Université Sorbonne Paris Nord
Institut Galilée
Projet S8 - MACS2 2022/2023

Devoir maison de calculs stochastiques

TERENCE SURENDRA Darvin (11712705)

Encadrant:	M. Lebovits
Date:	8 Mai 2023

Exercice 2

Le modèle de Cox Ros et Rubinstein est une version discrétisée du modèles de Back-Scholes, où il y a un seul actif risqué S, de prix S_n à l'instant n. Un actif sans risque S^0 (qu'on note au temps n , S_n^0 de rendement certain r. On a donc

$$S_n^0 = (1+r)^n$$

Il utilise des probabilités de hausse et de baisse pour calculer la valeur de l'option à chaque temps n.
Ce modèle suppose que le prix de l'actif sous-jacent suit une distribution binomiale au fil du temps. On fait les hypothèses suivantes sur l'évolution du cours de l'actif risqué: entre deux périodes consécutives, la variation relative des cours est soit a,soit b,avec $-1 < a < b$

$$S_n + 1 = \begin{cases} S_n(1+b) \\ S_n(1+a) \end{cases}$$

Voici un code ù l'utilisateur n'aura qu'à fournir les données demandées :

```python
import math
import numpy as np
from scipy.stats import norm

def european_option(S0, K, r, sigma, T, N, option='call'):
    dt = T/N
    u = np.exp(sigma*np.sqrt(dt))
    d = 1/u
    p = (np.exp(r*dt) - d) / (u - d)

    stock_price = S0 * u**(np.arange(N+1)) * d**(N-np.arange(N+1))

    if option == 'call':
        option_value = np.maximum(stock_price - K, 0)
    elif option == 'put':
        option_value = np.maximum(K - stock_price, 0)

    for i in range(N-1, -1, -1):
        option_value = np.exp(-r*dt) * (p*option_value[:-1] + (1-p)*option_value
        stock_price = stock_price[:-1] / u

    option_price = option_value[0]
    delta = (option_value[1] - option_value[0]) / (S0*u - S0*d)
    return option_price, delta

def option_hedge(S0, K, r, sigma, T, N, option='call'):
```

```
    option_price, delta = european_option(S0, K, r, sigma, T, N, option=option)
    hedge = delta * S0 - option_price
    return option_price, hedge


S0 = float(input("La valeur de S0"))
r = float(input("Le taux d'interet r"))
sigma = float("volatilite de l'actif risque")
K = float(input("Prix d'exercice de l'option europeenne"))
N = int(input("Nombre de periodes"))
```

Exercice 3

Partie 1

Nous sommes dans le contexte suivant:
Une agence de location de vélos électriques met en location des vélos pour 130€la journée.Les différents frais qu'elle a sont les frais d'exploitations à hauteur de 30€par vélo loué et de 20€de frais fixe sur chaque unité que l'agence possède. On considère X une variable aléatoire, qui désigne le nombre de vélos loués par l'entreprise un jour donné. Cette variables aléatoire est distribué de la manière suivante:

N	0	1	2	3	4
P(X=N)	0.1	0.15	0.3	0.25	0.2

Nous allons rechercher le stock optimal pour le loueur qui lui permet de maximiser son profit tout en minimisant le risque encouru.
Nous allons dans un premeir temps définir le Profit P_X en fonction du stock S sachant que X vélos sont loués.

$$P_X(S) = 130X - 30X - 20X$$
$$P_X(S) = 100X - 20S$$

On peut dorénavant nous concentré sur le profit moyen journalier en fonction du stock.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{X}}[P_X(S)] = \sum_{i=0}^{4} P_i(S) \cdot P(X = i)$$

On a donc le tableau de valeur suivant

S	0	1	2	3	4
$\mathbb{E}_{\mathbb{X}}[P_X(S)]$	0	70	125	150	150

Par ailleurs nous avons la formule suivante pour le risque:

$$\sigma = \sqrt{Var[P_X(S)]}$$

Nous avons le tableau suivant :

S	0	1	2	3	4
σ	0	30	65	99,5	123

Donc pour un même profit moyen journalier pour S = 3 ou 4, nous avons un risque amoindri lorsque S = 3.
Donc dans ce cas de figure, le stock maximant le profit du loueur et minimisant son risque est S = 3.
Nous sommes dorénavant dans un second cas où, les frais s'élèvent à 30 €par vélos loué et 20 €pour chaque unité présente dans le stock. La formule du profit change légèrement :

$$P_X(S) = 130X - 30X - 20(S - X)$$

Avec la même formule pour calculer le profit moyen journalier nous avons le tableau :

S	0	1	2	3	4
$\mathbb{E}_{\mathbb{X}}[P_X(S)]$	0	88	158	192	196

Et voici le tableau du risque:

S	0	1	2	3	4
σ	0	36	78,5	119	147,5

Cette fois-ci nous opterons pour S=4 car c'est le cas de figure qui maximise au mieux le stock, toutefois le risque est plus élevé que dans les autres cas.

