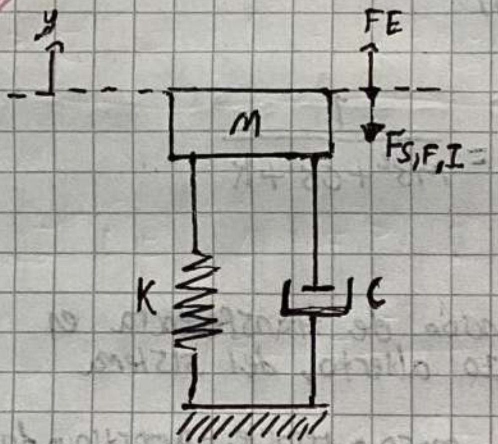
Parcial 2: Transformada de Fourier y Laplace S;S

① Función de transferencia en lazo abierto del sistema masa, resorte, amortiguador

R1=//



Tenemos

- M: masa
- K: Constante del resorte
- C: Coeficiente de amortiguamiento
- FE: Fuerza externa aplicada al sistema (entrada)
- Fs = fuerza resorte $= -Ky(t)$
- FI = fuerza inercial $= -my''(t)$
- FF = fuerza de fricción o amortiguamiento $-cy'(t)$

- sabemos que el desplazamiento es $y(t)$

→ la velocidad es $= y'(t)$
la derivada del desplazamiento

→ la acceleración es $= y''(t)$
la segunda derivada del desplazamiento

- haciendo la sumatoria de fuerzas que actuan sobre la masa tenemos que:

$$my''(t) + cy'(t) + Ky(t) = F_E(t)$$

esta es la ecuación diferencial de segundo orden que describe el sistema

- aplicamos transformada de laplace a la ecuación:

$$\mathcal{L}\{my''(t) + cy'(t) + Ky(t)\} = \mathcal{L}\{F_E(t)\}$$

$$\rightarrow m \cdot \mathcal{L}\{y''(t)\} + c \cdot \mathcal{L}\{y'(t)\} + K \cdot \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{F_E(t)\}$$

→ sabemos que: $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2 Y(s)$, $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$

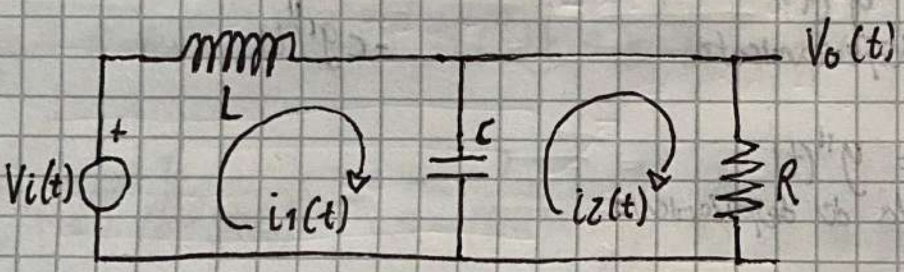
$$\rightarrow ms^2Y(s) + Cs\,Y(s) + K\,Y(s) = F_E(s)$$

factorizando $\Rightarrow Y(s)\left(ms^2 + Cs + K\right) = F_E(s)$

- función de transferencia: $G(s) = \dfrac{Y(s)}{F_E(s)} = \dfrac{1}{ms^2 + Cs + K}$

$$\rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{ms^2 + Cs + K}}$$ $\rightarrow$ función de transferencia en lazo abierto, del sistema masa - resorte - amortiguador

- Ahora halle el sistema equivalente del modelo masa, resorte, amortiguador a partir del cto:



- primero resolvemos por mallas para encontrar las ecuaciones

$\rightarrow$ malla 1: $-V_i(t) + V_L(t) + V_C(t) = 0$

$$\rightarrow V_i(t) = V_L(t) + V_C(t) \rightarrow \text{"} V_L(t) = L\frac{di_1(t)}{dt} \;//\; V_C(t) = \frac{\int i_C(t)dt}{C}$$

$$\rightarrow V_i(t) = L\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int (i_1(t) - i_2(t))dt$$

aplicamos laplace

$$V_i(s) = Ls\,I_1(s) + \frac{1}{Cs}\left(I_1(s) - I_2(s)\right) \quad 1$$

- $\mathcal{L}\{Y'(t)\} = sY(s)$
- $\mathcal{L}\left\{\int (f(t) - g(t))dt\right\} = \dfrac{\mathcal{L}\{f(t)\} - \mathcal{L}\{g(t)\}}{s}$

