UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD
UFR SEG
Microéconomie de l'incertain - M1 IFIM 2023/2024

Dossier : A la chasse aux pirates!

TERENCE SURENDRA Darvin (11712705)

Professeur:	VAUDAY Julien
Date:	10 Décembre 2023

Contexte

Nous sommes dans un univers de Pirates et nous suivons ici les aventures de Lebilan: le meilleur membre de la seule force qui lutte contre la piraterie: les Marines. Il est chargé de capturer le terrible capitaine de "l'equipage du Profit": Profirate, aussi appelé "L'Incertain". Grâce au réseau de la marine, il sait approximativement dans quelle région du monde Profirate se situe. Toutefois afin de le capturer à coup sûr, il prévoit de lui tendre une embuscade.

Pour atteindre son objectif, Lebilan a passé au peignes fins les déplacements et les actions de Profirate ainsi que de son équipage. Il a pu conclure qu'actuellement la richesse de Profirate et de son équipage s'élève à $\omega = 2000$ et la consommation mensuel nécéssaire à la survie de l'équipage s'élève à $C = 200$.
Afin d'augmenter leurs richesses et continué à survivre en mer, Profirate et son équipage peuvent soit à partir d'une carte aux trésors, partir en quête d'un potentiel gros butin. Soit grâce à des rumeurs locales, partir en quête d'un possible petit trésor et enfin, piller un village dont la richesse est aléatoire et qui peut être défendu par la Marine. Parfois les chasses aux trésors sont des pièges tendu par des membres de la Marines qui attendent en embuscades les pirates. Toutefois, les pirates de Profirate s'en sortent toujours car se sont des durs à cuire. Mais doivent prévoir des frais de réparation des dégâts et de soins.
Nous avons à travers le tableau suivant les gains possible:

Différents gains			
	Gros trésor	**Petit trésor**	**Pillage d'un village**
Gros gain	(1000, 0.5)	(1000, 0.125)	(1000, 0.25)
Petit gain	(200, 0.125)	(200, 0.625)	(200, 0.25)
Il n'y a pas de gain	(0, 0.125)	(0, 0.2)	(0, 0.25)
Face à Face avec la marine	(-500, 0.25)	(-500, 0.05)	(-500, 0.25)

Table 1: Tableau des différentes situations et gains.

Pour capturer Profirate, Lebilan a décidé d'anticiper la prochaine action de ce dernier. Il remarque qu'il peut admettre vrai les hypothèses suivantes:

- Les Pirates n'agissent qu'une fois par mois;
- Chaque mois, ils sont dans une nouvelle région;
- Dans chaque région, ils n'ont que les 3 choix énoncés plus haut (Chercher un gros ou petit trésor ou bien piller un village);

On considère donc les loteries suivantes qui modélisent la potentielle richesse de Profirate le mois prochain. On a :

$$\text{Gros trésor: } L_1 = \{(2800, 0.5); (2000, 0.125); (1800, 0.125); (1300, 0.25)\}$$
$$\text{Petit trésor: } L_2 = \{(2800, 0.125); (2000, 0.625); (1800, 0.2); (1300, 0.05)\}$$
$$\text{Pillage d'un village: } L_3 = \{(2800, 0.25); (2000, 0.25); (1800, 0.25); (1300, 0.25)\}$$

Quelle choix rapporte le plus?

Lebilan considère d'abord le cas où Profirate s'intéresse uniquement à l'espérance de gain de ses trois loteries : $\mathbb{E}[L_i], \forall i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\mathbb{E}[L_1] = 2800 \times 0.5 + 2000 \times 0.125 + 1800 \times 0.125 + 1300 \times 0.25 = 2200$$
$$\mathbb{E}[L_2] = 2800 \times 0.125 + 2000 \times 0.625 + 1800 \times 0.2 + 1300 \times 0.05 = 2025$$
$$\mathbb{E}[L_3] = 2800 \times 0.25 + 2000 \times 0.25 + 1800 \times 0.25 + 1300 \times 0.25 = 1975$$

Ainsi, si Profirate n'était intéressé que par le profit, il opterait pour la quête au gros trésor. Or Lebilan est conscient qu'il existe divers type d'agent. Il décide donc d'étudier les divers cas possible.

Espérance d'utilité

Lebilan considère les 3 fonctions d'utilités suivantes: x^2, $ln(x)$, $\sqrt{x}$.