Voici le code permettant de retrouver les résulats cités dans l'exercice 3.

```
import math

def profit(X,S):
    if X>S:
        X=S
    P = 0
    P = 100*X - 20*S
    return P

probas = [0.1, 0.15, 0.3, 0.25, 0.2]

esp_X = [0, 0, 0, 0, 0]

for i in range (5):
    for j in range(5):
        esp_X[i] = esp_X[i]+ profit(j,i) * probas[j]

var_X=[0 , 0 , 0 , 0 , 0]
```

```
for i in range (5):
    for j in range(5):
        var_X[i] = var_X[i]+ profit(j,i)**2 * probas[j]
    var_X[i] = var_X[i] - esp_X[i]**2

risque = [0 , 0 , 0 , 0 , 0]
for i in range (5):
    risque[i] = (var_X[i])**0.5
```

Partie 2

Il est nécessaire que dans ce cas de figure a¡r et 0 ¡ b ¡ r-a, car si a ¿r l'agence ne fait pas de bénéfice, et si b¡r-a n'est pas respecté nous sommes aussi dans ce cas de figure. Théorique nous avons la formule suivante :

$$\begin{aligned} P_X(S) &= rX - aX - bS \\ \mathbb{E}_{\mathbb{X}}[P_X(S)] &= r\mathbb{E}_{\mathbb{X}}[X] - a\mathbb{E}_{\mathbb{X}}[X] - b\mathbb{E}_{\mathbb{X}}[S] \\ \mathbb{E}_{\mathbb{X}}[P_X(S)] &= (r-a)\sum_{i=0}^{4} i \cdot P_i - bS \end{aligned}$$

Donc théoriquement nous avons cette formule :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{X}}[P_X(S)] = (r-a)(\sum_{i=1}^{4} i \cdot P_i) - bS$$

Puis pour le risque nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{Var_X[P_x(S)]} \\ \sigma &= \sqrt{\mathbb{E}_{\mathbb{X}}[P_X(S)^2] - \mathbb{E}_{\mathbb{X}}[P_X(S)]^2} \end{aligned}$$

Voici le code Python pour calculer ces différentes valeurs en fonction de $p0, p1, p2, p3, p4$:

```
import math
a = 30
b=20
r=130
def profit(X,S):
    if X>S:
        X=S
    P = 0
    P = r*X - b*S - a*X
    return P
```

```
p1 = float(input("saisissez p0"))
p2 = float(input("saisissez p1"))
p3 = float(input("saisissez p2"))
p4 = float(input("saisissez p3"))
p5 = float(input("saisissez p4"))
probas = [p1, p2, p3, p4, p5]

esp_X = [0, 0, 0, 0, 0]

for i in range (5):
    for j in range(5):
        esp_X[i] = esp_X[i]+ profit(j,i) * probas[j]

var_X=[0 , 0 , 0 , 0 , 0]

for i in range (5):
    for j in range(5):
        var_X[i] = var_X[i]+ profit(j,i)**2 * probas[j]
    var_X[i] = var_X[i] - esp_X[i]**2

risque = [0 , 0 , 0 , 0 , 0]
for i in range (5):
    risque[i] = (var_X[i])**0.5
```

Pour les deux exemples, nous allons considérer un premier cas où X est distribué uniformément:

N	0	1	2	3	4
P(X=N)	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

On a dès lors :

S	0	1	2	3	4
$\mathbb{E}_{\mathbb{X}}[P_X(S)]$	0	60	100	120	120

Et voici le tableau du risque:

S	0	1	2	3	4
σ	0	40	80	116	141

Puis en second cas :

N	0	1	2	3	4
P(X=N)	0	0.1	0.2	0.3	0.4

On a dès lors :

S	0	1	2	3	4
$\mathbb{E}_{\mathbb{X}}[P_X(S)]$	0	80	150	200	220

Et voici le tableau du risque:

S	0	1	2	3	4
σ	0	0	30	66	100