Université Sorbonne Paris Nord
UFR SEG
Probabilités appliquées à la finance - M1 IFIM 2023/2024

Etude des volatilités d'un call et de son sous-jacent

AARAB Ahmed (12311540)
HAMIDI Ihssane (12112916)
TERENCE SURENDRA Darvin (11712705)
XU Anthony (12000561)

Professeur:	DAVID Delphine
Date:	13 Octobre 2023

Dans ce rapport, nous allons faire une étude de la volatilité d'un call et son sous-jacent.

Calculs, Rendements et Variances

On considère un actif risqué ainsi qu'un call européen sur cet actif.

Le rendement espéré de l'actif est donné par :

$$m_S = E[\frac{S_1}{S}] = \frac{pS_h + (1-p)S_b}{S}$$

où **p** est la probabilité historique d'être dans l'état du monde **h**.

Calcul de la variance du rendement

On définit le rendement de la manière suivante : $\frac{S_1}{S}$. En utilisant la définition de la Variance, le rendement définit plus haut et le rendement espéré. Nous allons essayer de définir la variance du rendement.

Rappel :$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

Nous avons donc :

$$\mathbb{V}[\frac{S_1}{S}] = \mathbb{E}[(\frac{S_1}{S} - \mathbb{E}[\frac{S_1}{S}])^2]$$

On peux mettre en facteur $\frac{1}{S^2}$ par propriété de la Variance :

$$\frac{\mathbb{V}[S_1]}{S^2} = \frac{\mathbb{E}[(S_1 - \mathbb{E}[S_1])^2]}{S^2}$$

Utilisons désormais le fait que $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.
Donc,

$$\frac{\mathbb{V}[S_1]}{S^2} = \frac{\mathbb{E}[S_1^2] - \mathbb{E}[S_1]^2}{S^2}$$

On rappelle que l'évènement S_1 a comme possibilitée S_h ou S_b et que $\mathbb{P}(S_1 = S_h) = p$ et $\mathbb{P}(S_1 = S_b) = 1 - p$.

Dès lors nous avons l'expression suivante :

$$\frac{\mathbb{V}[S_1]}{S^2} = \frac{S_h^2\mathbb{P}(S_1 = S_h) + S_b^2\mathbb{P}(S_1 = S_b) - (S_h\mathbb{P}(S_1 = S_h) + S_b\mathbb{P}(S_1 = S_b))^2}{S^2}$$

On remplace les différentes probabilitées par leurs valeurs :

$$\frac{\mathbb{V}[S_1]}{S^2} = \frac{S_h^2 p + S_b^2(1-p) - (S_h p + S_b(1-p))^2}{S^2}$$

En développant le terme $(S_h p + S_b(1-p))^2 = S_h^2 p^2 + S_b^2(1-p)^2 + 2S_hS_bp(1-p)$ nous obtenons :

$$\frac{\mathbb{V}[S_1]}{S^2} = \frac{S_h^2 p + S_b^2(1-p) - (S_h^2 p^2 + S_b^2(1-p)^2 + 2S_hS_bp(1-p))}{S^2}$$

$$\frac{\mathbb{V}[S_1]}{S^2} = \frac{S_h^2 p + S_b^2(1-p) - S_h^2 p^2 - S_b^2(1-p)^2 - 2S_hS_bp(1-p)}{S^2}$$

Réorganisons l'égalité :

$$\frac{\mathbb{V}[S_1]}{S^2} = \frac{S_h^2 p - S_h^2 p^2 + S_b^2(1-p) - S_b^2(1-p)^2 - 2S_hS_bp(1-p)}{S^2}$$

Factorisons les termes en S_h^2 et S_b^2 :

$$\frac{\mathbb{V}[S_1]}{S^2} = \frac{S_h^2(1-p)p + S_b^2(1-p)(1-(1-p)) - 2S_hS_bp(1-p)}{S^2}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$\frac{\mathbb{V}[S_1]}{S^2} = \frac{S_h^2(1-p)p + S_b^2(1-p)p - 2S_hS_bp(1-p)}{S^2}$$