Espérance d'utilitée: $\mathbb{E}[u(x)] = \sum u(x_i) \times p_i$			
$u(x)$	x^2	$ln(x)$	$\sqrt{x}$
Gros trésor	$\mathbb{E}[L_1^2] = 5247500$	$\mathbb{E}[\ln(L_1)] = 7.64827278437$	$\mathbb{E}[\sqrt{L_1}] = 46.364862102$
Petit trésor	$\mathbb{E}[L_2^2] = 4212500$	$\mathbb{E}[\ln(L_2)] = 7.60035024018$	$\mathbb{E}[\sqrt{L_2}] = 44.8532850084$
Pillage de village	$\mathbb{E}[L_3^2] = 4192500$	$\mathbb{E}[\ln(L_3)] = 7.55098466076$	$\mathbb{E}[\sqrt{L_3}] = 44.0295763493$

Il se penche ensuite sur les équivalents certains.

Equivalent certain

Nous retrouvons donc les valeurs suivantes:

Equivalent certain: $\bar{\omega} = u^{-1}(\mathbb{E}[u(x)])$			
$u(x)$	x^2	$ln(x)$	$\sqrt{x}$
Gros trésor	$2290, 74$	2097.02	2149.70
Petit trésor	$2052, 44$	1998.9	2011.82
Pillage de village	$2047, 56$	$1902, 62$	1938.60

Prime de risque

Enfin, il observe la prime de risque pour ces diverses fonction d'utilitée:

Prime de risque: $\pi = \mathbb{E}[X] - \bar{\omega}$			
$u(x)$	x^2	$ln(x)$	$\sqrt{x}$
Gros trésor	$-90, 74$	$102, 98$	$50, 30$
Petit trésor	$-27, 44$	$26, 1$	13.18
Pillage de village	$-72, 56$	$72, 38$	37.40

Grâce à ce tableau sur la prime de risque, Lebilan peut étudier le rapport que peut avoir Profirate avec le risque. Si sa fonction d'utilité est x^2, alors il serait Risquophile, si c'est $ln(x)$ ou $\sqrt{x}$ alors il est averse au risque.

Rapport complémentaire

Durant son enquête sur le comportement face au risque de Profirate, Lebilan reçoit un rapport complémentaire: Les choix sur les 12 derniers mois de Profirate et de l'incidence sur la richesse de l'équipage des Pirates du profit.

Mois	Richesse avant choix	Choix	Type de Butin
1	1600	Petit trésor	Petit gain
2	1600	Petit trésor	Face à la marine
3	900	Gros trésor	Pas de gain
4	700	Gros trésor	Gros gain
5	1500	Petit trésor	Petit gain
6	1500	Pillage d'un village	Face à la marine
7	800	Petit trésor	Pas de gain
8	600	Gros trésor	Gros gain
9	1400	Petit trésor	Petit gain
10	1400	Petit trésor	Petit gain
11	1400	Petit trésor	Pas de gain
12	1200	Gros trésor	Gros gain

Notre marine remarque que la richesse des pirates influe sur leurs choix face au risque. Il décide donc de modéliser une fonction $\pi(\omega)$, qui donne donc la prime de risque en fonction de la richesse. Il réexprime l'espérance de gain en fonction d'une richesse inconnu:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L_1] &= 800 \times 0.5 - 200 \times 0.125 - 700 \times 0.25 + \omega = \omega + 200 \\
\mathbb{E}[L_2] &= 800 \times 0.125 - 200 \times 0.2 - 700 \times 0.05 + \omega = \omega + 25 \\
\mathbb{E}[L_3] &= 800 \times 0.25 - 200 \times 0.25 - 700 \times 0.25 + \omega = \omega - 25
\end{aligned}$$