-> malla 2: $-V_C(t) + V_R(t) = 0$

$$\rightarrow -\frac{1}{C}\int (i_1(t) - i_2(t))dt + R\, i_2(t) = 0$$

aplicando laplace

$$-\frac{1}{Cs}\left(I_1(s) - I_2(s)\right) + R\, I_2(s) = 0$$

$$-\frac{I_1(s)}{Cs} + \frac{I_2(s)}{Cs} + R\, I_2(s) = 0$$

$$\rightarrow \frac{I_1(s)}{Cs} = \frac{I_2(s)}{Cs} + R\, I_2(s)$$

$$\rightarrow I_1(s) = \left(\frac{I_2(s)}{Cs} + R\, I_2(s)\right) Cs \rightarrow I_1(s) = I_2(s) + R I_2(s) Cs$$

$$I_1(s) = I_2(s)\cdot(1 + RCs) \quad 2$$

-> Remplazando 2 en 1:

$$Vi(s) = Ls\, I_1(s) + \frac{1}{Cs}\left(I_1(s) - I_2(s)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Vi(s) = Ls\left(I_2(s)\cdot(1 + RCs)\right) + \frac{1}{Cs}\left(I_2(s)(1 + RCs) - I_2(s)\right)$$

$$Vi(s) = Ls\, I_2(s) + LRCs^2\, I_2(s) + \frac{1}{Cs}\left(RCs I_2(s)\right)$$

Factorizando

$$Vi(s) = I_2(s)\left(Ls + LRCs^2 + \frac{RCs}{Cs}\right)$$

$$Vi(s) = I_2(s)\left(LRCs^2 + Ls + R\right) \Rightarrow \frac{Vi(s)}{I_2(s)} = LRCs^2 + Ls + R$$

→ sabemos que $i_2(t) = \dfrac{V_o(t)}{R}$ → $I_2(s) = \dfrac{V_o(s)}{R}$

Remplazando

$$\frac{V_i(s)}{\left(\frac{V_o(s)}{R}\right)} = LRCs^2 + Ls + R \Rightarrow \frac{V_i(s)\,R}{V_o(s)} = LRCs^2 + Ls + R$$

$$\frac{V_i(s)}{V_o(s)} = \frac{LRCs^2 + Ls + R}{R}$$

- Función de transferencia: $G(s) = \dfrac{V_o(s)}{V_i(s)} = \dfrac{R}{LRCs^2 + Ls + R}$

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{R}{LRCs^2 + Ls + R}}$$ → Función de transferencia para el circuito.

$$\parallel$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{Ls}{R} + 1}}$$

Realizando una analogía entre las variables de los 2 sistemas:

Mecanico	Electrico	Descripción
Fuerza de entrada $F(t)$	Voltaje de entrada $V_i(t)$	input
Desplazamiento $y(t)$	Voltaje de salida $V_o(t)$	output
masa (m)	producto (LC)	coef termino de 2^{do} orden
Amortiguamiento (c)	cociente (L/R)	coef termino de 1^{er} orden
constante resorte (k)	constante (1)	coef del termino de orden 0

con esa tabla podemos ver la equivalencia entre los 2 sistemas

- forma canonica del sistema de segundo orden en lazo abierto

$$G(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

para llevar la funcion de transferencia del sistema mecanico a la forma canonica dividimos numerador y denominador por m

$$G(s)_m = \frac{1}{ms^2 + cs + K} \Rightarrow \frac{1/m}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{K}{m}}$$

igualando terminos tenemos

- $\omega_n^2 = \frac{K}{m} \rightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}}$ -> frecuencia natural no amortiguada

- $2\xi\omega_n = \frac{c}{m} \rightarrow \xi = \frac{c}{m 2\omega_n} = \frac{c}{2m(\sqrt{K/m})} = \boxed{\frac{c}{2\sqrt{mK}}}$

factor de amortiguamiento relativo

- $K\omega_n^2 = 1/m \rightarrow K = 1/(m\omega_n^2)$

$$k = \frac{1}{m\left(\frac{K}{m}\right)} = \boxed{\frac{1}{K}} \text{ -> ganancia } K$$

la forma canonica del sistema queda asi:

$$G(s) = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{K} \frac{K/m}{s^2 + 2\left(\frac{c}{2\sqrt{mk}}\right)\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)s + \frac{K}{m}}$$

$$= \frac{1/m}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{K}{m}} = \underline{\frac{1}{ms^2 + cs + k}} \checkmark \rightarrow$$

- sistema del circuito

- $\omega_n^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow \boxed{\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

