

1. Si E es un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, entonces E es un conjunto acotado.

2. Si E es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, entonces E está acotado superiormente e Inferiormente.

Demuestre lo siguiente:

3. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene supremo, este es único.

4. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A tiene ínfimo, este es único.

5. Una cota superior M de un conjunto no vacío S de $\mathbb{R}$ es el supremo de S si y solo si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $s_\varepsilon \in S$ tal que $M - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Respuesta

1. Falso. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$, el cual es un subconjunto de $\mathbb{R}$, y es no vacío, pues $-1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$. Además, $b \leq 0, \forall b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$, por lo que el conjunto está acotado superiormente. Supongamos que el conjunto propuesto está acotado. Es decir, suponemos que $\exists m$ tal que $|b| \leq m, \forall b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$. Por (f) de LE4, $-m \leq b$ y, por transitividad, $-m \leq 0$, de donde sigue que $-m - 1 \leq -1$, pero $-1 < 0$, entonces $-m - 1 < 0$, lo que implica que $-m - 1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$, por lo que $|-m-1| \leq m$. Luego, notemos que $|-m-1| = -(-m-1)$, es decir, tenemos que $m + 1 \leq m$, pero de esto se concluye que $1 \leq 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto, aunque $\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^+$ está acotado superiormente, no está acotado.

2. Verdadero. Sea E un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Si E está acotado, entonces $\exists m$ tal que $|b| \leq m, \forall b \in E$. Por (f) de LE4, $-m \leq b \leq m$, por lo que el conjunto está acotado superiormente e inferiormente.

Demostración

3. Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de A. Como s_1 es una cota superior de A y s_2 es elemento supremo, entonces $s_2 \leq s_1$. Similarmente, $s_1 \leq s_2$. Por tanto, $s_1 = s_2$.

4. Supongamos que m_1 y m_2 son ínfimos de A. Como m_1 es una cota superior de A y m_2 es elemento ínfimo, entonces $m_1 \leq m_2$. Similarmente, $m_2 \leq m_1$. Por tanto, $m_1 = m_2$.

5. **i)** Sea M el supremo de S. Si s_ε es una cota superior del conjunto, tenemos que $M < s_\varepsilon$. Sea $@e = ejemplo$

Lista de Ejercicios # (LE#)

Sean a y b números reales, demuestre lo siguiente:

a) $0 \leq a^{2n} \, \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Si $0 \leq a$, entonces $0 \leq a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n < b^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) Si $0 \leq a < b$, entonces $a^n \leq ab^n < b^n \, \forall n \in \mathbb{N}$.

e) Si $0 < a < 1$, entonces $a^n < a \, \forall n \in \mathbb{N}$.

f) Si $1 < a$, entonces $a < a^n \, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración

a) Pendiente

b) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq a^1 \\ 0 &\leq a \end{aligned}$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$0 \leq a^k$$

iii) Probaremos a partir de (ii) que $0 \leq a^{k+1}$. En efecto, por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} 0 &\leq a^k \\ 0 \cdot a &\leq a^k \cdot a \\ 0 &\leq a^{k+1} \end{aligned}$$

c) Por inducción matemática.

i) Verificamos que se cumple para $n = 1$.

$$\begin{aligned} a^1 &< b^1 \\ a &< b \end{aligned}$$

ii) Suponemos que se cumple para $n = k$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Es decir, suponemos que

$$a^k < b^k$$

iii) Probaremos, a partir de (ii) que $a^{k+1} < b^{k+1}$. En efecto, por (c) de LE5, garantizamos que $0 \leq a^k$, lo que nos permite, por (a) de LE5, afirmar que

$$\begin{aligned} a^k \cdot a &< b^k \cdot b \\ a^{k+1} &< b^{k+1} \end{aligned}$$

d) Tenemos que $a < b$, como $0 \leq a < b$, sigue que $0 < b$, entonces $a \cdot b < b \cdot b$, osea $ab < b^2$. Luego, $a \cdot a \leq ab$. Finalmente, $a^2 \leq ab < b^2$.

e) Pendiente

f) Pendiente