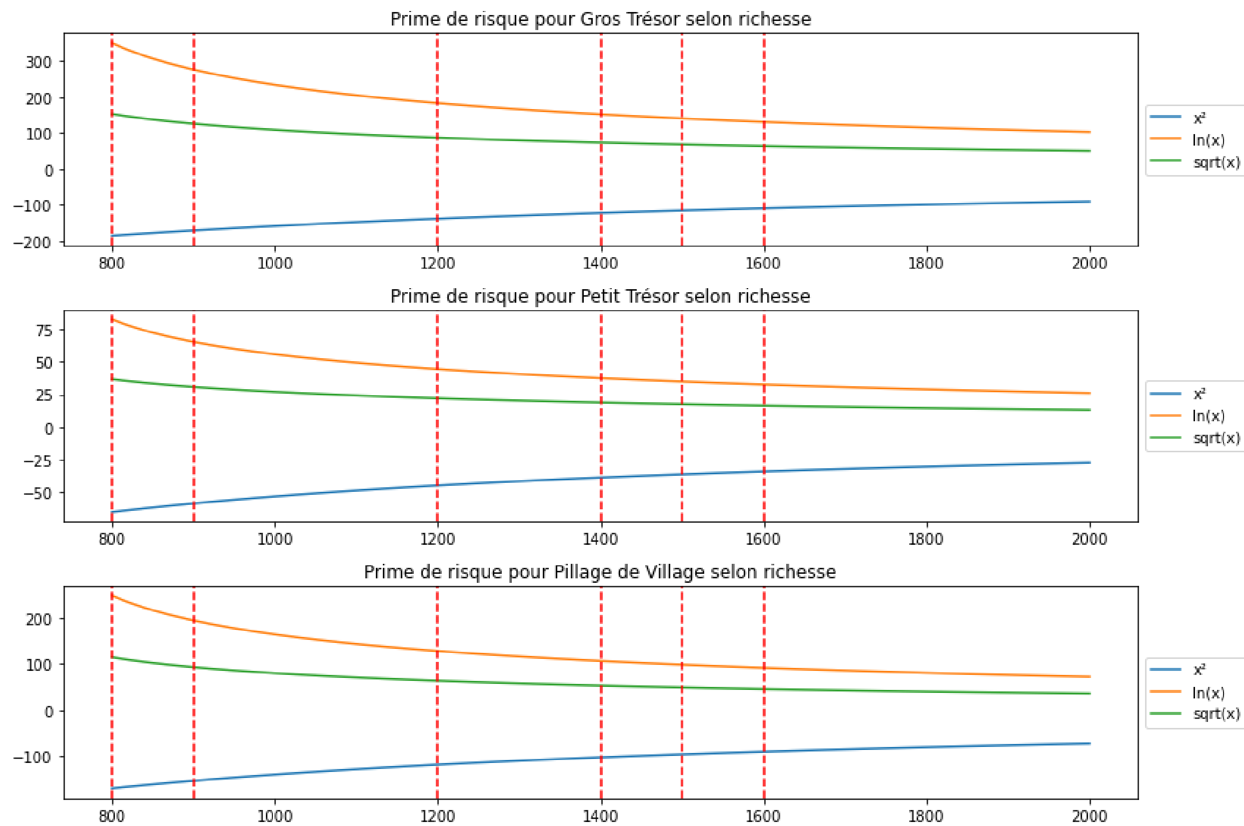
Puis, il donne l'espérance d'utilitée pour une richesse inconnu:

Espérance d'utilitée: $\mathbb{E}[u(x)] = \sum u(x_i) \times p_i$			
$u(x)$	x^2	$ln(x)$	$\sqrt{x}$
Gros trésor	$\frac{(\omega+800)^2}{2} + \frac{(\omega)^2}{8} + \frac{(\omega-200)^2}{8} + \frac{(\omega-700)^2}{4}$	$\frac{ln(\omega+800)}{2} + \frac{ln(\omega)}{8} + \frac{ln(\omega-200)}{8} + \frac{ln(\omega-700)}{4}$	$\frac{\sqrt{\omega+800}}{2} + \frac{\sqrt{\omega}}{8} + \frac{\sqrt{\omega-200}}{8} + \frac{\sqrt{\omega-700}}{4}$
Petit trésor	$\frac{(\omega+800)^2}{8} + \frac{(\omega)^2}{1,6} + \frac{(\omega-200)^2}{5} + \frac{(\omega-700)^2}{20}$	$\frac{ln(\omega+800)}{8} + \frac{ln(\omega)}{1,6} + \frac{ln(\omega-200)}{5} + \frac{ln(\omega-700)}{20}$	$\frac{\sqrt{\omega+800}}{8} + \frac{\sqrt{\omega}}{1,6} + \frac{\sqrt{\omega-200}}{5} + \frac{\sqrt{\omega-700}}{20}$
Pillage de village	$\frac{(\omega+800)^2}{4} + \frac{(\omega)^2}{4} + \frac{(\omega-200)^2}{4} + \frac{(\omega-700)^2}{4}$	$\frac{ln(\omega+800)}{4} + \frac{ln(\omega)}{4} + \frac{ln(\omega-200)}{4} + \frac{ln(\omega-700)}{4}$	$\frac{\sqrt{\omega+800}}{4} + \frac{\sqrt{\omega}}{4} + \frac{\sqrt{\omega-200}}{4} + \frac{\sqrt{\omega-700}}{4}$