Factorisons désormais les termes en $p(1-p)$:

$$\frac{\mathbb{V}[S_1]}{S^2} = p(1-p)\frac{S_h^2 + S_b^2 - 2S_hS_b}{S^2}$$

On remarque l'identité remarquable suivante : $S_h^2 + S_b^2 - 2S_hS_b = (S_h - S_b)^2$.
On en déduit l'écriture suivante :

$$\frac{\mathbb{V}[S_1]}{S^2} = p(1-p)\frac{(S_h - S_b)^2}{S^2}$$

Donc :

$$\frac{\mathbb{V}[S_1]}{S^2} = p(1-p)\left(\frac{S_h - S_b}{S}\right)^2$$

Nous venons donc de montrer que :

$$\mathbb{V}[\frac{S_1}{S}] = \sigma_s^2 = p(1-p)\left(\frac{S_h - S_b}{S}\right)^2$$

Espérance et Variance du rendement d'un Call Européen

Après avoir calculer la variance du rendement de l'actif, nous allons désormais considérer un call Européen de prix C, et où C_1 est la variable aléatoire représentant le payoff à la date 1 donc $C_1 = C_h$ ou $C_1 = C_b$.
On définit le rendement du call Européen grâce à la variable aléatoire suivante : $\frac{C_1}{C}$. Nous allons désormais nous intéresser à l'espérance et la variance de cette variable aléatoire.

Espérance du rendement d'un Call Européen

Calculons $\mathbb{E}[\frac{C_1}{C}]$: C_1 étant la variable aléatoire, on va utiliser la linéarité de l'espérance.

$$\mathbb{E}[\frac{C_1}{C}] = \frac{\mathbb{E}[C_1]}{C}$$

Les issues possibles pour l'évènement C_1 sont C_h ou C_b, par ailleurs $\mathbb{P}(C_1 = C_h) = \mathbb{P}(S_1 = S_h) = p$ et $\mathbb{P}(C_1 = C_b) = \mathbb{P}(S_1 = S_b) = 1 - p$, d'où l'on a :

$$\mathbb{E}[\frac{C_1}{C}] = \frac{C_h\mathbb{P}(C_1 = C_h) + C_b\mathbb{P}(C_1 = C_b)}{C}$$

On remplace par les valeurs qu'on a des différentes probabilités :

$$\mathbb{E}[\frac{C_1}{C}] = \frac{C_hp + C_b(1-p)}{C}$$

Sachant que $m_C = \mathbb{E}[\frac{C_1}{C}]$. Nous avons donc :

$$m_C = \frac{C_hp + C_b(1-p)}{C}$$

Variance du rendement d'un Call Européen

Calculons désormais $\sigma_C^2 = \mathbb{V}[\frac{C_1}{C}]$. Nous avons déja rappelé la formule de la Variance plus tôt dans ce rapport. Nous avons donc :

$$\mathbb{V}[\frac{C_1}{C}] = \frac{\mathbb{V}[C_1]}{C^2}$$

En réappliquant les mêmes probabilités que pour l'espérance, nous nous retrouvons avec :

$$\mathbb{V}[\frac{C_1}{C}] = \frac{(C_h^2p + C_b^2(1-p)) - (C_hp + C_b(1-p))^2}{C^2}$$

Par analogie du calcul de la variance du rendement de l'actif nous avons :

$$\mathbb{V}[\frac{C_1}{C}] = \frac{p(1-p)(C_h - C_b)^2}{C^2}$$
$$\mathbb{V}[\frac{C_1}{C}] = p(1-p)\left(\frac{C_h - C_b}{C}\right)^2$$

