Université Sorbonne Paris Nord
UFR SEG
Probabilités appliquées à la finance - M1 IFIM 2023/2024

Devoir 4 : Exemple de Stratégie

TERENCE SURENDRA Darvin (11712705)

Professeur:	DAVID Delphine
Date:	29 Octobre 2023

Le prix de l'actif sans risque est égal à 1 à toutes les dates ($r = 0$).
Pour l'actif risqué :

$$S_0^1 = S > 0, S_{n+1}^1 = S_n^1 U_{n+1}$$

Pour tout n, U_n est une variable aléatoire qui peut prendre b ou h avec $0 < b < 1 < h$. On considère la stratégie suivante :

$$\theta_1^0 = -S \text{ et } \theta_n^0 = \begin{cases} \theta_{n-1}^0 + hS_{n-2}^1\theta_{n-1}^1 & \text{si } U_{n-1} = h \\ \theta_{n-1}^0 - hS_{n-2}^1\theta_{n-1}^1 & \text{si } U_{n-1} = b \end{cases}$$

$$\theta_1^1 = 1 \text{ et } \theta_n^1 = \begin{cases} 0 & \text{si } U_{n-1} = h \\ (1 + \frac{h}{b})\theta_{n-1}^1 & \text{si } U_{n-1} = b \end{cases}$$

Calcul de $V_0(\theta)$

On cherche à déterminer la valeur initiale du portefeuille. Valeur qui est donnée par l'expression suivante :

$$V_0(\theta) = \sum_{j=0}^{d} \theta_1^j S_0^j$$

Nous avons ici $d = 1$ car nous avons seulement un actif risqué et un actif sans risque. Nous pouvons donc réecrire la formule de la manière suivante:

$$V_0(\theta) = \theta_1^0 S_0^0 + \theta_1^1 S_0^1$$

D'après l'énoncé nous avons $\theta_1^0 = -S$, $S_0^0 = 1$, $\theta_1^1 = 1$ et enfin $S_0^1 = S$. Nous nous retrouvons donc avec l'expression suivante :

$$\begin{aligned} V_0(\theta) &= -S \times 1 + 1 \times S \\ V_0(\theta) &= -S + S \\ V_0(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

La valeur du portefeuille à l'instant initial est nul. Toutefois on remarque qu'il posséde un actif risqué. Il s'est donc endetté à hauteur du prix d'un actif risqué au près du marché non risqué.

Premières évolutions du prix de l'actif risqué

Nous allons à présent représenter par un arbre les premières valeurs possibles de l'actif risqué.

$$\begin{array}{c} S_0^1 \\ \downarrow \\ S_1^1 \\ \downarrow \\ S_2^1 \end{array}$$

On rapelle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1}^1 = S_n^1 U_{n+1}$. On peut donc dire :

$$\begin{array}{c} S_0^1 \\ \downarrow \\ S_0^1 U_1 \\ \downarrow \\ S_1^1 U_2 \end{array}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \in \{h, b\}$. Dès lors, nous pouvons conclure que les 3 premières valeurs de l'actif peuvent être donné à partir de l'arbre suivant:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & S \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\ & Sh \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & Sb \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Sh^2 & & Shb & & Sbh & & Sb^2 \end{tikzcd}$$

Calcul de $V_1(\theta)$ en fonction des états de la nature

Nous avons précédement utilisé la formule $V_0(\theta) = \sum_{j=0}^{d} \theta_1^j S_0^j$ pour calculer la valeur initial du portefeuille. Toutefois, il existe une formule pour calculer pour temps $n \in \mathbb{N}^*$ qui est donné par l'expression suivante : $V_i(\theta) = \sum_{j=0}^{d} \theta_i^j S_i^j$. En utilisant cette formule, nous avons dans notre cas de figure:

$$V_1(\theta) = \sum_{j=0}^{1} \theta_1^j S_1^j$$
$$V_1(\theta) = \theta_1^0 S_1^0 + \theta_1^1 S_1^1$$

On rapelle que $\theta_1^0 = -S$, $S_1^0 = 1$, $\theta_1^1 = 1$ et $S_1^1 = SU_1$. Nous nous retrouvons donc avec l'expression suivante :

$$V_1(\theta) = -S + S \times U_1$$
$$V_1(\theta) = S(U_1 - 1)$$

Donc la valeur du portefeuille depend de si l'actif a gagné en valeur ou perdu.