- $2\xi\omega_n = \frac{1}{CR} \rightarrow \xi = \frac{1}{CR(2\omega_n)} = \boxed{\frac{\sqrt{LC}}{2CR}}$

② Modulación y demodulación por amplitud en banda lateral única (SSB-AM) dominio del tiempo y dominio de la frecuencia

R2// La modulación en banda lateral única (SSB) es una técnica de modulación de amplitud en la que se transmite solo una de las 2 bandas laterales (superior o inferior) y se elimina la portadora (o se reduce significativamente), lo que permite:

- Reducir el ancho de banda necesario a la mitad
- Ahorrar potencia

a) Modulación SSB-AM (Dominio del tiempo):

- Una señal AM estándar se da por $s_{AM}(t) = [A_c + m(t)]\cos(2\pi f_c t)$, donde $m(t)$ es la señal de mensaje y f_c es la frecuencia portadora.
- La transformada de Hilbert es clave para SSB. La transformada de Hilbert de $m(t)$ se denota como $\hat{m}(t)$.
- Una señal SSB puede ser generada suprimiendo una de las bandas laterales. Por ejemplo, una señal de Banda lateral inferior (LSB) puede expresarse como:

$$s_{LSB}(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t) + \hat{m}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$$

- Y una señal de Banda lateral superior (USB) puede expresarse como:

$$s_{USB}(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$$

b) Modulación SSB-AM (Dominio de la Frecuencia utilizando la T. Fourier)

- Sea $M(f)$ la transformada de Fourier de $m(t)$
- La transformada de Fourier de $\hat{m}(t)$ es $-j\,\mathrm{sgn}(f)M(f)$, donde $\mathrm{Sgn}(f)$ es la función signo.

$$\mathrm{Sgn}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f > 0 \\ 0 & \text{si } f = 0 \\ -1 & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

- La Transformada de Fourier de $\cos(2\pi f_c t)$ es: $\frac{1}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]$
- La Transformada de Fourier de $sen(2\pi f_c t)$ es $\frac{1}{2j}[\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)]$
- Utilizando las propiedades de desplazamiento de frecuencia y convolución, la Transformada de Fourier de $S_{LSB}(t)$ sera distinta de cero solo para $f<f_c$ y $f>-f_c$ (para la banda lateral inferior).
- De manera similar, la Transformada de fourier de $S_{USB}(t)$ sera distinta de cero solo para $f>f_c$ y $f<-f_c$ (para la banda lateral superior).
- Especificamente para USB:

$$S_{USB}(f) = \frac{1}{2}[M(f-f_c)(1+sgn(f-f_c))+M(f+f_c)(1-sgn(f+f_c))]$$

Esto efectivamente pasa solo los componentes de frecuencia positivos a la derecha de f_c y los componentes de frecuencia negativos a la izquierda de $-f_c$.

c) Demodulación SSB-AM (Demulación Coherente):

- La señal SSB recibida (ej. $S_{USB}(t)$) se multiplica por una señal portadora generada localmente, $\cos(2\pi f_c t)$:

$\rightarrow S_{demod}(t) = S_{USB}(t)\cos(2\pi f_c t)$ $\rightarrow S_{demod}(t) = [m(t)\cos(\alpha t) - \hat{m}(t)sen(\alpha t)]\cos(\alpha t)$

$\rightarrow S_{demod}(t) = m(t)\cos^2(2\pi f_c t) - \hat{m}(t)sen(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t)$

usando identidades trigonometricas ($\cos^2 x = (1+\cos(2x))/2$ y $sen x \cos x = \frac{sen(2x)}{2}$)

$\rightarrow S_{demod}(t) = m(t)(1+\cos(4\pi f_c t))/2 - \hat{m}(t)(sen(4\pi f_c t))/2$

$\rightarrow S_{demod}(t) = m(t)/2 + (m(t)\cos(4\pi f_c t))/2 - (\hat{m}(t)sen(4\pi f_c t))/2$

- El termino $m(t)/2$ es la señal de mensaje deseada. Los otros terminos están al doble de la frecuencia portadora ($2f_c$) y pueden ser eliminados por un filtro pasa-bajos

d) Demodulación SSB-AM (Dominio de la frecuencia):

- La multiplicación por $\cos(2\pi f_c t)$ en el dominio del tiempo corresponde a la convolucion con $[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)]/2$ en el dominio de la frecuencia
- Esto desplaza el espectro de la señal SSB para que esté centrado alrededor de DC y $2f_c$, un filtro pasa-bajos luego aisla la señal de mensaje original.