En réutilisant la formulation de $\sigma_S^2 = p(1-p)\left(\frac{S_h - S_b}{S}\right)^2$, on remarque que $p(1-p) = \frac{\sigma_S^2}{\left(\frac{S_h - S_b}{S}\right)^2}$.
On remplace donc $p(1-p)$ de notre expression de σ_C^2 par la valeur suivante : $\sigma_S^2\left(\frac{S}{S_h - S_b}\right)^2$ Nous avons donc,

$$\mathbb{V}[\frac{C_1}{C}] = \sigma_S^2\left(\frac{S}{S_h - S_b}\right)^2\left(\frac{C_h - C_b}{C}\right)^2$$

Ou encore

$$\sigma_C^2 = \sigma_S^2\left(\frac{S}{S_h - S_b}\right)^2\left(\frac{C_h - C_b}{C}\right)^2$$

On peut donc exprimer σ_C de la manière suivante :

$$\sigma_C = \sigma_S\left(\frac{S}{C}\right)\left(\frac{C_h - C_b}{S_h - S_b}\right)$$

Comparaison des volatilités

Notre objectif est de montrer l'inégalité suivante :

La volatilité d'une option est plus grande que la volatilité de l'actif sous-jacent. Autrement dit

$$\boxed{\sigma_C \geq \sigma_S}$$

Une première inégalité équivalente

Nous souhaitons démontrer l'inégalité suivante :

$$CS_h - CS_b - (SC_h - SC_b) \leq 0$$

En tenant compte de la condition $\sigma_S \leq \sigma_C$, nous remplaçons donc σ_S et σ_C par leurs valeurs numériques.

$$\sqrt{p(1-p)}\ \left(\frac{C_h - C_b}{C}\right) \geq \sqrt{p(1-p)}\left(\frac{S_h - S_b}{S}\right)$$

Nous simplifions les racines carrées des deux côtés de l'inégalité :

$$\left(\frac{C_h - C_b}{C}\right) \geq \left(\frac{S_h - S_b}{S}\right)$$

Nous réarrangeons les termes pour regrouper les termes en C et S d'un côté de l'inégalité :

$$SC_h - SC_b \geq \ CS_h - CS_b$$

$$0 \geq \ CS_h - CS_b - (SC_h - SC_b)$$

On retrouve bien

$$CS_h - CS_b - (SC_h - SC_b) \leq 0$$

Équivalence à partir de la probabilité risque-neutre

En partant des expressions de la probabilité risque neutre du Call et de l'expression de π, nous allons essayer de trouver une inégalité équivalente à celle sur les volatilités :

$$(1+r)C = \pi C_h + (1-\pi)C_b$$

Tout d'abord, une observation simple nous permet de dire que les états du monde correspondants aux observations sur C et S ont la même probabilité π, nous permettant ainsi d'exprimer aussi S en fonction de π.

$$\pi = \frac{(1+r)S - S_b}{S_h - S_b}$$

$$(1+r)S = \pi S_h + (1-\pi)S_b$$

Ainsi en calculant $\frac{C}{S}$

$$\frac{C}{S} = \frac{\pi C_h + (1-\pi)C_b}{\pi S_h + (1-\pi)S_b}$$

Or d'après l'inéquation de la question précedente reformulée différemment

$$\frac{C}{S} \leq \frac{C_h - C_b}{S_h - S_b}$$

Ainsi

$$\frac{\pi C_h + (1-\pi)C_b}{\pi S_h + (1-\pi)S_b} \leq \frac{C_h - C_b}{S_h - S_b}$$

Toutes les valeurs sont positives car $S_h \geq S_b$ et $C_h \geq C_b$, le produit en croix ne change pas l'ordre de l'inéquation, on a par la suite :

$$(S_h - S_b)(\pi C_h + (1-\pi)C_b) \leq (C_h - C_b)(\pi S_h + (1-\pi)S_b)$$

Ensuite en développant puis en éliminant les termes qui s'annulent et en regroupant terme à terme :

$$\pi S_h C_h + S_h C_b - \pi S_h C_b - \pi S_b C_h - S_b C_b + \pi S_b C_b \leq \pi C_h S_h + C_h S_b - \pi C_h S_b - \pi C_b S_h - C_b S_b + \pi C_b S_b$$

Il reste que

$$S_h C_b - S_b C_h \leq 0$$

Dernière inégalité équivalente et conclusion sur les volatilités

Montrons que

$$S_hC_b - S_bC_h \leq 0$$

On sait que S_h et S_b sont des valeurs de l'actif, elles sont toutes deux positives car les actifs ne peuvent pas avoir de valeurs négatives.