Calcul de θ_2^0 et θ_2^1 en fonction des états de la nature

Le cas θ_2^0:

On va appliquer la définition de θ_2^0 :

$$\theta_2^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } U_1 = h \\ (1 + \frac{h}{b})\theta_1^1 & \text{si } U_1 = b \end{cases} \iff \theta_2^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } U_1 = h \\ (1 + \frac{h}{b}) & \text{si } U_1 = b \end{cases}$$

Le cas θ_2^1

On va appliquer la définition de θ_2^1 :

$$\theta_2^0 = \begin{cases} \theta_1^0 + hS_0^1\theta_1^1 & \text{si } U_1 = h \\ \theta_1^0 - hS_0^1\theta_1^1 & \text{si } U_1 = b \end{cases} \iff \theta_2^0 = \begin{cases} -S + hS & \text{si } U_1 = h \\ -S - hS & \text{si } U_1 = b \end{cases}$$

Portefeuille autofinançant entre les dates 1 et 2

Rappelons la définition d'une stratégie de gestion des actifs autofinançant:

$$\sum_{j=0}^{d} \theta_n^j S_n^j = \sum_{j=0}^{d} \theta_{n+1}^j S_n^j$$

Dans notre cas de figure nous allons faire l'observation entre les dates 1 et 2:

$$\sum_{j=0}^{1} \theta_1^j S_1^j = \sum_{j=0}^{1} \theta_2^j S_1^j \iff \theta_1^0 S_1^0 + \theta_1^1 S_1^1 = \theta_2^0 S_1^0 + \theta_2^1 S_1^1$$

On peut désormais utiliser les notations vu précedement:

$$
\begin{aligned}
&\theta_1^0 S_1^0 + \theta_1^1 S_1^1 = \theta_2^0 S_1^0 + \theta_2^1 S_1^1 \\
&-S + SU_1 = \begin{cases} -S + hS + 0 \times S \times U_1 & \text{si } U_1 = h \\ -S - hS + (1 + \frac{h}{b})Sb & \text{si } U_1 = b \end{cases} \\
&-S + SU_1 = \begin{cases} -S + hS & \text{si } U_1 = h \\ -S - hS + (Sb + Sh) & \text{si } U_1 = b \end{cases} \\
&-S + SU_1 = \begin{cases} -S + hS & \text{si } U_1 = h \\ -S + Sb & \text{si } U_1 = b \end{cases}
\end{aligned}
$$

On peut conclure que le portefeuille ainsi constitué est autofinançant entre dates 1 et 2.

Application numérique

Nous avons les valeurs suivantes : $S = 100$, $h = 1.1$, $b = 0.9$. Nous allons représenter via un arbre la valeur du portefeuille.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & V_0(\theta) \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "b"] & & & \\
 & & V_1(\theta) \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "b"] & & V_1(\theta) \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "b"] & & \\
 & V_2(\theta) & & V_2(\theta) \quad V_2(\theta) & & V_2(\theta) &
\end{tikzcd}
$$

Théoriquement, nous nous retrouvons avec l'arbre suivant:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dll, "h"'] \arrow[drr, "b"] & & \\
S(h-1) \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "b"] & & & & S(b-1) \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "b"] \\
-S + hS & -S + hS & & -S - hS + (1 + \frac{h}{b})Sbh & -S - hS + (1 + \frac{h}{b})Sb^2
\end{tikzcd}
$$

En remplaçant par nos valeurs numérique nous avons:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "b"] & & \\
 & 10 \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "b"] & & -10 \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "b"] & \\
10 & 10 & & 21 & -21
\end{tikzcd}
$$