Il se retrouva avec les équivalents certains suivants:

Equivalent certain: $\bar{\omega} = u^{-1}(\mathbb{E}[u(x)])$			
$u(x)$	x^2	$ln(x)$	$\sqrt{x}$
Gros trésor	$\sqrt{\frac{(\omega+800)^2}{2} + \frac{(\omega)^2}{8} + \frac{(\omega-200)^2}{8} + \frac{(\omega-700)^2}{4}}$	$\exp \frac{ln(\omega+800)}{2} + \frac{ln(\omega)}{8} + \frac{ln(\omega-200)}{8} + \frac{ln(\omega-700)}{4}$	$(\frac{\sqrt{\omega+800}}{2} + \frac{\sqrt{\omega}}{8} + \frac{\sqrt{\omega-200}}{8} + \frac{\sqrt{\omega-700}}{4})^2$
Petit trésor	$\sqrt{\frac{(\omega+800)^2}{8} + \frac{(\omega)^2}{1,6} + \frac{(\omega-200)^2}{5} + \frac{(\omega-700)^2}{20}}$	$\exp \frac{ln(\omega+800)}{8} + \frac{ln(\omega)}{1,6} + \frac{ln(\omega-200)}{5} + \frac{ln(\omega-700)}{20}$	$(\frac{\sqrt{\omega+800}}{8} + \frac{\sqrt{\omega}}{1,6} + \frac{\sqrt{\omega-200}}{5} + \frac{\sqrt{\omega-700}}{20})^2$
Pillage de village	$\sqrt{\frac{(\omega+800)^2}{4} + \frac{(\omega)^2}{4} + \frac{(\omega-200)^2}{4} + \frac{(\omega-700)^2}{4}}$	$\exp \frac{ln(\omega+800)}{4} + \frac{ln(\omega)}{4} + \frac{ln(\omega-200)}{4} + \frac{ln(\omega-700)}{4}$	$(\frac{\sqrt{\omega+800}}{4} + \frac{\sqrt{\omega}}{4} + \frac{\sqrt{\omega-200}}{4} + \frac{\sqrt{\omega-700}}{4})^2$

En rappelant que la formule de la prime de risque : $\pi_X(\omega) = \mathbb{E}_\omega[X] - u^{-1}(\mathbb{E}_\omega[u(X)])$.
Il réussi à obtenir le graphique suivant:



En reconsidérant ses précédents choix, Lebilan cherche à recontextualiser les choix de Profirate. En se concentrant sur le choix des petits trésors il remarque que la richesse ω est au moins égal à 1400 sauf dans un cas. Si Profirate était risquophile alors il aurait eu tendances à choisir entre le gros trésor et le pillage de village car l'écart à l'abscice est plus grand. Lebilan en déduit donc que notre pirate est moyennement averse au risque ou très averse au risque. Pour pouvoir conclure, il analyse désormais le comportement du pirate face aux pertes, il remarque que 2 fois sur 3, Profirate tente le gros trésor. Or s'il était trés averses au risques, il chercherait à s'en prémunir car la prime de risque $\pi > 200$. Ainsi, Lebilan conclut que Profirate est moyennement averse au risque.

Conclusion

Dorénavant, Lebilan connaît le type d'agent qu'est Profirate, un pirate moyennement averse au risque. Son equipage a actuellement une richesse $\omega = 2000$. Lebilan en déduit que profirate s'orientera à priori vers le choix dont la prime de risque est positive mais le plus proche de 0.

A partir de la position approximative de Profirate, Lebilan s'en va tendre une embuscade à l'endroit où il doit y avoir un ***petit trésor***.

Annexe

Motivation

Cette histoire ce base sur l'univers de One Piece, un manga de Eiichirō Oda. Profirate est un pirate à l'image de Luffy, qui malgrès la soif de liberté et d'aventure prend soin de ses compagnons. Une grosse prise de risque ne se fait que si l'intégrité de ses compagnons est menacée.