Rappel : Formule de la valeur intrinsèque : $(C_1 - K)^+$
$C_h > 0$ car la valeur intrinsèque est positive, signifiant que le strike est inférieur à C_h.
$C_b \leq 0$ car la valeur intrinsèque est nulle, signifiant que le strike est supérieur à C_b.

Dans le cas $C_h > 0$, le détenteur du Call peut acheter l'actif à un prix inférieur à sa valeur actuelle sur le marché (car plus avantageux).
Dans le cas $C_b \leq 0$, il est plus avantageux d'acheter sur le marché que d'utiliser le Call.

$S_h > 0$ et $C_b \leq 0 => S_hC_b \leq 0$
$S_b > 0$ et $C_b > 0 => S_hC_b > 0$

$$=> \; S_hC_b - S_bC_h \leq 0$$

Par équivalence, on retrouve que

$$\sigma_S \leq \sigma_C$$

C'est à dire que la volatilité d'une option est plus grande que la volatilité de l'actif sous-jacent.

Application numérique

On a S = 100, S_h = 110, S_b = 50, K = 80 et r = 0.05.
On va d'abord calculer le prix du call à partir de la probabilité risque-neutre :
Rappel :

$$\pi = \frac{(1+r)*S - S_b}{S_h - S_b}$$

Dans notre cas :

$$\pi = \frac{(1+0.05)*100 - 50}{110 - 50}$$

C'est-à-dire que

$$\pi = \frac{11}{12}$$

Pour calculer le prix du call, on rappelle la formule suivante :

$$C = \pi * \frac{(S_h - K)^+}{1+r} + (1-\pi) * \frac{(S_b - K)^+}{1+r}$$

Donc,

$$C = \frac{11}{12} * \frac{(110-80)^+}{1+0.05} + (1 - \frac{11}{12}) * \frac{(50-80)^+}{1+0.05}$$

<=>

$$C = \frac{11}{12} * \frac{30}{1.05} = \frac{550}{21} \approx 26.19$$

Ensuite on va chercher les valeurs de C à la date 1, c'est-à-dire les valeurs de C_h et C_b.
Pour cela on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} CS_h - CS_b - SC_h + SC_b \leq 0 \\ S_hC_b - S_bC_h \leq 0 \end{cases}$$

<=>

$$\begin{cases} 26.19*110 - 26.19*50 - 100C_h + 100C_b \leq 0 \\ 110C_b * 50C_h \leq 0 \end{cases}$$

En résolvant la deuxième ligne, on trouve :

$$C_b \leq \frac{50C_h}{110}$$

Puis on l'introduit dans la première ligne, donnant :

$$26.19*110 - 26.19*50 - 100C_h + 100*\frac{50C_h}{110} \leq 0$$

On regroupe les C_h et on résout l'inégalité :

$$C_h \geq 28.809$$

On peut maintenant retrouver C_b :

$$\begin{cases} C_h \geq 28.809 \\ C_b \leq 13.095 \end{cases}$$

Maintenant on peut vérifier l'inégalité précédemment démontré, c'est-à-dire :

$$S_h C_b - S_b C_h \leq 0$$

avec

$$\begin{cases} C_h \geq 28.809 \\ C_b \leq 13.095 \end{cases}$$

Prenons $C_h = 28.809$ et $C_b = 13.095$, on aura :

$$110 * 13.095 - 50 * 28.809 = 0$$

Ce qui est bien inférieure ou égale à 0.
On a pu vérifier l'inégalité précédemment démontrée avec ces valeurs numériques.